

Abhandlungen  
der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Mathematisch-naturwissenschaftliche Abteilung

Neue Folge. Heft 38

1936

---

Regelmäßige Anordnungen  
gleicher sich berührender Kreise  
in der Ebene, auf der Kugel und  
auf der Pseudosphäre

von

Sebastian Finsterwalder

in München

Mit 119 Abbildungen

Vorgelegt in der Sitzung vom 4. April 1936

---

München 1936

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei  
in Nördlingen



# INHALT

Vorwort . . . . .	V
Einleitung . . . . .	1
I. Regelmäßige Kreisanordnungen in der Ebene . . . . .	6
1. Ring- und streifenförmige Anordnungen . . . . .	6
2. Netzförmige Anordnungen in der Ebene auf Grund des gleichschenkligen Grunddreiecks . . . . .	7
3. Netzförmige Kreisanordnungen in der Ebene auf Grund des ungleichschenkligen Grunddreiecks . . . . .	11
II. Die regelmäßigen Kreisanordnungen auf der Kugel . . . . .	16
1. Die ring- und streifenförmigen Anordnungen auf der Kugel . . . . .	17
2. Netzförmige Kreisanordnungen auf der Kugel . . . . .	18
3. Das gleichschenklige Grunddreieck der Tetraedergruppe . . . . .	19
4. Das Grunddreieck der Würfel-Oktaedergruppe . . . . .	21
5. Das Grunddreieck der Dodekaeder-Ikosaedergruppe . . . . .	24
III. Regelmäßige Kreisanordnungen auf der Pseudosphäre . . . . .	27
1. Das kleinste gleichschenklige Grunddreieck der Pseudosphäre . . . . .	29
2. Das halbierte gleichschenklige Grunddreieck . . . . .	31
3. Das kleinste ungleichschenklige Grunddreieck der Pseudosphäre . . . . .	33
4. Das Grunddreieck mit zwei Nullwinkeln auf der Pseudosphäre . . . . .	37
5. Das kleinste ungleichschenklige Grunddreieck mit einem Nullwinkel auf der Pseudosphäre . . . . .	39
Schlußwort . . . . .	42

## VORWORT.

Diese Untersuchung entstand im Kriegsjahr 1917, als die Hochschulen entvölkert waren und die durch die Ereignisse überspannten Nerven nach einer Ablenkung suchten. Ein ungewöhnlich begabter und zeichnungsfreudiger Schüler, Herr Josef Geckeler,<sup>1</sup> der als kriegsuntauglich die Hochschule besuchte und Mathematik studierte, entwarf damals unter meiner Leitung den größeren Teil der Abbildungen, die nun zur Veröffentlichung gelangen. Die Hochflut des Unterrichtsbetriebes, die nach dem Kriege einsetzte, und die mancherlei neuauftauchenden Anregungen drängten die Sache in den Hintergrund. Ein Anfang 1923<sup>2</sup> im Anschluß an einen Akademie Vortrag unternommener Veröffentlichungsversuch scheiterte an den Kosten der Bilder in der damaligen Inflationszeit. Erst nach Aufgabe meiner Vorlesungstätigkeit fand ich die Muße, die lange ruhende Untersuchung von neuem aufzunehmen und dazu vor allem die nötige Vervollständigung der Abbildungen ins Werk zu setzen. Diese gestaltete sich umfangreicher und schwieriger als erwartet, einesteils weil eine größere Zahl von Abbildungen zum leichteren Verständnis, namentlich der Übergangsformen nützlich erschien, andernteils weil meine geschwächte Sehkraft nicht jene Vollkommenheit der Darstellung erlaubte, die mein damals jugendlicher Schüler erstrebte und erreichte. So möge der gütige Betrachter der Bilder manchen zittrigen Strich und unrunder Kreis mit in Kauf nehmen. Die Arbeit steht trotz der Überfülle von Abbildungen durchaus auf mathematischen Füßen und will als solche bewertet werden. Ihre anschauliche Grundlage bewirkt aber, daß die Ergebnisse einen eigenartigen Reiz bieten, der gerade den mathematischen Laien anspricht und dem ich auch bei ihrer Bearbeitung erlegen bin. Die Begriffe von Reihung und Spiegelung, die bei den Urformen der Kunstbetätigung eine ausschlaggebende Rolle spielen, bewähren ihren Zierwert auch in der Häufung und Verallgemeinerung, wie sie den Abbildungen zugrunde liegen. Sie scheinen mir klar darauf hinzudeuten, daß ein inneres, vom Wesen des Dargestellten und des Darstellers unabhängiges Gesetz dem Wesen der Kunst nicht widerspricht, vielmehr zur Hebung ihrer Ausdrucksmöglichkeit dient.

---

<sup>1</sup> Herr Geckeler hat später mit einer Preisarbeit an der Münchener technischen Hochschule promoviert und sich durch bedeutende Leistungen in Photogrammetrie, Strömungslehre, Elastizitätstheorie und Mechanik hervorgetan. Er ist gegenwärtig in der Leitung des Anschützschen Kreiselkompaßwerkes in Kiel. Ich freue mich, daß nun seine Jugendleistung, wenn auch verspätet, zur Veröffentlichung kommt. Die von ihm gezeichneten Abbildungen tragen den Buchstaben „G“ neben der Nummer.

<sup>2</sup> Sitzungsber. der math.-phys. Klasse der bayer. Akad. der Wiss. 1923 S. 1\*.

REGELMÄSSIGE ANORDNUNGEN  
GLEICHER, SICH BERÜHRENDER KREISE IN DER EBENE,  
AUF DER KUGEL UND AUF DER PSEUDOSPHERE.<sup>1</sup>

EINLEITUNG.

Unter einer regelmäßigen Anordnung von gleichen Dingen verstehen wir hier eine solche, bei welcher ein beliebig herausgegriffenes Einzelding zu allen übrigen gleich liegt. Der Begriff der Regelmäßigkeit ist also dabei aufs äußerste eingeschränkt und deckt sich mit dem der Automorphie. Auf eine endliche Anzahl von gleichen Kreisen angewandt führt er in der Ebene und auf der Pseudosphäre zu einer ringförmigen Anordnung, wobei die Kreismittelpunkte die Ecken eines regelmäßigen  $n$ -Eckes bilden. Bei einer geradlinigen Anordnung, die im üblichen Sinne auch als regelmäßig gelten könnte, liegen die Endkreise wesentlich verschieden, sie gilt also in unserem Sinne nicht als regelmäßig. Auf der Kugel dagegen ist, wenn die Anzahl der Kreise passend (4, 6, 8, 12, 20) gewählt ist, eine in unserem engeren Sinne regelmäßige Anordnung auch möglich, wenn die Mittelpunkte die Ecken eines Platonschen regelmäßigen Vielflachs bilden. Für beliebige Anzahlen gibt es dagegen auch auf der Kugel nur ringförmige Anordnungen. Daß die Kreise sich bei unseren Anordnungen berühren sollen, ist weit weniger wichtig. Durch Veränderung des gemeinsamen Halbmessers ließe sich das immer erreichen. Diese Einschränkung dient also mehr der Übersichtlichkeit. Angesichts der in der Ebene und auf der Pseudosphäre einzigen regelmäßigen Anordnung einer endlichen, wenn auch noch so großen Zahl von sich berührenden Kreisen erscheint es nun höchst merkwürdig, daß es bei der Steigerung der Anzahl ins Unendliche eine fast unübersehbare Mannigfaltigkeit von solchen regelmäßigen Anordnungen gibt, deren Aufsuchung, Beschreibung und Darstellung diese Abhandlung gewidmet ist. Dabei stellen sich höchst anziehende Ähnlichkeiten, aber auch tiefgreifende Unterschiede heraus, je nachdem die Kreise in der Ebene, auf der Kugel oder auf der Pseudosphäre liegend gedacht sind. In der Ebene, in der alle Figuren einer beliebigen Vergrößerung oder Verkleinerung fähig sind, spielt der Halbmesser der Anordnungskreise keine Rolle, man kann also alle Anordnungen aus gleich großen Kreisen aufbauen. Auf der Kugel und der Pseudosphäre ist dagegen das Verhältnis dieses Halbmessers zu dem der Kugel oder der entsprechenden Größe auf der Pseudosphäre sehr wesentlich. Wollte man hier die Kreisanordnungen alle aus gleich großen Elementen aufbauen, so müßte man den Kugelhalbmesser für jede Anordnung ändern. Um das zu vermeiden, baut man besser alle Anordnungen auf derselben Kugel oder Pseudosphäre mit Kreisen passenden Halbmessers auf, wobei allerdings dann beim Übergang von einer Anordnung zu einer andern nicht nur die gegenseitige Lage der Kreismittelpunkte, sondern auch die Größe der Kreise wechseln muß. Die Aufsuchung der regelmäßigen Kreisanordnungen erfolgt auf dreierlei Art. Zu-

---

<sup>1</sup> Ich habe es nach längerem Schwanken nicht gewagt, diesen Begriff, nämlich das singularitätenfreie Kontinuum konstanter negativer Krümmung, durch die deutsche Bezeichnung „Auchkugel“ wiederzugeben.

erst werden die in gewissem Sinne selbstverständlichen ringförmigen und geradlinig gestalteten aufgezählt. Es folgen dann die netzförmigen, die auf folgende Weise gefunden werden: Man betrachtet die rechtwinkligen Dreiecke, durch deren deckungsgleiche oder spiegelgleiche Wiederholung die Ebene oder Kugel lückenlos überdeckt werden kann. Von einem solchen Dreieck (Grunddreieck) ausgehend, entstehen die spiegelgleichen Wiederholungen durch Spiegelung an dessen Seiten und die deckungsgleichen durch Drehung um die Ecken. Voraussetzung ist dabei, daß die Winkel des Grunddreiecks ganzzahlige Teile des gestreckten Winkels  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4} \dots\right)$  sind. Mit dem Grunddreieck werden nun auf 8 verschiedene Weisen Kreisbogen oder Kreise so verbunden, daß sie sich bei den Wiederholungen des Dreiecks zu ganzen Kreisen ergänzen, die sich außerdem gegenseitig berühren. Ich habe folgende Verbindungen gefunden, die diesen Bedingungen genügen und durch Buchstaben gekennzeichnet werden sollen, wobei ein ungleichseitiges rechtwinkliges Grunddreieck vorausgesetzt sein soll (Abb. 1). Bei den ersten sieben ergibt sich die

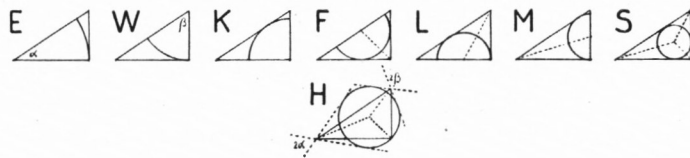


Abb. 1.

Erfüllung dieser Bedingungen aus unmittelbarer Anschauung. Es treten Kreise und Ringe von Kreisen mit den Ecken der Dreiecke als Mittelpunkten auf, die sich berührend aneinanderschließen oder auch durch gemeinsame Kreise miteinander in Verbindung stehen. Bei gleichschenkligen Grunddreiecken decken sich die *E*- und *W*-Anordnung sowie die *L*- und *M*-Anordnung. Eine Besonderheit bietet die *H*-Verbindung. Der Kreis geht durch die rechtwinklige Ecke des Grunddreiecks und ist im übrigen so bestimmt, daß die von einer der spitzen Ecken ausgehenden Tangenten an ihn jeweils den doppelten Dreieckswinkel an jener Ecke einschließen. Die zur *H*-Verbindung gehörige Kreisanordnung wird von den Kreisen erzeugt, die ausschließlich zu den deckungsgleichen (nicht auch spiegelgleichen) Wiederholungen des Grunddreiecks gehören. Die spiegelgleichen Wiederholungen liefern für sich eine zweite zur ersten spiegelgleiche Kreisanordnung. Jede einzelne der beiden so erzeugten Kreisanordnungen hat im allgemeinen keine Spiegelachse, außer wenn das Grunddreieck gleichschenklige ist. Die Auffindung des *H*-Kreises zu einem gegebenen Grunddreieck mit den Winkeln  $\alpha, \beta, 90^\circ$  ist einfach. Denkt man sich den Kreis mit dem Halbmesser  $r$  gefunden, so sieht man alsbald, daß sein Mittelpunkt – im Falle eines ebenen Grunddreiecks – die Abstände  $r : \sin \alpha, r : \sin \beta$  und  $r$  von den Ecken dieses Grunddreiecks hat. Das Verhältnis dieser Abstände  $\text{cosec } \alpha : \text{cosec } \beta : 1$  ist also durch die Form des Grunddreiecks gegeben und der Mittelpunkt kann hieraus als Schnitt zweier Kreise gefunden werden. Auf der Kugel und der Pseudosphäre verhalten sich die Sinus, bzw. die hyperbolischen Sinus jener Abstände, wie  $\text{cosec } \alpha : \text{cosec } \beta : 1$ . Von den beiden möglichen Lösungen ist nur jene brauchbar, deren Mittelpunkt in das Innere des Grunddreiecks fällt.

Die in vorstehender Weise aufgebauten netzförmigen Anordnungen von Kreisen, deren Anzahl das Achtfache der Zahl der möglichen Grunddreiecke beträgt, sind aber keineswegs die einzigen ihrer Art. Eine Anzahl unter ihnen ist noch beweglich, und zwar in dem Sinne beweglich, daß sie zu jedem Zeitpunkt die Eigenschaft der Regelmäßigkeit im engeren Sinne behalten und damit zu einer einparametrischen Schar von regelmäßigen Kreis-anordnungen Veranlassung geben. Diese Bewegung führt immer eine der vorstehend gekennzeichneten Anordnungen in eine andere über, wobei wir den Sinn der Bewegung bevorzugen, bei dem die Kreisordnung enger wird. Innerhalb der Bewegung lassen sich Übergangsformen unterscheiden, welche die stetig aufeinanderfolgenden Anordnungen trennen und dadurch gekennzeichnet sind, daß Ringe von Kreisen regelmäßig verteilte Abplattungen erfahren, die dann weiterhin in Einbuchtungen übergehen. Bevor dies näher auseinandergesetzt wird, ist noch etwas über die Füllkreise zu sagen. Die durch die Buchstaben *E*, *W*, *K*, *F*, *L*, *M* und *H* hervorgehobenen Anordnungen lassen sich in Ringe von Kreisen auflösen, die selber je eine regelmäßige Anordnung einer meist endlichen Zahl sich

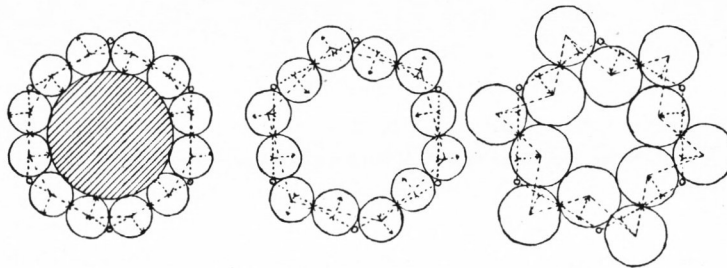


Abb. 2.

berührender Kreise darstellen und einen alle Kreise des Ringes gleichzeitig berührenden Kreis, der im Innern des Ringes gelegen ist, zulassen. Ein solcher Kreis soll Füllkreis genannt werden. Er gehört nicht zur Kreisordnung selbst, ist aber sehr geeignet, den Aufbau der Anordnung aus Ringen zu veranschaulichen. Die Mittelpunkte dieser Füllkreise fallen mit den Ecken der Wiederholungen des Grunddreieckes zusammen, sie sind in den Bildern der Anordnungen immer dargestellt, wenn die Anzahl der Kreise des betreffenden Ringes drei überschreitet, und zum Unterschied von den Anordnungskreisen, die immer weiß bleiben, durch Schraffen hervorgehoben. Bei der Abänderung einer durch Füllkreise ausgezeichneten Kreisordnung werden die regelmäßigen Ringe verformt und die Füllkreise fallen wenigstens zum Teil fort. Eine solche Verformung soll an einem einfachen Beispiel der Ebene auseinandergesetzt werden, wobei aber, um den Anschluß an Kugel und Pseudosphäre leichter zu gewinnen, das Festbleiben der Ecken der Grunddreiecke verbunden mit der Veränderung des Halbmessers der Anordnungskreise bei der Verformung vorausgesetzt werden soll.

Wir gehen von einem Grunddreieck mit den Winkeln  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  aus, dessen 12malige deckungs- und spiegelgleiche Wiederholung ein regelmäßiges Sechseck erfüllt. Dem Grunddreieck wird der mit *M* bezeichnete Kreis verbunden, der dann in der zwölfmaligen Wiederholung zu einem regelmäßigen Zwölferring mit Füllkreis führt (Abb. 2). Die Seitenmitten des Sechseckes sind Berührungspunkte zweier aufeinanderfolgender Kreise des Ringes und

bleiben bei der Verformung als solche erhalten. Diese geht in der Weise vor sich, daß je zwei Kreise in der Nachbarschaft einer Ecke des Sechseckes sich um diese Ecke im gleichen Sinn um den gleichen Winkel drehen und dabei ihren Halbmesser so vergrößern, daß die zwei Paare, die zu benachbarten Ecken gehören, sich wieder in den Seiten-mitten des Sechseckes berühren. Ist  $r$  der Halbmesser eines Kreises vor und  $r'$  nach der Verformung, so ist der Abstand eines einer Ecke benachbarten Kreises von dieser gleich  $r: \sin 60^\circ$  vor und  $r': \sin 60^\circ$  nach der Verformung. Die halbe Sechseckseite bleibt wie das ganze Sechseck ihrer Länge nach gleich  $r + r: \sin 60^\circ$  erhalten. Sie bildet mit den Längen  $r'$  und  $r': \sin 60^\circ$  ein Dreieck, das in der Ecke des Sechsecks den Drehwinkel enthält. Die veränderliche Ecke des letzteren Dreieckes ist Mittelpunkt eines Anordnungskreises, dessen Abstände von den beiden festen Punkten in dem konstanten Verhältnis  $r': (r': \sin 60^\circ)$  stehen und der bei Veränderung der Anordnung selber einen Kreis beschreibt. Am Schluß der Verformung treten die eingeknickten Anordnungskreise zu einem Sechsering zusammen, während je zwei von ihnen mit einem ausgeknickten Anordnungsring einen Dreiering bilden. Von letzteren gibt es dann sechs Stück, die von den Anordnungskreisen des ursprünglichen Zwölferrings gebildet werden, wobei zu beachten ist, daß jeder der eingeknickten Anordnungskreise in zwei verschiedenen Dreieringen erscheint. Es ist noch hervorzuheben, daß diese Verformung nicht den Einzelring für sich im strengen Sinne regelmäßig verändert, sondern nur im Zusammenhang mit den übrigen Ringen der netzförmigen Anordnung.

Nach dem gleichen Schema geht die Verformung eines beliebigen regelmäßigen Ringes von  $2n$  Anordnungskreisen in der Ebene vor sich. Beim Übergang zur Kugel oder Pseudosphäre ändert sich nur der Charakter der Wege, welche die Mittelpunkte Anordnungskreise bei festgehaltenen Grunddreiecken zurücklegen, indem nämlich bei den Lagen dieser Mittelpunkte nicht mehr das einfache Entfernungsverhältnis von zwei festen Ecken unveränderlich ist, sondern auf der Kugel das Verhältnis der Sinus dieser Entfernungen und auf der Pseudosphäre das Verhältnis der hyperbolischen Sinus derselben. Die Wege sind dann nicht mehr Kreise, sondern allgemeinere Kurven zweiter Ordnung. Es sind noch andere Verformungsarten der regelmäßigen Ringe möglich, auf die bei der Aufzählung eingegangen wird.

Ehe wir zur Aufzählung der Anordnungen schreiten, sei noch auf einen bedeutungsvollen Unterschied zwischen Ebene, Kugel und Pseudosphäre hingewiesen, der sich in den Formeln für Kreisumfang  $U$  und Kreisinhalt  $I$ , ausgedrückt durch den Halbmesser  $r$  und die Krümmungskonstante  $k$ , geltend macht. Es ist

$$\text{in der Ebene: } U = 2r\pi, \quad I = r^2\pi;$$

$$\text{auf der Kugel: } U = 2k\pi \sin \frac{r}{k}, \quad I = 2k^2\pi \left(1 - \cos \frac{r}{k}\right);$$

$$\text{auf der Pseudosphäre: } U = 2k\pi \operatorname{Cin} \frac{r}{k}, \quad I = 2k^2\pi \left(\operatorname{Cof} \frac{r}{k} - 1\right).$$

Wird die Beziehung zwischen  $U$  und  $r$ , bzw.  $I$  und  $r$ , in einem Schaubild (Abb. 3) dargestellt, so ergibt sich ohne weiteres, um wieviel umfangreicher die Pseudosphäre wie die Ebene und diese wieder wie die Kugel ist. Der Unterschied wird noch gewaltiger, wenn man den Halbmesser über  $\pi k$  hinaus vergrößert. Schon die Platzfrage allein erklärt den größeren Reich-



tum an Anordnungsmöglichkeiten auf den dreierlei Kontinuen. Schließlich sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß der Halbmesser  $r_g$  der geodätischen Krümmung eines Kreises vom Halbmesser  $r$  mit diesem durch folgende Beziehung verknüpft ist: In der Ebene ist

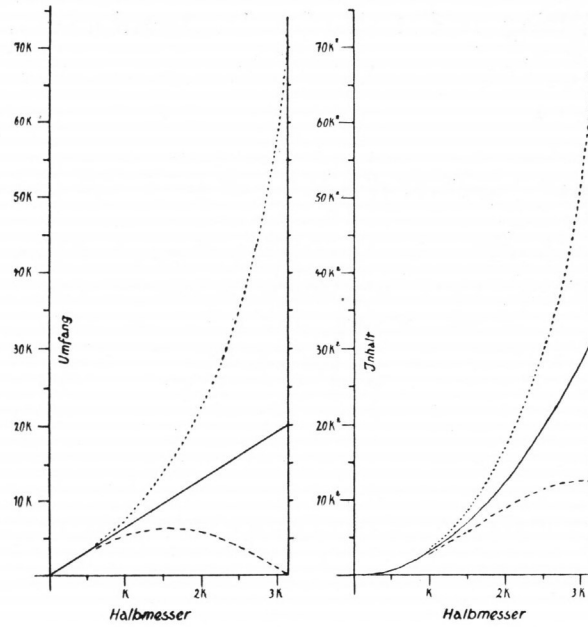


Abb. 3.

$r_g = r$ , auf der Kugel  $r_g = k \operatorname{tg} \frac{r}{k}$ , auf der Pseudosphäre  $r_g = k \operatorname{Zg} \frac{r}{k}$ . Auf der Kugel wird für  $r = \frac{\pi}{2} k$   $r_g = \infty$ , auf der Pseudosphäre für  $r = \infty$   $r_g = k$ . Kreise mit unendlich großem Radius auf der Pseudosphäre (Horozykel) haben die endliche geodätische Krümmung  $\frac{1}{k}$ .

# I. REGELMÄSSIGE KREISANORDNUNGEN IN DER EBENE.

## 1. Ring- und streifenförmige Anordnungen.

Wir beginnen unsere Aufzählung mit den gewissermaßen selbstverständlichen Anordnungen, die sich bei der Fragestellung sofort aufdrängen (Abb. 4).

a) Die einfachste dieser Art ist die ringförmige Anordnung einer endlichen Anzahl  $n$  von Kreisen, mit dem Halbmesser Eins, deren Mittelpunkte ein regel-

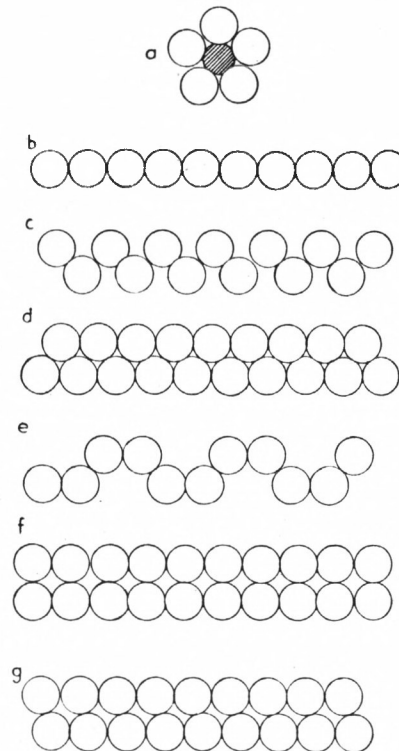


Abb. 4.

mäßiges  $n$ -Eck von der Seitenlänge eines Kreisdurchmessers bilden. Die Anordnung hat einen inneren Füllkreis mit den Halbmessern:  $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{n} - 1$  (Abb. 4a).

Sie ist zugleich die einzige Art der regelmäßigen Anordnung einer endlichen Zahl von Kreisen in der Ebene. Alle folgenden setzen unendlich viele Kreise voraus.

b) Eine streifenförmige Anordnung entsteht bei Aneinanderreihung von unendlich vielen Kreisen längs einer Geraden (Abb. 4b). Als Füllkreis kann eine der gemeinsamen Tangenten gelten.



c) Die geradlinige Kreisreihe kann durch stetige Umformung in eine Zickzackreihe verwandelt werden, die dann keine Füllkreise mehr hat (Abb. 4c).

d) An der Grenze der vorigen Umformung, wenn der Zackenwinkel  $60^\circ$  erreicht hat, steht eine Doppelreihe von Kreisen; als Füllkreise haben jene zu gelten, die je 3 sich gegenseitig berührender Kreise berühren und deren Halbmesser gleich 0,1547 ist (Abb. 4d). Je drei solcher Kreise bilden einen Dreerring, dessen Füllkreis im Bild nicht dargestellt ist.

e) Eine andere Umformung der geraden Kreisreihe führt zu der geknickten Reihe, bei der zweierlei Paare von Kreisen in der Längsrichtung des Streifens aufeinanderfolgen und abwechselnd die linke und rechte Seite des Streifens einhalten. Füllkreise fehlen (Abb. 4e).

f) Als Grenzfall der vorigen Umformung tritt eine zweite Doppelreihe auf, die eintritt, wenn der Knickungswinkel  $90^\circ$  erreicht hat. Sie besteht aus einer spiegelgleichen Wiederholung der Reihe 2 längs einer gemeinsamen Tangente derselben. Als Füllkreise haben die gemeinsamen Außentangenten beider Teilreihen und jene Kreise vom Halbmesser 0,4142 zu gelten, welche je vier benachbarte Kreise der Doppelreihe berühren (Abb. 4f).

g) Die vorhin genannte Doppelreihe ist einer weiteren Umformung fähig, wobei die eine Hälfte der Doppelreihe parallel zur andern unter Beibehaltung der gegenseitigen Berührung verschoben ist. Füllkreise gibt es dann nicht mehr (Abb. 4g). Wird die gegenseitige Parallelverschiebung auf die Größe des Kreis halbmessers ausgedehnt, so entsteht wieder die Doppelreihe  $d$ , die Füllkreise in den Dreiringen zuläßt.

## 2. Netzförmige Anordnungen in der Ebene auf Grund des gleichschenkligen Grunddreiecks.

Außer den oben aufgezählten streifenförmigen Anordnungen von unendlich vielen gleichen Kreisen gibt es auch netzförmige, zu deren Aufbau ein Grunddreieck in Verbindung mit einem passenden Kreisbogen (s. Abb. 1) dient. Wir legen ein gleichschenkliges Grunddreieck mit Winkeln von  $45^\circ$  zugrunde und schließen an die Besprechung der aus den acht Verbindungen mit einem Kreis entstehenden Anordnungen jeweils jene an, die durch regelmäßige Umfassung aus ihnen entstehen und die Verbindung zwischen ihnen herstellen. Wegen der Gleichschenkligkeit des Grunddreieckes ergeben die acht Verbindungen nicht lauter verschiedene Anordnungen, sondern teils gleiche, teils ähnliche.

5. Aus der  $E$ -,  $W$ -,  $K$ - und  $F$ -Verbindung geht eine Kreisanordnung hervor, bei der die Mittelpunkte ein quadratisches Gitter bilden. Die Füllkreise der Vierlinge haben den Halbmesser 0,4142. Sie hat vier Spiegelachsen durch jeden Kreismittelpunkt. Dichte 0,785.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Unter Dichte ist der flächenmäßige Anteil der Kreise an der Ebene verstanden.

6. Aus der *M*-, *L*- und *S*-Verbindung geht eine Kreisanordnung aus Achterringen hervor, die sich in Viererringen zusammenschließen. Die Halbmesser der zweierlei Füllkreise sind 1,6131 und 0,4142. Spiegelachsen wie bei 5. Dichte 0,539.

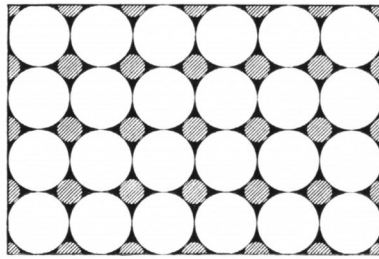


Abb. 5 G.

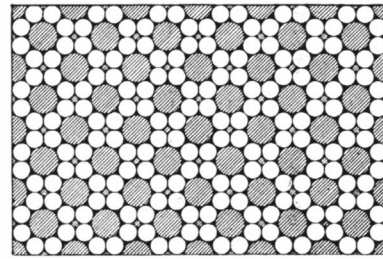


Abb. 6 G.

7. Die *H*-Anordnung. Bei ihr treten Dreier- und Viererringe mit Füllkreisen von 0,1547 und 0,4142 Halbmesser auf. Da für die Überdeckung der Ebene mit Grunddreiecken nur Drehbewegungen um  $90^\circ$ , aber keine Spiegelungen vorkommen, hat diese Anordnung außer der Spiegelachse des gleichschenkligen Grunddreieckes noch die um  $90^\circ$  gedrehte. Dichte 0,842. Im Bilde dieser Anordnung sind nur die größeren Füllkreise aufgenommen.

8. Die quadratische Anordnung *E* unter 5 läßt noch eine Beweglichkeit zu, wobei die Quadrate der Viererringe in ähnliche umfanggleiche Rauten übergeführt

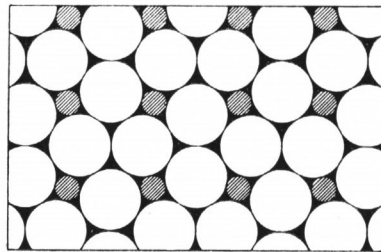
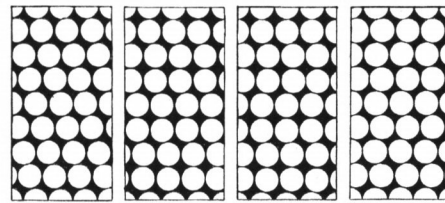


Abb. 7 G.



2 Spiegelachse Keine 1 Spiegelachse Keine  
Abb. 8. Abb. 9. Abb. 10. Abb. 11.

werden. Die Füllkreise fallen dann fort. Wird der spitze Rautenwinkel auf  $60^\circ$  herabgebracht, so geht die Anordnung 8 in die später unter 18 zu erwähnende mit lauter Dreierlingen über. Spiegelachsen wie bei 7. Dichte 0,809 in der Abb.

9. Dieselbe Anordnung 5 läßt sich aber auch so verändern, daß in der in parallele Kreisreihen aufgelösten Anordnung abwechselnd ein Paar aufeinanderfolgende Reihen unter Beibehaltung der gegenseitigen Berührung gegeneinander verschoben wird, während das nächste Paar seine gegenseitige Lage nicht verändert. Die Gegeneinanderverschiebung der Reihen soll jedesmal im gleichen Sinn und um den gleichen Betrag erfolgen. Das ursprüngliche quadratische Gitter der Kreismittelpunkte wird dann durch ein solches mit abwechselnden

Reihen von quadratischen und rautenförmigen Maschen ersetzt und die in der Anordnung 5 senkrechten Kreisreihen nach Art von 4a gehen in zickzackförmige nach Art 4b über. Wird der spitze Rautenwinkel  $60^\circ$  so erhält man die spätere Anordnung 14. Dichte 0,800 in der Abb.

10. Die Änderung der Anordnung 5 kann ähnlich wie in 9 nur mit dem Unterschiede erfolgen, daß die Reihenverschiebungen abwechselnd um den gleichen Betrag, aber in verschiedener Richtung erfolgen, was auf die dazu senkrechten Reihen die Wirkung hat, daß sie in geknickte nach Art von 4e übergehen. Wird hierbei der Rautenwinkel  $60^\circ$ , so erhält man wieder Anordnung 14. Dichte 0,800.

11. Geht man wiederum von der Anordnung 5 aus und verschiebt man die Parallelreihen gegeneinander um den gleichen Betrag, aber abwechselnd in entgegengesetzter Richtung, so entsteht eine neue Anordnung, wobei die senkrechten Reihen der Anordnung 5 Zickzackreihen werden, deren Stellung aber von den in 12 auftretenden Zickzackreihen unterschieden ist. Füllkreise fehlen. Wenn der Betrag der Verschiebung einen Kreisradius beträgt, so tritt wieder die Anordnung 1 mit lauter Dreieringen auf. Dichte 0,800.

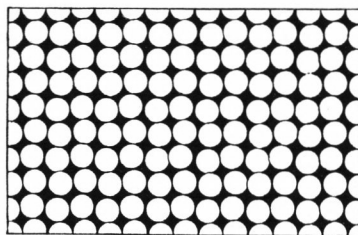


Abb. 12.

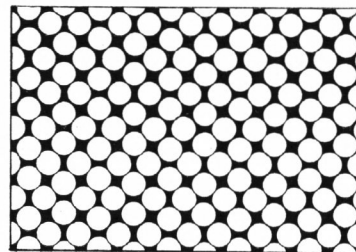


Abb. 13.

12. Die Mittelpunktquadrate der Anordnung 5 werden schachbrettartig ausgesondert. Die Viererringe, die zu der einen Sorte von Quadraten gehören, erfahren eine gleiche und gleichsinnige Verdrehung um den Winkel  $\epsilon$  gegen die Lage bei der Anordnung 5. Die dazwischen liegenden Quadrate der anderen Sorte sind dann an ihren Ecken aufgelöst. Es werden nun die verdrehten Viererringe parallel mit sich so zusammengeschoben, daß sie sich gegenseitig wieder berühren. Das ist die neue Kreisordnung. Dabei gehen die Mittelpunktquadrate der zweiten Sorte in Rauten über. Wächst der Verdrehungswinkel  $\epsilon$  auf  $30^\circ$ , so tritt die *H*-Anordnung 7 auf. Ohne Spiegelachsen. Dichte 0,800.

13. Ein anderer Übergang von der Anordnung 5 zur dichteren *H*-Anordnung 7 läßt sich folgendermaßen beschreiben. Man stellt die Anordnung 5 so, daß die Verbindungsquadrate der Kreismittelpunkte übereck stehen und sondert sie in dieser Lage schachbrettartig aus. Während die Quadrate der einen Sorte ihre Gestalt beibehalten und nur eine Drehung erfahren, werden in jenen der anderen Sorte die Quadrate einer Querreihe rautenförmig in die Länge gezogen, wobei die der nächsten parallelen Querreihe rautenförmig zusammengeschoben

werden. Das geht so abwechselnd für die parallelen Querreihen weiter. Eine Grenze findet diese Verformung wieder dann, wenn die Rauten Winkel von  $60^\circ$  bzw.  $120^\circ$  aufweisen, wobei die zugehörigen verformten Viererringe in je zwei Dreieringe sich auflösen. Dann ist die *H*-Anordnung 7 erreicht. Zwei senkrechte Spiegelachsen. Dichte 0,800.

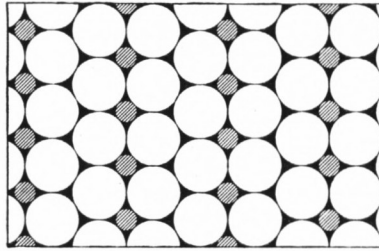


Abb. 14 G.

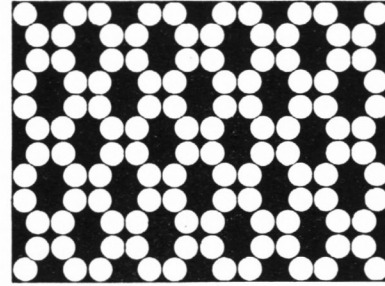


Abb. 15.

14. Das ist die Grenzanordnung der beweglichen Anordnungen 9 und 10 und besteht aus parallelen Kreisreihen, von denen abwechselnd ein Paar wie bei 5 liegt, während das nächste Paar gegenüber 5 um einen Kreishalbmesser parallel verschoben ist. Die Anordnung hat zweierlei Füllkreise, die zu den bei ihr auftretenden Dreier- bzw. Viererringen gehören. Zwei senkrechte Spiegelachsen durch die Füllkreismittelpunkte. Dichte 0,842.

15. Wir kommen nun zur Umformung der Anordnung 6, die selbst wieder beweglich ist. Man kann zuerst die Achterringe strecken, wobei das regelmäßige Achteck der Mittelpunkte dieser Ringe in ein umfanggleiches spiegeliges Achteck übergeht. Die so umgeformten Achterringe werden mit regelmäßigen Viererringen aneinandergesetzt. Die Füllkreise der Achterringe fallen fort; die Umformung läßt sich bis zur Erreichung der Anordnung 5 fortsetzen. Spiegelachsen wie bei 14. Dichte 0,539.

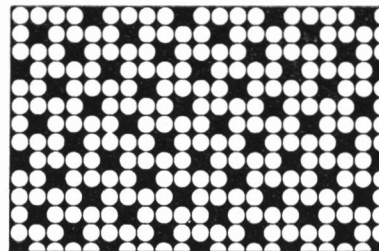


Abb. 16 G.

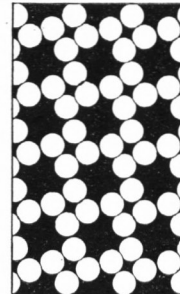


Abb. 17.

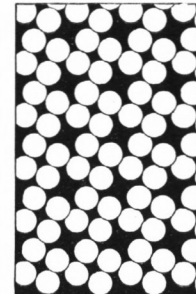


Abb. 18.

16. Es ist noch eine andere Umformung der Anordnung 9 angängig, bei der die regelmäßigen Achterringe abwechselnd an vier Ecken mit den Winkeln  $135^\circ + \epsilon$  abgeflacht an den andern mit den Winkeln  $135^\circ - \epsilon$  zugespitzt werden.

Die Viererringe behalten ihre Form und damit auch ihre Füllkreise bei. Die Abflachung kann so weit gehen, daß das ursprünglich regelmäßige Achteck der Mittelpunkte in ein umfanggleiches Quadrat übergeht, an das sich die unveränderten Viererringe von halben Umfang der entsprechenden Mittelpunktsquadrate ansetzen. Der entstehenden Kreisanordnung fehlt trotz ihrer Regelmäßigkeit jede Spiegelachse. Treibt man die Umformung weiter, so knicken die großen Quadrate an ihren Seitenmitten ein, wobei dann als Schlußlage die *H*-Anordnung 7 herauskommt. Der Übergang ist in den Bildern 17 und 18 dargestellt, zwischen denen 16 liegt. In Bild 17 sind die Achtecke eben noch konvex, im Bild 18 schon eingeknickt.

### 3. Netzförmige Kreisanordnungen in der Ebene auf Grund des ungleichschenkligen Grunddreiecks.

Dieses Grunddreieck hat die Winkel  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  und  $90^\circ$  und liefert in Verbindung mit den Kreisbögen sieben verschiedene Anordnungen zwischen welchen noch eine Reihe von regelmäßigen Übergängen bestehen. Die aus der *W*- und *L*-Verbindung hervorgehenden unterscheiden sich nur im Maßstab.

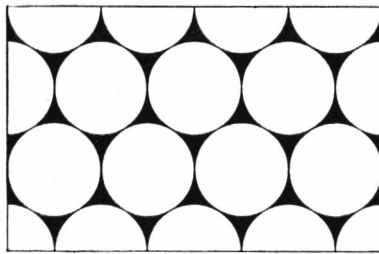


Abb. 19 G.

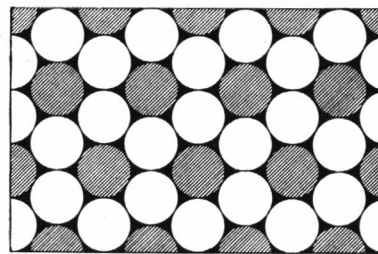


Abb. 20 G.

19. Die aus der *E*-Verbindung hervorgehende Anordnung besteht aus lauter Dreieringen mit entsprechend kleinen Füllkreisen und stellt die dichteste Packung von gleichen Kreisen in der Ebene dar. Sie ist uns schon früher bei 8 und 11 als Schlußanordnung der Umformung begegnet. Drei Spiegelachsen. Dichte 0,907.

20. Die Anordnung, welche sich aus der *W*- oder *L*-Verbindung ableitet, besteht aus lauter Sechseringen mit Füllkreisen vom Halbmesser 1,0000, die den Ringkreisen gleichen. Auf die gleiche Anordnung nur im halben Maßstabe führt auch noch die *L*-Verbindung von Kreis und Grunddreieck. Nimmt man die Füllkreise zu der eigentlichen Kreisanordnung, was wegen ihrer gleichen Größe mit den Ringkreisen zulässig ist, so erhält man wieder die dichteste Kreispackung 19. Dichte 0,605.

21. Die *K*-Verbindung führt auf eine Verflechtung von Sechser- und Dreieringen mit großen und kleinen Füllkreisen, von denen erstere wieder gleich

den Ringkreisen sind. Werden diese der  $K$ -Anordnung hinzugefügt, so kommt man wieder auf die Engstpackung 19. Dichte 0,699.

22. Bei der aus der  $F$ -Verbindung hergeleiteten Anordnung treten Sechser-, Vierer- und Dreierlinge mit entsprechenden Füllkreisen von den Radien 1,000, 0,4142 und 0,1547 auf. Wird diese Anordnung durch die großen Füllkreise ergänzt, so verliert sie die Eigenschaft der Regelmäßigkeit (Automorphie) in unserem Sinne. Dichte 0,735.

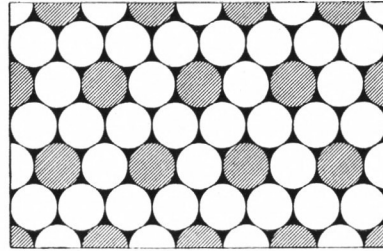


Abb. 21 G.

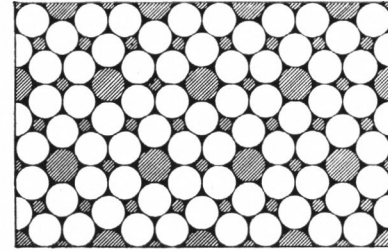


Abb. 22 G.

23. Die  $M$ -Verbindung von Kreis und Grunddreieck liefert eine Anordnung, die sich aus einer Verflechtung von Zwölferringen mit Dreierlingen aufbaut mit zweierlei Füllkreisen von den Halbmessern 2,8637 und 0,1547. Diese Kreisordnung ist im Gegensatz zu 19 die lockerste unter den netzförmigen Anordnungen überhaupt. Bei ihr bedecken die Kreise nur 39 v. H. der Ebene gegenüber 90,7 v. H. bei der Anordnung 19.

24. Die  $S$ -Verbindung von Kreis und Grunddreieck gibt eine besonders reiche Kreisordnung, in der Zwölfer-, Sechser- und Viererringe von den Halbmessern: 2,8637, 1,0000, 0,4142 auftreten. Sie hat gleich den Anordnungen 18 bis 22 zahlreiche Spiegelachsen und ist unbeweglich. D 0,486.

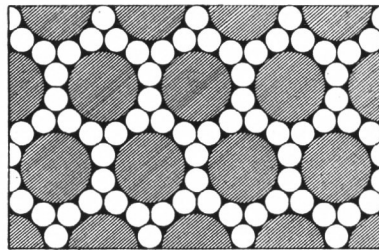


Abb. 23 G.

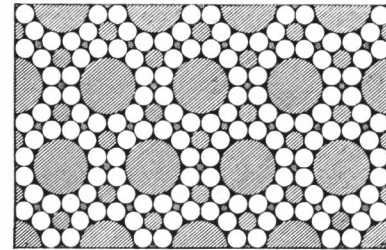


Abb. 24 G.

25. Im Gegensatz hierzu liefert die  $H$ -Verbindung von Kreis und Grunddreieck eine Kreisordnung ohne Spiegelachsen, die aus Sechser- und Dreierlingen mit entsprechenden Füllkreisen vom Halbmesser 1,0000 und 0,1547 zusammengesetzt ist. Bei Hinzunahme der Füllkreise der Sechserlinge geht sie in die Engstpackung 19 über. D 0,779.



Wir untersuchen die Bewegungsmöglichkeit der Kreisanordnungen 19 bis 24, die uns zu neuen, in unserem Sinne regelmäßigen (automorphen) Gebilden führen sollen. Dabei wollen wir die Umformungen im Sinne der Verdichtung einer der vorhin unter 19–24 aufgezählten Kreisanordnungen vornehmen, wobei natürlich die Anordnung 19 als die bereits dichteste ausfällt. Die *S*-Anordnung 24 läßt zwar allerlei Umformungen, aber keine solche zu, bei der die Gleichmäßigkeit aller Kreise erhalten bleibt. Eine solche vertragen jedoch die Anordnungen 20, 21, 22 und 23, zu denen wir uns nun wenden.

26. Die Sechseringe der bienenwabenförmigen *W*-Anordnung 20 können alle in einer Richtung so gedehnt werden, daß die eine Hauptdiagonale verlängert, die beiden anderen verkürzt werden, wobei die Ringe spiegelgleich in bezug auf diese Hauptdiagonale und die zu ihr senkrechte Mittellinie bleiben. Dabei fallen die Füllkreise weg. Die Umformung kann so weit getrieben werden, daß das zum Ringe gehörige Sechseck an den Enden der verlängerten Hauptdiagonale Winkel von  $60^\circ$  erhält, wobei sich die Anordnung 19 ergibt. D 0,651 in der Abb.

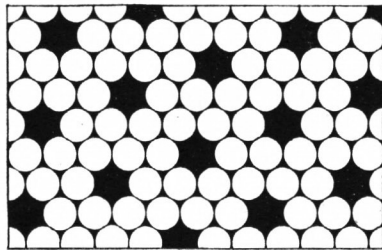


Abb. 25 G.

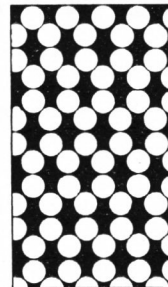


Abb. 26.

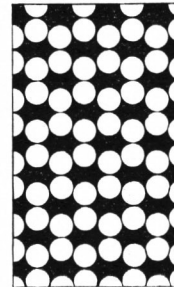


Abb. 27.

27. In ähnlicher Weise können die regelmäßigen Sechsecke der wabenförmigen Anordnung 20 in Richtung einer Hauptdiagonalen verkürzt und in den beiden anderen Hauptdiagonalenrichtungen verlängert werden. Wird bei der Verkürzung der Hauptdiagonale diese auf die Größe des Kreises herabgedrückt, so kommt man auf die quadratische Anordnung 5. D 0,720 in der Abb.

28. Es gibt aber auch noch andere Umformungen der Wabenanordnung 20. Bei ihnen bleibt zunächst ein Sechsering ungeändert, dagegen erfahren die sechs ihn umgebenden Ringe Veränderungen von der Art, daß drei ihrer Ecken auf  $120^\circ + \varepsilon$  abgestumpft, die drei anderen zwischen ihnen liegenden auf  $120^\circ - \varepsilon$  zugespitzt werden. Die so erweiterte Anordnung von sieben Sechseringen, von denen der mittlere regelmäßig ist, wird dann ergänzt durch sechs sich anfügende regelmäßige Sechseringe in paralleler Stellung zum mittleren. Zwischen diese angefügten regelmäßigen Sechseringe legen sich sechs weitere umgeformte, die mit den früheren dieser Art die neuen regelmäßigen Sechseringe umkreisen, wozu noch 12 weitere unregelmäßige Ringe einzufügen sind. Bei Fortsetzung dieses Aufbaues entsteht eine regelmäßige Kreisanordnung, in der jeder regelmäßige Sechsering von sechs umgeformten umgeben ist. Die Anordnung hat keinerlei

Spiegelachsen. Wenn man die im vorstehenden geschilderte Verformung der Sechserringe bis  $\varepsilon = 60^\circ$  treibt, wodurch sie in dreieckige Gebilde übergehen, so entsteht als Grenzanordnung 25, die nicht mehr weiter beweglich ist.

29. Werden in der *K*-Anordnung 21, die aus Sechser- und Dreieringen besteht, erstere alle derselben Umformung unterzogen, die in 28 beschrieben ist und sie dann zu dreien in Ringen vereint, so entsteht eine neue, bewegliche

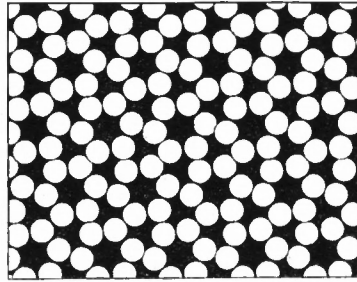


Abb. 28.

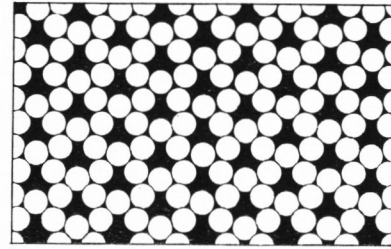


Abb. 29.

Kreisanordnung, an deren Ende wieder die engste Kreispackung 19 steht. Diese wird erreicht, wenn die Sechserringe bei  $\varepsilon = 60^\circ$  in dreieckige Gebilde übergehen. Sie besitzt Spiegelachsen.

30. Auch die *F*-Anordnung 22 ist noch beweglich. Unter Beibehaltung der Form der Sechser- und Dreieringe können die quadratischen Viererringe rautenförmig umgeformt werden, wodurch die neue Kreisanordnung entsteht. Die Um-

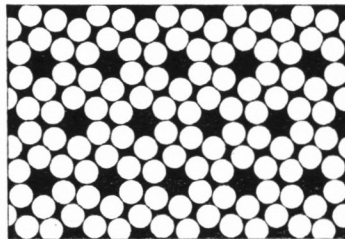


Abb. 30.

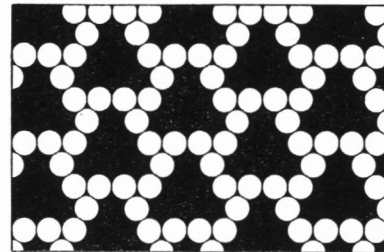


Abb. 31 G.

formung findet ihre Grenze sobald der spitze Rautenwinkel  $60^\circ$  wird. Dann hat man wieder die Anordnung 25. Gleich dieser fehlen ihr die Spiegelachsen.

31. Die lockerste Kreisanordnung 32 hat naturgemäß am meisten Beweglichkeit. Man kann sie unter Beibehaltung der Spiegelbildlichkeit so umformen, daß die Zwölferringe, bzw. deren Mittelpunktszwölfecke an den Ecken 1, 2, 5, 6, 9, 10 von  $150^\circ$  auf  $150^\circ - \varepsilon$  zugespitzt und an den Ecken 3, 4, 7, 8, 11, 12 auf  $150^\circ + \varepsilon$  abgeflacht werden, während die sie verbindenden Dreieringe in ihrer Form erhalten bleiben. Sie erfahren dabei nur eine Drehung gegenüber ihrer früheren Lage,



und zwar mit abwechselndem Drehsinn. Wird  $\varepsilon = 30^\circ$ , so gehen die Zwölfecke in Sechsecke mit abwechselnd langen und kurzen Seiten aber gleichen Winkeln von  $120^\circ$  über. Die so entstehende Kreisanordnung bleibt spiegelbildlich und bildet den Übergang zu einer neuen Reihe von Kreisanordnungen.

32. Diese entstehen durch Fortsetzung der vorigen Umformung für Werte von  $\varepsilon > 30^\circ$ , wobei dann die Zwölferringe an drei Stellen eingeknickt erscheinen. Das Ende der Umformung bei  $\varepsilon = 60^\circ$  führt auf die Anordnung 22, die aus Sechser-, Vierer- und Dreieringen besteht. Ihre weitere Veränderung unter Aufgabe der Spiegelbildlichkeit siehe unter 31.

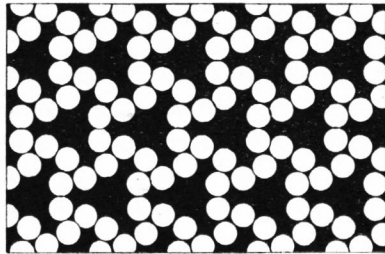


Abb. 32.

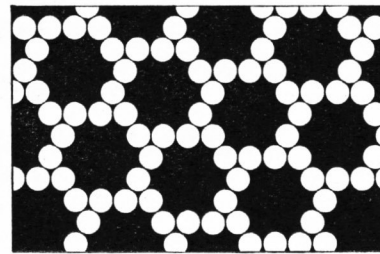


Abb. 33 G.

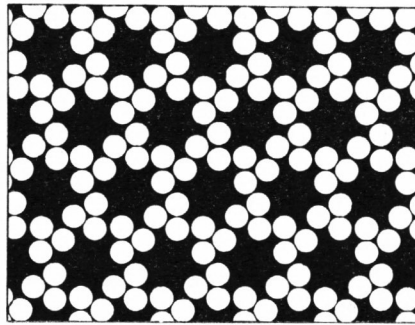


Abb. 34.

33. Die lockerste Kreisanordnung 23 kann unter Aufgabe der Spiegelbildlichkeit noch derart bewegt werden, daß die Zwölferringe bzw. ihre Mittelpunktszwölfecke an den Ecken 1, 3, 5, 7, 9 und 11 von  $150^\circ$  auf  $150^\circ + \varepsilon$  abgeflacht und auf den dazwischenliegenden 2, 4, 6, 8, 10 und 12 von  $150^\circ$  auf  $150^\circ - \varepsilon$  zugespitzt werden. Die Dreieringe werden dabei unter Erhaltung ihrer Gestalt alle im gleichen Sinne gedreht. Bei  $\varepsilon = 30^\circ$  bildet sich alsdann eine weitere Übergangsanordnung aus, bei der die Zwölfecke in Sechsecke von doppelter Seitenlänge und gleichen Winkeln von  $120^\circ$  übergehen, um die sich die Dreiecke von halber Seitenlänge herumscharen. Sie ist ohne Spiegelachsen. D 0,408.

34. Wird die in voriger Nummer gekennzeichnete Abänderung über  $\varepsilon = 30^\circ$  hinaus fortgesetzt, so erfahren die ursprünglich regelmäßigen Zwölferringe der

Anordnung 22 an sechs Stellen Einbuchtungen und dazwischen Ausknickungen. Die gleichsinnige Drehung aller Dreieringe geht weiter, und bei  $\epsilon = 60^\circ$  kommen wir wieder zur Anordnung 25 ohne Spiegelachsen.

Damit scheinen alle regelmäßigen (automorphen) Anordnungen von gleichen sich berührenden Kreisen in der Ebene erschöpft. Sie sind im Laufe von 18 Jahren allmählich aufgefunden worden, und es wäre wohl denkbar, daß sich irgendeine meiner Aufmerksamkeit entzogen hat.

## II. DIE REGELMÄSSIGEN KREISANORDNUNGEN AUF DER KUGEL.

Für diese ist eine Eigenschaft der Kugel besonders ausschlaggebend, nämlich die Endlichkeit ihrer Oberfläche. Auf ihr hat infolgedessen auch nur eine endliche Anzahl von gleichen Kreisen nebeneinander Platz und es fallen außerdem grundsätzlich die Unterschiede von streifenförmigen und netzförmigen Anordnungen. Ein zweiter wesentlicher Unterschied zwischen der Ebene und der Kugel ist der, daß es auf letzterer ähnliche Formen nicht gibt; infolgedessen ist die Größe der anzuordnenden Kreise wichtig. Es folgt nun die Aufzählung der möglichen Anordnungen nach ähnlichen Grundsätzen wie sie in der Ebene verwandt wurden. Vorher muß noch einiges bezüglich ihrer Darstellung erwähnt werden. Die natürliche Darstellung auf Kugelmodellen, die ich in der Modellsammlung des Math. Instituts der Technischen Hochschule München niedergelegt habe,<sup>1</sup> läßt sich leider nicht vervielfältigen. An ihre Stelle soll die Wiedergabe in stereographischer Projektion treten, bei der bekanntlich Kreise in Kreise abgebildet werden, wenn auch nicht gleichgroße Kreise wiederum in gleichgroße. Sie ist naturgemäß nur ein unvollkommener Ersatz für die räumliche Darstellung, kann aber dafür als Grundlage des Aufbaues einer gesetzmäßigen Anordnung von sich gegenseitig berührenden Kreisen verschiedener Größe in der Ebene eine selbständige Beachtung beanspruchen. Die rechnerische Darstellung der stereographischen Abbildung geschieht am einfachsten in Polarkoordinaten, wobei die Polarwinkel auf der Kugel und in der Ebene gleich werden und zwischen den Polarhalbmessern die Beziehung  $s' = k \operatorname{tg} \frac{s}{2k}$  ( $k$  Kugelhalbmesser) besteht und das Vergröße-

ungsverhältnis  $\frac{ds'}{ds} = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{s}{2k}$  ist. Letzteres wächst von  $\frac{1}{2}$  für  $s = 0$  auf 1 für  $s = \frac{\pi}{2}k$  und auf  $\infty$  für  $s = \pi k$ . Da die Abbildung der ganzen Kugel, auf die es hier meistens ankommt, die ganze Ebene erfordern würde, wird die Kugel durch einen Großkreis geteilt und die eine Hälfte von dem einen Pol des Großkreises, die andere von dem anderen Pol auf das Innere des Großkreises abgebildet, das demnach doppelt mit Bildern von Kugelpunkten überdeckt ist. Die Bilder von Kreisen, die auf beiden Kugelhälften verlaufen,

<sup>1</sup> Sie umfaßt 24 mit römischen Ziffern bezeichnete Gipskugeln, auf denen die Anordnungs-kreise weiß auf schwarzem Grund, die Füllkreise jedoch bunt dargestellt sind. Die Reihenfolge ist eine andere wie die in der vorliegenden Veröffentlichung.

werden dabei mondförmig mit Ecken auf dem Teilungsgroßkreis abgebildet. Die Rückseite der Kugel ist in den Abbildungen punktiert dargestellt. Bei der bildlichen Wiedergabe der Kugelkreisanordnungen wurde darauf gesehen, daß das Abbild mehrere Spiegelachsen aufwies, was sowohl die Übersicht wie die Zeichnung erleichtert. Je nach Wahl des Abbildungsmittelpunktes fällt das Bild der gleichen Kugelkreisanordnung in der Ebene verschieden aus, wofür Beispiele gegeben werden.

### 1. Die ring- und streifenförmigen Anordnungen auf der Kugel.

a) Die Ringanordnung allgemeiner Art. Bei ihr bilden die Kreismittelpunkte ein regelmäßiges sphärisches  $n$ -Eck. Sie hat zwei Füllkreise, die eine Kugelzone begrenzen, innerhalb deren sich die Kreise aneinanderreihen. Der Halbmesser der Anordnungsreise ist beliebig; er muß nur kleiner als  $\frac{\pi}{3}$  sein, wenn der Ring die Mindestzahl von drei Kreisen umfassen soll.

b) Die Großringanordnung. Sie ist ein Sonderfall der vorigen und dadurch gekennzeichnet, daß die Mittelpunkte der sich berührenden Kreise auf einem Großkreis liegen. Die beiden Füllkreise sind gleich groß. Diese Anordnung ist nur möglich bei Kreisen, deren Halbmesser  $\frac{\pi}{n}$  ist, wo  $n$  eine ganze Zahl bedeutet. Sie ist das Gegenstück zu der Streifenanordnung in der Ebene, die aber unendlich viele Kreise voraussetzt.

c) Der Zickzackring. Dieser setzt eine gerade Anzahl von anzuordnenden Kreisen voraus, deren Mittelpunkte abwechselnd auf beiden Seiten eines Großkreises liegen. Hier ist der Halbmesser der Kreise innerhalb gewisser Grenzen beliebig. Bei der unteren Grenze  $\left(r = \frac{\pi}{2n}\right)$  geht der Zickzackring in den Großring über, bei der oberen tritt die erste Form des Doppelringes auf.

d) Der Doppelring erster Art. Er besteht aus zwei gleichen einfachen Ringanordnungen beiderseits eines Großkreises, die so ineinander verzahnt sind, daß sich je ein Kreis des einen mit zwei Kreisen des anderen Ringes zu einem Dreiering zusammenfassen lassen. Siehe Abb. 35, die einen Doppelviererring erster Art darstellt. Ebenso stellt Abb. 58 einen Doppelfünfering erster Art dar, wenn man den mittleren Kreis als Füllkreis auffaßt.

e) Der geknickte Ring. Dieser setzt sich aus  $4n$ -Kreisen zusammen, von denen je die Hälfte auf einer Seite eines Großkreises zu je zweien gepaart gelegen sind. Der Halbmesser des Anordnungskreises ist noch innerhalb gewisser Grenzen beliebig. Mit der Größe der Kreise ändert sich der Knickungswinkel, der an der unteren Grenze zu  $\pi$  wird, was den Übergang zum Großring bewirkt. An der oberen Grenze geht der geknickte Ring in den Doppelring zweiter Art über.

f) Der Doppelring zweiter Art. Hierbei liegen zwei einfache Ringe spiegelgleich zu einem Großkreis und berühren sich und den Großkreis. Je ein Paar von

Kreisen beider Ringe treten zu einem Viererringe zusammen. Abb. 46 zeigt einen Doppelviererring zweiter Art.

g) Der bewegliche Doppelring. Hat man zwei zu einem Großkreis spiegelbildliche Ringe, die mit dem Großkreis gemeinsamen Mittelpunkt haben und ihn schneiden, so kann man diese so gegeneinander stellen, daß sich je zwei Kreise verschiedener Ringe berühren, und zwar in Punkten dieses Großkreises. Mit der Änderung des gemeinsamen Halbmessers der Kreise dieses Doppelrings ändert sich dessen Gestalt und geht vom Doppelring erster Art zu einem solchen zweiter Art über. Der erste Doppelring mit seinen Dreierteilungen stellt die engste Packung, der zweite mit seinen Viererteilungen die lockerste Packung zweier zu einem beweglichen Doppelring vereinigter einfacher Ringe vor.

## 2. Netzförmige Kreisanordnungen auf der Kugel.

Wir wenden uns nun zu den netzförmigen Kreisanordnungen auf der Kugel, die den gleichbenannten in der Ebene entsprechen, sich aber von ihnen dadurch unterscheiden, daß sie nur aus einer endlichen Zahl von Kreisen bestehen und daher geschlossen sind. Wie die Ebene, so läßt sich auch die Kugel in eine Anzahl deckungs- und spiegelgleicher Dreiecke zerlegen, die sich in ähnlicher Weise wie dort mit Kreisen verbinden lassen, welche bei der Wiederholung in allen Dreiecken regelmäßige netzförmige Kreisanordnungen ergeben. Es kommen dabei die gleichen in Abb. 1 S. 2 mit *E* bis *H* bezeichneten Zuteilungen in Betracht. Nur sind es auf der Kugel dreierlei solcher rechtwinkliger Dreiecke, die verschiedenen Gruppen zugehören. Das Dreieck mit den Winkeln  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$  gehört zu der in sich dualen Tetraedergruppe (T-Gr.) und bedeckt in 24facher Wiederholung die Kugeloberfläche, das Dreieck mit den Winkeln  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ , von dem 48 auf die Kugeloberfläche gehen, gehört zur Würfel-Oktaedergruppe (WO-Gr.), und das Dreieck mit den Winkeln  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}$ , das den 120. Teil der Kugeloberfläche ausmacht, ist zur Dodekaeder-Ikosaedergruppe (DI-Gr.) gehörig. Infolge des Umstandes, daß das erste der Grunddreiecke gleichschenkelig ist und seine Gruppe in der zweiten als Untergruppe enthalten ist, vermindert sich die Zahl der durch die Zuteilungen *E* bis *H* entstehenden  $3 \times 8 = 24$  verschiedenen Kreisanordnungen auf der Kugel auf 19. Von diesen ist eine Anzahl in dem Sinne unbeweglich, als sie keine Veränderung zulassen, bei der die Regelmäßigkeit der Anordnung erhalten bleibt. Bei den übrigen sind solche Veränderungen möglich. Sie führen die eine Kreisanordnung in eine andere über, wobei noch bemerkenswerte Zwischenzustände zu unterscheiden sind. Diese möglichen Überführungen werden immer in dem Sinne betrachtet, in dem eine Verdichtung der Kreisanordnung vor sich geht, so daß die veränderte Kreisanordnung immer dichter gepackt erscheint als die Ausgangsanordnung. Wir setzen die Aufzählung der so entstehenden Kreisanordnungen für die drei Gruppendreiecke getrennt fort.

### 3. Das gleichschenklige Grunddreieck der Tetraedergruppe.

36. Die aus der *E*- bzw. *W*-Verbindung stammende Anordnung der T-Gr. Sie führt auf vier Kreise, deren Mittelpunkte die Ecken eines regelmäßigen Vierflachs bilden. Man kann die Anordnung auch als einen Doppelring erster Art

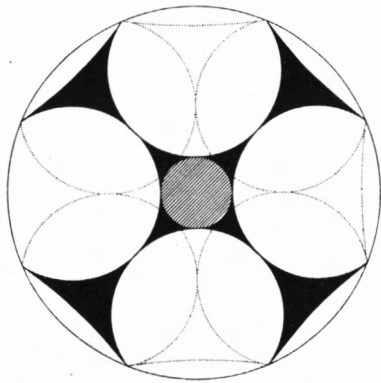


Abb. 35.

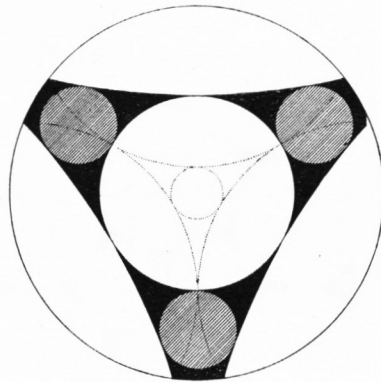


Abb. 36.

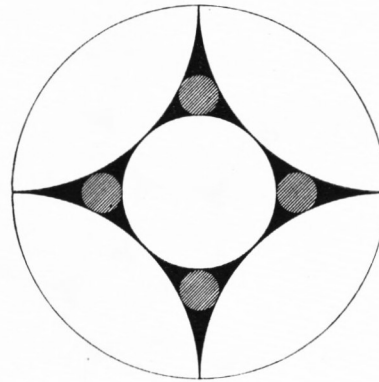


Abb. 37.

auffassen, der aus dem einfachsten Zickzackring hervorgegangen ist (vgl. c und d S. 17). Sie ist unbeweglich.  $D\ 0,845$ , der Halbmesser des Anordnungskreises ist:  $r = 54,74^{\circ}$ .

37., 38. u. 39. Die aus der *K*-Verbindung entstehende Anordnung der T-Gr., die aus 6 Kreisen besteht, deren Mittelpunkte die Ecken eines Oktaeders bilden.

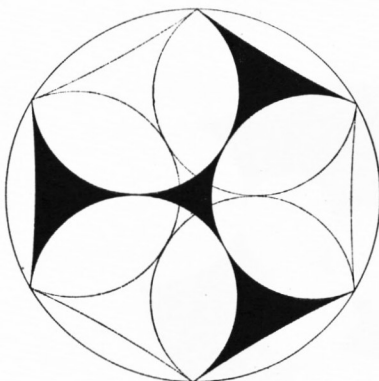


Abb. 38 G.

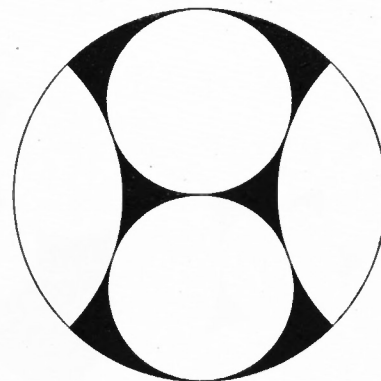


Abb. 39 G.

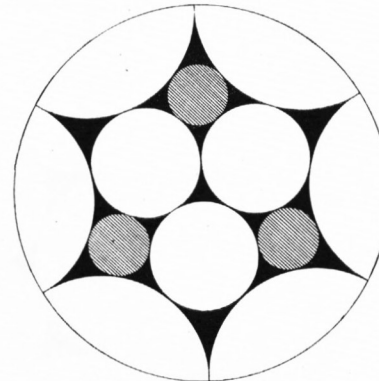


Abb. 40.

Die 6 Kreise lassen sich zu 8 Dreierlingen zusammenfassen, denen einerlei Füllkreise entsprechen. Außerdem ist diese Anordnung unbeweglich, weil sie die dichteste Packung von 6 Kreisen darstellt.  $D\ 0,879$ ,  $r\ 45,00^{\circ}$ .

40. Die zur *F*-Zuteilung gehörige Anordnung der T-Gr. besteht aus 12 Kreisen, die sich in 6 Vierer- und 8 Dreierlingen anordnen lassen. Die Kreis-



mittelpunkte bilden die Ecken eines Kuboktaeders. Die Anordnung ist beweglich, sie hat zweierlei Füllkreise.  $D 0,804, r 30,00^{\circ}$ .

41. und 42. Die *L*- bzw. *M*-Zuteilung liefert eine Anordnung der T-Gr., ebenfalls aus 12 Kreisen bestehend, die 4 Sechser- und 4 Dreier-ringe bilden und dementsprechend zweierlei Füllkreise haben. Sie ist beweglich. Abb. 42 stellt die gleiche Anordnung mit dem Berührungspunkt zweier Kreise im Abbildungsmittelpunkt dar.  $D 0,572, r 22,21^{\circ}$ .

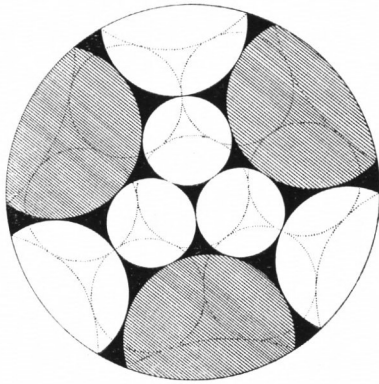


Abb. 41.

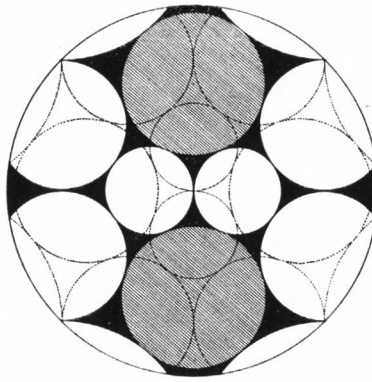


Abb. 42.

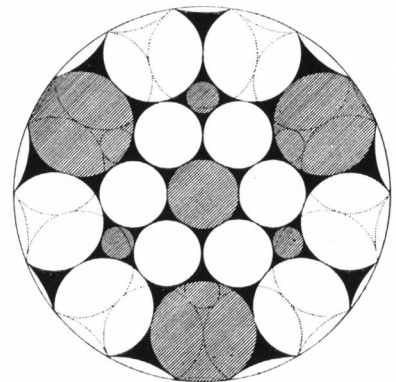


Abb. 43.

43. Die *S*-Anordnung der T-Gr. mit 24 Kreisen, die sich zu 8 Sechser- und 6 Viererringen zusammenschließen. Sie hat zweierlei Füllkreise und ist beweglich, wobei die Sechser- und Viererringe erst zu dreieckigen Gebilden verformt werden, die dann einknicken und schließlich zur *H*-Anordnung der WO-Gr. (Abb. 5. 7, S. 23) führen.  $D 0,616, r 18,43^{\circ}$ .

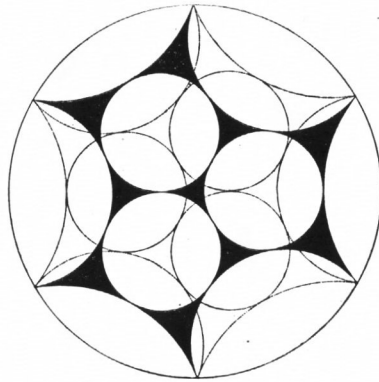


Abb. 44. G.

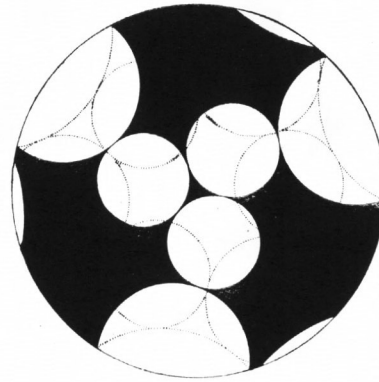


Abb. 45.

44. Die *H*-Anordnung der T-Gr. aus 12 Kreisen bestehend, deren Mittelpunkte die Ecken eines Ikosaeders bilden. Man hat 20 Dreier- und einerlei Füllkreise. Die Anordnung stellt die dichteste Packung von 12 Kreisen auf der Kugel dar und ist in diesem Sinne unbeweglich.  $D 0,897, r 18,64^{\circ}$ .

Von den beweglichen Kreisanordnungen führen Übergänge zu dichteren Packungen. So z. B. von 40 der *F*-Anordnung nach 44 der *H*-Anordnung. Man entfernt die Füllkreise der Viererringe in 40 und verdrückt die quadratischen Viererringe zu rautenartigen Gebilden, in denen gegenüberliegende Kreise des Viererrings sich berühren. Aus den Viererringen werden dann je zwei Dreieringe, und es entsteht bei entsprechender Vergrößerung der Kreise die engste Packung 44 der *H*-Anordnung.

45. In der Anordnung 41 werden die Sechseringe nach Entfernung der Füllkreise an drei Ecken zusammengedrückt, bis immer drei aufeinanderfolgende in einer Flucht liegen, wobei der Sechsering in ein dreieckiges Gebilde übergeht. So entsteht bei entsprechender Vergrößerung der Kreishalbmesser eine Übergangsanordnung 45, die beim Weitertreiben der eingeleiteten Veränderung zur Einknickung der dreieckigen Gebilde führt und bei der *H*-Anordnung 44 endigt.  $D\ 0,629, r\ 26,45^{\circ}$ .

#### 4. Das Grunddreieck der Würfel-Oktaedergruppe.

Nun wenden wir uns dem Grunddreieck der WO-Gr. zu und teilen ihm die mit *E* bis *H* bezeichneten Kreise zu. Dabei führt die *E*-Zuteilung zu der schon von der T-Gr. her bekannten Kreisanordnung 37 aus 6 Kreisen bestehend, deren Mittelpunkte die Ecken eines Oktaeders bilden. Sie ist in den Abb. 38 und 39 wiederholt bei veränderter Lage des Mittelpunktes dargestellt.

46. 47. und 48. Die *W*-Zuteilung ergibt eine Anordnung von 8 Kreisen mit ihren Mittelpunkten in den Ecken eines Würfels, die in dreifacher Abbildung wiedergegeben ist. Diese Kreise schließen sich zu 6 Viererringen zusammen und

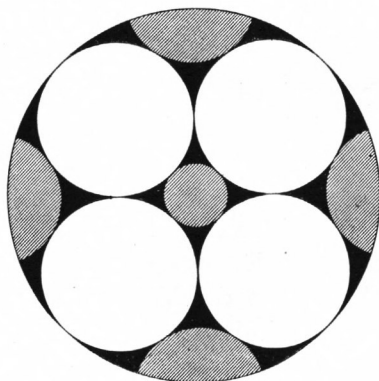


Abb. 46 G.

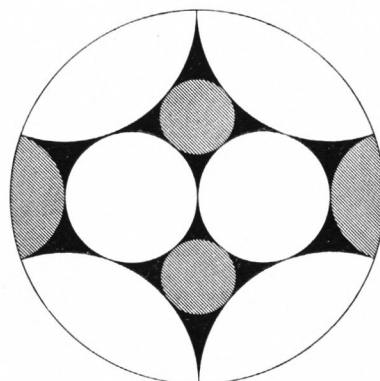


Abb. 47 G.

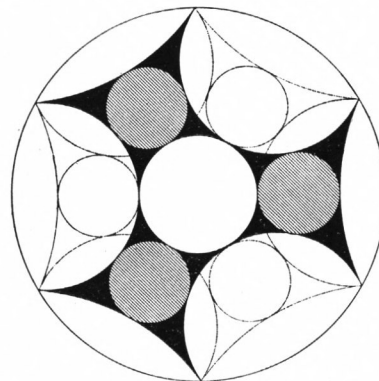


Abb. 48 G.

haben einerlei Füllkreise. Sie ist beweglich und kann auch als einfachster Fall des Doppelringes zweiter Art, bestehend aus 2 Viererringen, gelten. Die zulässige Veränderung führt auf den dichter gepackten Doppelring erster Art (Abb. 35), der aus etwas größeren Kreisen besteht.  $D\ 0,734, r\ 35,26^{\circ}$ .

Die *K*-Zuteilung führt auf eine Anordnung von 12 Kreisen, die schon bei der *F*-Zuteilung der T-Gr. (Abb. 40) aufgetreten und in Abb. 49 mit anderem Mittelpunkt dargestellt ist. Von ihr führt ein stetiger Übergang zu Abb. 44, wobei die 8 Dreieringe in abwechselndem Sinne gedreht werden, bis sich die dazwischenliegenden Viererlinge rautenförmig verformen und schließlich in Doppeldreierlinge übergehen, womit die *H*-Anordnung der T-Gruppe erreicht wird.

50. Die *F*-Zuteilung der WO-Gr. liefert eine Anordnung von 24 Kreisen, die sich zu 18 Vierer- und 8 Dreieringen zusammenschließen lassen und die demnach zweierlei Füllkreise besitzt. Sie ist noch beweglich, wobei sich 12 von den 18 Viererringen erst rautenförmig und schließlich zu je 2 Dreieringen verformen. Damit wird die *H*-Packung (Abb. 57) erreicht.  $D\ 0,792, r\ 20,94^\circ$ .

51. Die *L*-Zuteilung der WO-Gr. gibt eine Kreisanordnung von 24 Kreisen, die zu 8 Sechser- und 6 Viererringen zusammentreten. Es gibt zweierlei Füllkreise. Die Anordnung ist beweglich und hat zahlreiche Spiegelachsen.  $D\ 0,616, r\ 18,44^\circ$ .

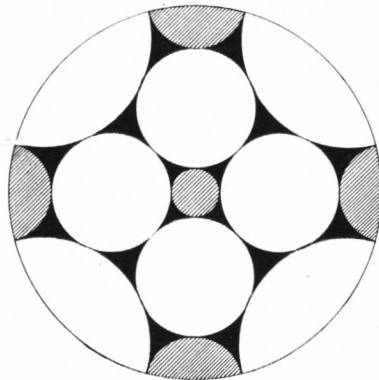


Abb. 49.

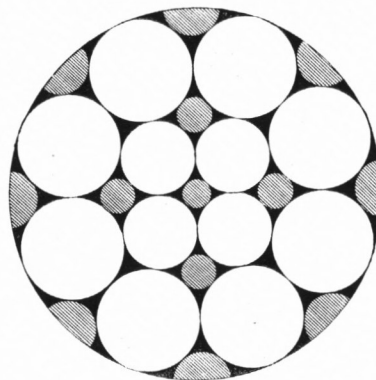


Abb. 50.

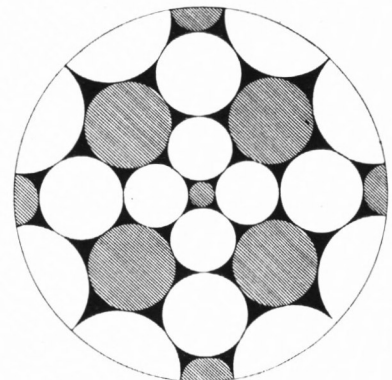


Abb. 51.

52. Die Abänderung der vorigen Kreisanordnung 51 erfolgt in der Weise, daß die Sechseringe an drei Stellen abgeplattet werden, bis sie in dreieckige Gebilde übergehen, wobei eine Übergangsform entsteht. Dabei drehen sich die Viererlinge alle im gleichen Sinn.  $D\ 0,741, r\ 20,34^\circ$ .

Beim Weitertreiben knicken die Dreiecke in den Seitenmitten ein, bis schließlich die ursprünglichen Sechseringe in je 4 Dreierlinge aufgelöst werden, womit die *H*-Anordnung 57 erreicht wird. Mit der Abänderung ist der Verlust der Spiegelgleichheit der *L*-Anordnung 51 verbunden. Während die Anordnung 51 zahlreiche Spiegelachsen aufweist, hat die geänderte Anordnung keine solchen. Es gibt aber je zwei Abänderungen in verschiedenem Sinn, die zu zwei gegenseitig spiegelgleichen Anordnungen ohne eigene Spiegelachsen führen.

53. Die *M*-Zuteilung der WO-Gr. führt zu einer sehr lockeren Anordnung von 24 Kreisen, welche sich zu 6 Achter- und 8 Dreieringen zusammenschließen. Es bestehen zweierlei Füllkreise. Die Anordnung hat zahlreiche Spiegelachsen, die sich bei einer möglichen regelmäßigen Abänderung verlieren.  $D\ 0,484, r\ 16,33^\circ$ .



54. Bei einer solchen Abänderung der vorigen Kreisanordnung 53 werden bei gleichsinniger Drehung der 8 Dreierlinge die 6 Achterringe an je vier gegenüberliegenden Stellen eingedrückt, wodurch schließlich quadratische aus 8 Kreisen zusammengesetzte Gebilde entstehen, die eine spiegelachsenlose Übergangsanordnung bilden.  $D 0,523$ ,  $r 16,98^\circ$ .

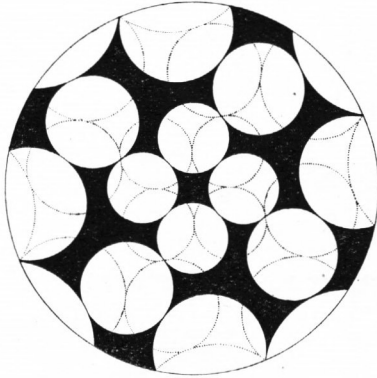


Abb. 52.

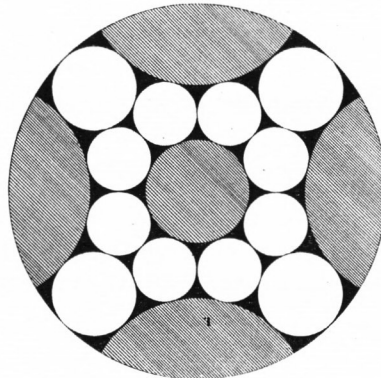


Abb. 53.

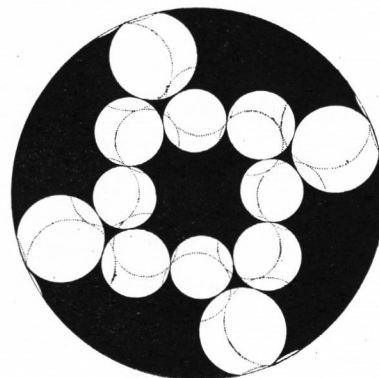


Abb. 54.

Bei der Weiterführung der Abänderung knicken die Quadratseiten ein und es entstehen Viererringe aus den in den Seitenmitten gelegenen Kreisen, während sich die übrigen zu Dreierlingen vereinigen. Das gibt die *H*-Anordnung 57.

55. Es gibt aber noch eine zweite Abwandlung der Anordnung 53, die im Gegensatz zur vorigen spiegelbildlich verläuft. Bei ihr drehen sich die 8 Dreier-

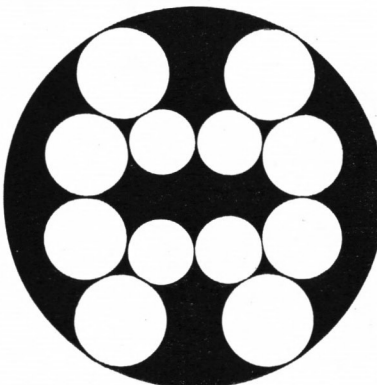


Abb. 55.

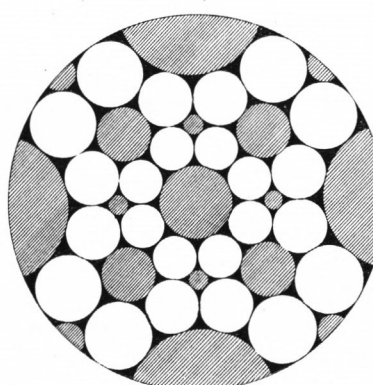


Abb. 56.

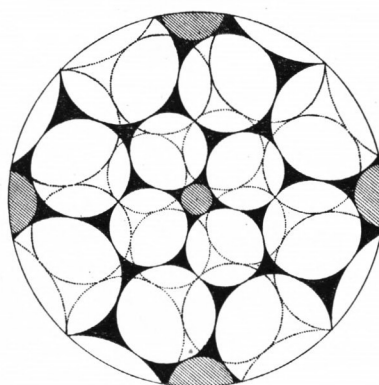


Abb. 57.

ringe abwechselnd in entgegengesetztem Sinn, wobei die Achterringe eine spiegelige Abänderung erfahren, durch die sie in rechteckige Gebilde mit ungleichen Seitenlängen übergeführt werden.  $D 0,587$ ,  $r 17,52^\circ$ .

Bei der Weiterführung der Abwandlung über die Anordnung 55 hinaus kommt man zu der in Abb. 50 dargestellten Anordnung.

56. Die *S*-Zuteilung ergibt eine Anordnung von 48 Kreisen mit 6 Achter-, 8 Sechser- und 12 Viererringen und dreierlei Füllkreisen ohne ersichtliche Möglichkeit einer regelmäßigen Abänderung.  $D\ 0,566, r\ 12,46^\circ$ .

57. Durch die *H*-Zuteilung entsteht die dichteste Kreisordnung der *WO*-Gr., bestehend aus 24 Kreisen mit 6 Vierer- und 32 Dreerringen samt den dazu gehörigen Füllkreisen. Diese Anordnung ist in unserem Sinne unbeweglich, sie hat keine Spiegelachsen und kommt in zwei spiegelgleichen Spielarten vor. Sie ist das gemeinsame Endergebnis der regelmäßigen Abwandlungen fast aller übrigen Anordnungen von 24 Kreisen.  $D\ 0,861, r\ 21,85^\circ$ .

### 5. Das Grunddreieck der Dodekaeder-Ikosaedergruppe.

Damit sind die Kreisordnungen des zweiten Kugeldreiecks, das zur *WO*-Gr. gehört, erledigt und es folgen nun jene, denen das dritte Grunddreieck der Kugel zugrunde liegt, welches der *DI*-Gr. zugehört und die Winkel  $36^\circ$ ,  $60^\circ$  und  $90^\circ$  enthält. Das Grunddreieck

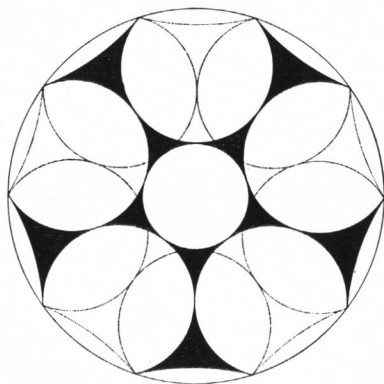


Abb. 58 G.

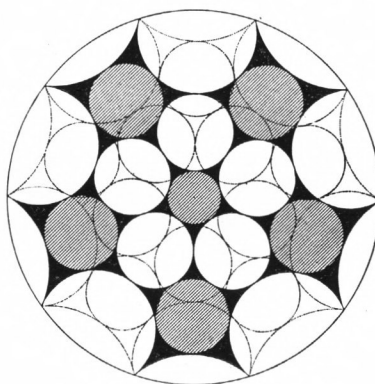


Abb. 59 G.

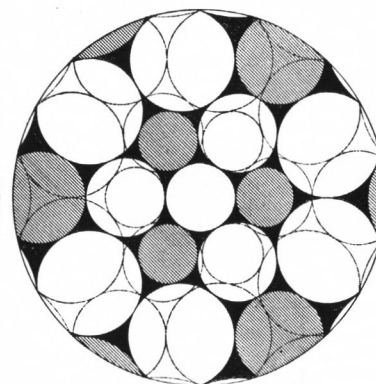


Abb. 60 G.

bedeckt in 120facher, teils deckungs-, teils spiegelgleicher Wiederholung die gesamte Kugeloberfläche, und die zugehörigen Kreisordnungen zeichnen sich durch Mannigfaltigkeit des Aufbaues aus.

58. Die *E*-Zuteilung des Kreises führt bei der *DI*-Gr. auf eine Anordnung von 12 Kreisen, deren Mittelpunkt die Ecken eines Ikosaeders und deren Ebenen die Flächen eines Dodekaeders bilden. Sie treten zu 20 Dreerringen mit ebenso vielen Füllkreisen einerlei Art zusammen. Die Anordnung stellt die dichteste Packung von 12 Kreisen auf der Kugel dar und ist in diesem Sinne unbeweglich. Sie trat schon als *H*-Anordnung der *T*-Gr. (Abb. 44) auf.  $D\ 0,897, r\ 18,64^\circ$ .

59-62. Die *W*-Zuteilung des Kreises führt bei der *DI*-Gr. auf eine Anordnung von 20 Kreisen, deren Mittelpunkte die Ecken eines Dodekaeders und deren Ebenen die Flächen eines Ikosaeders bilden. Sie lassen sich zu 12 Fünferingen vereinigen und haben einerlei Füllkreise. Die Anordnung ist unbeweglich und

hat mit der vorigen zahlreiche Spiegelachsen gemein. Sie ist auf vier verschiedene Weisen abgebildet, mit einem Fünfering im Mittelpunkt, mit einem Kreis und mit dem Berührungspunkt zweier Kreise im Mittelpunkt. Letztere Darstellung ist auch noch in verkleinertem Maßstabe auf die ganze Ebene ausgedehnt, wobei zwei der Anordnungskreise als parallele Gerade wiedergegeben werden (Abb. 62).  $D\ 0,656$ ,  $r\ 13,07^\circ$ .

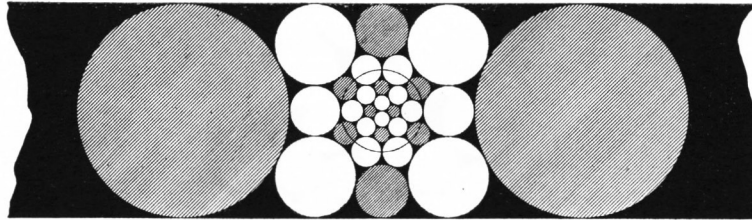


Abb. 62 G.

63. Die  $K$ -Zuteilung des Kreises liefert bei der DI-Gr. eine Anordnung von 30 Kreisen mit 12 Fünfer- und 20 Dreierlingen sowie zweierlei Füllkreisen. Auch sie ist unbeweglich und spiegelbildlich.  $D\ 0,735$ ,  $r\ 18,00^\circ$ .

64. Bei der  $F$ -Zuteilung des Kreises tritt in der DI-Gr. eine Anordnung von 60 Kreisen mit 30 Vierer-, 12 Fünfer- und 20 Dreierlingen samt dreierlei Füllkreisen auf.  $D\ 0,761$ ,  $r\ 12,94^\circ$ .

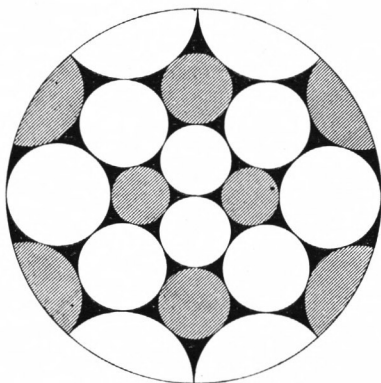


Abb. 61 G.

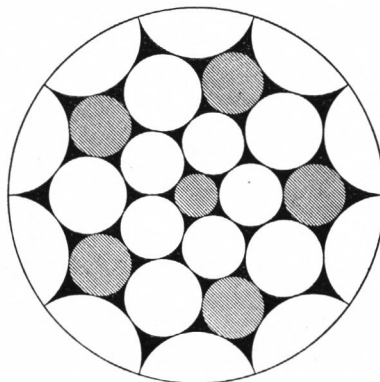


Abb. 63 G.

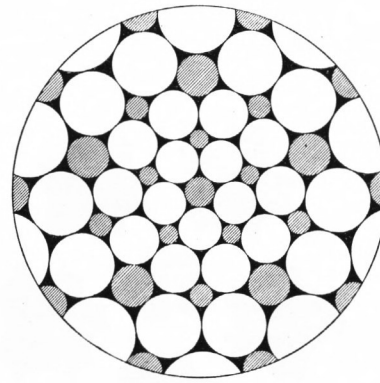


Abb. 64 G.

Diese ist beweglich, wobei die Viererringe zu Rauten verformt werden und schließlich in je 2 Dreierlinge übergehen. Die Endform 70 enthält 12 Fünfer- und 80 Dreierlinge und entspricht der  $H$ -Zuteilung des Kreises. Die abgeänderte Anordnung ist gleich der Endform nicht spiegelbildlich.

65. Aus der  $L$ -Zuteilung des Kreises geht bei der DI-Gr. eine weitere Anordnung von 60 Kreisen hervor, die sich in 20 Sechser- und 12 Fünferlinge aufteilen läßt, zweierlei Füllkreise besitzt und spiegelbildlich sowie beweglich ist.  $D\ 0,818$ ,  $r\ 11,64^\circ$ .

66. Die Bewegung geht so vor sich, daß sich die Sechseringe an drei Stellen abplatteln und schließlich eine dreieckige Gestalt annehmen, wobei die Anordnung eine Übergangsform darstellt, bei der die Fünferinge regelmäßig geblieben sind und sich nur gegen die Ausgangslage gleichsinnig gedreht haben.  $D\ 0,777, r\ 13,07^0$ .

Bei der Fortführung der Bewegung über die Übergangsform hinaus knicken die verformten dreieckigen Ringe in den Seitenmitten ein und treten zu je 4 Dreieringen zusammen, wobei die Endform der *H*-Zuteilung 70 herauskommt.

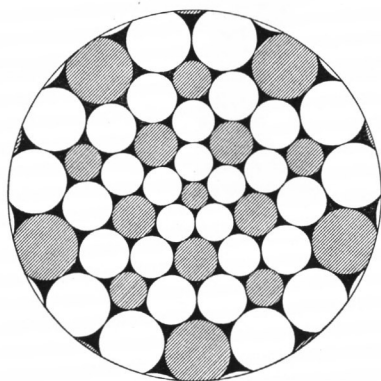


Abb. 65 G.

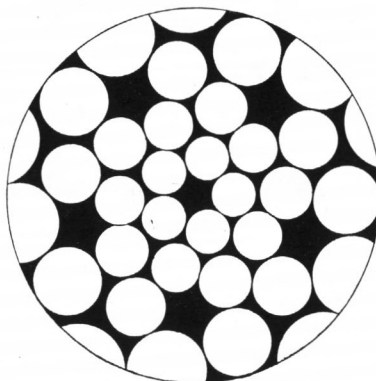


Abb. 66.

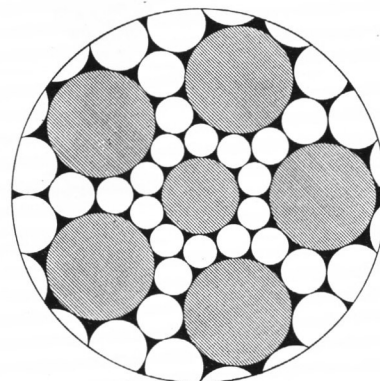


Abb. 67 G.

67. Die *M*-Zuteilung liefert bei der *DI*-Gr. eine sehr lockere Kreisanordnung mit 60 Kreisen, die sich zu 12 Zehner- und 20 Dreieringen zusammenschließen. Es gibt zweierlei Füllkreise. Die Anordnung ist spiegelbildlich und beweglich.  $D\ 0,429, r\ 9,69^0$ .

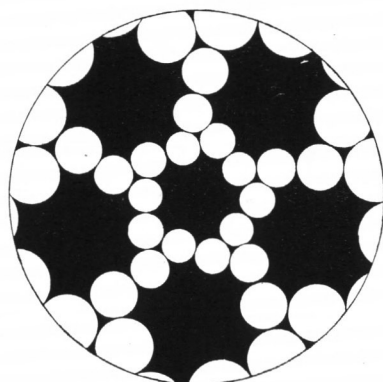


Abb. 68.

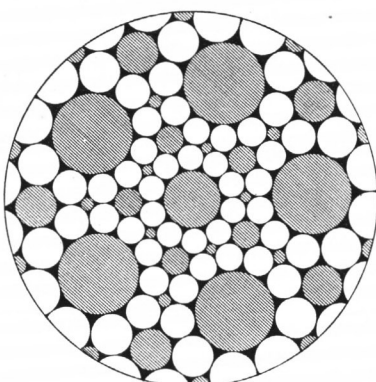


Abb. 69 G.

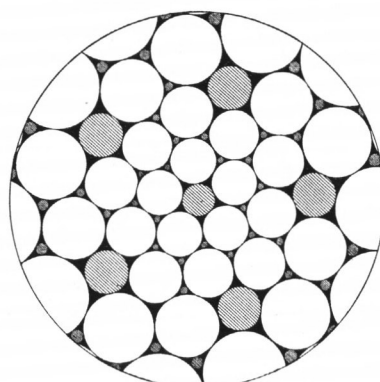


Abb. 70 G.

68. Bei der Bewegung drehen sich die 20 Dreieringe gleichmäßig um ihre Ausgangslage, und zwar alle von außen gesehen im gleichen Sinn. Durch gleichzeitig erfolgende Zunahme der Kreishalbmesser bleiben die Dreieringe in gegenseitiger Berührung. Die Zehneringe verformen sich dabei durch Abplattung an fünf Stellen, die bei der eintretenden Übergangsform zu fünfeckigen Gebilden führt.  $D\ 0,460, r\ 10,05^0$ .

Bei der Weiterführung der Bewegung knicken die Fünfecke in den Seitenmitten ein; es entsteht im Innern ein Fünfering, der von 15 Dreieringen umgeben ist. Damit ist die  $H$ -Anordnung 70 der DI-Gr. erreicht.

69. Die  $S$ -Zuteilung des Kreises erzeugt bei der DI-Gr. eine sehr reiche Anordnung von 120 Kreisen, die sich zu 12 Zehner-, 20 Sechser- und 30 Viererlingen zusammenfügen und sich um dreierlei Füllkreise scharen. Die Anordnung ist spiegelbildlich und läßt keine Abänderung ohne Zerstörung der Regelmäßigkeit zu.  $D\ 0,520, r\ 7,56^\circ$ .

70. Bei der  $H$ -Zuteilung des Kreises zum Grunddreieck der DI-Gr. entsteht die als Endform beweglicher Anordnung von 60 Kreisen wiederholte dichteste Packung dieser Kreise, die 12 Fünferlinge und 80 Dreierlinge enthält. Die Packung ist nicht spiegelbildlich und tritt in zwei zueinander spiegelbildlichen Arten auf.  $D\ 0,818, r\ 13,41^\circ$ .

### III. REGELMÄSSIGE KREISANORDNUNGEN AUF DER PSEUDOSPHERE.

Wenden wir uns nun zu den regelmäßigen Kreisanordnungen auf der Pseudosphäre, so verwickelt sich deren Aufzählung gegenüber der Ebene und der Kugel derart, daß von einer Vollständigkeit insbesondere in der Darstellung abgesehen werden muß. Der Grund hierfür liegt einmal darin, daß es auf der Pseudosphäre nicht nur Kreise mit endlichem Radius, sondern auch solche von unendlich großem Radius (Horozykel) gibt, außerdem auch noch Parallelkurven zu geodätischen Linien (Hyperzykel), die alle äußere Berührungen eingehen und zu regelmäßigen Anordnungen zusammengesetzt werden können, noch mehr aber darin, daß es auf der Pseudosphäre eine unendliche Vielheit von Grunddreiecken gibt, durch deren unendlichfache Wiederholung sie lückenlos überdeckt werden kann. Von diesen Grunddreiecken kann natürlich nur eine kleine Auswahl zur Kennzeichnung der Aufbaumöglichkeiten regelmäßiger Kreisanordnungen auf der Pseudosphäre herangezogen werden. Ehe dieses geschieht, sei kurz darauf hingewiesen, daß sich, wenn man sich auf endliche Kreise beschränkt, die ringförmige Anordnung einer endlichen Zahl von Kreisen und die streifenförmigen Anordnungen von unendlich vielen Kreisen entlang einer geodätischen Linie von den entsprechenden in der Ebene grundsätzlich nicht unterscheiden.

Zur Darstellung der Kreisanordnungen auf der Pseudosphäre verwenden wir jene sehr bekannte winkel- und kreistreue Abbildung derselben, die der stereographischen Abbildung der Kugel entspricht und wobei die gesamte Pseudosphäre schlicht in das Innere eines Grenzkreises abgebildet wird, der selber dem Unendlichen der Pseudosphäre entspricht. Die geodätischen Linien gehen dabei in Kreise über, welche auf dem Grenzkreis senkrecht stehen. Den Bildkreisen der Ebene entsprechen endliche Kreise der Pseudosphäre, wenn sie den Grenzkreis nicht schneiden, Horozykel, wenn sie den Grenzkreis berühren, und Hyperzykel, wenn sie ihn schneiden. Die analytische Darstellung dieser Abbildung ist sehr einfach.



Hat man auf der Pseudosphäre Polarkoordinaten, so braucht man nur den Polarwinkel unverändert in die Bildebene zu übernehmen, während der Polarradius  $s$  auf der Pseudosphäre durch die Beziehung  $s' = k \mathfrak{Zg} \frac{s}{2k}$  in den Polarradius  $s'$  der Bildebene übergeführt wird. Sie unterscheidet sich von der entsprechenden Darstellung der stereographischen Abbildung nur dadurch, daß die Tangente durch die hyperbolische Tangente ersetzt wird. Obwohl die Abbildung der geodätischen Linien in die Orthogonalkreise des Grenzkreises im Zusammenhang mit der Winkeltreue der Abbildung genügt, um alle möglichen regelmäßigen Kreisanordnungen geometrisch im Bilde zu konstruieren, tut man doch gut daran, Mittelpunkte und Halbmesser der Bildkreise zu berechnen, wozu man die Trigonometrie der hyperbolischen Ebene benützen muß. Ich habe mich dabei einer Tabelle der Gudermannschen Winkel  $S = 2 \operatorname{arctg} e^{\frac{h}{s}} - \frac{\pi}{2}$ , die zu den Längen  $s$  auf der Pseudosphäre gehören, bedient, die im folgenden mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet werden. Zwischen den trigonometrischen Funktionen des Gudermannschen Winkels  $A$  und den hyperbolischen Funktionen der Strecke  $a$  auf der Pseudosphäre bestehen dann die einfachen Beziehungen:  $\mathfrak{S}in \frac{a}{k} = \operatorname{tg} A$ ,  $\mathfrak{C}os \frac{a}{k} = \sec A$ ,  $\mathfrak{Zg} \frac{a}{k} = \sin A$   
 $\mathfrak{Zg} \frac{a}{2k} = \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ .

Für die Berechnung der pseudosphärischen Dreiecke mit den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$ , den Seiten  $a, b, c$  und den zugehörigen Gudermannschen Winkeln  $A, B, C$  genügen folgende Formeln  $\sin a : \sin \beta : \sin \gamma = \operatorname{tg} A : \operatorname{tg} B : \operatorname{tg} C$ ,  $\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \sec A$ ,  
 $\cos \alpha = \frac{\cos A - \cos B \cos C}{\sin B \sin C \cos A}$ , die für rechtwinklige Dreiecke  $\left(\gamma = \frac{\pi}{2}\right)$  sich folgendermaßen vereinfachen:  $\sin a : \sin \beta = \operatorname{tg} A : \operatorname{tg} B$ ,  $\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} C}$ ,  $\cos \alpha = \frac{\sin B}{\sin C}$ ,  $\cos C = \cos A \cos B$ . Die Formel für den Zusammenhang der Polarradien auf der Pseudosphäre  $s, S$  und im ebenen Bild wird  $s' = k \operatorname{tg} \frac{S}{2}$ . Das Vergrößerungsverhältnis der winkeltreuen Abbildung im Abstand  $s$  vom Mittelpunkt ist:  $\frac{ds'}{ds} = \frac{1}{2 \mathfrak{C}os \frac{s}{2k}} = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{S}{2}\right)$ . Sein Wert ist im Mittelpunkt des Grenzkreises  $\frac{1}{2}$ ; er nimmt mit wachsendem  $s$  ab und wird für  $s = \infty$  am Grenzkreis null. Es werden demnach die unter sich gleichen Anordnungs-kreise der Pseudosphäre um so kleiner abgebildet, je ferner sie liegen, ganz im Gegensatz jener auf der Kugel, die in der Abbildung nach außen immer größer werden. Die Abbildung ein und derselben Kreisanordnung auf der Pseudosphäre fällt je nach der Wahl des Mittelpunktes der Abbildung verschieden aus. Man wird schon aus Gründen der Darstellung den Mittelpunkt so wählen, daß die Abbildung mehrere Spiegelachsen erhält. Beispiele verschiedener Abbildungen derselben Kreisanordnung finden sich im Nachstehenden. Mehr noch als bei der Kugel verdient die ebene Abbildung einer pseudosphärischen Kreisanordnung eine selbständige Beachtung, da sie eine gesetzmäßige Anordnung sich berührender Kreise verschiedenen

Halbmessers in der Ebene bietet. Die Aufzählung der netzartigen Kreisanordnungen auf der Pseudosphäre soll nun im engsten Anschluß an jene auf der Kugel erfolgen und mit dem kleinsten gleichschenkelig-rechtwinkligen Grunddreieck mit Winkeln  $\pi/5$  beginnen, das dem Grunddreieck der Tetraedergruppe auf der Kugel entspricht. Je 10 solcher Dreiecke lassen sich zu einem regelmäßigen Fünfeck vereinigen und dann kann die ganze Pseudosphäre parkettförmig in Fünfecke aufgeteilt werden, die zu fünft um einen Punkt herumliegen, ähnlich wie bei der Tetraedereinteilung der Kugel, bei der jeweils drei Dreiecke um einen Punkt herum liegen.

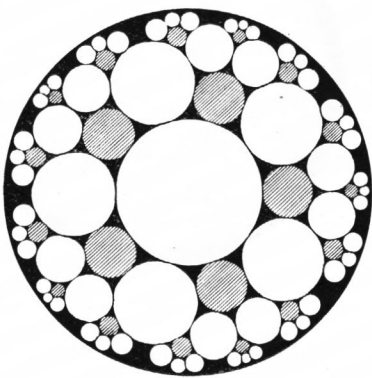


Abb. 71.

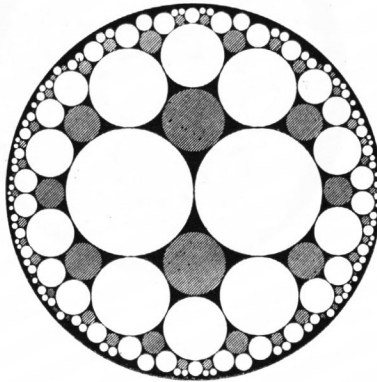


Abb. 72 G.

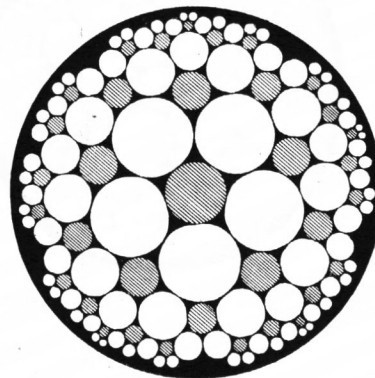


Abb. 73.

### 1. Das kleinste gleichschenklige Grunddreieck der Pseudosphäre.

71 und 72. Wegen der Gleichschenkligkeit fallen die beiden Kreisanordnungen, die der *E*- und der *W*-Verbindung von Kreis und Dreieck entsprechen, zusammen. Die Anordnung enthält nur Fünfer- und Füllkreise einerlei Art. Sie ist in zweierlei Darstellung wiedergegeben, wobei in der ersten der Mittelpunkt eines Anordnungskreises, in der zweiten der Berührungspunkt zweier Anordnungskreise in die Mitte des Grenzkreises abgebildet ist.

73. Aus der *K*-Verbindung von Kreis und Grunddreieck geht eine ganz ähnliche, auch aus lauter Fünferlingen bestehende Kreisanordnung hervor. Der Unterschied beider besteht darin, daß sich bei dieser Anordnung um einen Anordnungskreis vier Fünferlinge herumlegen, bei der vorherigen dagegen fünf.

74. Die *F*-Verbindung von Kreis und Grunddreieck erzeugt eine Kreisanordnung mit abwechselnd Fünfer- und Viererringen. Um einen Anordnungskreis herum liegen 2 Fünfer- und 2 Viererringe herum. Diese Anordnung liefert auch die *K*-Verbindung mit dem folgenden Grunddreieck.

75. Die *L*- und *M*-Verbindung von Kreis- und Grunddreieck liefern die gleiche Kreisanordnung, die sich aus Fünfer- und Zehnerringen aufbauen läßt. Um jeden

Anordnungskreis liegen 2 Zehner- und 1 Fünfering herum. Bei der gewählten Darstellung fällt der Berührungspunkt zweier Kreise in die Mitte des Grenzkreises.

76. Die *S*-Verbindung führt auf eine Kreisanordnung, in der Vierer- und Zehnerringe abwechseln. Um einen Anordnungskreis herum liegen zwei Zehner- und ein Viererring. Die gleiche Anordnung folgt aus der *M*-Verbindung mit dem nächsten Grunddreieck.

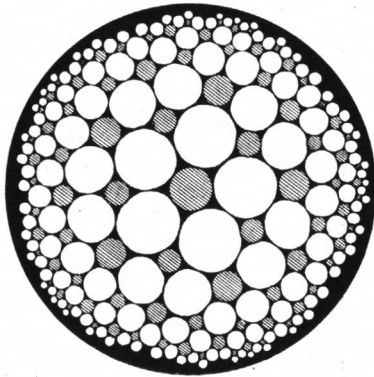


Abb. 74.

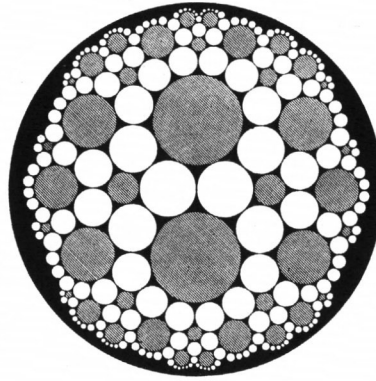


Abb. 75 G.

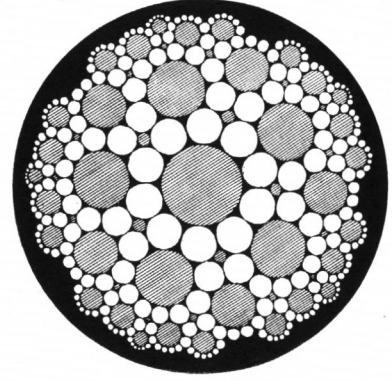


Abb. 76.

77. Die *H*-Verbindung von Kreis- und Grunddreieck ergibt eine spiegelachsenlose Kreisanordnung, die außer Dreierlingen nur Fünferlinge enthält, wobei um einen Kreis zwei Fünfer- und drei Dreierlinge herumliegen. Von der *F*-Anordnung 74 führt ein stetiger Übergang zur *H*-Anordnung, wobei die Viererringe

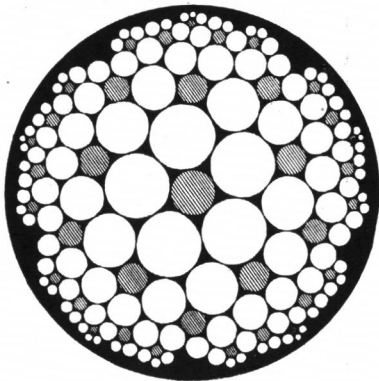


Abb. 77.

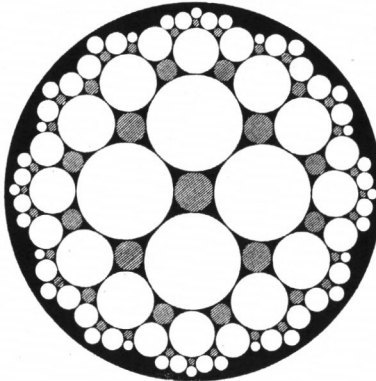


Abb. 78 G.

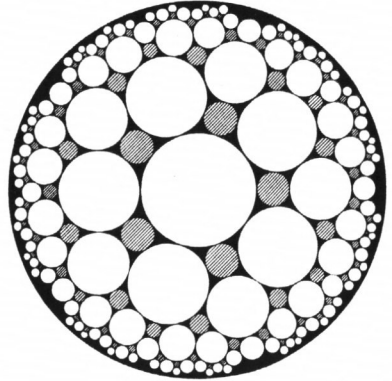


Abb. 79 G.

der ersten rautenförmig zu doppelten Dreierlingen verformt werden. Ein zweiter Übergang zur *H*-Anordnung kann auch von der *M*-Anordnung 75 erfolgen. Dabei drehen sich die Fünferlinge der *M*-Anordnung gleichsinnig um ihre festgehaltenen Mittelpunkte und vergrößern dabei ihre Kreishalbmesser bis zur gegenseitigen Berührung. Die dabei eintretende Verformung der Zehnerringe führt schließlich so weit, daß der Zehnerring in einen Fünferling mit aufgesetzten Dreierlingen übergeht (ähnlich wie in Abb. 2 S. 3), wonach die *H*-Anordnung 77 erreicht ist.



## 2. Das halbierte gleichschenklige Grunddreieck.

Wird das gleichschenkligh-rechtwinklige Grunddreieck mit den Basiswinkeln gleich  $\frac{\pi}{5}$  durch die Höhe auf die Hypotenuse halbiert, so entstehen 2 spiegelgleiche Dreiecke mit den Winkeln  $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ , die selber wieder als Grunddreiecke gelten können. Wenn das erstgenannte Grunddreieck als Gegenstück zu dem Kugelgrunddreieck der Tetraedergruppe gelten kann, so läßt sich das halbierte als pseudosphärisches Gegenstück zu dem Kugelgrunddreieck der Würfel-Oktaeder-Gruppe auffassen. Je 8 Grunddreiecke lassen sich zu einem Quadrat und je 10 zu einem regelmäßigen Fünfeck zusammenlegen. Dadurch kann die Pseudosphäre entweder in ein „Parkett“ von Quadraten, die zu fünft um eine Ecke herumliegen, oder in ein solches von Fünfecken, die zu viert um eine Ecke herumliegen, aufgeteilt werden, ähnlich wie die Kugel bei der Würfeinteilung in Quadrate, die zu dritt um einen Punkt herumliegen, oder bei der Oktaedereinteilung in Dreiecke, die zu viert um einen Punkt herumliegen, zerlegt wird.

78. und 79. Aus der *E*-Verbindung von Kreis und Grunddreieck entsteht eine Kreisanordnung aus lauter Viererringen, die sich zu fünft um einen Kreis legen. Diese Anordnung ist in doppelter Weise dargestellt, einmal mit einem Viererring und das andere Mal mit einem Anordnungskreis in der Mitte des Grenzkreises.

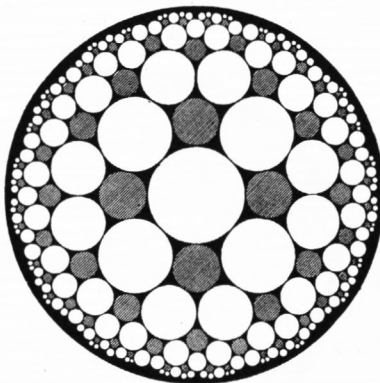


Abb. 80 G.

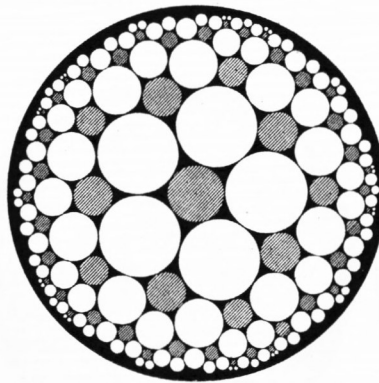


Abb. 81 G.

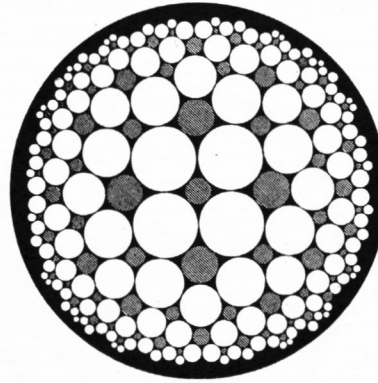


Abb. 82 G.

80. und 81. Die *W*-Verbindung von Kreis und Grunddreieck erzeugt eine aus lauter Fünferingen bestehende Kreisanordnung, die in ähnlicher Weise wie die vorige doppelt abgebildet ist.

82. Aus der *K*-Verbindung geht eine aus Vierer- und Fünferingen bestehende Kreisanordnung hervor, die mit einem Viererring in der Mitte des Grenzkreises wiedergegeben ist.

83. und 84. Auch die *F*-Verbindung führt auf eine aus Vierer- und Fünfer- ringen aufgebaute Kreisanordnung, die in doppelter Weise abgebildet ist, mit einem Vierer- oder einem Fünfer- ring in die Mitte des Grenzkreises. Bei der zweiten Abbildung sind die Füllkreise der Viererringe durch Punkte hervorgehoben. Die Anordnung ist beweglich und kann unter rautenförmiger Verformung der Viererringe in die dichtere *H*-Anordnung 90 übergeführt werden, wobei die Viererringe zuletzt in doppelte Dreier- ringe übergehen.

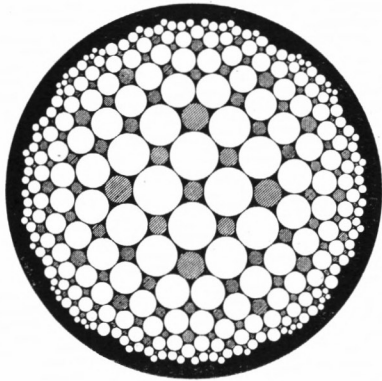


Abb. 83 G

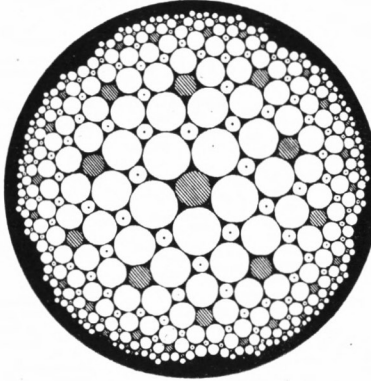


Abb. 84.

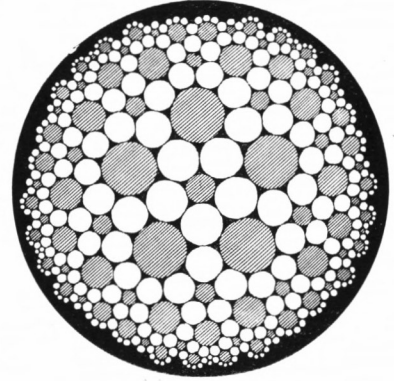


Abb. 85.

85. und 86. Die *L*-Verbindung ist die Quelle einer Kreisanordnung, die aus Fünfer- und Achterringen besteht und sowohl mit einem Fünfer- ring wie auch mit einem Achterring in der Mitte des Grenzkreises dargestellt ist. Sie ist beweglich, wobei sich die Fünfer- ringe um ihre Mittelpunkte gleichsinnig um gleichen

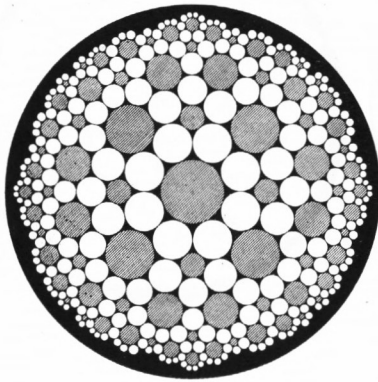


Abb. 86 G.

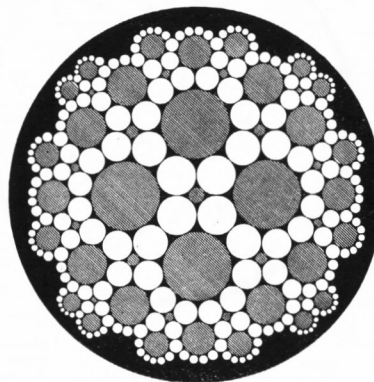


Abb. 87 G.

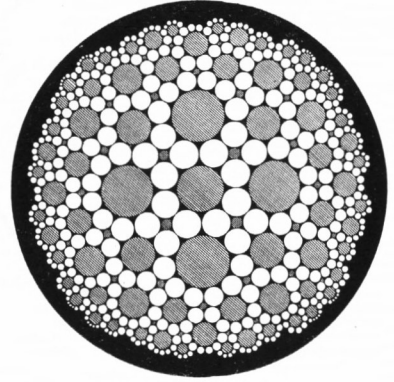


Abb. 88 G.

Winkel drehen und dadurch die Achterringe verformen. Am Ende der Verformung gehen diese in Viererringe mit aufgesetzten Dreier- ringen über, was zur *H*-An- ordnung 90 führt.

87. Die *M*-Verbindung von Kreis und Grunddreieck erzeugt eine lockere, aus Zehner- und Viererringen bestehende bewegliche Kreisanordnung, die mit

einem Viererring in der Mitte des Grenzkreises wiedergegeben ist. Bei der Bewegung drehen sich die Viererringe gleichsinnig um gleiche Winkel. Aus der dabei eintretenden Verformung der Zehnerringe gehen diese schließlich als Fünferinge mit aufgesetzten Dreieringen hervor, womit wieder die  $H$ -Anordnung 90 erreicht ist.

88 und 89. Die  $S$ -Verbindung von Kreis und Grunddreieck erzeugt eine reiche, aber unbewegliche Kreisordnung aus Zehnerringen, Achter- und Viererringen bestehend, die doppelt abgebildet ist, mit einem Achter- bzw. einem Zehnerring in der Mitte des Grenzkreises.

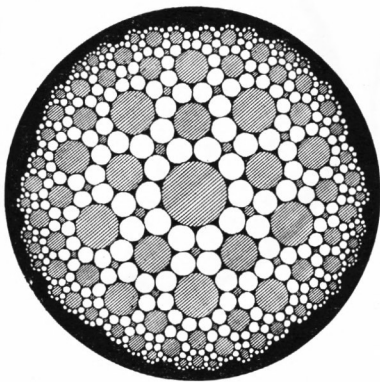


Abb. 89.

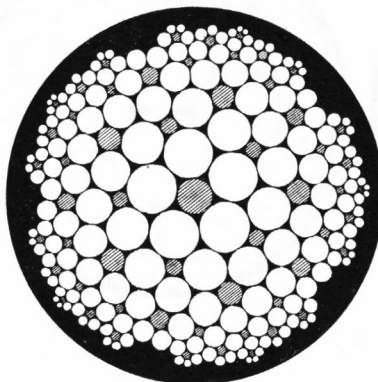


Abb. 90.

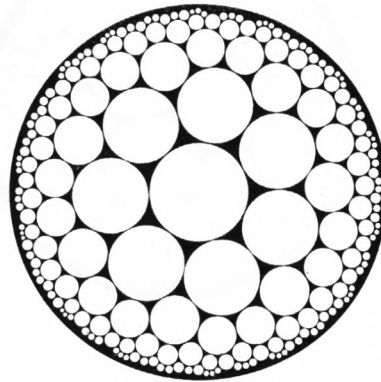


Abb. 91 G.

90. Die  $H$ -Verbindung führt auf die schon wiederholt als Grenzlage einer beweglichen Kreisordnung aufgetretenen, verhältnismäßig dichtesten Kreisordnung ohne Spiegelachsen, die in zwei spiegelbildlichen Formen auftritt, je nachdem man das eine oder sein spiegelbildlich verwandtes Grunddreieck der Verbindung zugrunde gelegt hat. Bei der beweglichen Kreisordnung kann die Drehung der Ringe in einen oder anderen Sinn vor sich gehen und führt dann am Schlusse zu einer der beiden  $H$ -Anordnungen. Diese beiden spiegelbildlich verschiedenen  $H$ -Anordnungen können also durch Auflockerung in mehrfacher Weise ineinander übergeführt werden, wobei sie in allen Stadien des Übergangs das Kennzeichen der Regelmäßigkeit bewahren.

### 3. Das kleinste ungleichschenklige Grunddreieck der Pseudosphäre.

Das kleinste gleichschenklige Grunddreieck mit den Winkeln  $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}$  hat das pseudosphärische Defizit  $\frac{\pi}{10}$  und daher den Inhalt:  $\frac{\pi k^2}{10}$ , das halbierte den Inhalt  $\frac{\pi k^2}{20}$ . Das ist jedoch nicht etwa das kleinste Grunddreieck überhaupt, dieses hat vielmehr die Winkel  $\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$  und den Inhalt  $\frac{\pi k^2}{42}$ . Vierzehn solcher Grunddreiecke können zu einem regelmäßigen Siebeneck zusammengefaßt werden. Mit solchen Siebenecken, die zu dritt um

eine Ecke herumliegen, läßt sich die Pseudosphäre lückenlos bepflastern. Man kann auch 6 Grunddreiecke zu einem gleichseitigen Dreieck mit Winkeln von  $\frac{2\pi}{7}$  vereinigen, von denen 7 um einen Punkt herumgelegt werden können und auf solche Weise die Fläche der Pseudosphäre mit gleichseitigen Dreiecken ausschöpfen. Damit ist das Gegenstück zum Kugelgrunddreieck der Dodekaeder-Ikosaedergruppe gekennzeichnet. Es folgt nun die Aufzählung der zu dem Dreieck gehörigen regelmäßigen Kreisanordnungen.

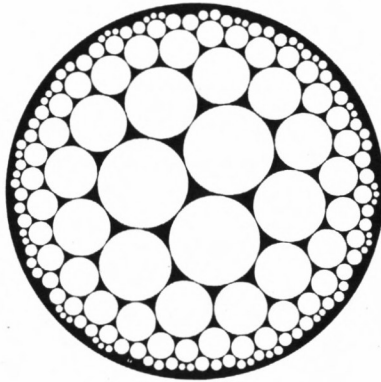


Abb. 92 G.

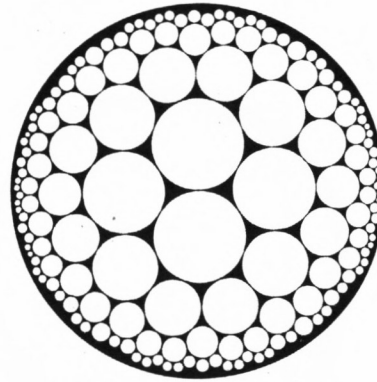


Abb. 93 G.

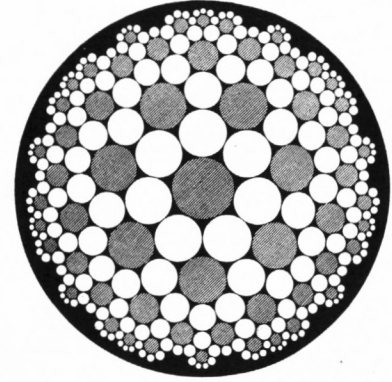


Abb. 94 G.

91-93. Die *E*-Verbindung mit dem Grunddreieck führt auf eine dichte Kreisanordnung, bei der nur Dreierreihen vorkommen, die zu siebent um einen Kreis herumliegen. Die Anordnung ist in dreifacher Darstellung wiedergegeben, wobei der Mittelpunkt des Grenzkreises mit dem Mittelpunkt eines Anordnungs-kreises oder mit dem Mittelpunkt eines Dreierreinges oder mit dem Berührungspunkt zweier Kreise zusammenfällt.

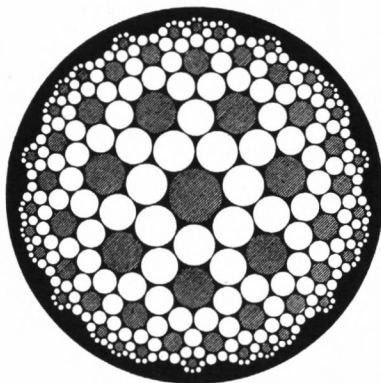


Abb. 95 G.

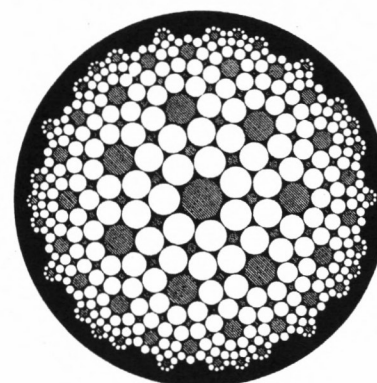


Abb. 96 G.

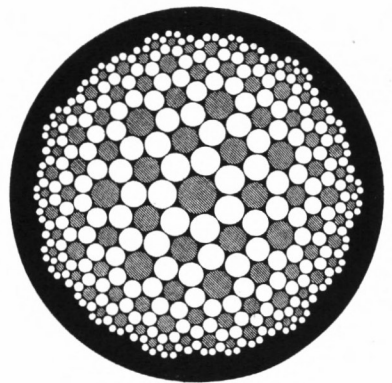


Abb. 97 G.

94. Aus der *W*-Verbindung von Kreis und Grunddreieck folgt eine Kreisanordnung, die aus lauter Siebenerreihen besteht und auf regelmäßige Weise nicht verformbar ist.

95. Wenig davon verschieden ist die aus der *K*-Verbindung hervorgehende Kreis-anordnung, in Siebener- und Dreierlingen abwechseln, die auch unbeweglich ist.

96. Hingegen ist die aus der *F*-Verbindung hervorgehende aus Siebener-, Vierer- und Dreierlingen bestehende Kreis-anordnung wieder beweglich, wobei die Viererringe sich rautenförmig verformen und schließlich in doppelte Dreier-linge übergehen. Die Grenzlage besteht dann nur mehr aus Siebener- und Dreier-lingen. Abb. 102.

97. Die *L*-Verbindung führt auf eine Anordnung, in der Siebener- mit Sechser-lingen abwechseln. Sie ist ebenfalls beweglich, wobei sich die Siebeneringe gleichförmig um ihre Mittelpunkte drehen und dabei ihre Kreishalbmesser so vergrößern, daß die gegenseitige Berührung nicht verloren geht. Die Sechseringe verformen sich dabei durch Abplattung an drei Stellen, auf die dann Einknickung

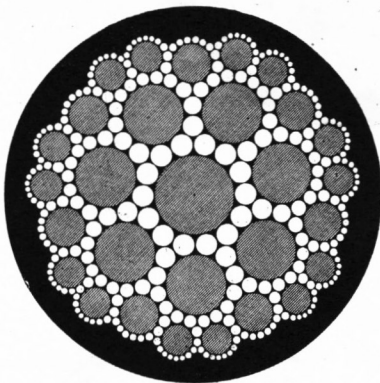


Abb. 98 G.

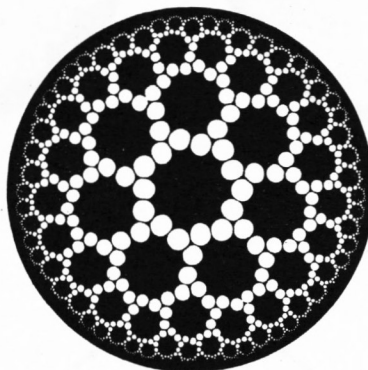


Abb. 99.

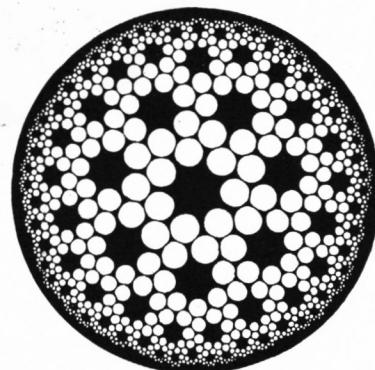


Abb. 100.

erfolgt, das schließlich zum Übergang des Sechseringes in einen mittleren Dreier- ring mit drei seitlich aufgesetzten führt, wodurch der Übergang von der ursprüng- lich spiegelbildlichen Anordnung zu der dichteren ohne Spiegelachsen erfolgt. Die Grenzlage ist die gleiche zur *H*-Verbindung gehörige Kreis-anordnung wie jene am Schlusse des letzten Absatzes. Abb. 102.

98–100. Auf die gleiche Grenzanordnung führt die Bewegung der aus der *M*- Verbindung hervorgegangenen spiegelbildlichen Kreis-anordnung 98, die aus Vier- zehner- und Dreierlingen besteht. Bei der gleichmäßigen Drehung der Dreier- ringe erfolgt zunächst eine durch Abplattung an sieben Stellen gekennzeichnete Veränderung der Vierzehneringe Abb. 99, an welche sich eine Einknickung der abgeplatteten Stellen anschließt, wodurch der ursprüngliche Vierzehnering in einen Siebenering mit 7 aufgesetzten Dreierlingen übergeht, wie das die Bilder 99 und 100 zeigen, von denen das erste die Abplattung der Vierzehneringe, das folgende die Einknickung kurz vor dem Endstadium darstellt.



101. Die *S*-Verbindung von Kreis und Grunddreieck liefert eine sehr, reiche aber unbewegliche Kreisanordnung, die aus Vierzehner-, Sechser- und Vierer- ringen besteht.

102. Die *H*-Verbindung von Kreis und Grunddreieck erzeugt dann die dichteste aus Siebener- und Dreier- ringen aufgebaute Grenzanordnung ohne Spiegel- achsen, die schon bei der Bewegung früherer Kreisanordnungen aufgetreten ist und in zwei spiegelbildlichen Formen erscheint.

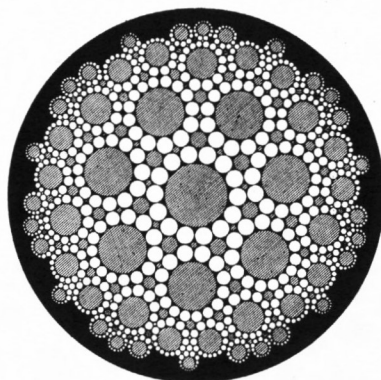


Abb. 101 G.

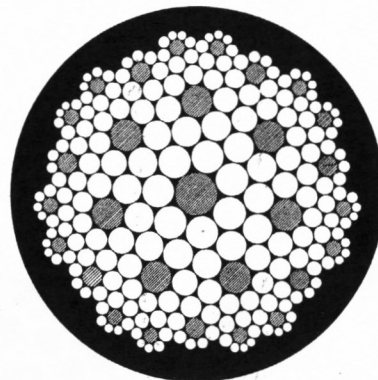


Abb. 102 G.

Die Auswahl unter den möglichen Grunddreiecken der Pseudosphäre ist sehr groß. Die zugehörigen Kreisanordnungen sind von den bisher aufgezählten zwar verschieden, jedoch nicht sehr wesentlich. Das zeigt der Vergleich der *E*-Anordnung Abb. 91–93, die zum

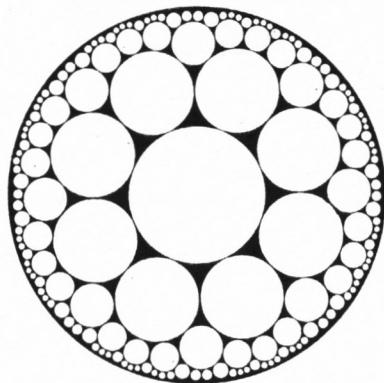


Abb. 103 G.

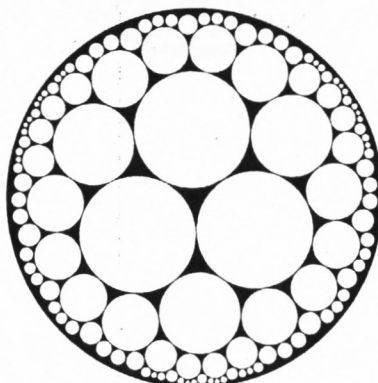


Abb. 104 G.

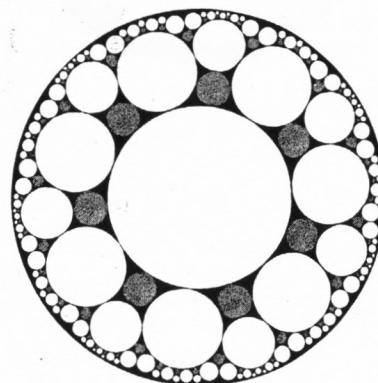


Abb. 105 G.

Dreieck  $\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$  gehört, mit derjenigen zum Dreieck  $\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$  gehörigen, die in den Bildern 103 u. 104 in doppelter Form dargestellt ist, einmal mit einem Anordnungs- kreis in der Mitte des Grenzkreises, das andere Mal mit einem Dreier- ring an dieser Stelle. Die Gegenüber- stellung des Bildes 91 der *E*-Anordnung des Dreiecks  $\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$  mit jener des Dreiecks  $\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$



Abb. 105 lehrt das gleiche. Im ersten Fall liegen Dreieringe, im zweiten Viererlinge vor, die sich in beiden Fällen zu siebent um einen Anordnungskreis gruppieren. Der Unterschied würde noch weniger auffallen, wenn im ersteren Fall die Füllkreise der Dreieringe gezeichnet wären, sowie im zweiten Fall die Füllkreise der Viererlinge. Wesentlich neue Formen von Kreisanordnungen treten dagegen auf, wenn ein oder zwei spitze Winkel im Grunddreieck zu Null geworden ist. Das Grunddreieck hat dann ein oder zwei Ecken im Unendlichen. In solchen Fällen gibt es sowohl unter den Anordnungskreisen wie unter den Füllkreisen Horozykel; den letzteren entsprechen Ringe aus unendlich vielen Anordnungskreisen. In der Abbildung werden die Horozykel Kreise, die den Grenzkreis berühren. Wir beginnen bei der Aufzählung der Kreisanordnungen mit dem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck, das zwei Winkel Null hat. Es kann durch das Lot von der Rechtwinkelecke auf die Hypothense in zwei spiegelgleiche rechtwinklige Dreiecke geteilt werden, die die Winkel  $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$  haben. Diese sind aber nicht die kleinsten rechtwinkligen Grunddreiecke mit einem Winkel Null. Kleiner ist das Grunddreieck mit den Winkeln  $0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ . Von diesem und vom Grunddreieck mit zwei Nullwinkeln ausgehend, sollen die zugehörigen Kreisanordnungen aufgezählt und dargestellt werden.

#### 4. Das Grunddreieck mit zwei Nullwinkeln auf der Pseudosphäre.

In der Abbildung legen wir den rechten Winkel in die Mitte des Grenzkreises. Das Dreieck hat dann im Bild zwei gerade Katheten und eine kreisförmige Hypothense, die einen Viertelkreis ausmacht.

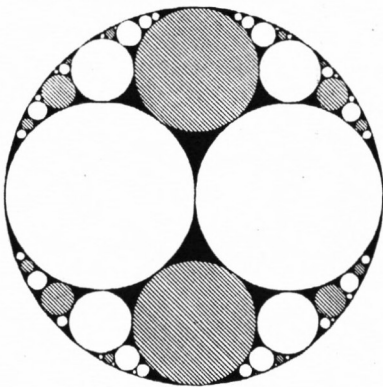


Abb. 106.

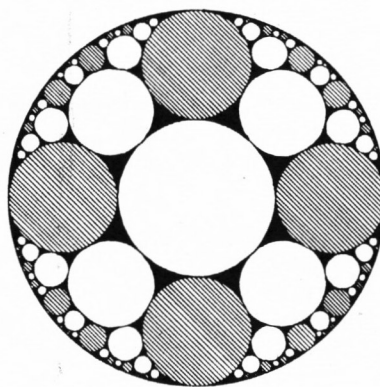


Abb. 107.

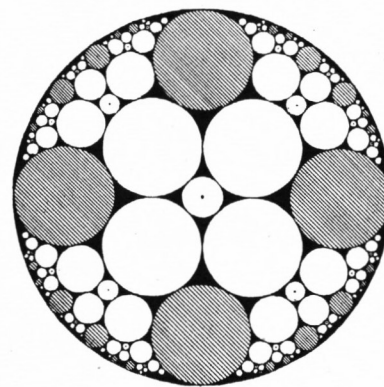


Abb. 108.

106. Die *E*- bzw. *W*-Verbindung des Grunddreiecks mit dem Kreis gibt bei der Wiederholung Horozykel als Anordnungskreise, die sich zu Ringen von unendlich vielen Horozykeln verbinden. Die Füllkreise dieser Ringe sind selber wieder Horozykel. Da alle Horozykel deckungsgleich sind, kann man die Füllhorozykel mit den Anordnungshorozykeln zu einer einzigen Anordnung von

Dreieringen zusammenfassen, die als Ganzes regelmäßig ist und in Bild 112 allerdings mit einem Dreiering in der Mitte des Grenzkreises dargestellt ist.

107. Bei der *K*-Verbindung entsteht eine Kreisanordnung von endlichen Kreisen, die aber lauter Ringe von unendlich vielen Kreisen bilden. Alle Füllkreise sind demnach Horozykel, deren Bilder den Grenzkreis berühren. Um jeden Anordnungskreis legen sich 4 unendliche Ringe, von denen er ein Bestandteil ist.

108. Aus der *F*-Verbindung entsteht eine Kreisanordnung mit Viererringen und unendlich großen Ringen. Im Bilde 108 sind die Füllkreise der ersteren durch die Mittelpunkte hervorgehoben. Sie läßt eine Verformung zu, bei der die Viererringe abwechselnd nach verschiedenen Richtungen rautenförmig zu Doppeldreieringen verzerrt werden, die in der zur *H*-Verbindung gehörigen Anordnung 111 endigt.

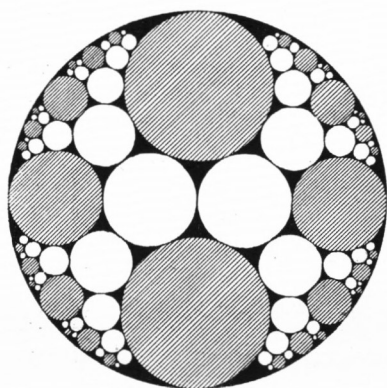


Abb. 109.

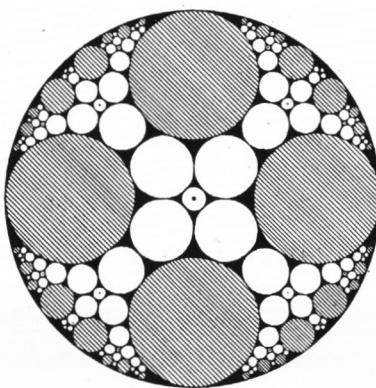


Abb. 110.

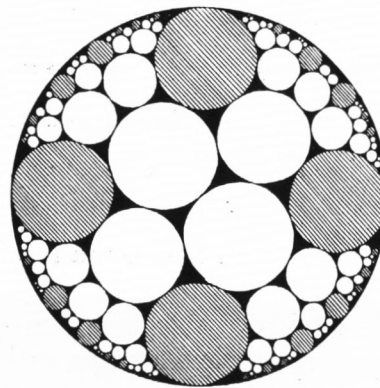


Abb. 111.

109. Die *L*- und *M*-Verbindung von Kreis und Grunddreieck ergeben die gleiche, nur aus unendlich großen Ringen bestehende Kreisanordnung, die besonders locker und daher auch beweglich ist. Jeder Kreis gehört gleichzeitig drei solchen Ringen an. Durch eine Verformung der Ringe durch Abflachen und Einknicken geht diese Kreisanordnung schließlich in die zur *H*-Verbindung gehörige über. Abb. 111.

110. Die *S*-Verbindung veranlaßt eine aus Viererringen und unendlichen Ringen bestehende, der zur *F*-Verbindung gehörenden Kreisanordnung nahestehende Anordnung, die auch beweglich ist. Die Füllkreise der Viererringe sind wieder durch Punkte hervorgehoben. Durch gleichmäßige Drehung der Viererringe im selben Sinne entstehen neue regelmäßige Kreisanordnungen, die sich schließlich zu jener verdichten, die zur *H*-Verbindung des Kreises mit dem halbierten Grunddreieck gehört. Abb. 111.

111. Die *H*-Verbindung des Kreises mit dem gleichschenkligen Grunddreieck enthält nur Dreieringe und unendlich große Ringe. Wegen der Spiegelbildlichkeit des Grunddreiecks hat sie durch jeden Kreismittelpunkt zwei zueinander senkrechte Spiegelachsen.

## 5. Das kleinste ungleichschenklige Grunddreieck mit einem Nullwinkel auf der Pseudosphäre.

Zu diesem gehört der größte spitze Winkel, der in einem gestreckten aufgeht, also  $\frac{\pi}{3}$ .

Bei der Abbildung wird der Scheitel dieses Winkels in den Mittelpunkt des Grenzkreises gelegt, wobei sich alsbald drei Spiegelachsen durch diesen Punkt ergeben. Die zugehörigen Kreisanordnungen sind folgende:

112. Der *E*-Verbindung des Kreises mit dem Grunddreieck entspricht eine Kreisanordnung aus lauter Horozykeln, die Dreieringe bilden und die Pseudosphäre dicht erfüllen. Die Anordnung ist ein Gegenstück zu der im Bild 19 dargestellten ebenen Kreisanordnung, dann aber auch zur Dodekaederanordnung (Bild 44), auf der Kugel und zu Siebenerkreisanordnung (Bild 91, 92 und 93)

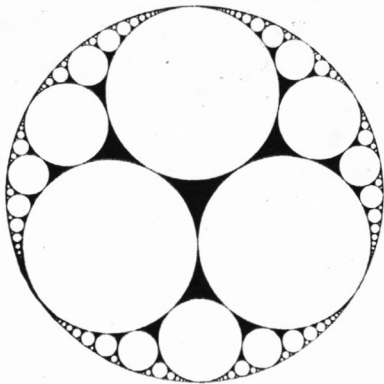


Abb. 112 G.

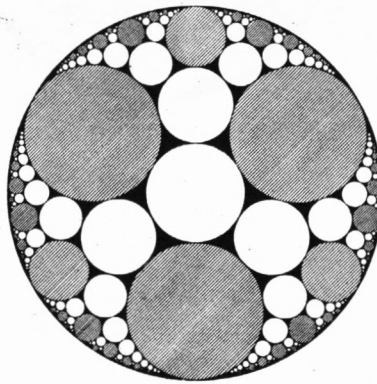


Abb. 113 G.

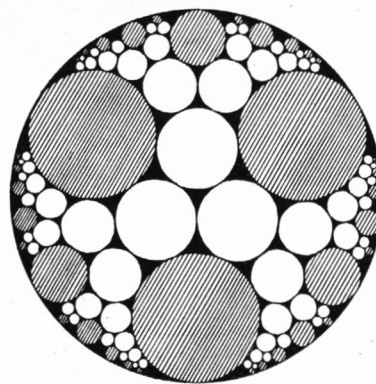


Abb. 114.

auf der Pseudosphäre. Bei der Dodekaederanordnung liegen 5, bei der ebenen Anordnung 6 und bei der Siebenerkreisanordnung 7 Kreise um jeden Anordnungskreis herum, während bei der Horozykelanordnung sich unendlich viele Horozykel um jeden einzelnen herumlegen. Die in Bild 105 dargestellte Horozykelanordnung geht aus der obigen (Bild 111) dadurch hervor, daß abwechselnd Horozykel (durch Schraffur) als Füllkreise gekennzeichnet sind, ähnlich wie es bei Bild 20 gegenüber Bild 19 in der Ebene der Fall war.

113. Die *W*-Verbindung von Kreis und Grunddreieck liefert eine Anordnung aus Kreisen mit endlichem Halbmesser, die sich zu Ringen von unendlich vielen Kreisen verbinden. Die Füllkreise dieser Ringe arten in Horozykel aus; jeder Anordnungskreis berührt drei solcher Horozykel.

114 Aus der *K*-Verbindung geht eine unbewegliche Kreisanordnung aus Dreieringen und unendlich großen Kreisringen hervor. Von jedem Kreis aus verzweigt sich die Reihe der Kreise in zwei weitere, die einen jeweils neuen Horozykel als Füllkreis umschlingen.

115. Die  $F$ -Verbindung führt zu einer beweglichen Kreisanordnung mit Dreier-, Vierer- und unendlich großen Ringen. Die Beweglichkeit erfolgt durch gleichmäßige und gleichsinnige Drehung der Dreierringe um ihre Mittelpunkte, wodurch die Viererringe rautenförmig verformt werden, bis sie schließlich in Doppeldreieringe übergehen, worauf die Anordnung 119 erreicht wird. Bei der Drehung gehen die Spiegelachsen verloren.

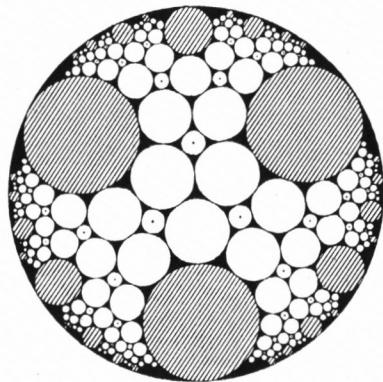


Abb. 115.

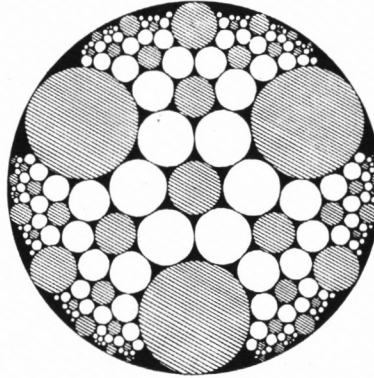


Abb. 116 G.

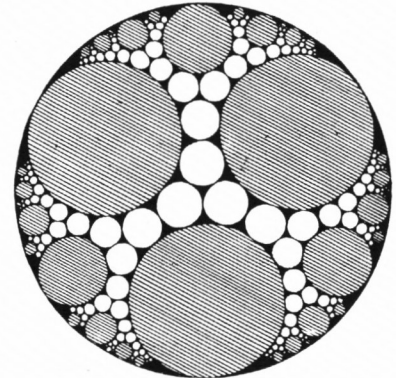


Abb. 117.

116. Auch die aus der  $L$ -Verbindung hervorgehende, aus Dreier-, Vierer- und unendlichen Ringen aufgebaute Kreisanordnung ist durch Drehung der Dreierringe unter Fortfall der Spiegelachsen bis zur Anordnung 119 verformbar.

117. Ein Gleiches gilt von der Anordnung, die auf die  $M$ -Verbindung zurückgeht und die loseste Form unter allen zum gleichen Grunddreieck gehörenden darstellt. Sie besteht nur aus Dreier- und unendlichen Ringen, wobei die Beweglichkeit wieder durch Drehung der Dreierringe eingeleitet wird. Auch hier führt die Beweglichkeit schließlich auf die Anordnung 119.

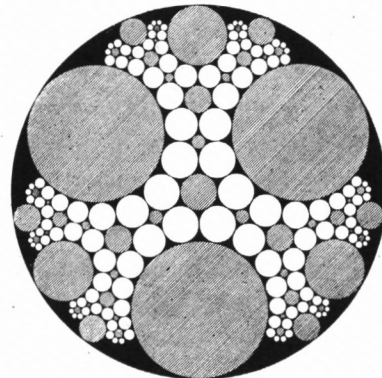


Abb. 118.

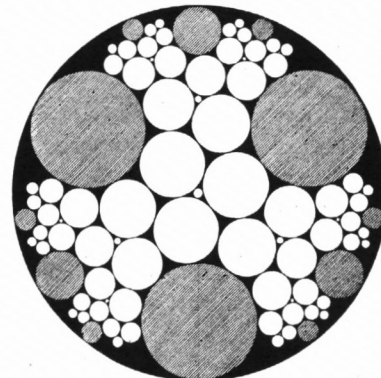


Abb. 119 G.

118. Die  $S$ -Verbindung von Kreis und Grunddreieck führt auf eine reiche, aus Vierer-, Sechser- und unendlichen Ringen aufgebaute Kreisanordnung, die unbeweglich ist.



119. Die  $H$ -Verbindung liefert eine enggepackte Kreisanordnung ohne Spiegelachsen aus Dreier- und unendlichen Ringen. Sie ist das Endergebnis der beweglichen Anordnungen 115, 116 und 117. In der Abbildung sind die Füllkreise jener Dreier- und Viererringe eingezeichnet, deren gemeinsame Drehung die zwischen ihnen liegenden Viererringe in Doppeldreier- (in der Abbildung ohne Füllkreis) überführt. Sie ist ohne Spiegelachsen und tritt in zweierlei spiegelgleichen Formen auf.

Bezüglich der Zeichnung des Kreises der in der  $H$ -Verbindung mit einem Nullwinkel-Grunddreieck steht, ist noch zu bemerken, daß von den früher (S. 2) für die Bestimmung des Mittelpunktes gegebenen Örtern die ausfallen, bei deren Festlegung eine Ecke mit Nullwinkel beteiligt ist. Dafür treten als Ersatz die Mittellinien der parallelen Seiten des Grunddreiecks ein, die in der Nullecke zusammenlaufen. Bei dem Grunddreieck mit zwei Nullwinkeln fällt der Mittelpunkt des  $H$ -Kreises mit dem Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises zusammen.

Eine weitere Bemerkung ist noch an die Anordnung 112 zu knüpfen, die aus lauter Horozykeln mit Dreier- und Viererringen besteht. Für jedes Grunddreieck mit einem Nullwinkel besteht die aus der  $E$ -Verbindung hervorgehende Kreisanordnung bloß aus Horozykeln, nur mit dem Unterschied, daß bei dem Winkel  $\frac{\pi}{n}$  des zweiten spitzen Winkels des Grunddreiecks

die Horozykeln lauter  $n$ -Ringe bilden, so beim Grunddreieck mit den Winkeln  $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$  lauter Viererringe, so daß eine Art Gegenstück zu der ebenen Kreisanordnung 5 entsteht, was sich auch in der Beweglichkeit dieser Anordnung ausdrückt. Für das nächste Grunddreieck mit den Winkeln  $0, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}$  entsteht aus der  $E$ -Verbindung eine unbewegliche Anordnung von Horozykeln, die lauter Fünfer- und Sechser-ringe bilden. So geht es weiter, wobei die geradzahlgigen Ringe beweglich, die ungeradzahlgigen unbeweglich sind. Je größer  $n$  wird, um so unanschaulicher und schließlich unabbildbarer werden die betreffenden Anordnungen, da die Halbmesser der Bildkreise eines außerhalb der Grenzkreismitte abgebildeten Ringes zu ungleich werden und die Bildkreise bald nicht mehr darstellbar sind.

Endlich sei noch die Frage gestreift, ob es auch in unserm Sinne regelmäßige Anordnungen von sich berührenden Hyperzykeln<sup>1</sup> und geodätischen Linien gibt, die in einen erweiterten Kreisbegriff einbezogen werden können und in der Abbildung der Pseudosphäre durch Kreise dargestellt werden. Die Frage ist zu bejahen. Kreise gleichen Halbmessers, die im Inneren des Grenzkreisbildes verlaufen, diesen senkrecht schneiden und sich gegenseitig berühren (vgl. Bild 37), sind das Abbild eines regelmäßigen Ringes aus sich berührenden geodätischen Linien. Als „Inneres“ zu den geodätischen Linien als ausgearteten Kreisen muß dabei der Teil der Pseudosphäre gelten, der auf die hohle Seite der Bildkreise der geodätischen Linien abgebildet wird. Sonst würden die von den geodätischen Linien umgrenzten Kreisflächen nicht auseinander liegen. Eine Erweiterung dieser Anordnung durch Spiegelung an irgendwelchen Achsen oder Drehung um irgendwelche Punkte ist aber dann ausgeschlossen, da sie wieder zu Überdeckungen führen würde. Verschieden

<sup>1</sup> Hierunter sind die Parallelkurven zu geodätischen Linien verstanden.

liegt die Sache bei den Hyperzykeln. Auch diese lassen sich zu regelmäßigen Ringen mit gegenseitiger Berührung anordnen, deren Abbildungen Kreisringe sind, die mit dem Bild des Grenzkreises gleichen Mittelpunkt haben, aber diesen so schneiden, daß die Berührungspunkte der Kreise des Ringes innerhalb des Grenzkreises liegen. Die Erweiterung der entsprechenden Anordnung von Hyperzykeln durch Spiegelung oder Drehung ist zwar möglich, aber die zugehörigen „Grunddreiecke“ sind nur mehr „Dreiseite“, die divergente Seiten und nur eine oder zwei richtige Ecken haben. Von der weiteren Verfolgung dieser Hyperzykelanordnungen möge daher abgesehen werden.

### SCHLUSSWORT.

Wiederholt wurde darauf hingewiesen, daß den Abbildungen der Kreisanordnungen auf der Kugel und der Pseudosphäre eine selbständige von ihrer Herleitung unabhängige planimetrische Bedeutung zukommt, insofern sie gesetzmäßige Anordnungen von ungleichen sich berührenden Kreisen darstellen, die eine Reihe kennzeichnender Eigenschaften besitzen, so z. B. die Füllkreise, die mehr als 3 Anordnungskreise gleichzeitig berühren, aber auch andere Kreise, die Ringe von Anordnungskreisen berührend einschließen, sowie die Abbildbarkeit der Kreisanordnungen auf sich selbst durch Projektion mittels reziproker Radien an einer Vielzahl von Kreisen, die selber Bilder der Spiegelachsen der Kreisanordnungen auf der Kugel oder Pseudosphäre sind. Selbstverständlich kann man die Abbildungsart der eben genannten Kreisanordnungen auch anders wählen, z. B. flächentreu, was ganz neue planimetrische Figuren, die aber nun nicht mehr aus Kreisen bestehen, ergibt. Was ihnen an geometrischer Einfachheit mangelt, ersetzen sie durch unerwartete Formen, deren Zierwert kaum geringer ist. Weit bedeutsamer als diese mehr spielerischen Umformungen sind jedoch jene, welche von den Kreisanordnungen zu Kugelanordnungen führen. Wird nämlich in einer regelmäßigen Kreisanordnung der Ebene oder auf der Kugel jeder Kreis durch die Kugel ersetzt, die die Ebene bzw. die Kugel in jenem Kreise senkrecht schneidet, so entsteht jeweils eine regelmäßige Kugelanordnung im (euklidischen) Raum. Die auf diese Weise aus den Kreisanordnungen auf der Kugel hervorgehenden Kugelanordnungen im Raum bestehen aus einer endlichen Anzahl von Kugeln. Sie entsprechen etwa den ringförmigen Kreisanordnungen der Ebene beim Übergang von der Ebene zum Raum. Obwohl sie einparametrische Kugelanordnungen darstellen, sind sie keineswegs die allgemeinsten regelmäßigen Anordnungen sich berührender Kugeln im Raum, da diese im allgemeinen von zwei Parametern abhängen. Aber sie bilden die Steine zum Aufbau der allgemeinen räumlichen Kugelanordnungen, so wie die Kreisringe als Bausteine der allgemeinen Kreisanordnungen in der Ebene, bezw. auf der Kugel oder Pseudosphäre aufgefaßt werden können.



# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften -  
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1936

Band/Volume: [NF\\_38](#)

Autor(en)/Author(s): Finsterwalder Sebastian

Artikel/Article: [Regelmäßige Anordnungen gleicher sich berührender Kreise in der Ebene, auf  
der Kugel und auf der Pseudosphäre 1-42](#)