

**Abhandlungen
der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**

Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Neue Folge. Heft 70

1955

**Studien zur
trigonometrischen Höhenmessung
im Gebirge**

Mit einem praktischen Beispiel

von

Walther Hofmann

in München

Mit 23 Figuren und 3 Tafeln im Text

Vorgelegt von Herrn Richard Finsterwalder am 2. Juli 1954

München 1955

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei Nördlingen
Printed in Germany

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung	5
I. Die Theorie der trigonometrischen Höhenmessung im Gebirge	8
1. Vernachlässigungen bei der Berechnung im Normalschnitt des Ausgangspunktes	8
2. Eine neue Ableitung der trigonometrischen Höhenformel	12
3. Gegenseitige Höhenunterschiede	17
4. Die Refraktion	19
5. Erforderliche Genauigkeit der Eingangselemente	23
6. Trigonometrischer Höhenunterschied und Bezugsfläche	30
7. Nichtparallelität der Niveauflächen	40
II. Das Höhennetz im Isartal	43
1. Geodätische Grundlagen	43
2. Das Instrument	46
3. Beobachtung der Höhenwinkel	49
4. Berechnung und Ausgleichung der Höhenunterschiede	53
5. Bestimmung der Lotabweichungen	56
6. Berechnung und Ausgleichung der ellipsoidischen Höhenunterschiede	69
III. Das Übertragungsprofil	72
1. Theoretische Betrachtungen	72
2. Trigonometrische Messungen	76
3. Astronomische Messungen und meridionale Lotabweichungen	78
4. Verlauf der Niveauflächen	81
5. Ellipsoidische Höhenunterschiede und Refraktion	83
Literaturverzeichnis	86

EINLEITUNG

Die vorliegende Arbeit hat die Klärung der Frage zum Ziel, unter welchen Bedingungen im Gebirge Meereshöhen mit Hilfe der trigonometrischen Höhenmessung auf 1 cm genau bestimmt werden können. Eine solche Untersuchung schien aus mehreren Gründen sinnvoll und notwendig:

1. Das geometrische Nivellement, das im Flachland und bei günstigen Bodenverhältnissen als genaueste Höhenmeßmethode anzusprechen ist, stößt im Gebirge und besonders bei der Bestimmung von Gipfelhöhen auf erhebliche Schwierigkeiten. Einmal führen nur sehr selten feste Wege mit gleichmäßiger Steigung in die eigentlichen Gipfelregionen. Während die Beschaffenheit des Bodens einen beträchtlichen Unsicherheitsfaktor in die Aufstellung von Instrument und Latten bringt, zwingt die Steilheit des Geländes beim Nivellieren aus der Mitte zu sehr kurzen Zielweiten und damit sehr vielen Aufstellungen. Zum anderen verursacht der schnelle Wechsel der Refraktion in den bodennahen Luftschichten eine Unsymmetrie der Lichtstrahlkrümmung in Rück- und Vorblick der einzelnen Nivellementsstände. Ein Ausgleich der Refraktionseinwirkungen ist damit nicht mehr gegeben; die Refraktionsdifferenzen summieren sich vielmehr systematisch zu Höhenfehlern, die je nach der Neigung des Geländes und dem Gesamthöhenunterschied zwischen den Endpunkten einer Nivellementslinie Beträge von mehreren Zentimetern erreichen können.¹ Da beim Rücknivellement zum Ausgangspunkt in derselben Linie oder in einer Schleife bzw. beim Anschluß an andere, tiefgelegene Höhenfestpunkte die Unsymmetrie der Refraktion den Gesamthöhenunterschied – absolut gesehen – im selben Sinn verfälscht, können diese Fehler auch nicht durch Anschlußwidersprüche aufgedeckt werden. Ob Versuche, die Refraktion durch Messung des vertikalen Temperaturgradienten in den bodennahen Luftschichten jedes Standes zu bestimmen, zu brauchbaren Ergebnissen führen werden, bleibt abzuwarten. Solche zusätzlichen Messungen bedeuten jedenfalls einen erheblichen Mehraufwand an Arbeit bei der Messung und Auswertung.

2. Die trigonometrische Höhenmessung, die im Flachland dem Nivellement weit unterlegen ist, trifft im Gebirge auf weit günstigere Verhältnisse. Einmal sind zwischen den markanten Punkten eines gebirgigen Geländes gegenseitige Sichtverhältnisse meist von vornherein gegeben. Eine komplizierte und kostspielige Signalisierung, wie sie für lange Visuren im Flachland unumgänglich ist, wird damit unnötig.

Vor allem aber verlaufen die Visuren im Gebirge durch bodenfernere Luftschichten, in deren Temperaturfeld eine größere Stabilität und Homogenität auch auf weite Strecken hin erwartet werden darf. Die gegenseitigen Sichten zwischen Gipfelpunkten gewinnen meist dicht hinter den Ausgangspunkten die freie Atmosphäre; sie sind damit aus der Zone der unregelmäßigen und sprunghaft wechselnden Refraktion gehoben, die das Haupthindernis einer genauen trigonometrischen Höhenmessung im Flachland darstellt.

¹ T. J. KUKKAMÄKI, Über die nivellitische Refraktion. Veröff. des Finn. Geod. Inst. Nr. 25, Helsinki 1938. – DERSELBE, Einwirkung der bodennahen Refraktion auf das Präzisionsnivellement. Verh. der 9. Tagung der Balt. Geod. Komm. Helsinki 1937. – K. BROCKS, Meteorologische Hilfsmittel für die geodätische Höhenmessung. Zeitschr. f. Verm. Wesen 1950 S. 145–152.

Die Konstanz der Refraktion im Gipfelniveau der Alpen innerhalb bestimmter Großwetterlagen wurde vor allem durch die Untersuchungen von K. BROCKS² nachgewiesen.

Hinsichtlich einer weiteren Frage, die bei der trigonometrischen Höhenmessung eine wichtige Rolle spielt, scheinen die Verhältnisse im Gebirge zunächst ungünstiger zu liegen als im Flachland. Es ist dies die Frage nach der Gestalt der Bezugsfläche. Gemessene Höhenwinkel beziehen sich immer auf die Niveaufläche des Standortes. Auf Grund der Massenverteilung im Gebirge ist ein unregelmäßiger Verlauf der Niveauflächen zu erwarten. Doch können diese Unregelmäßigkeiten durch zweckmäßige Auswahl der Standpunkte weitgehend ausgeschaltet werden, wie vor allem die Arbeiten R. FINSTERWALDERS in den Chiemgauer Alpen gezeigt haben.³ Die bei diesen Arbeiten erreichte Genauigkeit von etwa 5 cm in der Höhenbestimmung ging jedoch größtenteils zu Lasten der Meßgenauigkeit. Es war also vor allem zu prüfen, ob bei einer gesteigerten Meßgenauigkeit die Einflüsse der Unregelmäßigkeiten in den Niveauflächen unter der Zentimetergrenze gehalten werden könnten. Diese Untersuchung war nicht auf das Gipfelniveau zu beschränken, sie sollte sich vielmehr auch auf den Anschluß eines flächenhaften Gipfelnetzes an Talpunkte mit nivellierten Höhen erstrecken, durch den die absolute Höhe überhaupt erst in das Gipfelniveau übertragen werden kann. Da bei einem solchen Anschluß die Unregelmäßigkeiten im Verlauf der Niveauflächen nicht zu umgehen sind, mußte untersucht werden, mit welchem Verfahren sie genügend genau erfaßt werden können. – Da die trigonometrische Höhenmessung von der Gestalt der Niveauflächen abhängig ist, sollte weiter geprüft werden, welche Rückschlüsse aus ihren Ergebnissen über den Verlauf der Niveauflächen, vor allem über die Verteilung der Lotabweichungen gezogen werden können.

Als praktisches Versuchsfeld wurde ein Höhennetz im Isarquertal zwischen Fall und Vorderriß benutzt. Es ist dies das Gebiet des geplanten Sylvensteinspeichers. Der mögliche Arbeitsaufwand und die verfügbaren Mittel beschränkten das Netz auf eine Ausdehnung von rund 60 qkm. Die absolute Höhe konnte aus einer durch das Isartal verlaufenden Nivellementsline der Bayerischen Landesvermessung ins Gipfelniveau übertragen werden.

Die Schlüsse, die aus der Beobachtung und Berechnung dieses Netzes zu ziehen sind, können noch keinen Anspruch auf allzu große Allgemeinheit erheben. Das Netz ist dafür zu klein, besteht praktisch nur aus Randpunkten und überspannt als einzige größere Massenunregelmäßigkeit die Talfurche der Isar. Erst eine Erprobung der hier gewonnenen Ergebnisse in größerem Rahmen kann über ihre Zuverlässigkeit Aufschluß geben. Dies gilt vor allem für die Bestimmung des Refraktionskoeffizienten, für den aus den Messungen im Isartal der allen bisherigen Erfahrungen widersprechende Wert von 0,20 gefunden wurde. Eine Erweiterung des Isartalnetzes nach Norden über den Kamm der Benedikten-

² K. BROCKS, Vertikaler Temperaturgradient und terrestrische Refraktion, insbesondere im Hochgebirge. Veröff. d. Meteor. Inst. d. Univ. Berlin, Bd. III Heft 4, 1939. – DERSELBE, Zur Beobachtung des vertikalen Dichte- und Temperaturgefälles in den bodenfernen Atmosphärenschichten. – Meteor. Zeitschr. 1940 S. 19–26. – DERSELBE, Lokale Unterschiede und zeitliche Änderungen der Dichteschichtung in der Gebirgsatmosphäre. Ebenda 1940 S. 62–73.

³ R. FINSTERWALDER und H. GÄNGER, Die trigonometrische Höhenmessung im Gebirge. Bericht über eine genaue Höhentriangulation in den Chiemgauer Alpen. Nachr. aus d. Reichs-Verm.-Dienst 1941 Heft 1 S. 3–41.

wand bis in die Zone der vorgelagerten Flyschberge und nach Süden bis zum Karwendelhauptkamm und eventuell weiter bis zum Inntal wäre von großem Interesse.

Die Arbeiten im Isartal konnten mit finanzieller Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft durchgeführt werden.

Bei der Planung und Durchführung der Arbeit wurde mir mannigfache Hilfe zuteil:

Vor allem habe ich Herrn Professor Dr. R. FINSTERWALDER für die Anregung zu danken, mich mit der trigonometrischen Höhenmessung im Gebirge zu beschäftigen und auf der Grundlage seiner Untersuchungen am Nanga Parbat und in den Chiemgauer Alpen weiterzuarbeiten. Mit diesen Arbeiten wurden der trigonometrischen Höhenmessung neue Wege geöffnet, nachdem sie durch Jahrzehnte für genaue Höhenbestimmungen als zu unzuverlässig betrachtet worden war.

Bei der Staatlichen Bauleitung Sylvenstein unter Herrn Baurat K. BALK und bei deren Vermessungsabteilung unter Herrn Reg.Baumeister Dr. W. KUNY fand ich großes Entgegenkommen und wirksame Hilfe für die Feldarbeiten im Isartal. Auch den Forstämtern Fall und Jachenau habe ich für freundliche Unterstützung zu danken.

Bei den Messungen im Isartal und bei den Rechenarbeiten in München unterstützte mich Herr Dipl.-Ing. R. DÖRSCHEL, der als „studentische Hilfskraft“ mit Mitteln der Deutschen Forschungsgemeinschaft zugezogen werden konnte. Durch seine rege und überaus verständnisvolle Anteilnahme an den Arbeiten war er jedoch weit mehr als nur ein Meß- und Rechengehilfe.

Schließlich habe ich noch meinen beiden Kollegen am Institut für Photogrammetrie, Topographie und Allgemeine Kartographie, Herrn Dipl.-Ing. G. LINDIG und Herrn Dipl.-Ing. W. DEIXLER, für ihre Hilfe bei den gegenseitig-gleichzeitigen Messungen im Isartal zu danken.

I. DIE THEORIE
DER TRIGONOMETRISCHEN HÖHENMESSUNG
IM GEBIRGE

1. VERNACHLÄSSIGUNGEN BEI DER BERECHNUNG IM NORMALSCHNITT
DES AUSGANGSPUNKTES

In der Geodäsie wird die Berechnung von Höhenunterschieden aus trigonometrischen Messungen als ebenes Problem behandelt. Die Höhenunterschiede werden in einer Normalebene in Richtung der Visur berechnet. Ist die Bezugsfläche eine Kugel, dann ist diese Berechnungsweise korrekt, da auf der Kugel Normalschnitt und Gegennormalschnitt zusammenfallen. Auf dem Ellipsoid schneiden sich jedoch zwei Flächennormalen im allgemeinen nicht, es gibt keine gemeinsame Normalebene zwischen zwei Ellipsoidpunkten. Auf diese Tatsache wird in den Lehrbüchern bei der Ableitung der trigonometrischen Höhenformel meist hingewiesen⁴ und es wird erklärt, daß die Windschiefe der Lote im Ausgangs- und Endpunkt einer Visur einen vernachlässigbaren Einfluß auf die Genauigkeit der Höhenbestimmung hat. Dies trifft bestimmt zu; durch die gesteigerten Anforderungen an die trigonometrische Höhenmessung kommt jedoch der Frage, wie groß die bei ebener Berechnung begangenen Vernachlässigungen sind, eine gewisse Bedeutung zu. Diese Frage soll daher im folgenden geklärt werden.

Auf dem Ellipsoid als einer analytisch geschlossen darstellbaren Fläche ließe sich die Höhenberechnung exakt für beliebige Fälle durchführen. Doch lohnt die Geringfügigkeit der zu erwartenden Korrekturen gegenüber der ebenen Formel den dabei nötigen Rechenaufwand nicht. Es wird daher hier eine Abschätzung der Vernachlässigungen für eine beliebige Fläche getroffen. Unter der Annahme von Visurlängen, die im Verhältnis zu den Krümmungsradien der Fläche klein sind, und von relativ kleinen Höhenunterschieden ist eine solche Abschätzung mit den Mitteln der „Differentialgeometrie im kleinen“ möglich. Das allgemeine Ergebnis kann dann auf den Sonderfall des Erdellipsoids übertragen werden.

Fig. 1 stellt einen Aufriß der Bezugsfläche in Richtung der Höhenvisur P_0P_1 dar. Π_0 ist die Spur der Berührebene in P_0 ; sie wird in P_0 vom Normalschnitt der Bezugsfläche parallel zur Aufrißtafel berührt. Die Flächennormale durch den Endpunkt P_1 der Visur trifft die Fläche in P'_1 . Die Fläche ist in P'_1 durch ihren parallel zur Aufrißtafel liegenden Normalschnitt angedeutet.

Der wahre Höhenunterschied ΔH zwischen P_0 und P_1 , der gleich der Lotlänge P'_1P_1 ist, unterscheidet sich von dem aus der ebenen Berechnung hervorgehenden Höhenunterschied $P''_1P_1 = \Delta H_0$ durch folgende Korrekturen:

⁴ F. R. HELMERT, Die Mathematischen und Physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, Band I S. 520f.
C. F. BAESCHLIN, Lehrbuch der Geodäsie, S. 299 f.

1. Läßt man zunächst den Unterschied zwischen den Krümmungskorrekturen l_0 und l , der gegen ΔH eine kleine Größe ist, unberücksichtigt, so ist ΔH_0 zum Übergang auf ΔH mit $\cos \psi$ zu dividieren:

$$\Delta H = \frac{\Delta H_0}{\cos \psi}. \quad (1.1)$$

ψ ist dabei der kleine Winkel, um den das Lot durch P_1 gegen die Normalebene der Visur geneigt ist. Dieser Winkel ist – bis auf Glieder höherer Ordnung in s – gleich dem

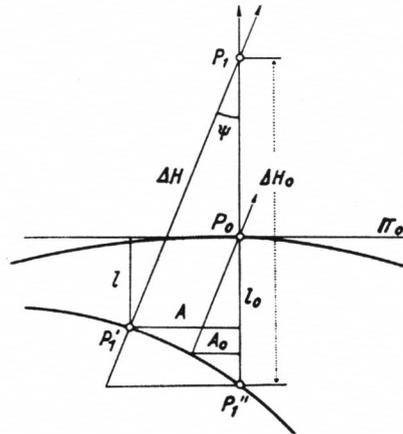


Fig. 1

Winkel, um den die Flächennormale auf dem Weg von P_0 nach P_1'' um die Tangente des Normalschnitts gedreht wird. Er ergibt sich zu

$$\psi = T_0 \cdot s, \quad (1.2)$$

wobei T_0 die geodätische Torsion des Normalschnittes in P_0 , s seine Bogenlänge bis P_1'' bedeutet.⁵ Entwicklung der rechten Seite von (1.1) in eine Reihe nach ψ liefert:

$$\Delta H = \frac{\Delta H_0}{1 - \frac{\psi^2}{2} + \dots} = \Delta H_0 \left(1 + \frac{\psi^2}{2} - \dots \right), \quad (1.3)$$

was mit (1.2) übergeht in:

$$\Delta H = \Delta H_0 \left(1 + \frac{1}{2} T_0^2 s^2 \right). \quad (1.4)$$

Die geodätische Torsion T_0 des gegen die erste Hauptkrümmungsrichtung der Fläche um das Azimut α gedrehten Normalschnitts kann dabei aus den Hauptkrümmungsradien M_0 und N_0 in P_0 nach der Formel

⁵ Siehe hierzu W. HOFMANN, Geodätische Linie und Tangentialvisur. Diplomarbeit in Mathematik. Techn. Hochschule München 1948.

$$T_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M_0} + \frac{1}{N_0} \right) \cdot \sin 2\alpha \quad (1.5)$$

berechnet werden.⁶

2. Die Krümmungskorrektur für ΔH wird bei ebener Berechnung im Normalschnitt $P_0 P_1''$ statt im Normalschnitt $P_0 P_1'$ ermittelt. Sie beträgt

$$l_0 = \frac{1}{2} k_0 s^2, \quad (1.6)$$

wobei die Krümmung k_0 des in P_0 unter dem Azimut α auslaufenden Normalschnittes nach dem Eulerschen Satz mit

$$k_0 = \frac{1}{M_0} \cos^2 \alpha + \frac{1}{N_0} \sin^2 \alpha \quad (1.7)$$

zu berechnen ist.

Bei einer Änderung des Azimuts α um den kleinen Winkel $d\alpha$ ändert sich die Krümmung um

$$dk_0 = \left(\frac{1}{N_0} - \frac{1}{M_0} \right) \cdot \sin 2\alpha \cdot d\alpha, \quad (1.8)$$

was unter Berücksichtigung von (1.5) in

$$dk_0 = -2T_0 \cdot d\alpha \quad (1.9)$$

übergeht.

Bedeutet nun $d\alpha$ den kleinen Winkel zwischen den beiden Normalschnitten $P_0 P_1''$ und $P_0 P_1'$, so ergibt sich die zu ΔH gehörige Krümmungskorrektur aus

$$l = \frac{1}{2} (k_0 + dk_0) s^2 = \frac{1}{2} k_0 s^2 - T_0 s^2 d\alpha = l_0 - T_0 s^2 d\alpha. \quad (1.10)$$

Der Winkel $d\alpha$ ist aus dem Abstand A des Punktes P_1' von der Normalebene der Visur und der Bogenlänge s nach

$$d\alpha = \frac{A}{s} \quad (1.11)$$

zu berechnen. Zwischen A und dem Abstand A_0 eines Flächenpunktes, dessen Normale die Tangente in P_0 in Richtung der Visur schneidet, besteht die Proportion:

$$A : A_0 = \Delta H_0 : l_0,$$

also:

$$A = A_0 \frac{\Delta H_0}{l_0}. \quad (1.12)$$

Für A_0 ergibt sich in erster Annäherung:⁷

$$A_0 = l_0 \cdot \psi = l_0 T_0 s. \quad (1.13)$$

⁶ Siehe etwa M. LAGALLY, Vektorrechnung, 1. Aufl. 1928, S. 93.

⁷ Siehe W. HOFMANN, Geodätische Linie und Tangentialvisur, S. 9.

Aus (1. 12) und (1. 13) folgt für (1. 11)

$$d\alpha = T_0 \cdot \Delta H_0, \quad (1. 14)$$

und damit wird die Krümmungskorrektur l nach (1. 10)

$$l = l_0 - T_0^2 \cdot s^2 \cdot \Delta H_0. \quad (1. 15)$$

Faßt man die beiden aus (1. 4) und (1. 15) hervorgehenden, bei ebener Höhenrechnung vernachlässigten Korrekturen zusammen, so erhält man in erster Annäherung – d. h. bis auf kleine Größen 3. und höherer Ordnung – den Gesamtunterschied f zwischen ΔH und ΔH_0 :

$$f = \Delta H - \Delta H_0 = -\frac{1}{2} \cdot T_0^2 \cdot s^2 \cdot \Delta H_0. \quad (1. 16)$$

Auf dem Erdellipsoid nimmt f seinen größten Wert dort an, wo die geodätische Torsion T_0 eines Normalschnittes ihr Maximum erreicht. Dies ist am Äquator für eine Visur vom Azimut 45° der Fall. Für das BESSELSche Erdellipsoid gilt dort:

$$\frac{1}{M_0} = 1578.57 \cdot 10^{-10} \text{ m}^{-1}$$

$$\frac{1}{N_0} = 1568.04 \cdot 10^{-10} \text{ m}^{-1}$$

$$T_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M_0} - \frac{1}{N_0} \right) = 5.26 \cdot 10^{-10} \text{ m}^{-1}$$

$$T_0^2 = 27.66 \cdot 10^{-20} \text{ m}^{-2}.$$

Wählt man zur Abschätzung für s und ΔH die extremen Werte

$$s = 100 \text{ km} = 10^5 \text{ m}$$

$$H = 10 \text{ km} = 10^7 \text{ mm},$$

so wird

$$f = -\frac{1}{2} \cdot 27.66 \cdot 10^{-20} \cdot 10^{10} \cdot 10^7 \text{ mm}$$

$$f \approx 1.4 \cdot 10^{-2} \text{ mm}.$$

Damit ist der Nachweis erbracht, daß die Windschiefe der Lote in Ausgangs- und Endpunkt einer Visur bei den in der trigonometrischen Höhenmessung vorkommenden Visurlängen und Höhenunterschieden selbst dann noch vernachlässigt werden darf, wenn eine Genauigkeit von $\frac{1}{10}$ mm verlangt wird, eine Forderung, die beim heutigen Stand der Entwicklung in Anbetracht der Messungs- und Refraktionsfehler sinnlos wäre.

2. EINE NEUE ABLEITUNG DER TRIGONOMETRISCHEN
HÖHENFORMEL

Die Formel der trigonometrischen Höhenmessung wird in den Lehrbüchern gewöhnlich auf eine Weise durchgeführt, die den Grad der Annäherung an den strengen Höhenunterschied in den bei der Ableitung eingeführten Reihenentwicklungen nicht einfach und ohne weiteres erkennen läßt.⁸ So wird z. B. der Tangens des halben Erdzentrivinkels $\frac{\gamma}{2}$ durch $\frac{\gamma}{2}$ selbst und der Ellipsoidbogen durch seine Sehne ersetzt, ohne daß die dadurch entstehenden Vernachlässigungen in den darauffolgenden Reihenentwicklungen verfolgt werden. Um überblicken zu können, wieweit diese Vernachlässigungen etwa die cm-Stelle der berechneten Höhenunterschiede berühren, sei hier eine Ableitung gegeben, welche die vernachlässigten Glieder in aller Schärfe zu erfassen gestattet.

Diese Ableitung geht vom Normalschnitt einer beliebigen, analytisch darstellbaren Niveaufläche, auf die sich die Höhenunterschiede beziehen sollen, aus. Von der Einwirkung der Refraktion wird dabei zunächst abgesehen. Es werden also nur die geometrischen Verhältnisse bei der Höhenmessung berücksichtigt, d. h. die Lichtstrahlen als Gerade angenommen. Der physikalischen Erscheinung der Lichtbrechung in der Atmosphäre kann später leicht in Form einer Korrektur Rechnung getragen werden.

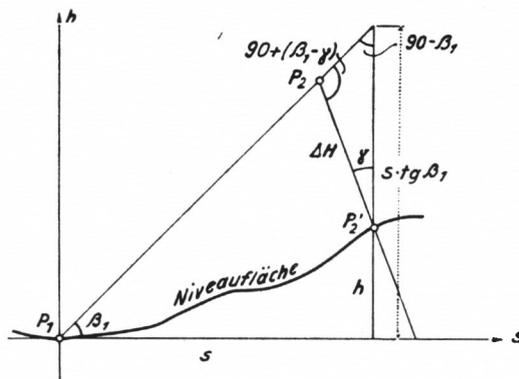


Fig. 2

In Figur 2 stellt P_1P_2' den Normalschnitt der Niveaufläche durch P_1 dar, auf die der Höhenunterschied ΔH zwischen P_1 und P_2 bezogen werden soll. Der Normalschnitt sei in einem rechtwinkligen Koordinatensystem durch die Gleichung

$$h = f(s) \quad (2.1)$$

gegeben. Das Koordinatensystem sei so angeordnet, daß der Normalschnitt im Nullpunkt die s -Achse berührt. Es gilt dann:

⁸ Siehe etwa JORDAN-EGGERT, Handbuch der Vermessungskunde, 9. Aufl. 1933, Bd. II/2 S. 141–143.

$$f(0) = 0; \quad f'(0) = 0. \quad (2.2)$$

Der Punkt P_2 erscheint in P_1 unter dem Höhenwinkel β_1 . Das Lot aus P_2 auf den Normalschnitt, auf dem der Höhenunterschied ΔH gemessen wird, ist gegen die h -Achse um den Winkel γ geneigt. γ ist gleich dem Richtungswinkel der Tangente an den Normalschnitt im Punkte P'_2 :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{dh}{ds} = h'; \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+h'^2}}; \quad \sin \gamma = \frac{h'}{\sqrt{1+h'^2}}. \quad (2.3)$$

Aus der Figur ist dann abzulesen:

$$\begin{aligned} \Delta H &= (s \cdot \operatorname{tg} \beta_1 - h) \cdot \frac{\cos \beta_1}{\cos(\beta_1 - \gamma)} \\ &= (s \cdot \operatorname{tg} \beta_1 - h) \cdot \frac{\cos \beta_1}{\cos \beta_1 \cos \gamma + \sin \beta_1 \sin \gamma} \\ &= (s \cdot \operatorname{tg} \beta_1 - h) \cdot \frac{1}{\cos \gamma + \sin \gamma \cdot \operatorname{tg} \beta_1}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

oder mit Einführung der Beziehungen (2.3)

$$\Delta H = (s \cdot \operatorname{tg} \beta_1 - h) \cdot \sqrt{1+h'^2} \cdot \frac{1}{1+h' \cdot \operatorname{tg} \beta_1}. \quad (2.5)$$

Dies ist die strenge Formel für den Höhenunterschied zwischen P_1 und P_2 bei beliebig geformtem Normalschnitt der Niveaufläche durch P_1 unter den durch die Gleichungen (2.2) gekennzeichneten Bedingungen.

Für die trigonometrische Höhenmessung wählt man als Bezugsfläche das Erdellipsoid und ersetzt dessen elliptische Normalschnitte durch ihre Krümmungskreise im Azimut der Visuren. Wieweit sich diese Vernachlässigung des elliptischen Krümmungsverlaufes auf den Höhenunterschied auswirkt, kann erst später im 5. Kapitel unter 4. untersucht werden.

Ist r der Radius des Krümmungskreises des Normalschnittes $P_1 P'_2$, so heißt die aus der Kreisgleichung (siehe Fig. 3)

$$s^2 + (h+r)^2 = r^2$$

entwickelte Darstellung (2.1) des Normalschnittes

$$h = -r + \sqrt{r^2 - s^2}.$$

Hieraus folgt:

$$h' = \frac{s}{\sqrt{r^2 - s^2}} \quad (2.6)$$

$$\sqrt{1+h'^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - s^2}}.$$

Aus (2.5) und (2.6) ergibt sich die strenge Höhenformel für kreisförmigen Normalschnitt der Niveaufläche:

$$\Delta H = (s \cdot \operatorname{tg} \beta_1 + r - \sqrt{r^2 - s^2}) \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - s^2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{s}{\sqrt{r^2 - s^2}} \operatorname{tg} \beta_1}. \quad (2.7)$$

Entwickelt man die in (2. 7) auftretende Wurzel

$$\sqrt{r^2 - s^2} = r \cdot \sqrt{1 - \frac{s^2}{r^2}}$$

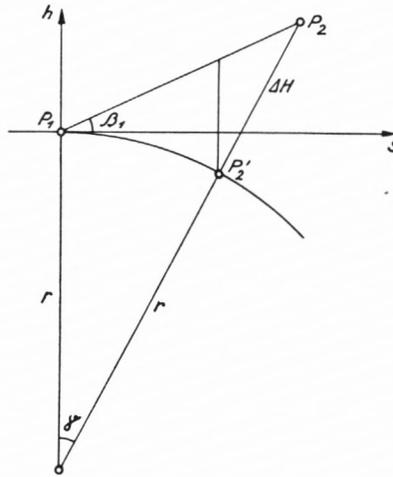


Fig. 3

in eine Reihe, die nach Potenzen der kleinen Größe $\frac{s}{r}$ fortschreitet, so erhält man unter Vernachlässigung der Glieder 4. und höherer Ordnung die Formel:

$$\Delta H = s \cdot \operatorname{tg} \beta_1 + \frac{s^2}{2r} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \beta_1) + \frac{s^3}{r^2} \operatorname{tg} \beta_1 (1 + \operatorname{tg}^2 \beta_1) + \frac{3s^4}{8r^3} \left[1 + 4 \operatorname{tg}^2 \beta_1 \left(1 + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^2 \beta_1 \right) \right]. \quad (2.8)$$

Eine Abschätzung zeigt, daß das letzte Glied erst bei $s \approx 25$ km den Betrag von 1 mm erreicht. Es kann also für die vorliegende Arbeit, die cm-Genauigkeit anstrebt und deren Versuchsnetz eine maximale Visurlänge von 12 km enthält, vernachlässigt werden.

In Gleichung (2. 8) bedeutet s die Abszisse des Punktes P_2' , also die Länge der Tangente vom Ausgangspunkt P_1 bis zum Fußpunkt des Lotes auf der Tangente, das durch P_2' läuft. In der geodätischen Praxis steht jedoch zur Höhenberechnung nur die Bogenlänge b zwischen P_1 und P_2' zur Verfügung. Sie ist über den Zentriwinkel γ mit s folgendermaßen verknüpft:

$$\begin{aligned} s &= r \cdot \sin \gamma = r \left(\gamma - \frac{\gamma^3}{6} + G^5 - \dots \right) = r \cdot \gamma - r \cdot \frac{\gamma^3}{6} + r \cdot G^5 - \dots \\ \gamma &= \frac{b}{r} \\ s &= b - \frac{b^3}{6r^2} + G^4 - \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

Unter Vernachlässigung der Glieder 4. und höherer Ordnung kann daher gesetzt werden:

$$\begin{aligned}\Delta H &= \left(b - \frac{b^3}{6r^2}\right) \operatorname{tg} \beta_1 + \frac{b^2}{2r} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \beta_1) + \frac{b^3}{r^2} \operatorname{tg} \beta_1 (1 + \operatorname{tg}^2 \beta_1) \\ \Delta H &= b \cdot \operatorname{tg} \beta_1 + \frac{b^2}{2r} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \beta_1) + \frac{b^3}{r^2} \operatorname{tg} \beta_1 \left(\frac{5}{6} + \operatorname{tg}^2 \beta_1\right).\end{aligned}\quad (2. 10)$$

Bei der Ableitung von (2. 10) wurde angenommen, daß P_1 auf der Ausgangsniveaufläche der Höhenzählung, also auf dem Erdellipsoid selbst liegt. Hat P_1 bereits die Höhe H_1 über dem Erdellipsoid, so sind b und r durch die bekannten Ausdrücke

$$b \left(1 + \frac{H_1}{r}\right) \quad \text{und} \quad r \left(1 + \frac{H_1}{r}\right)$$

zu ersetzen. Gleichung (2. 10) erhält damit die für die geodätische Praxis endgültige Form:

$$\Delta H = \left(1 + \frac{H_1}{r}\right) \left[b \cdot \operatorname{tg} \beta_1 + \frac{b^2}{2r} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \beta_1) + \frac{b^3}{r^2} \operatorname{tg} \beta_1 \left(\frac{5}{6} + \operatorname{tg}^2 \beta_1\right) \right]. \quad (2. 11)$$

Diese Formel, die durch Reihenentwicklung aus der strengen Gleichung (2. 7) abgeleitet ist, ermöglicht eine genaue Abschätzung des Grades der Annäherung an den strengen Wert von ΔH . Ihre Genauigkeit läßt sich leicht durch Mitführen von Gliedern höherer Ordnung beliebig steigern. Sie unterscheidet sich bereits im zweiten Glied von den bisher gebräuchlichen Höhenformeln. Durch einen Vergleich seien deshalb die Vernachlässigungen dieser Formeln gegenüber (2. 11) untersucht. Dabei sei zur Vereinfachung angenommen, daß P_1 auf dem Ellipsoid liege, also $H_1 = 0$ sei. Die Höhe von P_2 wird dann $H_2 = \Delta H$.

1. Die Höhenformel von JORDAN⁹

Mit den hier eingeführten Bezeichnungen lautet die Höhenformel von JORDAN, ebenfalls ohne Berücksichtigung der Refraktion:

$$\Delta H_J = \left(1 + \frac{\Delta H}{2r}\right) \left[b \cdot \operatorname{tg} \beta_1 + \frac{b^2}{2r} (1 + \operatorname{tg}^2 \beta_1) \right].$$

Der Grad der Abweichung gegen (2. 10) läßt sich durch Einsetzen von (2. 10) für ΔH in der rechten Seite der JORDANSchen Höhenformel bestimmen. Dabei wird wieder bis zu Gliedern 2. Ordnung gegangen:

$$\begin{aligned}\Delta H_J &= b \cdot \operatorname{tg} \beta_1 \left[1 + \frac{b}{2r} \operatorname{tg} \beta_1 + \frac{b^2}{4r^2} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \beta_1) \right] + \frac{b^2}{2r} (1 + \operatorname{tg}^2 \beta_1) \left(1 + \frac{b}{2r} \operatorname{tg} \beta_1 \right) \\ \Delta H_J &= b \cdot \operatorname{tg} \beta_1 + \frac{b^2}{2r} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \beta_1) + \frac{b^3}{r^2} \operatorname{tg} \beta_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \operatorname{tg}^2 \beta_1 \right).\end{aligned}$$

⁹ JORDAN-EGGERT, Handbuch der Vermessungskunde, 9. Aufl. 1933, Bd. II/2 S. 143.

Der Fehler gegen (2. 10) beträgt demnach:

$$dH_J = \Delta H - \Delta H_J = + \frac{b^3}{r^2} \operatorname{tg} \beta_1 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \beta_1 \right).$$

2. Die Höhenformel von WILD-BAESCHLIN:¹⁰

Die WILD-BAESCHLINSche Höhenformel lautet in ihrem geometrischen Teil:

$$\Delta H_{WB} = b \cdot \left(1 + \frac{\Delta H}{r} \right) \operatorname{tg} \beta_1 + \frac{b^2}{2r}.$$

Auf demselben Wege wie unter 1. findet man ihren Fehler gegen (2. 10) zu

$$dH_{WB} = \Delta H - \Delta H_{WB} = + \frac{1}{3} \cdot \frac{b^3}{r^2} \cdot \operatorname{tg} \beta_1.$$

3. Die Höhenformel von REICHENEDER:¹¹

Die REICHENEDERSche Höhenformel heißt ohne Refraktionskorrektur:

$$\Delta H_R = \left(1 + \frac{\Delta H}{r} \right) \left(b \cdot \operatorname{tg} \beta_1 + \frac{b^2}{2r} \right).$$

Wie unter 1. und 2. ergibt sich ihr Fehler gegen (2. 10) mit

$$dH_R = \Delta H - \Delta H_R = - \frac{1}{6} \cdot \frac{b^3}{r^2} \cdot \operatorname{tg} \beta_1.$$

In den Gliedern bis zur 1. Ordnung stimmen demnach alle drei Höhenformeln mit (2. 10) scharf überein. Dadurch, daß sie bei der Reduktion der Bogenlänge auf den Meßhorizont die Höhe ΔH des Visur-Endpunktes einführen, berücksichtigen sie auch mehr oder minder stark das Glied 2. Ordnung, obwohl sie rein äußerlich nur Glieder bis zur 1. Ordnung enthalten.

Die restlichen Unterschiede gegenüber (2. 10) gehen zu Lasten teils der Vernachlässigungen des Unterschiedes zwischen Sehnen- und Bogenlänge teils der Einführung des halben Zentriwinkels $\frac{\gamma}{2}$ an Stelle von $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ im Laufe der verschiedenen Formelableitungen. Solche Vernachlässigungen, die vor allem in Gliedern höherer Ordnung nur noch schwer zu überblicken sind, wurden bei der Ableitung von (2. 10) vermieden.

Es fragt sich nun allerdings, wieweit das Glied 2. Ordnung überhaupt zu berücksichtigen ist. Eine Abschätzung seines Einflusses auf ΔH gibt darüber Auskunft. Es wird dabei die Bogenlänge berechnet, bei der der Wert des Gliedes 2. Ordnung eine bestimmte Grenze

¹⁰ P. ENGI, Zur trigonometrischen Höhenmessung im Gebirge. Schw. Zeitschr. für Vermessungswesen 1951 S. 254.

¹¹ K. REICHENEDER, Eine Formel zur trigonometrischen Höhenmessung. Allg. Verm.-Nachrichten 1937 S. 189 ff.

erreicht. Da es das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, die Grundlagen für eine trigonometrische Höhenmessung mit cm-Genauigkeit zu schaffen, wird diese Grenze mit 0,5 cm festgelegt. Es wird jedoch auch noch die Bogenlänge bei einem Einfluß des Gliedes 2. Ordnung von 1 mm bestimmt, da die Millimeter oft als Rechengröße mitgeführt werden. Als obere Grenze für $\operatorname{tg} \beta_1$ wird dabei 0,1 angenommen. Dies entspricht einem Höhenwinkel von etwa 6^g, der bei flächenhaften Triangulationen nur sehr selten erreicht wird.

Nach Formel (2. 10) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} G^2 > 0,5 \text{ cm} & \quad \text{wenn} \quad b > 13,4 \text{ km} \\ G^2 > 1 \text{ mm} & \quad \text{wenn} \quad b > 7,8 \text{ km.} \end{aligned}$$

Eine Abschätzung des Einflusses der Vernachlässigungen 2. Ordnung in den drei untersuchten Höhenformeln von JORDAN, WILD-BAESCHLIN und REICHENEDER ergibt unter denselben Bedingungen folgende Werte:

$$\begin{aligned} dH_J & > 0,5 \text{ cm} & \quad \text{wenn} & \quad b > 18,2 \text{ km} \\ dH_J & > 1 \text{ mm} & \quad \text{wenn} & \quad b > 10,6 \text{ km} \\ dH_{WB} & > 0,5 \text{ cm} & \quad \text{wenn} & \quad b > 18,2 \text{ km} \\ dH_{WB} & > 1 \text{ mm} & \quad \text{wenn} & \quad b > 10,6 \text{ km} \\ dH_R & > 0,5 \text{ cm} & \quad \text{wenn} & \quad b > 22,9 \text{ km} \\ dH_R & > 1 \text{ mm} & \quad \text{wenn} & \quad b > 13,4 \text{ km.} \end{aligned}$$

Es zeigt sich also, daß das Glied 2. Ordnung bei Visurlängen unter 13,4 km den Höhenunterschied in der cm-Stelle nicht mehr beeinflußt. Da die längste Visur des Isartalnetzes 12 km mißt, wird das Glied im folgenden nicht mehr berücksichtigt. Bei längeren Visuren dürfte zudem $\operatorname{tg} \beta_1$ meist weit unter 0,1 liegen, so daß die oben angegebenen Grenzen sich noch vergrößern.

Berechnet man die Höhenunterschiede nach einer der drei bisherigen Formeln, die durch Einführung von ΔH schon einen Teil des Gliedes 2. Ordnung berücksichtigen, so liegen die Grenzen für eine cm-Vernachlässigung noch günstiger. Doch muß dann, wie sich zeigen wird, für ΔH ein ziemlich scharfer Näherungswert zur Einführung in die Formeln zur Verfügung stehen.

3. GEGENSEITIGE HÖHENUNTERSCHIEDE

Für genaue Höhenbestimmungen wird man sich nie mit der einseitigen Messung von Höhenunterschieden begnügen. Vor allem der Unsicherheit der Refraktion wegen wird man den Höhenunterschied durch Mittelung aus Hin- und Rückvisur bestimmen. Auf den Einfluß der Refraktion und seine Elimination durch die Mittelbildung aus gegenseitigen Messungen wird erst im 4. Kapitel eingegangen werden. Hier soll jedoch untersucht werden, wie und mit welchen Reduktionen der geometrischen Einzelhöhenunterschiede die Mittelung vorzunehmen ist.

Die Ableitung der Formel (2. 11) ist so gehalten, daß sie ohne weiteres auch auf die Gegenvisur P_2P_1 angewandt werden kann. An Stelle des Höhenwinkels β_1 ist dabei der Höhenwinkel

$$\beta_2 = -(\beta_1 + \gamma)$$

einzusetzen, an Stelle der Höhe H_1 die Höhe

$$H_2 = H_1 + \Delta H.$$

Formel (2. 11) heißt dann unter Beschränkung auf Glieder erster Ordnung

$$\Delta H = \left(1 + \frac{H_2}{r}\right) \left[b \cdot \operatorname{tg} \beta_2 + \frac{b^2}{2r}(1 + 2\operatorname{tg}^2 \beta_2)\right]. \quad (3. 1)$$

Sieht man nun von Messungsfehlern ab, so muß die Rückvisur einen Höhenunterschied vom selben Absolutbetrag ergeben wie die Hinvisur; nur das Vorzeichen ist entgegengesetzt. Zur besseren Einsicht in die Zusammenhänge zwischen Hin- und Rückvisur sei das Zustandekommen ihrer Gleichheit formelmäßig verfolgt. Der Einfachheit halber wird dabei wieder $H_1 = 0$ und $H_2 = \Delta H$ gesetzt. Der Höhenunterschied der Hinvisur wird mit $\overrightarrow{\Delta H}$, der der Rückvisur mit $\overleftarrow{\Delta H}$ bezeichnet. Von beiden werden nur die Absolutbeträge $|\overrightarrow{\Delta H}|$ und $|\overleftarrow{\Delta H}|$ betrachtet.

Es gilt:

$$|\overrightarrow{\Delta H}| = b \cdot \operatorname{tg} \beta_1 + \frac{b^2}{2r}(1 + 2\operatorname{tg}^2 \beta_1) \quad (3. 2)$$

$$|\overleftarrow{\Delta H}| = \left(1 + \frac{\Delta H}{r}\right) \left[b \cdot \operatorname{tg}(\beta_1 + \gamma) - \frac{b^2}{2r}(1 + 2\operatorname{tg}^2(\beta_1 + \gamma))\right]. \quad (3. 3)$$

Führt man in (3. 3) für ΔH die rechte Seite von (3. 2) ein und entwickelt $\operatorname{tg}(\beta_1 + \gamma)$ in eine Reihe, wobei $\gamma = \frac{b}{r}$ zu setzen ist, so erhält man:

$$\begin{aligned} |\overleftarrow{\Delta H}| &= b \cdot \left(1 + \frac{b}{r} \cdot \operatorname{tg} \beta_1\right) \left[\operatorname{tg} \beta_1 + \frac{b}{r}(1 + \operatorname{tg}^2 \beta_1)\right] - \frac{b^2}{2r}(1 + 2\operatorname{tg}^2 \beta_1) \\ &= b \cdot \operatorname{tg} \beta_1 + \frac{b^2}{r}(1 + 2\operatorname{tg}^2 \beta_1) - \frac{b^2}{2r}(1 + 2\operatorname{tg}^2 \beta_1) \end{aligned} \quad (3. 4)$$

$$|\overleftarrow{\Delta H}| = b \cdot \operatorname{tg} \beta_1 + \frac{b^2}{2r}(1 + 2\operatorname{tg}^2 \beta_1) = |\overrightarrow{\Delta H}|. \quad (3. 5)$$

Aus der Form (3. 4) ist zu erschen, daß das erste Glied der rechten Seite von (3. 3) durch die Veränderung von b auf $b \cdot \left(1 + \frac{\Delta H}{r}\right)$ und durch β_2 gegenüber dem ersten Glied der rechten Seite von (3. 2) genau um die doppelte Krümmungskorrektur

$$\frac{b^2}{r}(1 + 2\operatorname{tg}^2 \beta_1) \quad (3. 6)$$

verändert wird. Das Mittel der beiden genannten Glieder von (3. 2) und (3. 3) gibt also den richtigen Höhenunterschied

$$\Delta H = b \cdot \operatorname{tg} \beta_1 + \frac{b^2}{2r} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \beta_1).$$

Für die Praxis bedeutet dies, daß prinzipiell bei der Berechnung von Höhenunterschieden aus gegenseitigen Messungen die Krümmungskorrektur nicht berücksichtigt werden muß. Die Einzelhöhenunterschiede können so berechnet werden, als ob der Normalschnitt der Bezugsniveaufläche eine Gerade wäre. Das Mittel aus den Absolutbeträgen der beiden Höhenunterschiede liefert von selbst den richtigen, auf den Kreischnitt reduzierten Absolutbetrag des Höhenunterschiedes.

Selbstverständlich gilt dies vorläufig nur für kreisförmige Normalschnitte der Niveauflächen (s. 6. Kapitel dieses Abschnittes).

Die mögliche Vernachlässigung der Krümmungskorrektur kann auch so gedeutet werden, daß man für den Krümmungsradius r einen Wert einführen darf, der beliebig weit vom wahren Wert abweicht. Das Mittel aus Hin- und Rückvisur liefert trotzdem den richtigen Höhenunterschied, bezogen auf die kreisförmig gekrümmte Niveaufläche.

Damit ist die bereits von HELMERT¹² erkannte Tatsache neu abgeleitet, daß die trigonometrische Höhenmessung auch dann noch geoidische (Meeres-) Höhen ergibt, wenn das Geoid gegenüber dem Ellipsoid eine zusätzliche konstante Krümmung aufweist. Mit anderen Worten:

Relative Lotabweichungen, die längs einer Visur konstant sind oder sich linear mit der Bogenlänge ändern, verfälschen nicht das Mittel aus Hin- und Rückvisur eines trigonometrisch bestimmten Höhenunterschiedes als Meereshöhenunterschied.

In einer für die Praxis erweiterten Form gilt dieser Satz auch noch für Geoidschnitte, die sich durch Kreisbögen genügend genau annähern lassen.

Trotzdem wird man auch bei gegenseitigen Messungen der Höhenunterschiede nicht auf die Berechnung und Anbringung der ellipsoidischen Krümmungskorrektur verzichten. Wie leicht aus dem vorhergehenden zu ersehen ist, äußert sich ein Krümmungsfehler $d\kappa$

$$d\kappa = d\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{dr}{r^2}$$

in der Differenz $d\Delta H$ der Absolutbeträge $|\overrightarrow{\Delta H}|$ und $|\overleftarrow{\Delta H}|$ der gegenseitigen Höhenunterschiede. Diese Differenz ist nach (3. 6)

$$d\Delta H = -\frac{b^2}{r^2} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \beta) dr = b^2 (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \beta) d\kappa. \quad (3. 7)$$

Aus der Differenz $d\Delta H$ läßt sich demnach die zusätzliche Krümmung des Geoids gegenüber dem Ellipsoid im Normalschnitt der Visur berechnen und damit ein Aufschluß über die Geoidgestalt gewinnen.

¹² F. R. HELMERT, Die math. und phys. Theorien der Höheren Geodäsie, Bd. II S. 607–608.

4. DIE REFRAKTION

Durch die Wirkung der Refraktion des Lichtes erscheint der Höhenwinkel β_1 um den Refraktionswinkel δ zu groß. Um den richtigen Höhenunterschied ΔH zu erhalten, muß demnach in Gleichung (2. 11) statt β_1 der Winkel $(\beta_1 - \delta)$ eingesetzt werden. Gleichung (2. 11) lautet dann:

$$\Delta H = \left(1 + \frac{H_1}{r}\right) \left[b \cdot \operatorname{tg}(\beta_1 - \delta) + \frac{\delta^2}{2r} (1 + 2 \operatorname{tg}^2(\beta_1 - \delta)) + \frac{\delta^3}{r^2} \operatorname{tg}(\beta_1 - \delta) \left(\frac{5}{6} + \operatorname{tg}^2(\beta_1 - \delta)\right) \right]. \quad (4. 1)$$

Da δ immer als kleiner Winkel anzusehen ist, kann $\operatorname{tg}(\beta - \delta)$ in eine TAYLOR-Reihe nach δ entwickelt werden:

$$\operatorname{tg}(\beta_1 - \delta) = \operatorname{tg} \beta_1 - \frac{1}{\cos^2 \beta_1} \cdot \delta + \frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\cos^2 \beta_1} \delta^2 - \frac{1 + 3 \operatorname{tg}^2 \beta_1}{3 \cos^2 \beta_1} \delta^3 + \dots \quad (4. 2)$$

Für die beiden Refraktionswinkel δ_1 und δ_2 in den Endpunkten einer Visur werde die übliche Annahme getroffen, daß sie einander gleich sind:

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta. \quad (4. 3)$$

Dann kann für die Reduktion der Messungen die Lichtkurve zwischen P_1 und P_2 immer als Kreisbogen betrachtet werden, der die beiden Zielachsen der Meßfernrohre in P_1 und P_2 bei gegenseitiger Visur zu Tangenten hat. Nennt man die Bogenlänge des Kreisbogens b' , seinen Radius r' , so gilt

$$\delta = \frac{b'}{2r'}. \quad (4. 4)$$

Für b' kann mit ausreichender Genauigkeit¹³

$$b' = \frac{b}{\cos \beta} \quad (4. 5)$$

gesetzt werden. r' wird in der Praxis durch die Gleichung

$$r' = \frac{r}{k} \quad (4. 6)$$

mit dem Krümmungsradius r des Normalschnittes der Bezugsniveaufläche ins Verhältnis gesetzt, wobei k als „Refraktionskoeffizient“ bezeichnet wird. Mit (4. 5) und (4. 6) wird aus (4. 4):

$$\delta = \frac{b \cdot k}{2r \cdot \cos \beta}. \quad (4. 7)$$

¹³ Siehe K. REICHENEDER, Eine Formel zur trigonometrischen Höhenmessung. Allg. Verm.-Nachrichten 1937, S. 191.

Einführung von (4. 7) in (4. 2) ergibt:

$$\operatorname{tg}(\beta_1 - \delta) = \operatorname{tg} \beta_1 - k \cdot \frac{b}{2r \cdot \cos^3 \beta_1} + k^2 \frac{b^2 \operatorname{tg} \beta_1}{4r^2 \cdot \cos^4 \beta_1} - G^3 + \dots \quad (4. 8)$$

Führt man (4. 8) in (4. 1) ein und berücksichtigt bei der Ausrechnung wieder die Glieder bis zur 2. Ordnung in $\frac{b}{r}$, so ergibt sich der von der Wirkung der Refraktion befreite Höhenunterschied nach der Formel

$$\Delta H = \left(1 + \frac{H_1}{r}\right) \cdot \left[b \cdot \operatorname{tg} \beta_1 + \frac{b^2}{2r} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \beta_1) + \frac{b^3}{r^2} \operatorname{tg} \beta_1 \left(\frac{5}{6} + \operatorname{tg}^2 \beta_1 \right) - \frac{b^2}{2r \cos^3 \beta_1} \cdot k - \frac{b^3 \operatorname{tg} \beta_1}{r^2 \cos^3 \beta_1} \left(k - \frac{k^2}{4 \cos \beta_1} \right) \right]. \quad (4. 9)$$

Aus dem Vergleich zwischen (4. 9) und (4. 1) findet man den Refraktionseinfluß ϱ auf einen einseitig gemessenen Höhenunterschied:

$$\varrho = \left(1 + \frac{H_1}{r}\right) \left(- \frac{b^2}{2r \cos^3 \beta_1} \cdot k - \frac{b^3 \operatorname{tg} \beta_1}{r^2 \cos^3 \beta_1} \left(k - \frac{k^2}{4 \cos \beta_1} \right) \right). \quad (4. 10)$$

Die Refraktionskorrekturen in den bisher gebräuchlichen Höhenformeln sind:

Bei JORDAN:

$$\varrho_J = - \left(1 + \frac{H_1 + H_2}{2r}\right) \frac{b^2}{2r \cdot \cos^2 \beta} \cdot k.$$

Bei WILD-BAESCHLIN:

$$\varrho_{WB} = - \frac{b^2 + \Delta H^2}{2r} \cdot k = - \frac{b^2}{2r \cdot \cos^2 \beta} \cdot k.$$

Bei REICHENEDER:

$$\varrho_R = - \left(1 + \frac{H_2}{r}\right) \frac{b^2}{2r \cdot \cos^3 \beta} \cdot k.$$

Der Hauptunterschied von (4. 10) gegen die Korrekturen bei JORDAN und WILD-BAESCHLIN liegt darin, daß in (4. 10) jeweils im Nenner $\cos^3 \beta$ statt $\cos^2 \beta$ erscheint. Dieser Unterschied rührt davon her, daß bei der Ableitung der bisherigen Formeln die Bogenlänge b' der Lichtkurve gleich der Bogenlänge b des Normalschnittes gesetzt wurde, während in (4. 10) die Beziehung (4. 5) enthalten ist. Diese Vernachlässigung ist bei kleinen Höhenwinkeln belanglos, sie kann jedoch bei steilen Visuren ins Gewicht fallen. Die Formel von REICHENEDER, die $\cos^3 \beta$ enthält, ist speziell für steile Visuren entwickelt worden.

Dieselbe Vernachlässigung findet sich auch in einer Arbeit von P. ENGI,¹⁴ der in seiner „strengen Höhenformel“

$$\delta = k \cdot \frac{\gamma}{2} \quad \text{statt} \quad \delta = \frac{k}{\cos \beta} \cdot \frac{\gamma}{2}$$

setzt. Damit ist k als Verhältnis der beiden Zentriwinkel von Lichtkurve und Normalschnitt eingeführt, statt – wie üblich – als Verhältnis der Radien dieser beiden Kurven.

¹⁴ P. ENGI, Zur trigonometrischen Höhenmessung im Gebirge. Schweiz. Zeitschr. für Vermessungswesen 1951, S. 251–264.

ENGI gelangt damit zu einer nicht ganz richtigen Beurteilung der Genauigkeit der drei obengenannten Höhenformeln, besonders der REICHENEDERSchen, die nach den Abschätzungen der vorliegenden Arbeit als die genaueste zu betrachten ist. ENGI vergleicht das Ergebnis der drei Höhenformeln für eine lange und steile Visur mit dem aus seiner „strengen Höhenformel“ hervorgehenden Höhenunterschied. Während dies für die Formeln von JORDAN und WILD-BAESCHLIN ohne weiteres möglich ist, muß in die REICHENEDERSche Formel der Refraktionskoeffizient $k \cdot \cos \beta$ eingeführt werden, wenn k der in den andern Formeln benutzte Refraktionskoeffizient ist. Da ENGI dies nicht beachtet, weicht in seinem Vergleich das REICHENEDERSche Resultat am stärksten vom strengen Wert ab, während es in Wirklichkeit diesem am nächsten kommt.

Im übrigen unterscheiden sich die Korrekturen q_J , q_{WB} und q_R von (4. 10) nur durch kleine Glieder 2. Ordnung. Diese Glieder können auch in (4. 10) vernachlässigt werden, wie folgende Abschätzung zeigt: Für $\operatorname{tg} \beta$ sei wieder 0,1 gesetzt, für k sei der verhältnismäßig große Wert 0,20 angenommen, der sich bei der Höhentriangulation im Isartal als wahrscheinlichster Wert ergeben hat. Dann erreicht die durch das Glied 2. Ordnung verursachte Ungenauigkeit dH im Höhenunterschied die Größen 0,5 cm bzw. 1 mm erst bei folgenden Bogenlängen b :

$$\begin{aligned} dH > 0,5 \text{ cm} & \quad \text{wenn} \quad b > 21,0 \text{ km} \\ dH > 1 \text{ mm} & \quad \text{wenn} \quad b > 12,6 \text{ km}. \end{aligned}$$

Bei kleinerem k vergrößern sich diese Bogenlängen entsprechend. Da die durch die Unsicherheit von k selbst hervorgerufene Ungenauigkeit der Refraktionskorrektur die oben abgeschätzten Beträge weit überwiegt, kann das Glied 2. Ordnung in (4. 10) in jedem Fall vernachlässigt werden.

Es bleibt noch zu untersuchen, wie sich die Refraktionskorrektur auf die Mittelbildung aus Hin- und Rückvisur auswirkt. Unter der Annahme gleicher Refraktionswinkel für Hin- und Rückblick verfälscht zwar die Refraktion die beiden gemessenen Höhenwinkel

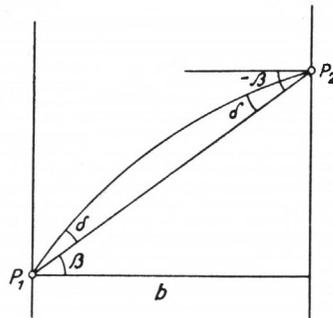


Fig. 4

um denselben Betrag. Doch wirkt sich diese Verfälschung nicht symmetrisch, d. h. mit denselben absoluten Beträgen auf die beiden Höhenunterschiede aus. Im folgenden wird der Unterschied der Refraktionskorrektur für Hin- und Rückblick abgeschätzt. Es genügt dabei, sich auf den Fall des geraden Normalschnittes der Bezugsniveaufläche zu beschränken, wie er in Figur 4 dargestellt ist.

β bedeutet hier den von der Refraktion unverfälschten Höhenwinkel in P_1 , der in P_2 als Tiefenwinkel $-\beta$ erscheint. Berechnet man die Absolutbeträge $|\overrightarrow{\Delta H}|$ und $|\overleftarrow{\Delta H}|$ aus den gemessenen Höhenwinkeln $(\beta + \delta)$ beziehungsweise $(-\beta + \delta)$, so erhält man:

$$|\overrightarrow{\Delta H}| = b \cdot \operatorname{tg}(\beta + \delta) = b \left(\operatorname{tg} \beta + \frac{1}{\cos^2 \beta} \cdot \delta + \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos^2 \beta} \cdot \delta^2 + \frac{1 + 3 \operatorname{tg}^2 \beta}{3 \cos^2 \beta} \cdot \delta^3 + \dots \right) \quad (4. 11)$$

$$|\overleftarrow{\Delta H}| = b \cdot \operatorname{tg}(\beta - \delta) = b \left(\operatorname{tg} \beta - \frac{1}{\cos^2 \beta} \cdot \delta + \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos^2 \beta} \cdot \delta^2 - \frac{1 + 3 \operatorname{tg}^2 \beta}{3 \cos^2 \beta} \cdot \delta^3 + \dots \right) \quad (4. 12)$$

Das Mittel aus $|\overrightarrow{\Delta H}|$ und $|\overleftarrow{\Delta H}|$ ist somit

$$\frac{|\overrightarrow{\Delta H}| + |\overleftarrow{\Delta H}|}{2} = b \cdot \operatorname{tg} \beta + b \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos^2 \beta} \cdot \delta^2 + G^4 + \dots \quad (4. 13)$$

Man erhält aus der Mittelbildung also nicht den richtigen Höhenunterschied $\Delta H = b \cdot \operatorname{tg} \beta$, sondern einen – bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung – um den Betrag

$$f = b \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos^2 \beta} \cdot \delta^2$$

verfälschten Wert. f wird mit Berücksichtigung von (4. 7)

$$f = \frac{b^3 \cdot \operatorname{tg} \beta}{4r^2 \cos^4 \beta} \cdot k^2. \quad (4. 14)$$

Zu demselben Ergebnis gelangt man, wenn man (4. 10) für die Rückvisur aus P_2 ansetzt und für ΔH in den so entstehenden Ausdruck die rechte Seite von (4. 9) einführt. f ist der halbe Unterschied zwischen den Refraktionskorrekturen \vec{q} und \overleftarrow{q} für Hin- und Rückvisur. Die Refraktionskorrektur einer nach oben gerichteten Visur ist – absolut genommen – um $2f$ größer als die der Gegenvisur. Läßt man bei der Berechnung der einseitigen Höhenunterschiede die Refraktion unberücksichtigt, so weicht das Mittel aus Hin- und Rückvisur um f vom wahren Höhenunterschied ab. Doch kann f als kleine Größe 2. Ordnung immer vernachlässigt werden, wenn cm-Genauigkeit gefordert wird. f erreicht unter der Annahme $\operatorname{tg} \beta = 0,1$ und $k = 0,20$ erst bei einer Visurlänge von $b = 15$ km den Betrag von 1 mm.

Damit ist gezeigt, daß der Höhenunterschied zwischen 2 Punkten prinzipiell durch Mittelung von Hin- und Rückvisur ohne Berücksichtigung von Krümmung und Refraktion mit cm-Genauigkeit bestimmt werden kann. Voraussetzung bleibt, daß der Normalschnitt der Bezugsniveaufläche in Richtung der Visur durch einen Kreisbogen ersetzt werden kann und daß die Refraktionswinkel in den beiden Endpunkten der Visur gleich groß sind.

5. ERFORDERLICHE GENAUIGKEIT DER EINGANGSELEMENTE

Aus der in den vorhergehenden Kapiteln entwickelten Formel der trigonometrischen Höhenmessung

$$\Delta H = \left(1 + \frac{H_1}{r} \right) \left[b \cdot \operatorname{tg} \beta + \frac{b^2}{2r} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \beta) - \frac{b^2}{2r \cos^3 \beta} \cdot k \right] \quad (5. 1)$$

wird der Höhenunterschied ΔH aus dem beobachteten Höhenwinkel β und den gegebenen Größen b , H_1 , r und k bestimmt. Im folgenden soll untersucht werden, wie genau diese Größen gemessen bzw. bestimmt sein müssen, wenn für den Höhenunterschied cm-Genauigkeit gefordert wird.

1. Höhenwinkel β :

Ein Fehler im Höhenwinkel β wirkt sich vor allem in dem Glied

$$\left(1 + \frac{H_1}{r}\right) \cdot b \cdot \operatorname{tg} \beta$$

aus. Der Einfluß auf die Krümmungskorrektur kann dagegen vernachlässigt werden. Zum Zwecke der Abschätzung braucht auch die Reduktion $\left(1 + \frac{H_1}{r}\right)$, die nur eine geringe Vergrößerung von b zur Folge hat, nicht berücksichtigt werden. Damit ergibt sich der durch einen Winkelfehler $d\beta$ hervorgerufene Höhenfehler $d\Delta H_\beta$ zu

$$d\Delta H_\beta = \frac{b}{\cos^2 \beta} \cdot \frac{d\beta}{\rho^{\text{cc}}}. \quad (5.2)$$

Die Entfernung b , in der bei bestimmtem β und $d\beta$ der Höhenfehler den Betrag $\pm 0,005$ m erreicht, ist demnach

$$b = 0,005 \frac{\cos^2 \beta \cdot \rho^{\text{cc}}}{d\beta}. \quad (5.3)$$

Legt man die bei der Höhentriangulation im Isartal erreichte Meßgenauigkeit von $m_\beta = \pm 1,5^{\text{cc}}$ zugrunde und führt als größten Höhenwinkel $\beta_{\max} \approx 6^{\text{s}}$ ($\operatorname{tg} \beta_{\max} = 0,1$) ein, so ergibt sich

$$b = 2,1 \text{ km.}$$

Es wird sich im Verlauf dieser Untersuchung zeigen, daß die Unsicherheit der Höhenwinkelmessung das weitaus stärkste Fehlerelement bei der trigonometrischen Höhenmessung ist. Während die übrigen Bestimmungsgrößen mit Ausnahme des Refraktionskoeffizienten leicht so genau eingeführt werden können, daß Höhenunterschiede über 10–15 km Distanz hinweg um nicht mehr als 0,5 cm verfälscht werden, sind bei der heute erreichbaren Genauigkeit der Höhenwinkelmessung schon bei Distanzen ab 2 km Fehler über 0,5 cm für einen einzelnen Höhenunterschied zu erwarten. Der mittlere Fehler steigt proportional zur Visurlänge und erreicht bei 10 km schon den Wert von $\pm 2,4$ cm. Die Genauigkeit der Höhenwinkelmessung kann ohne großen Aufwand nicht mehr bedeutend gesteigert werden. Doch werden die Meßfehler durch die Ausgleichung der zu Höhennetzen verbundenen Höhenunterschiede weitgehend getilgt. Am Beispiel des Isartalnetzes hat sich gezeigt, daß auch bei Visurlängen bis zu 12 km im Endergebnis cm-Genauigkeit zu erreichen ist.

Während die Winkelfehler der trigonometrischen Höhenmessung rein zufälligen Charakter tragen, kann man die Auswirkung der Fehler der übrigen Bestimmungselemente als systematisch bezeichnen. b , H_1 , r und k sind Ausgangskonstanten, die mit der trigonometrischen Höhenmessung an sich nichts zu tun haben und mit anderen Mitteln bestimmt

werden müssen. Will man die Genauigkeit der Höhenunterschiede und der daraus abgeleiteten Größen im wesentlichen in Abhängigkeit von den Fehlern der Winkelmessung erhalten, so müssen die übrigen Bestimmungselemente so genau wie möglich eingeführt werden. Als Grenze für die Auswirkung ihrer Ungenauigkeit auf ΔH wird daher im folgenden der Wert 1 mm angesetzt.

2. Bogenlänge b :

Betrachtet man unter Vernachlässigung des Faktors $\left(1 + \frac{H_1}{r}\right)$ das Glied

$$b \cdot \operatorname{tg} \beta$$

der Gleichung (5. 1), so sieht man, daß ein Entfernungsfehler db sich vor allem mit dem tg des Höhenwinkels auf den Höhenunterschied als Fehler $d\Delta H_b$ auswirkt:

$$d\Delta H_b = \operatorname{tg} \beta \cdot db. \quad (5. 4)$$

Mit $\operatorname{tg} \beta = 0,1$ und $d\Delta H_b = 1$ mm darf daher db den Wert 1 cm nicht überschreiten. Die Lagekoordinaten der Punkte des Höhennetzes müssen also ebenfalls mit cm-Genauigkeit bestimmt sein. Das gleiche gilt von den eventuellen Exzentrizitäten der Zielmarken.

Zur Berechnung der Krümmungs- und Refraktionskorrektur braucht b nur wesentlich ungenauer bestimmt sein. Dies sei an Hand der Krümmungskorrektur

$$\frac{b^2}{2r} (1 + 2\operatorname{tg}^2 \beta) \left(1 + \frac{H_1}{r}\right)$$

gezeigt. Ein Entfernungsfehler db wirkt sich über sie auf ΔH in der Form

$$d\Delta H_b = \frac{b}{r} db \left(1 + \frac{H_1}{r} (1 + 2\operatorname{tg}^2 \beta) + 2\operatorname{tg}^2 \beta\right) \quad (5. 5)$$

aus. Das 2. und 3. Glied der Klammer kann zur Abschätzung vernachlässigt werden. Bei einer Entfernung von $b = 20$ km verursacht erst ein Fehler

$$db = 32 \text{ cm}$$

einen Höhenfehler von 1 mm. Für eine gleichgroße Einwirkung über die Refraktionskorrektur darf db noch $\frac{1}{k}$ -mal größer sein.

3. Ausgangshöhe H_1 :

Unter 2. wurde gezeigt, daß die Bogenlänge b im Hauptglied $b \cdot \operatorname{tg} \beta$ auf 1 cm genau gegeben sein muß. Der Einfluß eines Fehlers dH_1 der Ausgangshöhe H_1 ist daher so zu begrenzen, daß die Niveaurektur $\left(1 + \frac{H_1}{r}\right)$ die Bogenlänge im Meßhorizont der Visur um nicht mehr als 1 cm verfälscht. Die auf die Höhe H gehobene Bogenlänge b_H ist nach (5. 1)

$$b_H = b \left(1 + \frac{H}{r}\right). \quad (5. 6)$$

Ein Fehler dH hat den Distanzfehler

$$db_H^H = \frac{b}{r} dH \quad (5. 7)$$

zur Folge. dH ist daher durch die Beziehung

$$dH_{(m)} \leq \frac{r}{b} \cdot 0.01$$

begrenzt. Welche Größen dH bei verschiedenen Entfernungen b annehmen darf, ist am besten aus dem nachfolgenden Diagramm zu ersehen (Fig. 5).

Es zeigt sich, daß z. B. bei einer Visurlänge von 10 km die Ausgangshöhe auf 6,4 m genau bestimmt sein muß, bei 20 km geht diese Grenze auf 3,2 m zurück. Bei der Höhenberechnung nach (5. 1) können diese Grenzen leicht eingehalten werden. Eine Höhen-triangulation muß ja immer an eine oder mehrere genau bestimmte Ausgangshöhen an-

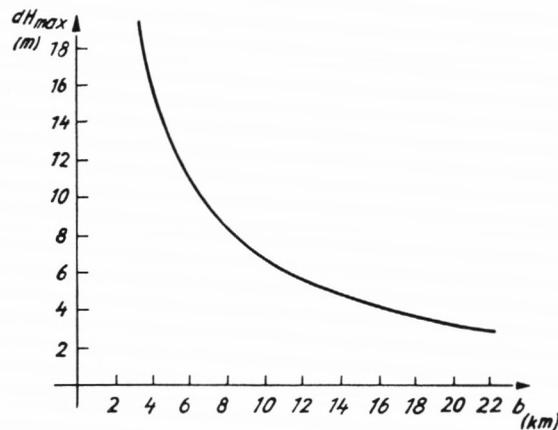


Fig. 5

schließen. Dieselben Genauigkeitsgrenzen wie für H_1 gelten jedoch auch für die in anderen Höhenformeln einzusetzenden Höhen H_M (bei JORDAN) und H_2 (bei WILD-BAESCHLIN, REICHENEDER). Für diese Formeln muß daher zur Berechnung eines Höhenunterschieds ein guter Näherungswert für diesen Höhenunterschied bekannt sein. Seine Ermittlung wird meist nur über eine genäherte Vorberechnung möglich sein, die den Rechenaufwand nicht unbeträchtlich vergrößert.

Gegenüber diesem Einfluß von dH auf das Hauptglied $b \cdot \operatorname{tg} \beta$ ist sein Einfluß auf Krümmungs- und Refraktionskorrektur unbedeutend. Die Visurlängen b , von denen ab dH einen Fehlereinfluß von 1 mm auf ΔH ausübt, sind dabei durch die Formeln

$$b_{(km)} = r_{(km)} \sqrt{\frac{0,002}{dH_{(m)}}} \quad \text{bzw.} \quad b_{(km)} = \frac{r_{(km)}}{k} \sqrt{\frac{0,002}{dH_{(m)}}} \quad (5. 8)$$

bestimmt. Man sieht aus (5. 8), daß sich ein Fehler dH von 20 m erst bei Entfernungen ab etwa 60 km auswirkt. Andererseits ist zu erkennen, daß Ausgangshöhen von 1000 bzw. 2000 m erst bei Visurlängen von 9 km bzw. 6 km zur Reduktion der Krümmungskorrektur berücksichtigt werden müssen.

4. Krümmungsradius r :

Zuerst ist zu prüfen, wie genau r bestimmt sein muß, damit die nach Gleichung (5. 1) auf die Höhe H gehobene Bogenlänge b_H auf 1 cm genau wird. Ein Fehler dr hat den Entfernungsfehler

$$db_H^r = -\frac{b \cdot H}{r^2} dr \quad (5. 9)$$

zur Folge. Das maximale dr ist daher durch

$$dr_{(m)} \leq \frac{r^2}{b \cdot H} \cdot 0,01$$

bestimmt. Für $b = 20$ km, $H = 2000$ m ergibt sich

$$dr \leq 10 \text{ km.}$$

Da sich die Hauptkrümmungsradien des Erdellipsoides im Alpenraum um Beträge von rund 20 km unterscheiden, kann für den oben abgeschätzten Fall, bei dem die Visurlänge b praktisch ihr Extrem erreicht, gerade noch der mittlere Krümmungsradius im Triangulationsgebiet verwendet werden. Bei kürzeren Visuren ist dies in jedem Fall möglich.

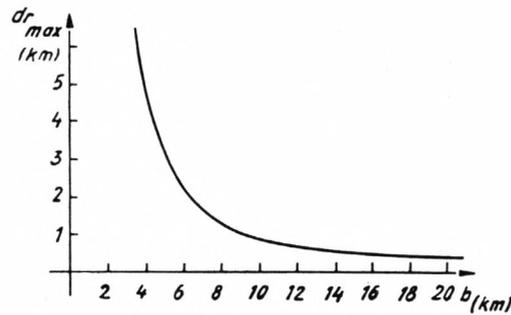


Fig. 6

Anders liegen die Verhältnisse bei der Krümmungskorrektur, die unter der Vernachlässigung des Gliedes $2tg^2\beta$ in der Form $\frac{b^2}{2r}$ untersucht werden soll. Ein Fehler dr im Krümmungsradius ergibt hier einen Fehler $d\Delta H_r$ im Höhenunterschied von

$$d\Delta H_r = -\frac{b^2}{2r^2} \cdot dr. \quad (5. 10)$$

Die für $d\Delta H_r = 1$ mm zulässigen Fehler dr sind also durch

$$dr_{(m)} \leq \frac{2r^2}{b^2} \cdot 0,001 \quad (5. 11)$$

begrenzt. Die Grenzen für dr bei verschiedenem b sind durch das Diagramm der Figur 6 dargestellt. Man ersieht daraus, daß etwa für eine Visurlänge von 10 km der Krümmungs-

radius r bereits auf 800 m genau eingeführt werden muß. Die Werte für $b = 5$ km und $b = 20$ km sind $dr \leq 3200$ m bzw. $dr \leq 200$ m.

Diese relativ kleinen Grenzen für r verbieten eine Vernachlässigung der Krümmungsunterschiede des Erdellipsoids in verschiedenen Breiten und Azimuten. Für jede Visur ist vielmehr der dem Azimut einer Visur und der geographischen Breite ihres Ausgangsortes entsprechende Krümmungsradius des Erdellipsoids einzusetzen, wenn die Einzelhöhenunterschiede eine genaue ellipsoidische Krümmungskorrektur erhalten sollen. Zwar wirkt sich ein Fehler der Krümmungskorrektur, wie schon im 3. Kapitel gezeigt, nicht auf einen aus Hin- und Rückvisur gemittelten Höhenunterschied aus, doch kommt einer genauen Reduktion der Einzelhöhenunterschiede auf das Ellipsoid im Hinblick auf die Bestimmung der Geoidkrümmung aus den Restdifferenzen besondere Bedeutung zu.

Die Grenzen für dr zeigen andererseits, daß der Ersatz des eigentlich elliptischen Normalchnitts durch seinen Krümmungskreis auf dem Erdellipsoid keinen Fehler im Höhenunterschied zur Folge hat, der für die hier angestrebte Genauigkeit zu berücksichtigen wäre. Die Krümmungsänderungen der Ellipsoid-Normalschnitte betragen im Alpenraum auf eine Entfernung von 20 km maximal (in Meridianrichtung) 200 m; sie liegen also auch für diese extreme Visurlänge noch innerhalb der durch (5. 11) festgelegten, zulässigen Schwankungen von r .

5. Refraktionskoeffizient k :

Zur Abschätzung des Einflusses der Refraktionsunsicherheit dk auf den Höhenunterschied ΔH genügt es, die Refraktionskorrektur in der Form

$$- \frac{b^2}{2r} k$$

zu betrachten. Aus ihr folgt:

$$\Delta dH_k = - \frac{b^2}{2r} \cdot dk \quad (5. 12)$$

und mit 1 mm als Grenze für $d\Delta H_k$

$$dk \leq \frac{2r_{(m)}}{b^2_{(m^2)}} 0,001. \quad (5. 13)$$

Die Abhängigkeit zwischen dk und b ist im Diagramm der Figur 7 dargestellt. Es zeigt sich, daß k mit einer Genauigkeit bestimmt sein müßte, die in der Praxis nie zu erreichen ist. Diese Genauigkeit beträgt bei einer Entfernung von 10 km rund $1^0/_{00}$ von k , bei 1 km immer noch rund $10^0/_{0}$ von k . Da im Gebirge der Refraktionskoeffizient stark von dem üblichen Mittelwert 0,13 abweichen kann, wird man zur Ermittlung von Höhenunterschieden auf eine Refraktionskorrektur der Einzelhöhenunterschiede verzichten. Unter der Annahme gleicher Refraktionswinkel ist ja das Mittel aus Hin- und Rückvisur vom Refraktionseinfluß unabhängig (s. 4. Kapitel). Er äußert sich jedoch in den Differenzen der Einzelhöhenunterschiede gegen das Mittel. Will man diese Differenzen zur Bestimmung der Geoidgestalt benutzen, so sind sie – wie später gezeigt wird – erst vom

Refraktionseinfluß zu befreien. Dies ist nur durch Bestimmung eines genauen Wertes von k im Beobachtungsgebiet unter Berücksichtigung der Lotabweichungen, also durch astronomische Messungen in mindestens 2 Punkten des Höhennetzes möglich.

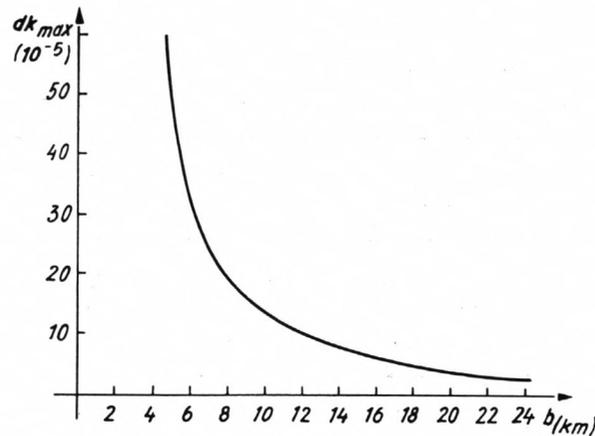


Fig. 7

Abschließend soll noch untersucht werden, inwieweit bei der Krümmungskorrektur von (5. 1)

$$\frac{b^2}{2r} + \frac{b^2}{r} \cdot \operatorname{tg}^2 \beta$$

das 2. Glied berücksichtigt werden muß. Soll sein Einfluß auf den Höhenunterschied den Betrag von 1 mm nicht überschreiten, soll also

$$\frac{b^2}{r} \operatorname{tg}^2 \beta \leq 0,001_{(m)} \quad (5. 14)$$

sein, so ist $\operatorname{tg} \beta$ durch die Formel

$$\operatorname{tg} \beta \leq \sqrt{\frac{r_{(m)}}{b^2_{(m^2)}} \cdot 0,001} = \frac{1}{b_{(m)}} \cdot \sqrt{r_{(km)}}, \quad (5. 15)$$

die für $r \approx 6380$ km in die Abschätzungsformel

$$\operatorname{tg} \beta \leq \frac{80}{b_{(m)}} \quad (5. 16)$$

übergeht, begrenzt.

Die nach (5. 16) berechneten Tangenten der Höhenwinkel und die Höhenwinkel selbst, von denen ab das 2. Glied der Krümmungskorrektur zu berücksichtigen ist, sind in der folgenden Tabelle für verschiedene b aufgeführt.

$b_{(m)}$	1000	5000	10000	20000
$\operatorname{tg} \beta$	0,080	0,016	0,008	0,004
β	5,1 ^g	1,0 ^g	0,5 ^g	0,3 ^g .

6. TRIGONOMETRISCHER HÖHENUNTERSCHIED UND BEZUGSFLÄCHE

Im 3. Kapitel dieses Abschnittes wurde nachgewiesen, daß die trigonometrische Höhenmessung auch dann noch geoidische Höhen liefert, wenn der Vertikalschnitt des Geoids längs einer Visur gegenüber dem Referenzellipsoid eine konstante Krümmung aufweist. Eine solche Krümmung liegt bestimmt vor, wenn sich die Lotabweichungen längs der Visur linear mit deren Bogenlänge ändern. Es fragt sich jedoch, ob diese Bedingung, die schon von HELMERT¹⁵ als hinreichend erkannt worden ist, auch notwendig ist und ob andererseits aus Lotabweichungen in mehr als 2 Punkten eines Profiles, deren Differenzen den Bogenlängen zwischen den einzelnen Punkten proportional sind, immer auf eine konstante zusätzliche Geoidkrümmung geschlossen werden kann.

Der Begriff „konstante zusätzliche Krümmung eines Vertikalschnittes des Geoids längs einer Visur“ ist demnach im folgenden geometrisch noch zu präzisieren:

Zu diesem Zweck sei zunächst angenommen, daß die Endpunkte der Visur auf dem Geoid selbst oder doch auf ein und derselben Niveaufläche, die als Bezugsfläche für die Höhenmessung dienen soll, liegen. Diese Annahme bedeutet für die Diskussion von Fragen der Krümmung der Bezugsfläche keinen Verlust an Allgemeinheit, wenn man vom Einfluß der Lotkrümmung auf die Höhenbestimmung absieht. Es wird dabei von den Punkten einer Lotlinie derjenige herausgegriffen, der auf der Niveaufläche des Ausgangspunktes einer Höhenvisur liegt. Der nach ihm gemessene Höhenwinkel ist nur von der Gestalt der Niveaufläche abhängig; der daraus berechnete Höhenunterschied kennzeichnet als Abstand von der Tangente des Ausgangspunktes die Krümmungsverhältnisse der Niveaufläche. Für jeden anderen Punkt der Lotlinie tritt bei der Berechnung des Höhenunterschiedes noch sein von der Krümmung unabhängiger Abstand von der Tangente des Ausgangspunktes hinzu.

Die astronomischen Lote in den beiden Punkten P_1 und P_2 einer Bezugsfläche (worunter fernerhin das Geoid oder eine andere Niveaufläche verstanden werden soll) seien – den Verhältnissen der Praxis der trigonometrischen Höhenmessung entsprechend (s. 1. Kapitel) – in einer Ebene liegend angenommen. Sie bestimmen zwei Tangentialebenen der Bezugsfläche und damit die beiden Tangenten an den Normalschnitt der Bezugsfläche zwischen P_1 und P_2 (s. Fig. 8).

Immer dann, wenn es einen Kreisbogen gibt, der durch die Punkte P_1 und P_2 läuft und dort die beiden Tangenten an den Normalschnitt der Bezugsfläche zwischen P_1 und P_2 berührt, kann von einer konstanten Krümmung der Bezugsfläche längs der Visur P_1P_2 gesprochen werden. Ein solcher Kreisbogen ist keineswegs immer vorhanden. Dies ergibt sich aus der Tatsache, daß ein Kreis durch 3 unabhängige Elemente eindeutig bestimmt ist, während im vorliegenden Fall 4 Elemente, nämlich 2 Punkte des Kreises und 2 seiner Tangenten vorgegeben sind. Zwischen den Punkten P_1 und P_2 in Figur 8 gibt es keinen solchen Kreisbogen.

¹⁵ F. R. HELMERT, Die math. und phys. Theorien der Höheren Geodäsie, Bd. II S. 607–608.

Durch diese Überlegungen wird die Aussage, daß die trigonometrische Höhenmessung auch bei konstanter zusätzlicher Geoidkrümmung gegenüber dem Ellipsoid geoidische Höhen liefert, im Hinblick auf das Kriterium der zur Bogenlänge der Visuren proportional veränderlichen Lotabweichung zugleich erweitert und eingeschränkt.

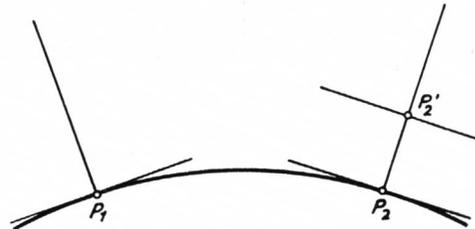


Fig. 8

Eine Erweiterung ist darin zu erblicken, daß der Normalschnitt der Bezugsfläche in Richtung einer Visur keineswegs selbst ein Kreisbogen zu sein braucht. Figur 9 mag dies erläutern:

Ein Abweichen des tatsächlichen Bezugsflächenschnittes (ausgezogene Linie) vom Kreisbogen P_1P_2 (gestrichelte Linie), etwa in Form einer Mulde oder eines Buckels, hat auf die trigonometrische Höhenmessung in P_1 und P_2 keinerlei Einfluß, wenn nur der

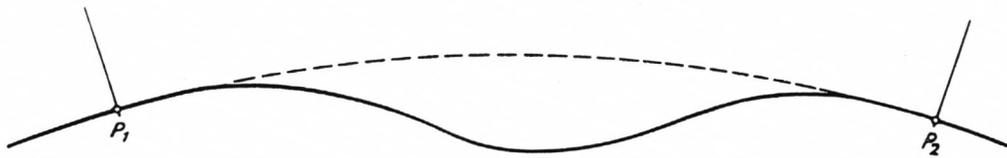


Fig. 9

Schnitt mit dem Kreisbogen in P_1 und P_2 gemeinsame Tangenten besitzt. Ein linearer Verlauf der Lotabweichungsänderungen längs der Visur P_1P_2 ist also nicht notwendig. Entscheidend ist, ob durch P_1 und P_2 ein Kreisbogen gelegt werden kann, der in P_1 und P_2 die Richtung der dortigen Tangenten an die Bezugsfläche hat.

Dieser Fall ist praktisch dann von Bedeutung, wenn eine Visur einen Massendefekt (Tal) oder einen Massenüberschuß (nur im Untergrund möglich) überstreicht und deshalb zwischen ihren Endpunkten eine Senkung oder Hebung der Bezugsfläche zu erwarten ist.

Eine Einschränkung tritt dann ein, wenn aus den Differenzen der Lotabweichungen in mehr als 2 Punkten eines Profils auf die Krümmung der Bezugsfläche geschlossen werden soll. Die Figuren 10, 11 und 12 zeigen die möglichen Verhältnisse bei 3 Punkten.

Es sei angenommen, daß der Kreisbogen durch P_1 und P_3 (gestrichelte Linie) dort die Tangenten an die Bezugsfläche (ausgezogene Linie) berührt. Punkt P_2 liege ebenfalls auf der Bezugsfläche, seine Lotrichtung falle mit der im Punkt P_2' , der P_2 auf dem Kreisbogen

P_1P_3 entspricht, zusammen. Obwohl die Lotabweichungsdifferenzen zwischen den 3 Punkten sich proportional zu den Bogenlängen der Visuren verhalten, besitzt die Bezugsfläche für die Visuren P_1P_2 und P_2P_3 keine konstante Krümmung.

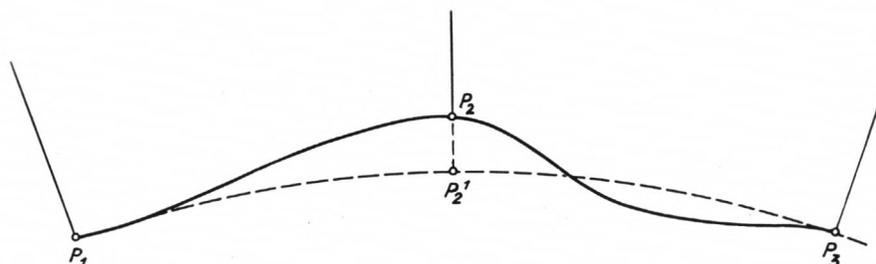


Fig. 10

Die Geoidhebung in P_2 könnte durch die trigonometrische Höhenmessung nicht erfaßt werden. Sie würde die Höhe von P_2 bezogen auf den Kreisbogen $P_1P_2'P_3$ liefern; Punkt P_2 , der auf der Bezugsfläche liegt und daher die Höhe 0 besitzt, würde also eine von 0 verschiedene, im dargestellten Fall positive Höhe erhalten.

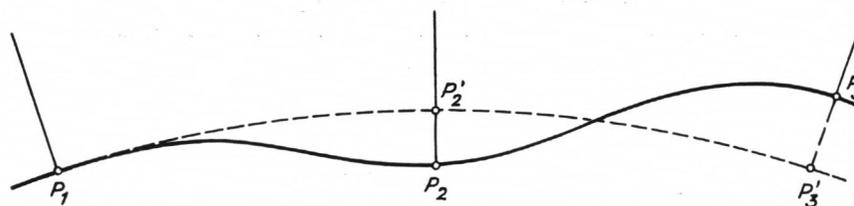


Fig. 11

Ähnlich liegen die Verhältnisse in Figur 11, in der wieder die Lotabweichungen in P_2 und P_3 denen in den Punkten P_2' und P_3' des Kreisbogens $P_1P_2'P_3'$ gleich sein sollen, ihre Differenzen sich also proportional zu den Bogenlängen der Visuren verhalten. Die Überbestimmung des Kreisbogens ergibt sich in diesem Fall nicht durch 2 Punkte und 2 Tangenten, sondern durch 1 Punkt und 3 Tangenten (Punkt P_1 , Tangenten in P_1 , P_2' und P_3').

Auch hier kann die trigonometrische Höhenmessung den Undulationen des Geoids in P_2 und P_3 nicht folgen. P_2 würde eine negative, P_3 eine positive Höhe erhalten, obwohl beiden als Punkten der Bezugsflächen die Höhe 0 zukommt.

Figur 12 stellt schließlich noch den Fall dar, daß sich die Bezugsfläche nach einer Depression nicht wieder so weit erhebt, daß sie gegenüber dem Ellipsoid den vor der Depression eingehaltenen Krümmungskreis $P_1P_2P_3'$ erreicht, wenn auch ihre Lotrichtung mit der dieses Kreises zusammenfällt.

In der Wirklichkeit kann dieser Fall zu beiden Seiten eines Tales eintreten, unter dem eine Depression des Geoids zu erwarten ist. Die trigonometrische Höhenmessung zwischen P_2 und P_3 könnte diesen Verhältnissen nicht gerecht werden.

In all diesen Fällen zeigt sich, daß einzelne Lotabweichungen, deren Differenzen auf einen konstanten Krümmungsverlauf der Bezugsfläche hinzuweisen scheinen, noch nicht als sicherer Anhalt für eine solche Krümmung dienen können. Die Proportionalität der

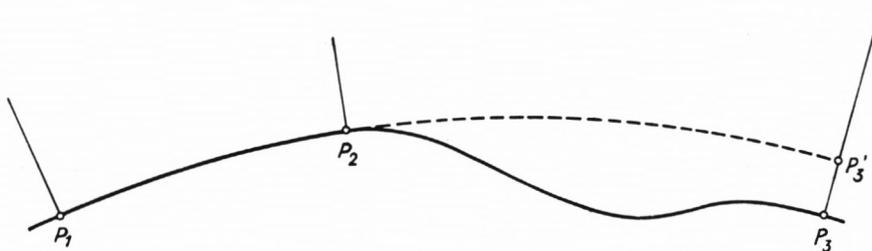


Fig. 12

Lotabweichungsdifferenzen zu den Visurlängen ist eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung dafür, daß aus der trigonometrischen Höhenmessung geoidische Höhen hervorgehen.

Die trigonometrische Höhenmessung liefert in den zuletzt geschilderten Fällen keine strengen Meereshöhenunterschiede. Ihre Ergebnisse beziehen sich auf eine gegenüber dem Ellipsoid konstant gekrümmte Fläche, welche die Undulationen der ihr stellenweise parallelen Niveaufläche vernachlässigt. Diese Fläche kann dabei ausgleichend verlaufen wie in Figur 10, sie kann aber auch einseitig um größere Beträge von der wirklichen Niveaufläche abweichen, wie in Figur 12. Als Folge solcher systematischer Abweichungen können beträchtliche Widersprüche beim Anschluß eines trigonometrischen Höhennetzes an weit auseinanderliegende Punkte mit streng bestimmten Meereshöhen auftreten. Solche Widersprüche müssen andererseits kein Anzeichen für fehlerhafte Beobachtungen oder Rechnungen sein.

Diese Feststellungen scheinen dazu geeignet, das Bild von der „ausgleichenden Geoidfläche“, das R. FINSTERWALDER¹⁶ bei der Behandlung „flächenhafter Höhentriangulationen“ entwirft, zu ergänzen und zu präzisieren. Auch wenn die Punkte des Höhennetzes innerhalb einer „Gipfflur“ liegen und anzunehmen ist, daß sich die Differenzen der Lotabweichungen auf den Gipfelpunkten proportional zu den Entfernungen verhalten, so können die trigonometrischen Höhenunterschiede nicht unerheblich von Meereshöhenunterschieden abweichen. Denn die Gipfflur ist keine Niveaufläche im potentialtheoretischen Sinn. Die Niveaufläche eines Höhennetzes kann neben den größeren Depressionen, die mit tief eingesenkten Tälern verknüpft sind und nach Figur 9 die Bestimmung der Meereshöhenunterschiede nicht zu beeinträchtigen brauchen, weitere Undulationen enthalten, die durch die Verteilung der sichtbaren Massen nicht unmittelbar zu erkennen sind. Das Ausmaß dieser Undulationen kann durch trigonometrische Messungen, die sich nur in der Gipfflur bewegen, nicht erfaßt werden. Da die Abweichungen der wirklichen Niveauflächen von der Fläche mit regelmäßiger Krümmung, auf die sich die

¹⁶ R. FINSTERWALDER, Über Art und Genauigkeit von trigonometrisch bestimmten Höhen. Zeitschr. f. Verm.-Wesen 1951, S. 133.

trigonometrische Höhenmessung bezieht, prinzipiell auch auf größere Erstreckung systematischen Charakter tragen können, ist ein Ausgleich nicht von vornherein gegeben.

Selbstverständlich würden die Undulationen der Bezugsfläche in den dargestellten Beispielen sofort zutage treten, wenn außer in den eingezeichneten Punkten P_1 – P_3 die Lotabweichungen auch in beliebigen weiteren Punkten des Profils (mit Ausnahme der Tiefpunkte in den Depressionen von Figur 10 und Figur 12) bekannt wären. Solche Lotabweichungen würden zeigen, daß die Lotabweichungen sich nicht linear mit der Profillänge ändern und daß somit der Normalschnitt der Bezugsfläche von einem Kreisbogen mehr oder minder stark abweicht. Die Differenzen dieser Lotrichtungen gegen diejenigen in den entsprechenden Punkten des Kreisbogens sind nach der Definition HELMERTS, die auch R. FINSTERWALDER übernommen hat, als „Lotstörungen“ zu bezeichnen.

Wie nun R. FINSTERWALDER¹⁷ gezeigt hat, heben sich zwar die Wirkungen einer Lotstörung auf die Höhenwinkel in einem flächenhaften symmetrischen Netz bei der Berechnung und Ausgleichung der Höhenunterschiede auf. Doch gehört zu jeder Lotstörung eine Undulation der Bezugsfläche. Eben diese Undulation wird bei der Ausgleichung im flächenhaften Netz vernachlässigt, d. h. die Ausgleichung führt auch bei strengster Symmetrie der Netzstrahlen nicht auf Meereshöhenunterschiede, sondern auf Höhenunterschiede, bezogen auf eine gegen das Ellipsoid konstant gekrümmte Fläche.

Das Ausmaß der Vernachlässigungen steht dabei in keinem Zusammenhang mit der Größe der Lotstörungen. Wie Figur 13 zeigt, kann z. B. trotz einer beträchtlichen Lotstörung die Vernachlässigung gleich 0 sein. Bei einer Bestimmung der Höhe von P_2 durch

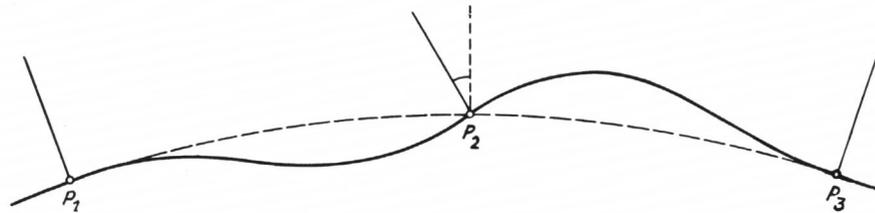


Fig. 13

Mittlung der aus trigonometrischen Visuren von P_1 und P_3 hervorgehenden Höhen erhält man die richtige geoidische Höhe, wenn P_2 – wie in der Figur – im Schnitt von Kreisbogen und Normalschnitt der Bezugsfläche liegt.

Figur 14 zeigt den umgekehrten Fall eines beträchtlichen Höhenfehlers bei kleiner Lotstörung. In jedem Fall weichen die Höhen von Punkten, in denen Lotstörungen vorhanden sind, um die Abstände dieser Punkte von einer gegen das Ellipsoid konstant gekrümmten Ausgleichsfläche von den strengen Meereshöhen ab. Die in den Figuren 10, 11 und 12 dargestellten Verhältnisse erweisen sich so als Sonderfälle mit Lotstörung 0 trotz vorhandener Undulationen. Die Ausgleichung eines flächenhaften Höhennetzes beseitigt zwar die bei langen Visuren oft beträchtlichen Fehlereinwirkungen der Lotstörungen

¹⁷ R. FINSTERWALDER a. a. O., S. 132.

auf die gegenseitigen Höhenunterschiede. Sie kann jedoch die Undulationen der Bezugsflächen nicht erfassen.

Geoidische Höhen werden durch die trigonometrische Höhenmessung nur dann erhalten, wenn der Normalschnitt der Bezugsfläche gegenüber dem Ellipsoid längs einer Visur eine konstante Krümmung im Sinne der Untersuchung dieses Kapitels aufweist. Es ist also auch

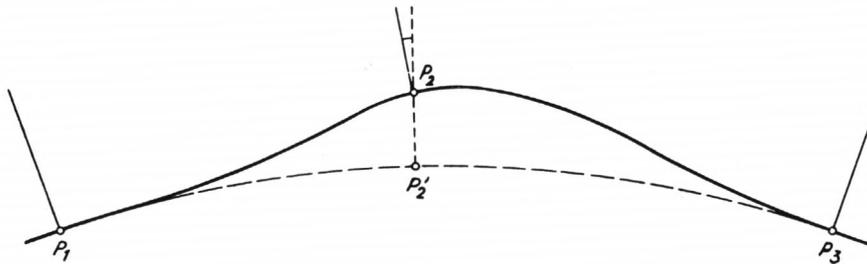


Fig. 14

möglich, die Undulationen der Bezugsflächen zu erfassen, wenn nur die Visuren so kurz gewählt werden, daß die zugehörigen Normalschnitte der Bezugsfläche mit einer Annäherung, die der geforderten Höhengenaugigkeit entspricht, durch Kreisbogen ersetzt werden können. Das Nivellement, das als trigonometrische Höhenmessung mit horizontalen Visuren betrachtet werden kann, erfüllt mit seinen kurzen Zielweiten in jedem Fall diese Forderung. Die eigentliche trigonometrische Höhenmessung mit geneigten Visuren muß sich in ihren Zielweiten dem Nivellement nähern, wenn sie strenge Meereshöhen liefern soll. Die zulässige Länge der Visuren hängt dabei allein von der Gestalt der Bezugsfläche, von deren Undulationen ab. Im Gebirge, wo Undulationen durch die Verteilung der sichtbaren Massen zu erwarten sind, dürfen solche Undulationen nicht durch lange Visuren, auch wenn sie in der Gipfelfur liegen, übersprungen werden. Sie müssen vielmehr durch Zwischenpunkte „abgetastet“ werden, so wie dies beim astronomischen Nivellement im Schweizer Meridianprofil am St. Gotthard geschehen ist. Die Bindung an ein gestrecktes Profil von bestimmtem Azimut, die durch die Bedingung gegeben ist, daß die Lotabweichungen in Richtung des Profiles nur durch astronomische Breiten- oder Längenbestimmungen ermittelt werden sollen, fällt dabei für die trigonometrische Höhenmessung weg. Die trigonometrischen Profile können gebrochen und beliebig gerichtet sein, wenn sich ihre Punkte nur genügend genau dem Verlauf der Bezugsfläche anschmiegen.

Für die praktische Anwendung der trigonometrischen Höhenmessung im Gebirge bleibt noch zu untersuchen, welche Größenordnung die in einem flächenhaften Höhennetz vernachlässigten Undulationen der Bezugsfläche tatsächlich annehmen können. Da die vorliegende Arbeit die Bestimmung von Meereshöhen mit cm-Genauigkeit zum Ziel hat, muß vor allem geprüft werden, ob diese Vernachlässigungen cm-Beträge überschreiten. Die einzige Grundlage, auf der eine solche Abschätzung getroffen werden kann, sind die schweizerischen Arbeiten im Meridianprofil des St. Gotthard.¹⁸ In der Tafelbeilage und in

¹⁸ Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz. 22. Bd. Das astronomische Nivellement im Meridian des St. Gotthard. II. Teil: Die berechneten Geoiderhebungen und der Verlauf des Geoidschnittes. Bern 1939.

Tabelle 3 der in der Fußnote genannten Veröffentlichung sind das Geländeprofil, das Diagramm der zugehörigen Lotabweichungen und das daraus resultierende Profil der Bezugsfläche im Meridian des St. Gotthard wiedergegeben. Im folgenden werden 2 Stücke dieses Profils herausgegriffen, bestehend aus je 3 Punkten in der Gipfelflur, zwischen

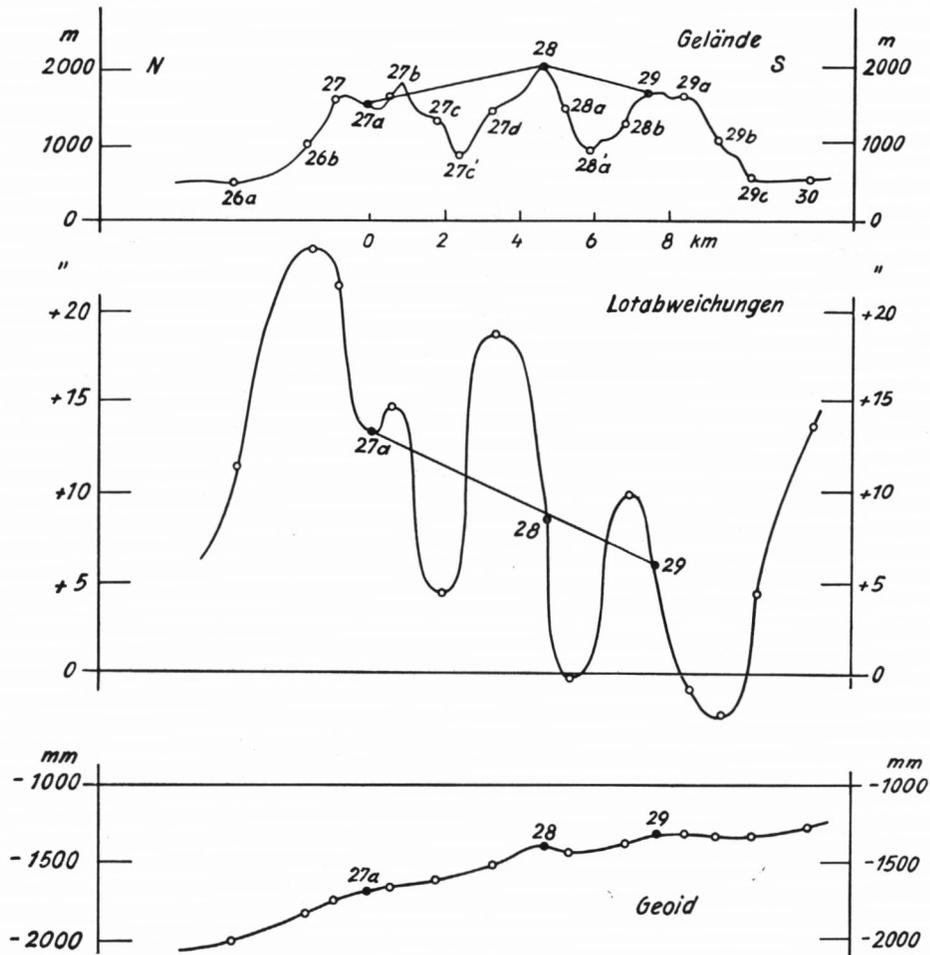


Fig. 15

denen eine trigonometrische Höhenmessung prinzipiell möglich wäre und deren Lotabweichungsdifferenzen sich proportional zu den Visurlängen verhalten.

Das erste Stück besteht aus den Punkten 27a, 28 und 29, die auf Gipfeln von 1600 bis 2000 m Höhe in den dem Gotthard-Massiv vorgelagerten Bergketten liegen. Geländeprofil (doppelt überhöht), Diagramm der Lotabweichungen und Profil der Bezugsfläche längs dieses Stückes sind in Figur 15 wiedergegeben (entnommen aus der Tafelbeigabe der schweizerischen Veröffentlichung).

Aus der Möglichkeit, die Punkte 27a, 28 und 29 im Diagramm der Lotabweichungen durch eine Gerade zu verbinden, geht die Proportionalität der Lotabweichungsdifferenzen zu den Entfernungen hervor. Zwischen diesen Punkten des Diagramms zeigen die Lotabweichungen einen sehr bewegten, sinuslinienförmigen Verlauf mit großen Amplituden, der sehr gut die im Geländeprofil erkennbare Verteilung der sichtbaren Massen widerspiegelt. Die durch die beiden tiefen Taleinschnitte zwischen 27a–28 und 28–29 bedingten Geoiddepressionen sind jedoch ohne Einfluß auf die Ermittlung von Meereshöhen durch trigonometrische Höhenmessung, wenn nur einer der konzentrischen Kreisbogen, die durch die drei sich schneidenden Lotrichtungen in 27a, 28 und 29 bestimmt sind, durch die drei Schnittpunkte der Lote mit der Niveaufläche hindurchgeht. Wie weit diese Forderung hier erfüllt ist, soll im folgenden untersucht werden.

Die nachfolgende Tabelle enthält in den ersten Spalten die Abstände X der Punkte 28 und 29 von Punkt 27a, die Lotabweichungen ξ und die Abstandsdifferenzen ΔN der Niveaufläche vom Ellipsoid, bezogen auf Punkt 27a.

Pkt.	X m	ξ "	ΔN cm	N cm	N' cm	$U = N - N'$ cm
27a	0	+ 13,1	0	0	0	0
28	4737	+ 8,4	+ 30,0	— 0,1	— 5,1	+ 5,0
29	7620	+ 6,0	+ 37,3	— 11,1	— 13,1	+ 2,0

Um in der vorgesehenen Abschätzung die Gleichung eines Kreises durch 27a, der die dortige Lotrichtung zu einem Durchmesser hat, in der bekannten Näherungsform $N = \frac{X^2}{2r}$ (r = Radius der zusätzlichen Krümmung der Niveaufläche) benutzen zu können, werden die ΔN durch Drehung ihrer Bezugsfläche um die Lotabweichung ξ des Punktes 27a auf Werte N , bezogen auf die Tangente der Niveaufläche in 27a, nach der Formel

$$N = \Delta N - \frac{\xi_{27a}}{\rho''} X$$

umgerechnet. Der Radius r des gesuchten Kreisbogens ergibt sich aus der Beziehung

$$r = \frac{X_{29}}{\xi_{29} - \xi_{27a}} \cdot \rho''.$$

Für die Abstände N' des Kreisbogens von der Tangente in 27a gilt dann:

$$N' = \frac{X^2}{2r}.$$

Durch Bildung der Differenzen $U = N - N'$ sind die Abweichungen der Punkte 28 und 29 vom Kreisbogen zu ersehen. Die Differenzen U sind die Werte der Undulationen in 28 und 29, wenn man den Kreisbogen durch 27a als Normalschnitt der Bezugsfläche zugrunde legt. Sie betragen im vorliegenden Fall + 5,0 cm und + 2,0 cm, d. h. um diese Beträge würden bei einer trigonometrischen Höhenmessung die geoidischen Höhen der Punkte 28 und 29 im Vergleich zur Höhe von 27a zu groß erhalten werden.

Diese Werte ändern sich selbstverständlich, wenn man statt des Kreisbogens durch 27a diejenigen durch 28 oder 29 zugrunde legt. Doch ist die Größenordnung der Abweichungen dieselbe. Es sind cm-Beträge. Die trigonometrischen Höhen würden also um cm-Beträge von den geoidischen abweichen.

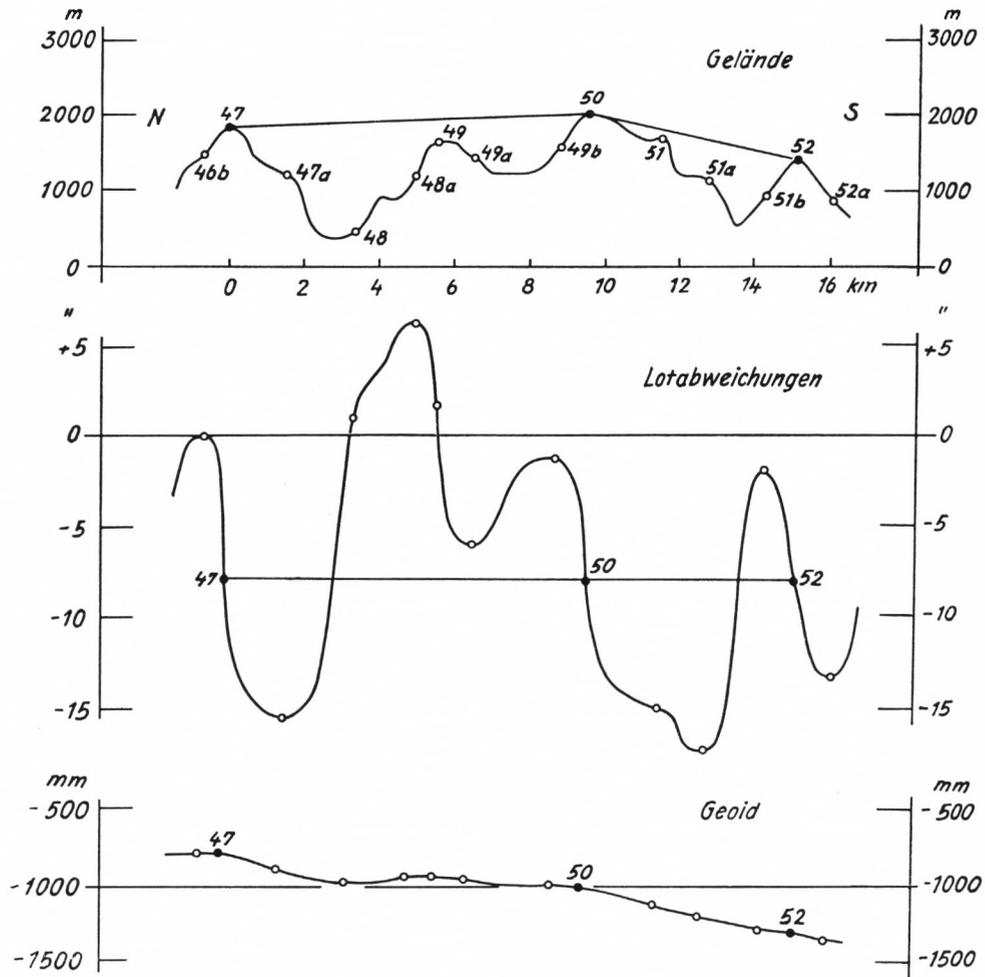


Fig. 16

Die geoidischen Höhen könnten nur durch Einschaltung von Zwischenpunkten, wie sie im Schweizer Profil schon mit 27b, c, d, 28a, b angeordnet sind, erhalten werden. Doch dürften diese Zwischenpunkte bei der außerordentlich bewegten Gestalt des Lotabweichungsdiagramms im betrachteten Profilstück nicht einmal genügen.

Ein zweites geeignetes Beispiel bietet sich zwischen den drei Punkten 47, 50 und 52 im südlichen Teil des Meridianprofils vor dem Abstieg in die oberitalienische Tiefebene. Die Besonderheit dieses Profilstückes liegt darin, daß auf seinen Gipfelpunkten dieselbe

Lotabweichung herrscht, die Bezugsfläche also gegenüber dem Ellipsoid keine Krümmung sondern nur eine Neigung zu besitzen scheint. Die Gelände- und Lotabweichungsverhältnisse sind aus Figur 16 zu ersehen, die in ihrer Anordnung der Figur 15 entspricht.

Eine analoge Behandlung dieses Profilstückes wie im ersten Beispiel liefert folgende Werte:

Pkt.	X m	ξ "	ΔN cm	N cm	$U = \Delta N - N$ cm
47	0	— 8,0	0	0	0
50	9599	— 8,0	— 21,4	— 37,2	+ 15,8
52	15242	— 7,9	— 50,8	— 59,1	+ 8,3

Die Berechnung der Werte N' entfällt hier; die Abstandsdifferenzen ΔN sind unmittelbar mit den auf Grund der konstanten Lotabweichung zu erwartenden Senkungsbeträgen zu vergleichen:

$$N = \frac{\xi}{\rho''} \cdot X.$$

Trotz des scheinbar konstanten Lotabweichungsverlaufes zwischen den Punkten 47, 50 und 52 zeigt sich also, daß die Punkte 50 und 52 auf Hebungen der Niveaulfläche von 15,8 cm bzw. 8,3 cm Höhe gegenüber dem Ellipsoid liegen. Mit diesen Fehlern würden ihre trigonometrischen Höhen gegenüber den Meereshöhen behaftet sein.

Die vorstehende Untersuchung ist — wie schon betont — nur als Abschätzung der bei trigonometrischen Messungen nur in der Gipfflur möglichen Abweichungen von den strengen Meereshöhen aufzufassen, soweit sie an Hand des veröffentlichten schweizerischen Materials möglich war. Sie zeigt, daß Fehler von der Größenordnung mehrerer cm erwartet werden müssen. Ein Anhaltspunkt über die zu erwartenden Fehler läßt sich nur auf Grund der Verteilung der sichtbaren Massen nicht geben. Die Fehler können auch nicht aus Widersprüchen im Rahmen eines flächenhaften Netzes aufgedeckt oder durch Heranziehung von Visuren aus anderen Gipfpunkten, die außerhalb des hier betrachteten Profiles liegen, vermieden werden. Dies sei an Hand der Beispiele erläutert: Man kann entweder annehmen, daß die Punkte 28 und 29 bzw. 50 und 52 auf isolierten „Buckeln“ des Geoids oder auf durchziehenden „Schwellen“, deren Verlauf im Grundriß nicht gestreckt zu sein braucht, liegen. Im ersten Fall würde keine trigonometrische Visur von einem Punkt außerhalb des Buckels die Geoiderhebungen in diesen Punkten erfassen können. Man könnte zwar — vorausgesetzt, daß man von ihrem Vorhandensein wüßte, — die Hebungen umgehen, erhielte dann aber niemals die Höhen der Punkte auf den Buckeln. Im zweiten Fall würden wohl die Visuren von anderen Punkten auf den Schwellen die gegenseitigen Höhenunterschiede richtig ergeben, doch wären die Höhen dieser Punkte, die ja von Punkten außerhalb der Schwellen bestimmt sein müßten, alle selbst schon um die Hebungsbeträge der Schwellen verfälscht.

Die einzige Möglichkeit, die Meereshöhen von Gipfpunkten mit cm-Genauigkeit trigonometrisch zu bestimmen, bleibt daher die Anschmiegung an die Bezugsfläche mit

Hilfe von Zwischenpunkten, die profilartig in den Einsenkungen zwischen den Gipfeln angeordnet sind. Wie weit diese Möglichkeit praktische Bedeutung besitzt, wurde ebenfalls im Rahmen der Arbeiten am Höhennetz des Isartales erprobt. (Siehe Abschnitt III.)

7. NICHTPARALLELITÄT DER NIVEAUFLÄCHEN

Der trigonometrisch bestimmte Höhenunterschied ΔH zweier Punkte P_1 und P_2 bezieht sich auf die Niveaufläche des Ausgangspunktes P_1 . Verläuft diese Niveaufläche längs der Visur P_1P_2 nicht parallel zum Geoid, so weicht der auf das Geoid bezogene Höhenunterschied $\overline{\Delta H}$ von ΔH um eine kleine Größe ab, die von HELMERT¹⁹ mit E bezeichnet worden ist. Es gilt also:

$$\overline{\Delta H} = \Delta H + E. \quad (7. 1)$$

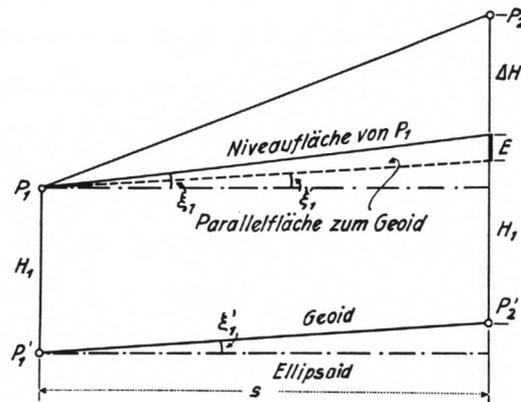


Fig. 17

Die Größe E , welche die gemessenen Höhenunterschiede wegen Nichtparallelität der Niveauflächen korrigiert, ist in erster, aber stets ausreichender Näherung durch

$$E = (\xi_1 - \xi_1') \cdot s \quad (7. 2)$$

bestimmt. Hierbei bedeutet ξ_1 die Lotabweichung im Oberflächenpunkt P_1 (HELMERTSche Lotabweichung), ξ_1' die Lotabweichung im Schnittpunkt P_1' der Lotlinie durch P_1 mit dem Geoid (PIZETTISChe Lotabweichung).²⁰ s ist die horizontale Visurlänge P_1P_2 .

ξ_1 kann durch trigonometrische oder astronomische Messungen bestimmt werden. ξ_1' jedoch ist solchen Messungen nicht zugänglich, da P_1' im allgemeinen und besonders im Gebirge unter der physikalischen Erdoberfläche liegt. Es kann nur durch Schwer-

¹⁹ F. R. HELMERT, Zur Bestimmung kleiner Flächenstücke des Geoids aus Lothabweichungen mit Rücksicht auf Lothkrümmung. SitzBer. der Kgl. preuß. Akad. d. Wiss. Nr. 42. Berlin 1900.

²⁰ Siehe M. KNEISSL, Begriff und Bedeutung der Lotabweichungen in der Geodäsie. Allg. VermNachr. 1951, 4, S. 84.

kraftmessungen und unter Berücksichtigung der Massenverteilung in der Umgebung von P_1 aus ξ_1 ermittelt werden.

Die Bestimmung von E ist durch rein geometrische Messungen (Messungen von Strecken und Winkeln) nicht möglich. Durch eine trigonometrische Höhenmessung allein können daher strenge Meereshöhen nicht gewonnen werden. Doch gilt dasselbe vom geometrischen Nivellement, dessen aus der Messung hervorgehende Höhenunterschiede um dieselbe Größe E auf das Geoid reduziert werden müssen. Zu den rein geometrischen Messungen müssen physikalische Messungen treten.

Die Bestimmung von E geht somit über den Rahmen der vorliegenden Arbeit, die sich die Klärung der geometrischen Zusammenhänge zum Ziel gesetzt hat, hinaus. Als Grundlage für eine Abschätzung von E im Isartal-Netz soll sie trotzdem in kurzen Zügen geschildert werden.

Unter den Arbeiten zur Bestimmung von E sind vor allem jene von HELMERT²¹ und NIETHAMMER²² zu nennen. Als Ausgangspunkt kann eine der drei Formeln

$$g_0 \cdot E_{P_1}^{P_2} = \int_{P_1}^{P_2} (g - g_0) \cdot dz + [H(g_0 - \bar{G})]_{P_1}^{P_2} \quad (7.3a)$$

$$g_{P_1} \cdot E_{P_1}^{P_2} = - \int_{P_1}^{P_2} z \cdot dg + [H(g - \bar{G})]_{P_1}^{P_2} \quad (7.3b)$$

$$\bar{g}_{P_1}^{P_2} \cdot E_{P_1}^{P_2} = - \int_{P_1}^{P_2} H \cdot dg + [H(g - \bar{G})]_{P_1}^{P_2} \quad (7.3c)$$

gewählt werden. Dabei bedeuten:

g_0 = willkürlich gewählter, konstanter Schwerewert

g = Wert der Schwere an der Erdoberfläche

$\bar{g}_{P_1}^{P_2}$ = Mittelwert der Schwere auf der Erdoberfläche zwischen P_1 und P_2

z = trigonometrisch oder nivellitisch bestimmter Höhenunterschied

H = Meereshöhe

\bar{G} = mittlere Schwere längs einer Lotlinie von der Erdoberfläche bis zum Geoid.

Das NIETHAMMERSCHE Verfahren geht von der Formel (7.3a) aus, bei der unter dem Integral die Schwerewerte an der Erdoberfläche erscheinen. Es ist immer dann vorteilhaft anzuwenden, wenn solche Schwerewerte vorliegen und die Korrektur E im bestmöglichen Anschluß an diese Werte berechnet werden soll. So wurden die Werte E im Geoidprofil des St. Gotthard unter Benutzung des Schwerenetzes in der Schweiz nach (7.3a) berechnet.²³

Aus Formel (7.3c) wurde von HELMERT durch Umformung eine Formel abgeleitet, in der die normale Schwerkraft im Meeresniveau sowie die BOUGUER-Reduktion und die topographische Reduktion der Schwerkraft als Hauptbestimmungstücke erscheinen. Diese Methode wurde von GALLE bei der Bestimmung des Geoids im Harz angewandt.²⁴

²¹ Siehe Fußnote 19.

²² TH. NIETHAMMER, Nivellement und Schwere als Mittel zur Berechnung wahrer Meereshöhen. Veröff. der Schweiz. Geod. Komm. 1932.

²³ Siehe Fußnote 18. A. a. O. S. 19 ff.

²⁴ A. GALLE, Das Geoid im Harz. Veröff. d. Königl. Preuß. Institutes. Neue Folge Nr. 61, Berlin 1914.

Einen guten Anhaltspunkt für die Größenordnung der Korrektur E im Hochgebirge bietet wieder das Meridianprofil am St. Gotthard. Es zeigt sich, daß das Geoid in einem Profil über die Alpen hinweg relativ nicht so stark vom Referenzellipsoid abweicht als die Niveauflächen an der physikalischen Erdoberfläche. Während diese im Scheitel des Alpenkamms eine Aufbiegung bis zu 2,7 m erleiden, ist die Aufbiegung des Geoides selbst um 0,4 m geringer. Mit diesem Betrag von etwa 0,4 m hat also eine trigonometrische Höhenmessung, die über die Alpen hinwegführt, als maximaler Abweichung gegen die wahren Meereshöhen infolge der Nichtparallelität der Niveauflächen zu rechnen.

Es zeigt sich weiter, daß der Profilverlauf des Geoids weit ruhiger ist als der der Niveauflächen in Oberflächenhöhe. Die Unregelmäßigkeiten der Massenverteilung äußern sich auf dem Geoid, das von ihnen entfernter ist, in geringeren Undulationen als in den unmittelbar benachbarten Niveauflächen.

Diese Tatsache scheint dazu geeignet, den im 6. Kapitel behandelten und abgeschätzten Einfluß der Undulationen der Bezugsfläche auf die trigonometrische Höhenmessung als weniger ins Gewicht fallend zu betrachten. Eine trigonometrische Höhenmessung, welche die Undulationen glättet und auf eine ausgleichende Fläche führt, kommt den Verhältnissen auf dem Geoid näher. Jedoch kann die wahre Meereshöhe, wie eben gezeigt wurde, nur durch zusätzliche Schwerkraftmessungen bestimmt werden. Die daraus berechneten Korrekturen E beziehen sich auf die Niveauflächen an der Oberfläche mit all ihren Undulationen. Es müssen daher die Höhenunterschiede gerade gegen diese Niveauflächen genau bekannt sein, wenn die Reduktion sinnvoll sein soll.

Die bisherigen Vergleiche an Hand des Schweizer Profils bezogen sich auf die wahren Meereshöhen der Profilmunkte. Bei Betrachtung der Meereshöhenunterschiede ergibt sich ein weit günstigeres Bild. Da das Geoid gegen die Niveaufläche an der Oberfläche durchwegs nur sehr schwach geneigt ist, erhalten die einzelnen Höhenunterschiede beim Übergang auf das Geoid nur geringfügige Korrekturen. Erst deren Summierung über ein langes Profil liefert die obengenannten größeren Fehler. Als Beispiel diene das schon im 6. Kapitel benützte Profilstück von Punkt 27a bis Punkt 29, dessen Lage in bezug auf den Gesamtkomplex der Alpen ungefähr der des Isartal-Netzes entspricht. Die Korrekturen betragen dort:

Pkt.	E	ΔE
	cm	cm
27a	+ 19,2	+ 1,2
28	+ 18,0	— 4,7
29	+ 22,7	

Die Veränderungen ΔE geben die Größenordnung der Fehler an, mit denen für die trigonometrischen Höhenunterschiede gegenüber den Meereshöhenunterschieden wegen Nichtparallelität der Niveauflächen zu rechnen ist. Da es sich um cm-Beträge handelt, sind sie dann, wenn exakte Meereshöhenunterschiede gewonnen werden sollen, wohl zu berücksichtigen. Die Bestimmung eines zuverlässigen Schwerenetzes ist also zur genauen Reduktion trigonometrischer Höhenmessungen unumgänglich.

II. DAS HÖHENNETZ IM ISARTAL

1. GEODÄTISCHE GRUNDLAGEN

Die praktischen Arbeiten, die einer Erprobung der trigonometrischen Höhenmessung im Gebirge dienen sollten, wurden von vornherein auf geringen Aufwand an Personal und Material abgestellt. Dies geschah nicht nur aus finanziellen Gründen sondern auch in der Absicht, die trigonometrische Höhenmessung zu einem einfachen und beweglichen Meßverfahren auszubauen.

Wie in Abschnitt I gezeigt wurde, müssen die Lage-Koordinaten der Punkte eines Höhennetzes mit etwa cm-Genauigkeit bekannt sein, wenn in den Höhen cm-Genauigkeit erreicht werden soll. Die Punkte der nachgeordneten Netze im bayerischen Alpenraum erfüllen im allgemeinen diese Bedingung nicht. Es sind vielmehr in diesen Netzen Spannungen bis zu dm-Beträgen zu erwarten, die selbstverständlich für topographische Zwecke keine Rolle spielen. Da eine eigene Neusignalisierung und -triangulation nicht in Betracht kam, mußte nach einem geeigneten kleinen Punktnetz des notwendigen Genauigkeitsgrades und womöglich mit bestehender Signalisierung gesucht werden.

Es kam der Arbeit außerordentlich zugute, daß ein Jahr vor ihrem Anlaufen im Rahmen der Vermessungsarbeiten am geplanten Sylvensteinspeicher im Isarquertal durch W. Kuny ein lokales Triangulationsnetz von hoher Genauigkeit aufgebaut worden war. W. Kuny hat darüber eingehend berichtet.²⁵ Die Punkte dieses Netzes, das an das Bayerische Landesdreiecksnetz durch Ausgleichung angeschlossen war, waren dauerhaft versichert und mit Stangensignalen versehen. Dank dem Entgegenkommen der Bauleitung Sylvenstein konnten sie für die geplante Höhentriangulation benutzt werden. Ich bin für dieses Entgegenkommen Herrn Baurat K. BALK und Herrn Regierungsbaumeister Dr. W. KUNY zu großem Dank verpflichtet. Der mittlere Lagefehler der Hauptpunkte des Sylvensteinnetzes beträgt im Durchschnitt $\pm 1,6$ cm.

1. Das flächenhafte Höhennetz.

6 dieser Punkte auf Gipfeln oder in Gipfelnähe wurden zu einem flächenhaften Höhen-netz zusammengefaßt, das in Figur 18 wiedergegeben ist. 3 der Punkte liegen auf Gipfeln nördlich des Isar-Quertales, das tektonisch-geologisch im Walchental seine natürliche Fortsetzung nach Osten hat. Es sind dies die Punkte (in Klammern die fernerhin benützten Abkürzungen und die genäherten Meereshöhen): Staffel (St, 1532 m), Hoher Zwiesler (HZ, 1345 m), Gerstenrieder Kopf (GK, 1422 m). Die Isar durchschneidet nordöstlich von Fall die nördliche Begrenzungskette ihres Tales in einem epigenetischen Durchbruchstal und verläßt das Netzgebiet zwischen HZ und GK. Die 3 Punkte der südlichen Talflanke sind: Stuhlbach-Joch N (StJ-N, 1736 m), Kotzen (K, 1393 m) und Hühnerberg (HB, 1623 m). Zwischen K und HB verläuft das Tal der Dürrach, die bei Fall in die Isar mündet, in südnördlicher Richtung.

²⁵ Siehe W. KUNY, Der Sylvensteinspeicher und seine Vermessungsaufgaben. Zeitschr. f. Verm. Wesen 1951, S. 330-336.

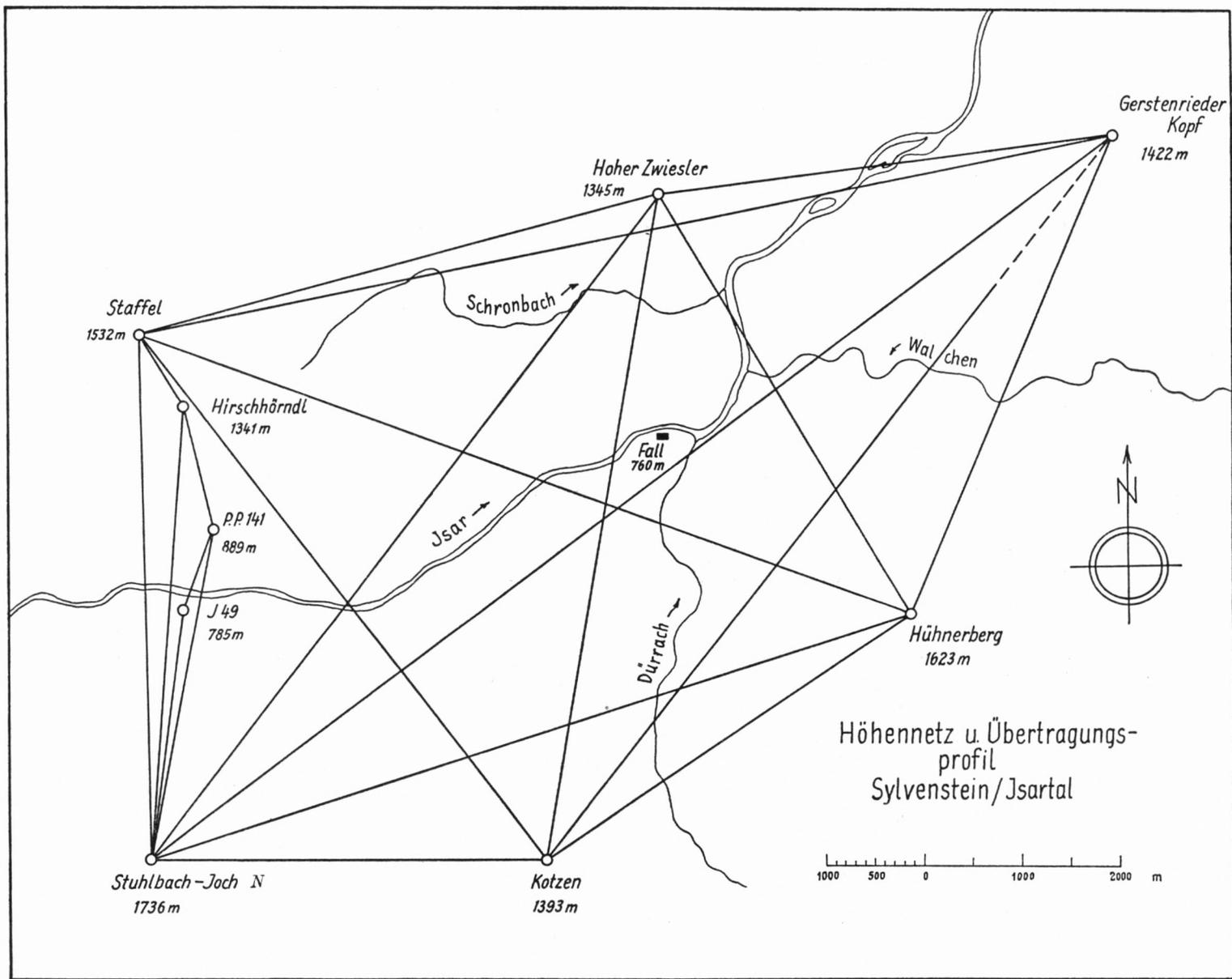


Fig. 18

Die Punkte Kotzen und Hoher Zwiesler liegen nicht unmittelbar auf den Gipfeln der gleichnamigen Berge. Sie mußten von der Bauleitung Sylvenstein der gegenseitigen Sicht und der im Rahmen des Sylvenstein-Netzes nötigen Talanschlüsse wegen jeweils auf dem talseitigen Hang der Bergmassive errichtet werden. Der Höhenunterschied gegen den Gipfel beträgt bei HZ etwa 30 m, bei K etwa 100 m. Die Punkte des flächenhaften Höhennetzes können – mit Ausnahme von K – als zur Gipfelflur der triassischen Kalkalpen gehörend angesehen werden. Die einzelnen Bergmassive sind im wesentlichen durch den Hauptdolomit und Plattenkalk aufgebaut; dazwischenliegende, höhere Verebnungsflächen sind von Kössener Schichten erfüllt.

Bei dieser Struktur des Gipfelnetzes stand zu erwarten, daß die Lotabweichungen seiner Punkte zwar den allgemeinen Anstieg des Geoids am Alpenrand widerspiegeln, daß aber keine außergewöhnlichen Lotstörungen auftraten. Die Hauptbedingung für eine sinnvolle Anwendung der trigonometrischen Höhenmessung, nämlich die konstante Krümmung des Geoids im Netzbereich und entlang der einzelnen Visuren, schien damit genügend erfüllt. Lediglich im Punkte K konnte seiner Lage auf dem Vorderhang wegen eine Lotstörung nach Süden erwartet werden.

2. Das Übertragungsprofil.

Als Ausgangspunkt der Übertragung der Meereshöhe vom Tal in die Gipfelflur wurde der Punkt J 49 (785 m) gewählt, der an der Straße Fall-Vorderriß auf der ersten, etwa 20 m hohen Terrasse über dem Flußbett liegt. Dieser Punkt war von W. KUNY an das Bayerische Landesnivellement angeschlossen worden. Er liegt nahe der Horizontalprojektion der Visur St–(StJ–N), die ihrerseits das Azimut 359° hat, also fast in Meridianrichtung verläuft.

Auf Grund der Verteilung der sichtbaren Massen ist längs des Isartales eine Geoiddepression zu erwarten, die in den allgemeinen Anstieg des Geoids gegenüber dem Ellipsoid am Alpenrand eingebettet ist und deren Tiefstpunkt unter der Talsohle liegt. Wenn eine solche Depression auch nicht zu einer negativen (nach außen konkaven) Krümmung des Geoids führt, so kann ihr Verlauf gegenüber dem Ellipsoid doch als flache Mulde mit einem Profil, das mit starker Annäherung sinusförmig ist, angesehen werden. Gegenüber dem Ellipsoid ist daher ein Krümmungswechsel zwischen St–J 49 und J 49–(StJ–N) zu erwarten, der durch eine durchgehende trigonometrische Visur nicht mehr zu überbrücken ist (siehe I. Abschnitt, 6. Kapitel). Zur Übertragung der Höhe von J 49 in das Gipfelniveau müssen daher Zwischenpunkte eingeschaltet werden, die sich dem Geoidverlauf anschmiegen. Damit die vorgesehene Kontrolle der trigonometrischen Höhenmessung durch astronomische Bestimmung der Lotabweichungen nur durch Breitenbestimmungen durchgeführt werden konnte, sollten diese Zwischenpunkte so nahe wie möglich in Richtung eines Meridians liegen. Von J 49 war ein solcher stufenförmiger Aufstieg nur nach Norden, auf dem Punkt Staffel möglich. Im Sylvenstein-Netz liegen dort auf einem Talabsatz bzw. auf einem Gefällsbruch des Hanges die Punkte PP 141 (889 m) und Hirschhörndl (HH, 1341 m). Sie weichen zwar nicht unbeträchtlich von dem Nord-Süd-Profil (StJ–N)–St ab, doch war zu erwarten, daß infolge der sehr geringen Lotabweichungen in O-W-Richtung diese Abweichungen nur einen vernachlässigbaren Einfluß ausüben würden. An die Neuerrichtung von Punkten, die näher am vorgesehenen Übertragungsprofil gelegen wären, konnte bei der Beschränktheit der Mittel nicht gedacht werden.

Die Lage der Punkte Kotzen und PP 141 war im Rahmen des Sylvenstein-Netzes noch nicht mit derselben Genauigkeit bestimmt wie die der übrigen Netzpunkte. Durch Triangulation und Einzelpunkteinschaltung wurden sie daher neu eingemessen. Die dabei erzielte Genauigkeit entspricht der der übrigen Netzkoordinaten.

Die Lage der Netzpunkte ist im SOLDNERSCHEN Koordinatensystem der Bayerischen Landesvermessung (Nullpunkt München) durch folgende Werte gegeben:

Punkt	y (m)	x (m)
Staffel	+ 7914,77	— 61 472,49
Hoher Zwiesler	+ 2612,28	— 59970,24
Gerstenrieder Kopf	— 2064,34	— 59370,01
Stuhlbach-Joch - N	+ 7809,42	— 66760,27
Kotzen	+ 3621,16	— 66760,78
Hühnerberg	— 85,19	— 64254,49
J 49	+ 7454,75	— 64397,64
P. P. 141	+ 7030,25	— 63505,66
Hirschhörndl	+ 7349,71	— 62163,14

Die Profile des Geländes unter den Visuren sind in den Tafeln bei Seite 48 wiedergegeben. Sie wurden aus dem Topographischen Atlas von Bayern 1:50000 konstruiert. Es ist aus ihnen zu ersehen, daß im Gipfelnetz nur die Visur Kotzen - Hühnerberg an ihrem östlichen Ende über eine längere Strecke hin in Bodennähe verläuft. Alle anderen Visuren gewinnen dicht hinter den Ausgangspunkten die freie Atmosphäre. Dies gilt, wenn auch nicht in so starkem Maße, auch von den Visuren des Übertragungsprofils. Unregelmäßigkeiten oder einseitige Einwirkungen der Refraktion waren also im allgemeinen nicht zu erwarten.

2. DAS INSTRUMENT

Als Winkelmeßinstrument wurde für alle Arbeiten im Isartal - auch die astronomischen - der Wild-Universaltheodolit T2 Nr. 22571 mit 400^g-Teilung benutzt. Das Instrument wurde dankenswerterweise vom Institut für Photogrammetrie, Topographie und Allgemeine Kartographie der Technischen Hochschule München zur Verfügung gestellt. Ein zweites Instrument derselben Bauart (Nr. 28264), ebenfalls dem genannten Institut gehörig, konnte für die gegenseitig-gleichzeitigen Messungen verwendet werden.

Das erste Instrument wurde im Geodätischen Institut der Technischen Hochschule München untersucht. Es ergaben sich dabei folgende Ables- und Einstellgenauigkeiten:

1. Genauigkeit m_{ak} einer Ablesung am Höhenkreis bei feststehendem Fernrohr und Höhenkreis (Einstellung der Koinzidenz mit dem optischen Mikrometer):

$$m_{ak} = \pm 1,6^{cc},$$

ermittelt aus 100 Koinzidenzeinstellungen, je 10 in 10 verschiedenen Fernrohrstellungen.

2. Genauigkeit m_{al} einer Ablesung am Höhenkreis bei einspielender Höhenkreislibelle (Libelleneinstellung durch Prismen-Koinzidenz der Blasenenden):

$$m_{al} = \pm 4,6^{cc},$$

ermittelt aus 50 Libelleneinstellungen, je 10 in 5 verschiedenen Fernrohrstellungen.

3. Aus 1. und 2. ergibt sich die Einspielgenauigkeit m_l der Libelle nach der Formel

$$m_l = \pm \sqrt{m_{al}^2 - m_{ak}^2}$$

$$m_l = \pm 4,3^{cc}.$$

4. Genauigkeit m_{zk} der Ablesung eines eingestellten scharfen Höhenzieles im geschlossenen Raum auf kurze Distanz (ohne Refraktionseinwirkung) bei unveränderter, eingespielter Libelle:

$$m_{zk} = \pm 2,9^{cc},$$

ermittelt aus 50 Ablesungen je 10 nach 5 verschiedenen Höhenzielen.

5. Aus 1. und 4. ergibt sich die Zielgenauigkeit m_z (reine Einstellgenauigkeit eines scharfen Höhenzieles ohne Berücksichtigung der Koinzidenzfehler beim Ablesen):

$$m_z = \pm \sqrt{m_{zk}^2 - m_{ak}^2}$$

$$m_z = \pm 2,5^{cc}.$$

6. Aus 3. und 4. findet man den mittleren Fehler m_a einer Ablesung bei der Höhenwinkel-messung, soweit er vom Instrument und vom Beobachter (Einstellen des Zieles, Einspielen der Libelle, Einstellen der Koinzidenz im Ablesemikroskop) abhängt, nach

$$m_a = \pm \sqrt{m_z^2 + m_l^2}$$

zu

$$m_a = \pm 5,2^{cc}.$$

7. Der mittlere Fehler m_w eines einmal in beiden Fernrohrlagen gemessenen Höhenwinkels ergibt sich aus 6. zu

$$m_w = \frac{m_a}{\sqrt{2}} = \pm 3,7^{cc}.$$

Zum Vergleich seien die entsprechenden Werte des Theodoliten Wild T 2 Nr. 22234 angeführt, der bei trigonometrischen und astronomischen Arbeiten im Meridianprofil des St. Gotthard verwendet wurde. Nach einer Untersuchung durch P. ENGI²⁶ ergab sich:

²⁶ P. ENGI, Procès Verbal de la 96. Séance de la Commission Géodésique Suisse. Bern 1952.

$$m_{ak} = \pm 0,91'' = \pm 2,7^{cc}$$

$$m_l = \pm 2,89'' = \pm 8,7^{cc}$$

$$m_s = \pm 0,81'' = \pm 2,4^{cc}$$

$$m_a = \pm 3,14'' = \pm 9,4^{cc}$$

$$m_w = \pm 2,22'' = \pm 6,7^{cc}.$$

Dieser Theodolit besitzt eine eigens für Höhenwinkelmessungen eingebaute Höhenkreislibelle mit Teilstrichablesung. Trotzdem ist die Einspielgenauigkeit der Libelle unverhältnismäßig gering.

Dank dem Entgegenkommen der Firma WILD konnte das im Isartal verwendete Instrument im Herstellerwerk Heerbrugg einer eingehenden Untersuchung auf Fernrohrbiegung unterzogen werden. Durch Höhenwinkelmessung im parallelen Strahlengang zweier Präzisionskollimatoren konnte eindeutig festgestellt werden, daß das Instrument keine Fernrohrbiegung oder fernrohrbiegungsartige Erscheinungen, wie sie etwa durch Verlagerung der Fokussierlinse beim Durchschlagen hervorgerufen werden könnten, aufweist. – Für freundliche Beratung und Hilfe bei den Untersuchungen in Heerbrugg bin ich Herrn E. BERCHTOLD von der Firma Wild zu besonderem Dank verpflichtet.

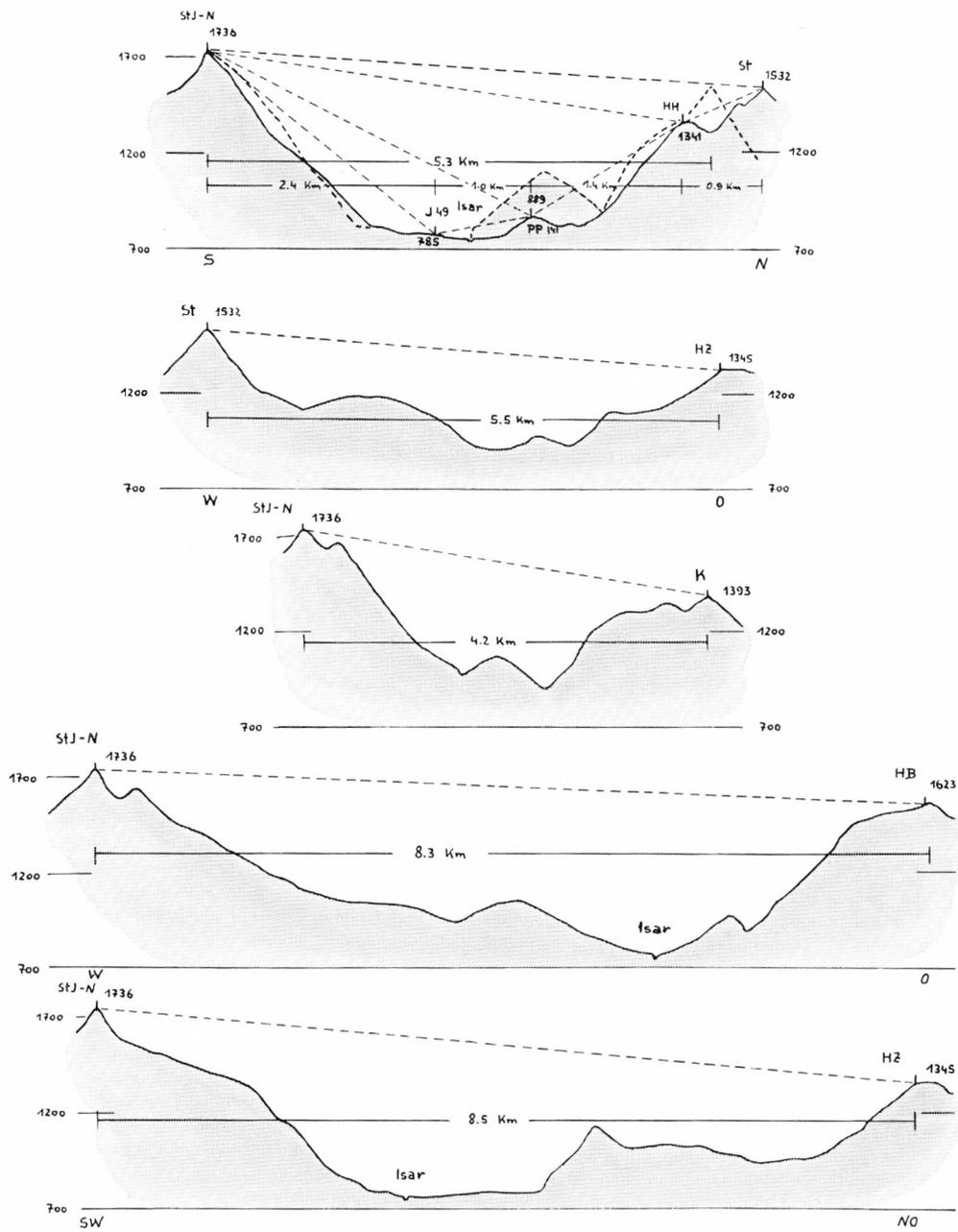
Das Instrument hat sich bei den Arbeiten im Isartal sehr gut bewährt. Bei unbegrenzter Transportfähigkeit auch in weglosen Hochgebirgsregionen zeigte es trotz seines relativ leichten Baues ausreichende Standfestigkeit und Unempfindlichkeit gegen Witterungseinflüsse. Seine Vergrößerung (28fach) und seine Lichtstärke erlaubten ohne Schwierigkeit Visuren nach Stangensignalen mit Querbrettern auf Entfernungen bis zu 12 km. Auch bei relativ ungünstigen Lichtverhältnissen war auf diese Entfernungen die Oberkante des obersten Signalbrettes klar und scharf einzustellen.

Es wäre wünschenswert, die Messungen mit einem Präzisions-Theodoliten Wild T 3 zu wiederholen und zu prüfen, ob mit diesem bedeutend schwereren Instrument eine lohnende Genauigkeitssteigerung der Höhenwinkel zu erzielen ist. Bei den Höhenwinkelmessungen im Schweizer Meridianprofil des St. Gotthard wurden Wild-T 3-Theodoliten verwendet. F. KOBOLD gibt in seinem vorläufigen Bericht über diese Messungen²⁷ als Genauigkeit für einen einmal in beiden Fernrohrlagen gemessenen Höhenwinkel den aus den Kollimationsproben berechneten Betrag von „ungefähr“ $\pm 1,0'' = \pm 3^{cc}$ an. Da die beobachteten Visuren bedeutend kürzer (im Mittel etwa 3 km) sind als im Isartal-Netz, läßt diese Angabe noch keinen ausreichenden Vergleich zu.

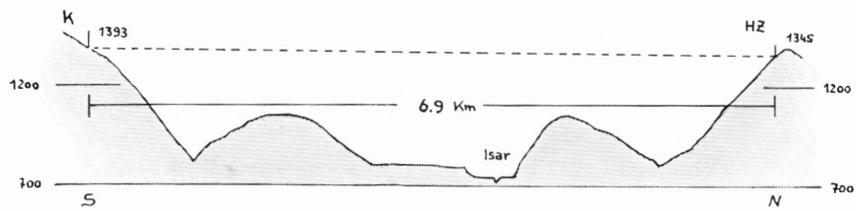
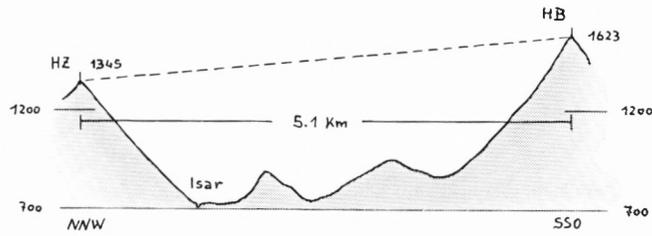
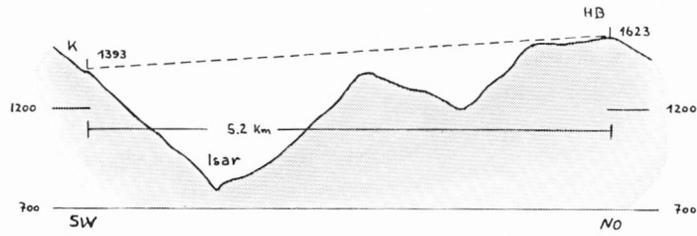
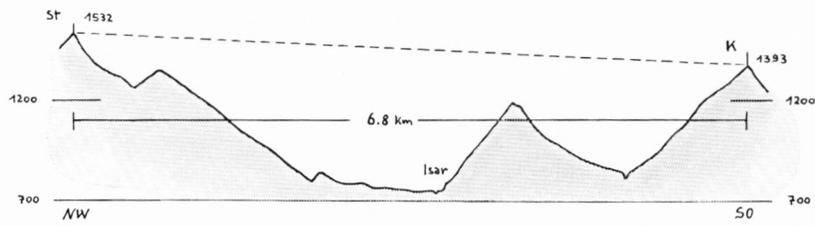
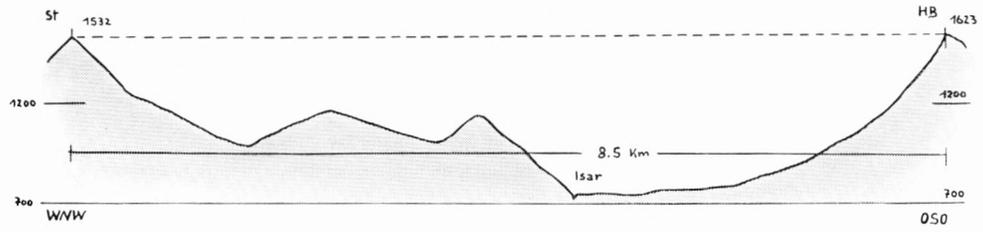
Für die Zwecke der genauen Höhenwinkelmessung wäre der Einbau verstellbarer Höhenkreise in die Instrumente zu erwägen. Die Kreisteilungsfehler, die bei festem Höhenkreis mit vollem Betrag in die Höhenwinkel eingehen, könnten damit wie bei der Satzmessung von Horizontalwinkeln weitgehend eliminiert werden. Außerdem wäre eine größere Unabhängigkeit der Messungen in mehreren Sätzen garantiert. – Nach Mitteilung der Firma Wild ist der Einbau verstellbarer Höhenkreise prinzipiell ohne Schwierigkeiten möglich.

²⁷ F. KOBOLD, Die Bestimmung der Lotabweichungskomponenten im Meridian des St. Gotthard aus Höhenwinkelmessungen. Annexe au Procès – Verbal de la 95. Séance de la Commission Géodésique Suisse, Neuchâtel 1951.

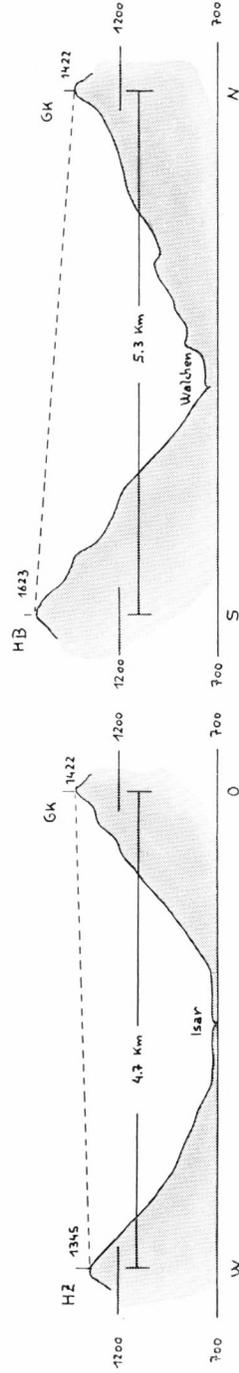
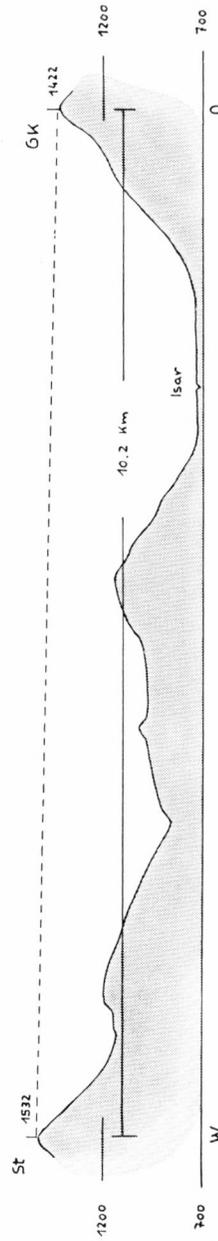
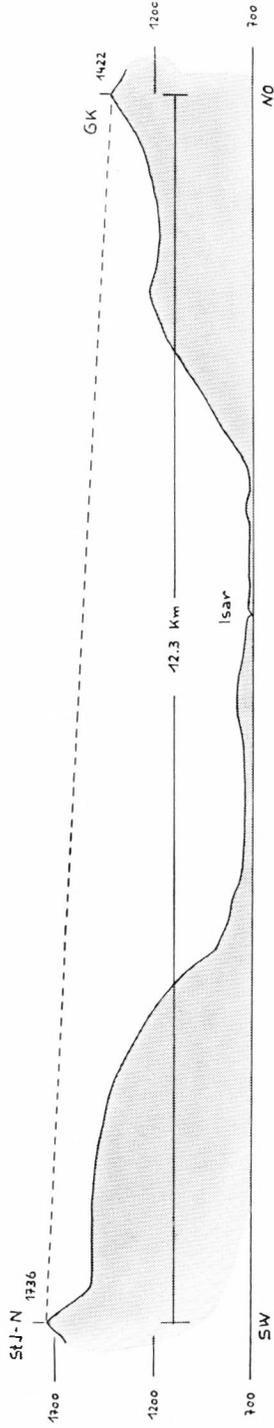
TAFEL 1



TAFEL 2



TAFEL 3



3. BEOBACHTUNG DER HÖHENWINKEL

Aus der Untersuchung des Instrumentes war hervorgegangen, daß allein auf Grund der Unsicherheit der instrumentellen Messung mit einem mittleren Fehler von $\pm 3,7^{\text{cc}}$ für einen einmal gemessenen Höhenwinkel gerechnet werden muß. Bei der Beobachtung im Feld war durch die Refraktionsunruhe eine Erhöhung dieses mittleren Fehlers zu erwarten. Um die Höhenwinkel mit einer Genauigkeit von $1-2^{\text{cc}}$ zu erhalten, mußten demnach jeweils 16-20 Beobachtungen vorgesehen werden. Die Höhenwinkel wurden deshalb auf jeder Station in 6 Sätzen gemessen, wobei in jeder Lage mit dem Ober-, dem Mittel- und dem Unterfaden eingestellt und abgelesen wurde. Dies ergab je 18 Beobachtungen für jeden Höhenwinkel. Die Beobachtung in der zweiten Fernrohrlage schloß sich bei jedem Ziel unmittelbar an die in der ersten Lage an, um eventuelle Refraktionsänderungen über größere Zeiträume hin auszuschalten. Die Beobachtungen wurden jeweils um die Mittagszeit, zwischen 10 Uhr und 14 Uhr, ausgeführt, da nach den bisherigen Erfahrungen die Refraktion um diese Zeit ihr Minimum und ihre größte Konstanz erreicht.²⁸ Vor und nach jedem Satz wurde mit einem Schleuderthermometer und einem Aneroidbarometer Lufttemperatur und -druck gemessen, um eventuelle Refraktionsänderungen mit meteorologischen Daten in Beziehung bringen zu können.

Sämtliche Beobachtungen im Höhennetz und im Übertragungsprofil konnten in der Zeit vom 14. bis 25. August 1951 ausgeführt werden. Die Großwetterlage änderte sich in diesem Zeitraum nur sehr wenig. Sie war durch im allgemeinen sonniges Sommerwetter gekennzeichnet. Stark abgeschwächte atlantische Störungen führten an einzelnen Tagen, besonders gegen Nachmittag, von Westen her eine lockere, hochliegende Wolkendecke ins Aufnahmegebiet. Nur am vorletzten und letzten Tag brachten die Störungen leichte und kurze Niederschläge. Gewitter blieben während der ganzen Aufnahmezeit auch in den Nächten aus. Den Messungen hinderlich war gelegentlich der Dunst und das Flimmern der Luft, besonders bei Visuren in Richtung gegen das einfallende Sonnenlicht. Doch waren beide Erscheinungen als Anzeichen eines guten konvektiven Austausches im Luftmeer und damit stabiler Refraktionsverhältnisse eher zu begrüßen.

Sprünge oder starke Schwankungen in Temperatur und Luftdruck konnten auf keiner Station festgestellt werden. Die maximalen Schwankungen während einer Messung in 6 Sätzen betragen bis 2°C in der Temperatur und bis 1 mm Hg im Luftdruck. Dementsprechend zeigten die Höhenwinkel auf keiner Station einen systematischen Gang oder Schwankungen, die durch eine systematische Änderung der Refraktion hätten hervorgerufen sein können.

Es ist also anzunehmen, daß der Zustand der Luft, vor allem auch ihre Schichtung und die vertikalen Temperatur- und Druckgradienten, im Meßzeitraum nur geringen Änderungen ausgesetzt waren. Dies ist im Hinblick auf die Refraktion bei nichtgleichzeitigen Höhenwinkelmessungen von ausschlaggebender Bedeutung. Es wird auf diesen Punkt noch

²⁸ Siehe K. BROCKS, Vertikaler Temperaturgradient und terrestrische Refraktion im Hochgebirge. Veröff. des Meteor. Inst. der Univ. Berlin, Bd. III Heft 4, 1939.

Höhenwinkel im flächenhaften Höhennetz

Nr.	Visur	β			μ	m
		g	c	cc	cc	cc
1	StJ-N - St	- 2	43	20,0	\pm 5,3	\pm 1,3
	St - StJ-N	+ 2	45	34,5	\pm 7,2	\pm 1,7
2	StJ-N - HZ	- 2	92	93,0	\pm 3,4	\pm 0,9
	HZ - StJ-N	+ 2	88	18,5	\pm 5,9	\pm 1,4
3	StJ-N - GK	- 1	66	66,5	\pm 5,3	\pm 1,6
	GK - StJ-N	+ 1	58	13,0	\pm 6,4	\pm 1,8
4	StJ-N - HB	- 0	88	98,5	\pm 9,3	\pm 2,7
	HB - StJ-N	+ 0	84	66,5	\pm 9,8	\pm 2,4
5	StJ-N - K	- 5	20	16,0	\pm 4,8	\pm 1,1
	K - StJ-N	+ 5	21	74,0	\pm 3,8	\pm 0,9
6	K - St	+ 1	31	04,0	\pm 10,8	\pm 2,6
	St - K	- 1	31	44,0	\pm 4,6	\pm 1,1
7	K - HZ	- 0	44	62,0	\pm 6,4	\pm 1,5
	HZ - K	+ 0	42	76,0	\pm 6,2	\pm 1,4
8	K - HB	+ 3	28	41,0	\pm 4,7	\pm 1,1
	HB - K	- 3	26	99,5	\pm 11,0	\pm 2,8
9	HB - St	- 0	69	15,5	\pm 8,2	\pm 2,0
	St - HB	+ 0	66	17,5	\pm 4,8	\pm 1,1
10	HB - HZ	- 3	48	58,0	\pm 3,9	\pm 0,9
	HZ - HB	+ 3	48	69,5	\pm 8,6	\pm 2,0
11	HB - GK	- 2	43	49,0	\pm 7,2	\pm 1,7
	GK - HB	+ 2	43	34,5	\pm 8,0	\pm 2,0
12	GK - St	+ 0	65	88,0	\pm 7,0	\pm 2,0
	St - GK	- 0	72	13,0	\pm 5,4	\pm 1,2
13	GK - HZ	- 1	03	52,5	\pm 9,6	\pm 2,2
	HZ - GK	+ 1	02	73,0	\pm 4,7	\pm 1,1
14	HZ - St	+ 2	17	20,0	\pm 6,2	\pm 1,6
	St - HZ	- 2	15	68,0	\pm 7,1	\pm 1,6
15	K - GK	+ 0	17	31,5	\pm 5,3	\pm 1,2

Durchschnitt: \pm 6,6 \pm 1,6

bei der Besprechung der gegenseitig-gleichzeitigen Höhenwinkelmessungen zurückzukommen sein (siehe Seite 77).

Von den möglichen 30 Visuren des Höhennetzes konnten 29 beobachtet werden. Nur die Visur Gerstenrieder Kopf-Kotzen fiel aus. Für Punkt Gerstenrieder Kopf waren in-

folge seiner Lage in der NO-Ecke des Netzes die Sichtverhältnisse bei sonnigem Wetter besonders ungünstig. Punkt Kotzen, der von Gerstenrieder Kopf aus einen unruhigen Wald- und Schutthintergrund hat, konnte mit dem Fernrohr trotz mehrmaliger Versuche nicht aufgefunden werden.

Zur Höhenbestimmung standen also 14 gegenseitige Visuren und 1 einseitige Visur zur Verfügung, deren aus je 18 Beobachtungen gemittelte Höhenwinkel in der vorstehenden Tabelle aufgeführt sind. Der mittlere Fehler μ kommt einem einmal gemessenen Höhenwinkel zu, das Mittel aus je 18 Beobachtungen hat den mittleren Fehler m .

Im Übertragungsprofil bestanden zwischen den Punkten J 49 – Hirschhörndl und P. P. 141 – Staffel am aufsteigenden Nordhang des Isartales keine gegenseitigen Sichtmöglichkeiten. Die Höhenwinkel für die übrigen 8 gegenseitigen Visuren und ihre mittleren Fehler sind:

Höhenwinkel im Übertragungsprofil

Visur	β			μ	m
	g	c	cc	cc	cc
J 49 – St	+ 15	78	70,5	$\pm 6,3$	$\pm 1,5$
St – J 49	– 15	70	10,5	$\pm 6,1$	$\pm 1,4$
J 49 – PP 141	+ 6	79	80,0	$\pm 5,4$	$\pm 1,3$
PP 141 – J 49	– 6	58	47,5	$\pm 8,7$	$\pm 2,0$
PP 141 – HH	+ 20	19	29,5	$\pm 4,3$	$\pm 1,0$
HH – PP 141	– 20	05	80,5	$\pm 4,6$	$\pm 1,1$
HH – St	+ 13	66	96,0	$\pm 5,8$	$\pm 1,4$
St – HH	– 13	30	03,5	$\pm 4,3$	$\pm 1,0$
J 49 – StJ-N	+ 24	13	66,0	$\pm 4,5$	$\pm 1,1$
StJ-N – J 49	– 24	07	92,5	$\pm 5,6$	$\pm 1,4$
PP 141 – StJ-N	+ 15	78	77,0	$\pm 7,0$	$\pm 1,6$
StJ-N – PP 141	– 15	75	47,0	$\pm 4,2$	$\pm 0,9$
HH – StJ-N	+ 5	43	54,0	$\pm 6,2$	$\pm 1,4$
StJ-N – HH	– 5	42	41,0	$\pm 6,7$	$\pm 1,8$
St – StJ-N	+ 2	45	34,5	$\pm 7,2$	$\pm 1,7$
StJ-N – St	– 2	43	20,0	$\pm 5,3$	$\pm 1,3$

Durchschnitt: $\pm 6,6$ $\pm 1,4$

Bei den Beobachtungen im Höhennetz konnte also im Durchschnitt eine Genauigkeit von $\pm 1,6^{\text{cc}}$ für das Mittel aus 18 Beobachtungen eines Höhenwinkels erzielt werden. Im Übertragungsprofil liegt dieser Wert bei $\pm 1,4^{\text{cc}}$. Von Interesse ist der durchschnittliche Wert M_w des mittleren Fehlers eines einmal gemessenen Höhenwinkels. Er beträgt $\pm 6,6^{\text{cc}}$ und liegt damit um $2,9^{\text{cc}}$ höher als der aus der rein instrumentellen Meßgenauigkeit zu

erwartende mittlere Fehler m_w , der aus der Untersuchung des Theodolits hervorging. Dieser Mehrbetrag ist nur auf die Wirkung m_r der Refraktionsunruhe zurückzuführen. Da sie als zusätzlicher unregelmäßiger Fehler wirkt, ist sie nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz durch

$$m_r = \pm \sqrt{M_w^2 - m_w^2}$$

zu berechnen. Man findet

$$m_r = \pm 5,5^{\text{cc}}.$$

Dieser Wert, der unabhängig vom Instrument als unregelmäßiger Fehler in die Messung eingeht, läßt es sehr fraglich erscheinen, ob Höhenwinkelmessungen im Gebirge durch ein genaueres Instrument (etwa Theodolit Wild T3 statt T2) beträchtlich verbessert werden können. Auch wenn der mittlere Fehler m_w bis auf etwa $\pm 1^{\text{cc}}$ herabgemindert werden könnte, so wäre für M_w infolge der Refraktionsunruhe immer noch ein Betrag von etwa $\pm 5,6^{\text{cc}}$ zu erwarten. Unter gleichen Verhältnissen wie im Isartal erhalte also das Mittel aus 18 Beobachtungen eines Höhenwinkels immer noch einen mittleren Fehler von etwa $\pm 1,3^{\text{cc}}$. Der Mehraufwand an Transportarbeit scheint sich also kaum zu lohnen.

Gegenseitig-gleichzeitige Messungen.

Bei den verhältnismäßig bodennahen Visuren des Übertragungsprofils konnte vermutet werden, daß an den verschiedenen Tagen des Meßzeitraumes sich die Refraktion verschieden auswirke und bei nicht gleichzeitiger Messung das Mittel der beiden gegenseitigen Höhenunterschiede verfälsche. Diese Visuren sollten daher im gegenseitig-gleichzeitigen Meßverfahren wiederholt und das Ergebnis mit den nichtgleichzeitigen Messungen verglichen werden.

Dafür war folgendes Beobachtungsverfahren vorgesehen: Die beiden Instrumente wurden exzentrisch, doch annähernd rechtwinklig zur Visur neben den Signalen aufgestellt und die Elemente zur Ermittlung des die Exzentrizität berücksichtigenden Entfernungszuschlages gemessen. An der Signalstange wurde ein 60 cm langes Brett angeschlagen, dessen Oberkante genau auf die Instrumentenhöhe gebracht wurde. Die Oberkante diente als Höhenziel für die Gegenvisur. Damit war erreicht, daß Visur und Gegenvisur von Instrumentenhöhe zu Instrumentenhöhe verliefen und Unterschiede in den Absolutbeträgen der gegenseitigen Winkel nur noch zu Lasten der Geoidkrümmung und der Refraktion gingen.

Der Beobachtungsbeginn für jede Visur wurde durch Signale festgelegt. Der Zeitraum zwischen jeder der 6 Beobachtungen betrug 8 Minuten.

Die Visuren J 49 – PP 141, PP 141 – Hirschhörndl und Hirschhörndl – Staffel wurden am 12. Juni gemessen. Am 13. Juni folgten die Visuren J 49 – Staffel und J 49 – Stuhlbach-Joch-N. Am 14. und 15. Juni wurden die beiden Visuren Stuhlbach-Joch-N-Staffel und Hoher Zwiesler – Gerstenrieder Kopf beobachtet, um auch im Höhennetz Vergleiche und Kontrollen im gegenseitig-gleichzeitigen Verfahren zu erhalten.

Über den Vergleich der gegenseitig-gleichzeitigen Messungen mit den nichtgleichzeitigen wird erst im 2. Kapitel des III. Abschnittes auf Seite 77 berichtet.

4. BERECHNUNG UND AUSGLEICHUNG DER HÖHENUNTERSCHIEDE

Die Höhenunterschiede im Netz und Übertragungsprofil des Isartales wurden einmal nach der Höhenformel (2. 11), ein zweites Mal mit der JORDANSchen Höhenformel ohne Refraktionskorrektur berechnet. Die Krümmung des Ellipsoides wurde berücksichtigt, wobei die den einzelnen Visuren zukommenden Krümmungsradien aus der JORDANSchen Tabelle²⁹ entnommen wurden. Wie auf Grund der Abschätzungen des I. Abschnittes zu erwarten war, blieben die Glieder 3. Ordnung durchwegs ohne Einfluß auf die mm der Höhenunterschiede, die als Rechengrößen mitgeführt wurden. Aus beiden Berechnungen ergaben sich bis in die mm gleiche Höhenunterschiede. Weder rechen-technisch noch im Zeitaufwand unterscheiden sich die beiden Formeln merklich voneinander. Als kleiner Vorteil der JORDANSchen Formel kann höchstens angesehen werden, daß die zur Entfernungs- und Radienreduktion erforderliche Mittelhöhe H_m jeweils für Hin- und Rückvisur verwendbar ist, während in Formel (2. 11) immer die Höhe H_1 des Ausgangspunktes der Visur eingesetzt werden muß. Doch fällt dieser Unterschied nicht ins Gewicht.

Wie schon auf Seite 64 erwähnt, konnte die Visur Gerstenrieder Kopf – Kotzen der schlechten Sichtverhältnisse wegen nicht beobachtet werden. Von den möglichen $6 \times 5 = 30$ Visuren des Höhennetzes wurden die 28 beidseitig beobachteten paarweise durch Mittelung zu 14 Höhenunterschieden zusammengefaßt. Unter der Annahme konstanter Geoidkrümmung längs der einzelnen Visuren und gleicher Refraktionswinkel in den Endpunkten einer Visur sind diese Mittelwerte frei von systematischen Krümmungs- und Refraktions-einflüssen, wie im I. Abschnitt gezeigt wurde. Sie sind nur noch durch zufällige Beobachtungsfehler verfälscht und daher unmittelbar zu einer Ausgleichung nach vermittelnden oder bedingten Beobachtungen geeignet. Dieses Vorgehen entspricht dem Verfahren Nr. 2 nach der Einteilung R. FINSTERWALDERS.³⁰

Die Höhenunterschiede zwischen 6 Punkten sind durch 5 unabhängige Messungen bestimmt. Bei 14 gemessenen Höhenunterschieden standen also im Isartalnetz neun Überbestimmungen für eine Ausgleichung zur Verfügung. Bei einer Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen erscheinen als Widersprüche die Schlußfehler in neun unabhängigen Höhenpolygonen, d. h. es wären neun Korrelaten zu berechnen.

Bei einer Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen können 5 Höhenunterschiede als unabhängige Variable gewählt und durch Aufstellung von 5 Normalgleichungen aus 14 Fehlergleichungen bestimmt werden.

Das Verhältnis im Rechenaufwand der beiden möglichen Verfahren, das etwa $9^2 : 5^2 = 3,24$ beträgt, legt eine Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen nahe.

²⁹ JORDAN-EGGERT, Handbuch der Vermessungskunde. Band III/1, 9. Aufl., 1933, S. 252.

³⁰ R. FINSTERWALDER und H. GÄNGER, Die trigonometrische Höhenmessung im Gebirge. Nachr. aus dem Reichsverm. Dienst, 1941, Nr. 1, S. 13–16.

Als unabhängige Variable wurden die 5 von Stuhlbach-Joch-Nord, dem höchsten Punkt des Netzes, ausgehenden Höhenunterschiede gewählt. Als Näherungswerte dienten die aus den Messungen berechneten Höhenunterschiede, so daß als Unbekannte die 5 Verbesserungen dieser Höhenunterschiede in die Ausgleichung einzuführen waren. Die Verbesserungen v_6-v_{14} der übrigen Höhenunterschiede stellen sich dann als lineare Funktionen von v_1-v_5 dar, wobei als Absolutglieder l in den Fehlergleichungen die Schlußfehler in den 9 an Stuhlbach-Joch-N angeschlossenen Höhendreiecken erscheinen. Diese Schlußfehler betragen im Isartalnetz:

$$\begin{aligned}
 \text{StJ-N - St - K:} & \quad l_6 = - 1,8 \text{ cm} \\
 \text{StJ-N - HZ - K:} & \quad l_7 = - 2,1 \text{ cm} \\
 \text{StJ-N - HB - K:} & \quad l_8 = - 0,1 \text{ cm} \\
 \text{StJ-N - St - HB:} & \quad l_9 = - 3,1 \text{ cm} \\
 \text{StJ-N - HZ - HB:} & \quad l_{10} = - 2,4 \text{ cm} \\
 \text{StJ-N - GK - HB:} & \quad l_{11} = + 0,1 \text{ cm} \\
 \text{StJ-N - St - GK:} & \quad l_{12} = - 0,5 \text{ cm} \\
 \text{StJ-N - HZ - GK:} & \quad l_{13} = - 2,0 \text{ cm} \\
 \text{StJ-N - St - HZ:} & \quad l_{14} = - 5,6 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Der Durchschnittswert dieser Widersprüche beträgt – absolut genommen – 2 cm. Da jeder Widerspruch aus den Fehlern von 3 Höhenunterschieden zusammengesetzt ist, kann der Fehler eines einzelnen Höhenunterschiedes vor der Ausgleichung mit $v \approx \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,2$ cm abgeschätzt werden. Schon diese Abschätzung zeigt, daß die Höhenunterschiede im Isartal mit cm-Genauigkeit ermittelt werden konnten.

Gemäß dem Fehlerfortpflanzungsgesetz, angewandt auf die Formel (2. 11), wären bei der Gewichtsbestimmung sowohl die Unsicherheit der einzelnen Höhenwinkel als auch der Entfernungen zu berücksichtigen. Eine Abschätzung zeigt jedoch, daß die zweite gegenüber der ersten vernachlässigbar ist. Da außerdem die Höhenwinkel praktisch gleich genau beobachtet wurden, genügt eine Gewichtsbestimmung umgekehrt proportional zum Quadrat der Visurlänge des auszugleichenden Höhenunterschiedes nach der Formel

$$p_i = \frac{c}{b_i^2}.$$

c wurde so gewählt, daß der mehrfach vorkommenden Visurlänge von etwa 8,5 km das Gewicht 1 zukommt. Diese Länge ist auch der mittleren Visurlänge von etwa 7 km verhältnismäßig nahe. Die einzelnen Höhenunterschiede erhalten somit nach der Formel

$$p_i = \left(\frac{8,5}{b_{(\text{km})}} \right)^2$$

folgende Gewichte:

Nr.	Visur	δ (km)	p
1	StJ-N - St	5,3	2,6
2	StJ-N - HZ	8,5	1,0
3	StJ-N - GK	12,3	0,4
4	StJ-N - HB	8,3	1,0
5	StJ-N - K	4,2	4,1
6	K - St	6,8	1,5
7	K - HZ	6,9	1,5
8	K - HB	4,5	3,6
9	HB - St	8,5	1,0
10	HB - HZ	5,1	2,8
11	HB - GK	5,3	2,6
12	GK - St	10,2	0,7
13	GK - HZ	4,7	3,2
14	HZ - St	5,5	2,3

Die mit diesen Eingangswerten durchgeführte Ausgleichung lieferte folgende Ergebnisse: Der mittlere Gewichtseinheitsfehler beträgt $m_0 = \pm 2,1$ cm. Er kommt einem bei einer Visurlänge von 8,5 km ermittelten Höhenunterschied zu. Ins Winkelmaß umgerechnet beträgt er $\pm 1,6^{\circ}$ und entspricht damit genau der mittleren Genauigkeit der Höhenwinkelmessung. Für die wahrscheinlichen Verbesserungen v_i und die mittleren Fehler m_i der einzelnen Höhenunterschiede ΔH_i ergeben sich folgende Werte:

Nr.	Visur	v_i cm	ΔH_i m	m_i cm
1	StJ-N - St	- 0,9	- 204,029	$\pm 0,9$
2	StJ-N - HZ	+ 2,5	- 390,627	$\pm 0,9$
3	StJ-N - GK	+ 0,1	- 314,582	$\pm 1,1$
4	StJ-N - HB	- 0,1	- 112,985	$\pm 0,9$
5	StJ-N - K	0	- 343,467	$\pm 0,8$
6	K - St	+ 0,9	+ 139,438	$\pm 0,9$
7	K - HZ	- 0,4	- 47,160	$\pm 0,9$
8	K - HB	- 0,6	+ 230,482	$\pm 0,8$
9	HB - St	+ 3,9	- 91,044	$\pm 0,9$
10	HB - HZ	- 0,2	- 277,642	$\pm 0,8$
11	HB - GK	- 0,3	- 201,597	$\pm 0,9$
12	GK - St	- 0,5	+ 110,553	$\pm 1,0$
13	GK - HZ	- 0,4	- 76,045	$\pm 0,9$
14	HZ - St	+ 2,2	+ 186,598	$\pm 1,0$

Die mittleren Fehler der Höhenunterschiede 6–14, die Funktionen der als unabhängig eingeführten Höhenunterschiede 1–5 sind, wurden dabei unter Benutzung der gemischten Gewichtskoeffizienten berechnet.

Da die mittlere Unsicherheit der ausgeglichenen Höhenunterschiede mit der bei der Höhenwinkelmessung erzielten Meßgenauigkeit übereinstimmt, kann vermutet werden, daß die Höhenunterschiede frei von systematischen Lotabweichungs- und Refraktionsinflüssen sind und Meereshöhenunterschiede mit cm-Genauigkeit darstellen. Wieweit dies zutrifft, soll nach dem Versuch, die Lotabweichungen im Höhennetz direkt zu bestimmen, näher diskutiert werden.

5. BESTIMMUNG DER LOTABWEICHUNGEN IM HÖHENNETZ

Das im letzten Kapitel angewandte Berechnungs- und Ausgleichungsverfahren entspricht der Methode Nr. 2 nach der FINSTERWALDERSchen Einteilung. Sofern in einem Höhennetz ein regelmäßiger Verlauf der Niveauflächen vorliegt, liefert diese Methode Meereshöhenunterschiede. Auf die zusätzliche Krümmung der Niveauflächen gegenüber dem Ellipsoid kann aus den Differenzen der paarweise zusammengehörigen, einseitigen Höhenunterschiede geschlossen werden. Sind die Niveauflächen jedoch unregelmäßig geformt, dann ergibt das Verfahren – wie schon R. FINSTERWALDER betont – keine strengen Meereshöhenunterschiede. Die Undulationen der Niveauflächen werden dann vernachlässigt und die Höhenunterschiede beziehen sich auf eine gegenüber dem Ellipsoid gleichmäßig gekrümmte Fläche. Dasselbe gilt dann von den Krümmungswerten, die aus den Differenzen einseitiger Höhenunterschiede ermittelt werden.

Wenn auch die Ergebnisse der Ausgleichung des letzten Kapitels auf eine gleichmäßige Krümmung der Niveauflächen im Isartal hinzuweisen scheinen, so soll die Zulässigkeit dieser Annahme doch erst mit Hilfe einer direkten Bestimmung der Lotabweichungen überprüft werden.

Dazu stehen die Methoden Nr. 1 und Nr. 3 der FINSTERWALDERSchen Einteilung zur Verfügung (s. Fußnote 30 S. 53). Nach Methode Nr. 1 werden sämtliche Lotabweichungen und Höhenunterschiede eines Netzes zugleich bestimmt und ausgeglichen. Die ausgeglichenen Höhenunterschiede beziehen sich auf das Ellipsoid. In einem Höhennetz von n Punkten beträgt die Anzahl der Unbekannten $3 \cdot (n - 1)$, denen maximal $n \cdot (n - 1)$ Bestimmungsgleichungen aus einseitigen Höhenvisuren gegenüberstehen. Wenn auch meist genügend Überbestimmungen für eine Ausgleichung vorhanden sein dürften, so ist in größeren Höhennetzen die Anzahl der Unbekannten doch so groß, daß der nötige Rechenaufwand das Verfahren zu umständlich und schwerfällig macht. Da für das Isartalnetz nur eine Bestimmung der Lotabweichungen notwendig erschien, wurde vor allem die Methode Nr. 3 untersucht und erprobt. Doch gelten einige der dabei gezogenen Schlüsse auch für die Methode Nr. 1.

Die Bestimmung der Lotabweichungen aus gegenseitigen Höhenwinkelmessungen nach Methode Nr. 3 hat den großen Vorzug, daß unmittelbar gemessene Winkelgrößen

zur Bestimmung von anderen Winkelgrößen, nämlich den Lotabweichungsdifferenzen in den Endpunkten einer Visur, verwendet werden. Die theoretischen Grundlagen dieser Methode seien deshalb nochmals kurz erläutert.

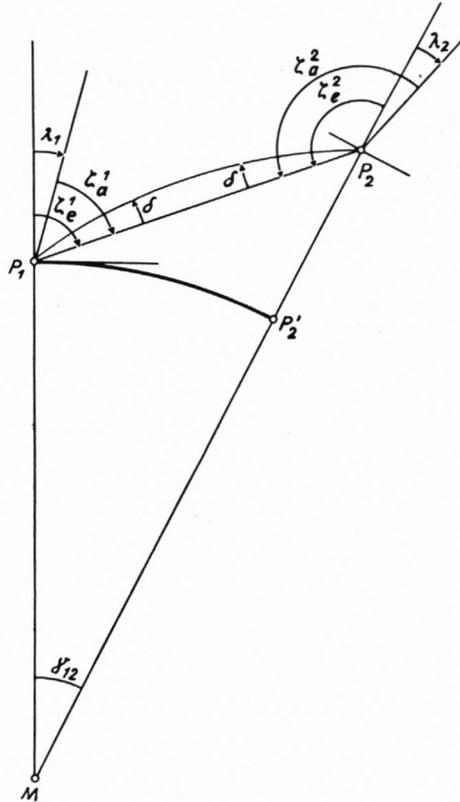


Fig. 19

Bedeutet in Figur 19 $\zeta_a^{1,2}$ und $\zeta_e^{1,2}$ die astronomischen bzw. ellipsoidischen Zenitdistanzen der refraktionsfrei angenommenen Höhenvisur zwischen den Punkten P_1 und P_2 , in denen das Lot in Richtung der Visur um λ_1 bzw. λ_2 vom ellipsoidischen Zenit abweicht, so gilt

$$\zeta_e^1 = \zeta_a^1 + \lambda_1 \quad (8.1a)$$

$$\zeta_e^2 = \zeta_a^2 - \lambda_2. \quad (8.1b)$$

Für $\lambda_{1,2}$ folgt nach Einführung der Lotabweichungskomponenten $\xi_{1,2}$ und $\eta_{1,2}$ in Richtung des Meridians bzw. des 1. Vertikals in P_1 und P_2 und des Azimutes a der Visur

$$\lambda_1 = \xi_1 \cdot \cos a_{12} + \eta_1 \cdot \sin a_{12} \quad (8.2a)$$

$$\lambda_2 = \xi_2 \cdot \cos a_{12} + \eta_2 \cdot \sin a_{12}, \quad (8.2b)$$

so daß die Gleichungen (8. 1) übergehen in

$$\zeta_e^1 = \zeta_a^1 + \xi_1 \cdot \cos \alpha_{12} + \eta_1 \cdot \sin \alpha_{12} \quad (8. 3 a)$$

$$\zeta_e^2 = \zeta_a^2 - \xi_2 \cdot \cos \alpha_{12} - \eta_2 \cdot \sin \alpha_{12}. \quad (8. 3 b)$$

Aus dem Dreieck P_1MP_2 , das im Krümmungsmittelpunkt M des Ellipsoidschnittes P_1P_2 den Winkel γ_{12} enthält, folgt die Beziehung

$$\zeta_e^1 + \zeta_e^2 = 180 + \gamma_{12}, \quad (8. 4)$$

die nach Einführung von (8. 3) in

$$\xi_1 \cdot \cos \alpha_{12} + \eta_1 \cdot \sin \alpha_{12} - \xi_2 \cdot \cos \alpha_{12} - \eta_2 \cdot \sin \alpha_{12} = 180 - \zeta_a^1 - \zeta_a^2 + \gamma_{12} \quad (8. 5)$$

übergeht.

Liegen – wie im Isartal – Höhenwinkel β statt der Zenitdistanzen ζ vor, so können sie über die Beziehung $\zeta = 90 - \beta$ (8. 6) in Gleichung (8. 5) eingeführt werden. Die Refraktion, die in P_1 und P_2 den Zielstrahl um den gleichen Winkel δ hebt, ist dabei durch den Ansatz

$$\beta_a = \bar{\beta}_a - \delta \quad (8. 7)$$

zu berücksichtigen, in dem $\bar{\beta}_a$ den tatsächlich beobachteten, nach dem astronomischen Zenit orientierten Höhenwinkel bedeutet. Mit (8. 6) und (8. 7) geht (8. 5) in

$$\xi_1 \cdot \cos \alpha_{12} + \eta_1 \cdot \sin \alpha_{12} - \xi_2 \cdot \cos \alpha_{12} - \eta_2 \cdot \sin \alpha_{12} = \bar{\beta}_a^1 + \bar{\beta}_a^2 + \gamma_{12} - 2 \delta_{12} \quad (8. 8)$$

über. Führt man noch statt des Refraktionswinkels δ den Refraktionskoeffizienten k in der schon auf S. 20 unter (4. 7) abgeleiteten Form

$$\delta_{12} = \frac{k \cdot \gamma_{12}}{\cos \beta_{12}} \quad (4. 7)$$

ein, so erhält (8. 8) die Endform

$$\xi_1 \cdot \cos \alpha_{12} + \eta_1 \cdot \sin \alpha_{12} - \xi_2 \cdot \cos \alpha_{12} - \eta_2 \cdot \sin \alpha_{12} = \bar{\beta}_a^1 + \bar{\beta}_a^2 + \gamma_{12} \left(1 - \frac{k}{\cos \beta_{12}} \right). \quad (8. 9)$$

In einem Höhennetz mit n Punkten ergibt sich durch Anwendung auf jede seiner gegenseitigen Visuren zwischen den Punkten P_i und P_k unter Annahme eines konstanten Refraktionskoeffizienten das Gleichungssystem

$$\xi_i \cdot \cos \alpha_{ik} + \eta_i \cdot \sin \alpha_{ik} - \xi_k \cdot \cos \alpha_{ik} - \eta_k \cdot \sin \alpha_{ik} = \bar{\beta}_a^i + \bar{\beta}_a^k + \gamma_{ik} \left(1 - \frac{k}{\cos \beta_{ik}} \right) \\ \left. \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\} = 1, 2, \dots, n; k > i. \quad (8. 10)$$

Aus Gleichung (8. 10) ist nun zu erkennen:

1. Aus gegenseitigen Höhenwinkelmessungen können nur die Differenzen von Lotabweichungen gewonnen werden. Bei Anwendung der Methode auf ein Höhennetz

müssen also entweder die Lotabweichungskomponenten ξ und η in mindestens einem Punkt durch anderweitige Messungen bekannt sein oder als bekannt angenommen werden. Im zweiten Fall wird man sie am vorteilhaftesten gleich Null setzen. Man erhält dann die Lotabweichungen in den übrigen Punkten relativ zu einem Ausgangspunkt.

2. Jeder Punkt P_i mit Ausnahme des Ausgangspunktes bringt in das Gleichungssystem (8. 10) zwei neue Unbekannte ξ_i und η_i . Die Anzahl u der Unbekannten beträgt also bei n Punkten

$$u = 2n - 2 = 2(n - 1).$$

Demgegenüber beträgt die Anzahl v der möglichen gegenseitigen Visuren zwischen n Punkten

$$v = \frac{n}{2} \cdot (n - 1).$$

Soll das System (8. 10) überhaupt lösbar sein, so muß $v = u$ werden, d. h. das Netz muß aus mindestens

$$n = 4$$

Punkten bestehen, zwischen denen alle möglichen gegenseitigen Visuren beobachtet sind. Wird $n > 4$, so können überschüssige Beobachtungen zu einer Ausgleichung zur Verfügung stehen. Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die Anzahl der maximal möglichen Überbestimmungen $v - u$ bei einem Netz von n Punkten, d. h. sie gilt nur, wenn alle möglichen Visuren auch gegenseitig beobachtet sind.

Anzahl der Netzpunkte n	Anzahl der Unbekannten u	Anzahl der möglichen gegenseitigen Visuren v	Mögliche Überbestimmungen $v - u$
4	6	6	0
5	8	10	2
6	10	15	5
7	12	21	9
8	14	28	14
9	16	36	20
10	18	45	27
11	20	55	35
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	
n	$2(n-1)$	$\frac{n}{2}(n-1)$	$\left(\frac{n}{2} - 2\right)(n-1)$

Eine Ausgleichung wird also erst in Netzen von mehr als 7–8 Punkten lohnend und wirksam. Sie verursacht dann allerdings durch die Zunahme der Unbekannten einen beträchtlichen Rechenaufwand, der bekanntlich etwa mit dem Quadrat der Anzahl der Unbekannten, hier also ungefähr mit $4n^2$ wächst. Ferner werden niemals alle Visuren gegenseitig beobachtbar oder verwendbar sein. Besonders die langen Netzdiagonalen werden für Höhenbestimmungen ausscheiden. Damit kann die Anzahl der Überbestimmungen beträchtlich vermindert und die Wirksamkeit einer Ausgleichung herabgesetzt werden.

Man wird daher in der Praxis ein größeres Höhennetz zur Bestimmung von Lotabweichungen in günstige Teilnetze von 7–8 Punkten mit genügend Überbestimmungen zerlegen und diese einzeln mit Zwangsanschlüssen an die Nachbarnetze ausgleichen.

Zur sicheren Übertragung der Lotabweichungskomponenten ξ und η von O nach W bzw. von N nach S ist das Vorhandensein von Visuren in NO–SW — und NW–SO-Richtung von besonderer Bedeutung.

3. Da die Lotabweichungskomponenten und noch mehr ihre Differenzen immer kleine Größen sein werden, ist ihre Berechnung aus dem System (8. 10) nur sinnvoll, wenn die Höhenwinkel $\bar{\beta}_a$ mit sehr hoher Genauigkeit beobachtet worden sind. Die Differenzen hängen nach (8. 10) wesentlich von $\bar{\beta}_a^i + \bar{\beta}_a^k$, also einer kleinen Differenz zweier großer Werte ab. Der mittlere Fehler dieser Differenz, der gleich dem $\sqrt{2}$ -fachen der Winkelmeßgenauigkeit ist, kann leicht die Größenordnung der Lotabweichungskomponenten besitzen oder überschreiten.

4. Eine Berechnung und Ausgleichung der Lotabweichungen nach (8. 10) ist nur sinnvoll, wenn die Refraktion während des Meßzeitraumes als praktisch konstant für alle Stationen angesehen werden kann und der Wert ihres Koeffizienten mit ausreichender Genauigkeit bekannt ist. Wäre die erste Bedingung erfüllt, der Wert von k dagegen nicht bekannt, so wäre prinzipiell daran zu denken, k als weitere Unbekannte im System (8. 10) zu betrachten und mit auszugleichen. Das ist jedoch nicht möglich, da der Ausdruck $\frac{k \cdot \gamma}{\cos \beta}$ in derselben Weise wie die Lotabweichungen auf die Differenz $\bar{\beta}_a^i + \bar{\beta}_a^k$ einwirkt und von diesen praktisch nicht zu trennen ist. Folgende vereinfachende Überlegung macht dies deutlich: Nimmt man eine konstante zusätzliche Krümmung des Geoids gegenüber dem Ellipsoid an, so hat sie auf die Unterschiede gegenseitiger Höhenwinkel denselben Einfluß wie eine konstante Refraktion; aus den Differenzen $\bar{\beta}_a^i + \bar{\beta}_a^k$ ist das Verhältnis der beiden Faktoren, durch die sie verursacht sind, nicht zu bestimmen. Aber auch bei Unterschieden der Geoidkrümmung in verschiedenen Azimuten kann immer ein konstanter Grundbetrag der Krümmung als Refraktionswirkung betrachtet werden. Die Refraktion und die Geoidkrümmung als Ursache der Lotabweichungen können daher nicht als unabhängige Variable im Sinne der Ausgleichungsrechnung betrachtet werden. Ihre gemeinsame Bestimmung aus einer Ausgleichung würde Werte liefern, deren Möglichkeit zwar gegeben, deren Realität aber nicht gesichert ist.

Kann also der Refraktionskoeffizient als konstant innerhalb der Meßzeit und des Meßzeitraumes betrachtet werden, so muß sein Wert als beobachtete Größe in das System (8. 10) eingesetzt werden. Zur Ermittlung von k kommt bei geodätischen Arbeiten praktisch nur die Bestimmung der Lotabweichungskomponenten auf 2 Netzpunkten in Richtung der gegenseitigen Visur durch astronomische Beobachtungen in Betracht. Nach Korrektur

der beiden gegenseitigen Höhenwinkel um die beobachteten Lotabweichungen kann aus dem restlichen Unterschied der Höhenwinkel der Refraktionskoeffizient nach der bekannten Formel³¹

$$k = 1 - \frac{r}{b} \left(\frac{\beta_e^i + \beta_e^k}{\varrho''} \right)$$

berechnet werden. – Die Bestimmung des Refraktionskoeffizienten aus meteorologischen Daten, sei sie nur mit Messungen auf den Stationen oder mit zusätzlichen Beobachtungswerten aus der freien Atmosphäre durchgeführt, hat bisher nicht zu brauchbaren Ergebnissen geführt. Sie erfordert zudem einen großen Aufwand an Apparaten und Mitteln.

Zu den unter 1. genannten astronomischen Messungen, die der Bestimmung der Lotabweichung in einem Ausgangspunkt dienen, müssen also astronomische Beobachtungen in mindestens einem weiteren Punkt des Netzes treten, aus denen der Refraktionskoeffizient ermittelt werden kann.

Ändert sich die Refraktion innerhalb der Meßzeit oder von Visur zu Visur, so müssen ihre verschiedenen Koeffizienten durch astronomische Messungen in mehreren Netzpunkten bestimmt werden. Damit wird aber die Bestimmung der Lotabweichungen aus gegenseitigen Höhenwinkeln hinfällig, da die Lotabweichungen aus den astronomischen Beobachtungen sicherlich mit höherer Genauigkeit hervorgehen. Eine Mitführung der verschiedenen k als Unbekannten in der Ausgleichung ist aus den oben geschilderten Gründen nicht möglich. Sie würde zudem die Zahl der Unbekannten auf $n = 3n - 2$ erhöhen.

5. Die in das System (8. 10) eingeführten Höhenwinkel $\bar{\beta}_a$ müssen sich selbstverständlich auf parallele gegenseitige Visuren beziehen. Ist die Parallelität nicht von vornherein durch entsprechende Maßnahmen gesichert, was auf große Entfernungen nur schwer zu erreichen sein dürfte, dann müssen die gemessenen Höhenwinkel durch genaue Bestimmung von Instrumenten- und Zielhöhe entsprechend reduziert werden.

Die fünf aufgeführten Punkte zeigen, daß der Anwendung der geschilderten Methode zur Ermittlung von Lotabweichungen in einem Höhennetz verhältnismäßig enge Grenzen gesetzt sind. Nichtbeachtung oder Nichteintreten einer der genannten Bedingungen hat beträchtliche Unsicherheit der Ergebnisse zur Folge. Dies dürfte auch der Grund sein, warum die geschilderte Methode bisher nur selten zur Bestimmung von Lotabweichungen verwendet wurde und zu keinen brauchbaren Ergebnissen geführt hat.

Ein Versuch, die Höhenwinkelmessungen C. KOPPEs bei den Absteckungsarbeiten des Gotthardtunnels zur Lotabweichungsbestimmung zu benützen,³² scheiterte an der für diesen Zweck ungünstigen Netzgestalt und an einem zu vermutenden Meßfehler.

Eine vereinfachende Variante zur Methode Nr. 3 gibt R. FINSTERWALDER in Methode Nr. 4 an. Es werden dabei nur gegenseitige Visuren in N-S- bzw. O-W-Richtung zur Lotabweichungs- und Höhenbestimmung benutzt, die sich wie „vertikale Polygonzüge“ zu Profilen aneinanderreihen.

Der Vorteil dieser Methode ist darin zu erblicken, daß in jedem Punkt P_i nur eine Unbekannte, nämlich die Meridiankomponente ξ_i , oder die O-W-Komponente η_i seiner

³¹ JORDAN-EGGERT, Handbuch der Vermessungskunde. Bd. II/2, 9. Aufl. 1933, S. 133.

³² Siehe R. FINSTERWALDER und H. GÄNGER, a. a. O. S. 15, Fußnote 18a.

Lotabweichung auftritt. Wieder ist die Methode nur zur Bestimmung von Lotabweichungsdifferenzen geeignet, so daß in mindestens einem Ausgangspunkt die Lotabweichung durch astronomische Messung ermittelt werden muß. Jede gegenseitige trigonometrische Visur liefert dann eine Bestimmungsgleichung für eine Lotabweichungsdifferenz $\Delta\xi$ oder $\Delta\eta$, so daß bei n Punkten eines Profiles mindestens $(n - 1)$ gegenseitige Visuren gemessen sein müssen. Überbestimmungen, die zu einer Ausgleichung verwandt werden können, ergeben sich durch zusätzliche „überschlagende“ Visuren zwischen nicht unmittelbar benachbarten Punkten oder durch zusätzliche astronomische Messungen.

Der Nachteil der Methode liegt in der strengen Bindung an meridional- oder ost-westgerichtete Profile, die oft zu ungünstiger Punktfestlegung zwingen kann. Weiter werden selbst im Gebirge auf Grund der Sichtverhältnisse nur wenige überzählige Visuren möglich sein, die geeignet wären, der Lotabweichungsbestimmung über eine Ausgleichung eine höhere Zuverlässigkeit zu garantieren.

Das unter Ziffer 4 dieses Kapitels über die Refraktion Gesagte gilt im selben Maße für die FINSTERWALDERSche Methode Nr. 4.

Die Methode Nr. 4 wurde 1950 im Meridianprofil des St. Gotthard durch die Schweizerische Geodätische Kommission angewandt.³³ Die Lotabweichungen in 13 Punkten des Profiles wurden aus 17 gegenseitigen trigonometrischen Höhenwinkelmessungen bestimmt. Zur Berechnung der Lotabweichungsdifferenzen standen also 5 Überbestimmungen zur Verfügung, die zur Ausgleichung der Höhenwinkel in 2 geschlossenen Polygonen verwendet wurden. In allen Punkten war die meridionale Lotabweichung aus den astronomischen Messungen im Schweizer Profil bekannt. Die Refraktion konnte daher aus den Lotabweichungen in den Endpunkten des Profilstückes ermittelt und als bekannt in die trigonometrische Lotabweichungsbestimmung eingeführt werden. Da außerdem aus den bekannten Lotabweichungen der Zwischenpunkte der Refraktionskoeffizient für jede einzelne Visur bestimmt werden konnte, ergab sich eine gute Vergleichsmöglichkeit zwischen dem aus den Lotabweichungen in den Endpunkten berechneten Gesamtwert des Refraktionskoeffizienten mit den tatsächlich längs der einzelnen Visuren wirksamen Einzelwerten. Das Mittel der Einzelkoeffizienten stimmte nach Einführung entsprechender Gewichte gut mit dem Gesamtkoeffizienten überein.

Die trigonometrisch bestimmten Lotabweichungen selbst weichen von den astronomisch gemessenen im Mittel um $1,1''$ ab.

Die Brauchbarkeit der Methode ist durch diese Arbeiten klar erwiesen.

Wenn auch das Isartalnetz vor allem seiner geringen Ausdehnung wegen nicht besonders geeignet zur Anwendung der vorher geschilderten Methode Nr. 3 erschien, so wurde es doch zur Erprobung herangezogen. Bestimmend dafür war die erzielte hohe Meßgenauigkeit, die augenscheinliche Konstanz der Refraktion im Meßzeitraum und das Vorhandensein einer nicht unbedeutenden zusätzlichen Geoidkrümmung vor allem in O-W-Richtung, die sich aus vorläufigen Abschätzungen ergab.

³³ F. KOBOLD, Die Bestimmung der Lotabweichungskomponenten im Meridian des St. Gotthard aus Höhenwinkelmessungen. Annexe au Procès Verbal de la 95. Séance de la Commission Géodésique Suisse 1951.

Bei 6 Netzpunkten und 14 gegenseitigen Visuren standen für die 10 Unbekannten 4 Überbestimmungen zu einer Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen zur Verfügung. Die Fehlergleichungen hatten folgende allgemeine Form:

$$c_i \xi_i + c'_i \eta_i - c_i \xi_k - c'_i \eta_k - L_{ik} = v_{ik}. \quad (8.11)$$

Hierin bedeutet nach (8.10):

$$c_i = \cos \alpha_{ik} \quad c'_i = \sin \alpha_{ik}$$

$$L_{ik} = \bar{\beta}_a^i + \bar{\beta}_a^k + \gamma_{ik} \left(1 - \frac{k}{\cos \beta_{ik}} \right).$$

Da die gegenseitigen Visuren nicht parallel beobachtet worden waren, mußten die gemessenen Höhenwinkel $\bar{\beta}_a$ um Beträge

$$d\beta = \varrho^{cc} \frac{\cos^2 \beta}{b} (i - z) \quad (8.12)$$

reduziert werden. i und z sind dabei Instrumenten- und Zielhöhe einer Visur, b ihre Länge.

Der Schnittwinkel γ_{ik} der beiden ellipsoidischen Lote in P_i und P_k ergab sich aus der einfachen Beziehung

$$\gamma_{ik} = \varrho^{cc} \cdot \frac{b_{ik}}{r_a}, \quad (8.13)$$

in der r_a den Krümmungsradius des Ellipsoides im Azimut der Visur $P_i P_k$ bedeutet.

Zur Bestimmung der Refraktionskonstanten k standen einmal die astronomisch gemessenen meridionalen Lotabweichungskomponenten in Stuhlbachjoch-Nord und Staffel zur Verfügung, die im Rahmen der Messungen im Übertragungsprofil ermittelt worden waren (s. III. Abschnitt 3. Kapitel). Da die zugehörige Visur im Azimut 359° liegt, genügten die Meridiankomponenten zur Berechnung der Refraktion. Die Refraktionskonstante ergab sich aus dieser Visur zu

$$k = 0,1980.$$

Dieser Wert erscheint gegenüber dem sonst verwendeten Refraktionskoeffizienten erstaunlich hoch. So ergab sich bei den Schweizer Arbeiten im August, September und Oktober des Jahres 1950 ein mittlerer Refraktionskoeffizient $k = 0,1049 \pm 0,0028$ in Höhen über 2000 m, bei den Messungen in den Chiemgauer Alpen betrug $k = 0,1304 \pm 0,002$, während als guter Mittelwert im Flachland $k = 0,13$ angesehen wird.

Der aus der Visur Stuhlbachjoch-N-Staffel ermittelte Wert stimmt zwar gut mit den aus den Visuren J 49-Stuhlbachjoch-N ($k = 0,1950$) und Hirschhörndl-Stuhlbachjoch-N ($k = 0,1946$) bestimmten Werten überein. Doch können diese Werte, die aus steilen Visuren des Übertragungsprofils stammen, nicht ohne weiteres als Kontrollen für das Gipfelnetz verwendet werden.

Zur Überprüfung der berechneten Refraktionskonstanten wurden daher zusätzlich die meridionalen Lotabweichungskomponenten in den Punkten Kotzen und Hoher Zwiesler astronomisch bestimmt. Die Visur Kotzen–Hoher Zwiesler liegt zwar im Azimut 8° . Da jedoch die O–W-Komponenten der Lotabweichungen in beiden Punkten annähernd gleich groß angenommen werden durften, schienen die Meridiankomponenten ausreichend zur Refraktionsbestimmung. Die Berechnung ergab

$$k = 0,2044,$$

also einen noch etwas höheren Wert als zwischen Stuhlbachjoch-N und Staffel. Im Meßzeitraum 14.–20. August 1951 scheint daher tatsächlich im Isartal eine derartig starke Refraktion geherrscht zu haben. Ob sie lokal durch die besonderen meteorologischen Verhältnisse am Rande und über einem tiefen, O–W-gerichteten Talgraben oder durch die allgemeine Wetterlage und Temperaturverteilung bedingt war, konnte noch nicht geklärt werden. Die Untersuchung dieser meteorologischen Frage ging über den Rahmen der vorliegenden Arbeit hinaus.

Als Refraktionskonstante wurde in die Ausgleichung der Lotabweichungen der Mittelwert aus den beiden genannten Bestimmungen mit

$$k = 0,2012$$

eingeführt. Die Unsicherheit von mindestens $\pm 0,0032$, die diesem Wert anhaftet, wirkt sich mit dem Faktor γ_{ik} auf die Absolutglieder L_{ik} der Fehlergleichungen aus. Bei einem mittleren γ_{ik} von etwa 600^{cc} im Isartalnetz beträgt diese Auswirkung $\pm 1,8^{\text{cc}}$. Sie hat also die Größenordnung der Höhenwinkelmeßgenauigkeit.

Als Ausgangspunkt für die Bestimmung der Lotabweichungen wurde der Punkt Staffel gewählt und in ihm $\xi = \eta = 0$ gesetzt.

Da die Höhenwinkel mit annähernd gleicher Genauigkeit gemessen waren, konnten alle Gewichte der Einheit gleichgesetzt werden.

Die Auflösung der 10 Normalgleichungen mit angeschlossener Berechnung der Gewichtskoeffizienten lieferte folgende Resultate:

Der mittlere Gewichtseinheitsfehler beträgt $m_0 = \pm 1,9^{\text{cc}}$.

Dieser Fehler kommt der Differenz zweier gegenseitiger Höhenwinkel zu. Aus der Höhenwinkelmessung war ein Fehler von $\pm 1,6^{\text{cc}} \cdot \sqrt{2} = \pm 2,2^{\text{cc}}$ zu erwarten. Es zeigt sich also, daß in der Lotabweichungsbestimmung keine systematischen Fehler, verursacht z. B. durch falsche Annahme des Refraktionskoeffizienten, enthalten sind.

Die wahrscheinlichsten Verbesserungen der Absolutglieder L_{ik} liegen zwischen $-1,66^{\text{cc}}$ und $+1,6^{\text{cc}}$.

Die wahrscheinlichsten Werte der Lotabweichungskomponenten, bezogen auf den Punkt Staffel, und ihre mittleren Fehler sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. ξ und η zählen dabei positiv bei nördlicher bzw. östlicher Abweichung des geoidischen Zenits vom ellipsoidischen.

Wie weit die berechneten Lotabweichungen mit den tatsächlichen Verhältnissen übereinstimmen, läßt sich am besten durch den Vergleich mit den in Stuhlbachjoch-N, Kotzen

Pkt.	ξ cc	m_ξ cc	η cc	m_η cc
St	0	—	0	—
HZ	— 9,9	$\pm 2,3$	+ 13,9	$\pm 1,7$
GK	— 0,1	$\pm 3,8$	+ 19,7	$\pm 2,0$
StJ-N	+ 0,4	$\pm 1,7$	0	$\pm 1,2$
K	+ 14,5	$\pm 2,0$	+ 19,8	$\pm 1,5$
HB	+ 2,5	$\pm 2,8$	+ 17,3	$\pm 1,3$

und Hoher Zwiesler astronomisch beobachteten Meridiankomponenten ξ beurteilen, der in der folgenden Tabelle gegeben ist. ξ_a bedeutet darin die astronomisch, ξ_t die trigonometrisch bestimmte Meridiankomponente.

Pkt.	ξ_a cc	m_{ξ_a} cc	ξ_t cc	m_{ξ_t} cc	$\Delta = \xi_a - \xi_t$ cc	Δ_w cc
StJ-N	+ 2,7	$\pm 1,1$	+ 0,4	$\pm 1,7$	+ 2,3	$\pm 2,0$
K	+ 15,9	$\pm 0,8$	+ 14,5	$\pm 2,0$	+ 1,4	$\pm 2,2$
HZ	— 9,9	$\pm 0,8$	— 7,5	$\pm 2,3$	— 2,4	$\pm 2,4$

Die zu erwartende Differenz Δ_w zwischen ξ_a und ξ_t setzt sich nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz aus den mittleren Fehlern m_{ξ_a} und m_{ξ_t} nach der Formel

$$\Delta_w = \pm \sqrt{m_{\xi_a}^2 + m_{\xi_t}^2}$$

zusammen.

Es zeigt sich also, daß die astronomisch und trigonometrisch bestimmten Lotabweichungskomponenten innerhalb der kombinierten Meßgenauigkeit beider Verfahren gut übereinstimmen. Wenn auch nur für 3 der 10 berechneten Lotabweichungskomponenten astronomische Vergleichswerte zur Verfügung stehen, so ist doch anzunehmen, daß auch die übrigen mit einer Genauigkeit von 2–3^{cc} die wirklichen Verhältnisse wiedergeben. F. KOBOLD³⁴ gibt als Genauigkeit der im Schweizer Meridianprofil trigonometrisch bestimmten Lotabweichungskomponenten den durchschnittlichen Betrag von $\pm 1,1'' = 3,3^{\text{cc}}$ an. Die Resultate im Isartal stimmen mit diesem Wert gut überein, erweitern jedoch seine Gültigkeit auch auf die O–W-Komponente der Lotabweichungen in Punkten eines Höhennetzes.

Die mit Methode Nr. 3 der FINSTERWALDERSchen Einteilung berechneten Lotabweichungen im Höhennetz erlauben nun ein Urteil darüber, wieweit die Niveauflächen im

³⁴ F. KOBOLD a. a. O. S. 12.

Isartal eine regelmäßige Krümmung aufweisen, wie weit also die im 5. Kapitel dieses Abschnittes nach Methode Nr. 2 ausgeglichenen Höhenunterschiede als Meereshöhenunterschiede zu betrachten sind. Die Lotabweichungen sind zu diesem Zweck in Figur 20 nochmals graphisch in ihrer gegenseitigen Lagebeziehung dargestellt.

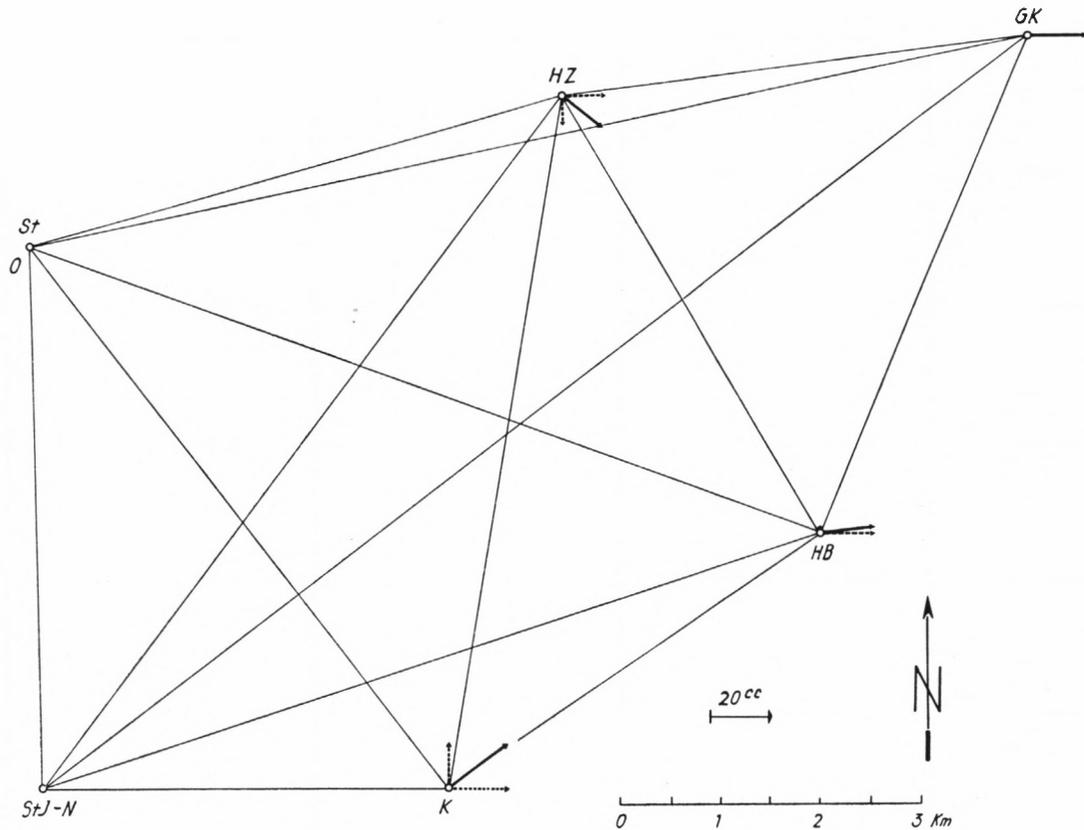


Fig. 20

Es zeigt sich, daß sich die Differenzen der O-W-Komponenten im ganzen Netzbereich praktisch linear mit den Entfernungen ändern, daß also eine konstante – im vorliegenden Fall positive – Krümmung des Geoids in O-W-Richtung vorhanden ist. In meridionaler Richtung ergibt sich eine Schrägstellung, die unter Zugrundelegung des in Punkt Staffel astronomisch beobachteten ξ -Wertes (s. III. Abschnitt 3. Kapitel) $10,3''$ beträgt. Nur in den Punkten Hoher Zwiesler und Kotzen treten meridionale Lotstörungen in Richtung auf den Massendefekt des Isartales auf. Sie sind ein Anzeichen dafür, daß beide Punkte noch innerhalb der Depression der Niveauflächen längs des Isartales liegen. Aus der Ausgleichung der Höhenunterschiede geht hervor, daß sich die Wirkung der Lotstörungen auf die in den beiden Punkten gemessenen Höhenwinkel innerhalb des Gesamtnetzes aufheben. Sie müßten sich sonst in größeren mittleren Fehlern der Höhenunterschiede bemerkbar machen. Es muß jedoch angenommen werden, daß die zu den beiden Punkten führenden

Höhenunterschiede nicht auf die wirklichen Niveauflächen bezogen sind, sondern um die Beträge der Undulationen, die sich in den Lotstörungen beider Punkte äußern, verfälscht sind. Die trigonometrischen Messungen nur im Höhennetz sind nicht in der Lage, diese Undulationen zu erfassen. Es bedürfte dazu einer Anzahl von Zwischenpunkten, die den tatsächlichen Verlauf der Niveauflächen zwischen den 4 Endpunkten St, GK, HB und StJ-N und den Punkten HZ und K profilartig abtasten müßten.

Aber auch die Höhenunterschiede zwischen den Eckpunkten selbst können prinzipiell um ähnliche Beträge fehlerhaft sein, die durch Undulationen der Niveauflächen im Sinne der Betrachtungen des 6. Kapitels im I. Abschnitt bedingt sein können. Es wäre z. B. denkbar, daß auf der Südseite des Isartales der wirkliche Verlauf der Niveauflächen von der durch die Lotrichtungen bestimmten Fläche konstanter Krümmung nach oben oder unten abweicht (Fig. 12 S. 33). Die Niveauflächen könnten zu beiden Seiten der durch das Isartal hervorgerufenen Depression zusätzlich zur konstanten Schrägstellung gegenüber dem Ellipsoid eine verschiedene Höhenlage einnehmen. Durch die Messungen im Übertragungsprofil wurde zwar die Senkung der Niveauflächen zwischen der Nordflanke und der Sohle des Tales bestimmt (s. III. Abschnitt, 2. Kapitel), ähnliche Messungen zur Ermittlung des Anstieges nach Süden hin, konnten jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt werden, so daß über einen eventuellen Unterschied der beiden Werte nichts ausgesagt werden kann.

Da durch die Berechnung der Lotabweichungen das Vorhandensein von Undulationen der Niveauflächen erwiesen ist, führt auch die auf S. 19 erwähnte Möglichkeit der Bestimmung von zusätzlichen Krümmungswerten aus den Differenzen einseitiger Höhenunterschiede zu keinem klaren Ergebnis.

Eine solche Bestimmung hat prinzipiell an die Gleichung (3. 7) auf S. 19 des I. Abschnittes anzuknüpfen, in der die zusätzliche Krümmung $d\kappa$ längs einer Visur mit dem Unterschied $d\Delta H$ der Absolutbeträge der einseitigen Höhenunterschiede in Beziehung gesetzt ist:

$$d\Delta H = b^2 (1 + 2\text{tg}^2\beta) \cdot d\kappa. \quad (3. 7)$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß $d\Delta H$ bereits vom Einfluß der Refraktion befreit ist. Da durch die Unsicherheit des Refraktionskoeffizienten von vornherein in $d\Delta H$ eine gewisse Unsicherheit verursacht wird, kann das sehr kleine Glied $2b^2 \cdot \text{tg}^2\beta \cdot d\kappa$ vernachlässigt und $d\kappa$ nach der Formel

$$d\kappa = \frac{d\Delta H}{b^2} \quad (8. 14)$$

für jede Visur berechnet werden.

Im Höhennetz des Isartales wurde jedoch nicht dieser Weg der Einzelberechnung eingeschlagen, sondern eine geschlossene Bestimmung der Gestalt der Niveauflächen versucht, die von folgenden Überlegungen ausging:

Setzt man einen analytisch geschlossen beschreibbaren Verlauf der zusätzlichen Krümmung der Niveauflächen gegenüber dem Ellipsoid voraus, so ist dieser durch die Größe der beiden Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 , welche die Extremwerte der zusätzlichen Krümmung darstellen und deren Richtungen aufeinander senkrecht stehen, und durch das Azi-

mit α_0 der ersten Hauptkrümmung κ_1 bestimmt. Differentialgeometrisch gesehen, kommt die Berechnung von κ_1 , κ_2 und α_0 der Bestimmung der DUPINSchen Indikatrix der Niveauflächen in bezug auf das Ellipsoid gleich. Die Visuren eines Höhennetzes werden dabei von einem einzigen Punkt auslaufend gedacht, der nicht fest innerhalb des Netzes zu lokalisieren ist, aber als charakteristischer Punkt, eben als Mittelpunkt der DUPINSchen Indikatrix, für den Bereich der Niveauflächen zu gelten hat.

Die Krümmung κ eines beliebigen, im Azimut a verlaufenden Normalschnittes der Niveauflächen ist nach dem EULERSchen Satz durch die Gleichung

$$\kappa = \kappa_1 \cdot \cos^2 (a - \alpha_0) + \kappa_2 \cdot \sin^2 (a - \alpha_0) \quad (8.15)$$

bestimmt. Mit dem rein formalen Ersatz von $d\kappa$ durch κ nimmt Gleichung (8.14) unter Berücksichtigung von (8.15) folgende Gestalt an:

$$\kappa_1 \cdot \cos^2 (a - \alpha_0) + \kappa_2 \cdot \sin^2 (a - \alpha_0) = \frac{d\Delta H}{b^2}. \quad (8.16)$$

Aus drei Differenzen $d\Delta H$, die drei Visuren von verschiedenen Azimuten a zugehören, können also prinzipiell die Elemente κ_1 , κ_2 und α_0 der DUPINSchen Indikatrix berechnet werden.

Stehen – wie im Isartalnetz – mehr Differenzen $d\Delta H$ zur Verfügung, so ist eine Ausgleichung der Werte κ_1 , κ_2 und α_0 nach vermittelnden Beobachtungen möglich. Deren Fehlergleichungen können durch Linearisierung der linken Seite von (8.16), also des EULERSchen Satzes, nach Einführung von Näherungswerten κ'_1 , κ'_2 und α'_0 gewonnen werden:

$$\begin{aligned} & \cos^2 (a_i - \alpha'_0) \cdot d\kappa_1 + \sin^2 (a_i - \alpha'_0) \cdot d\kappa_2 \\ & + [2 \cdot \kappa'_1 \sin (a_i - \alpha'_0) \cdot \cos (a_i - \alpha'_0) - 2 \kappa'_2 \cdot \sin (a_i - \alpha'_0) \cos (a_i - \alpha'_0)] d\alpha_0 \\ & = \frac{d\Delta H_i}{b_i^2} - [\kappa'_1 \cdot \cos^2 (a_i - \alpha'_0) + \kappa'_2 \cdot \sin^2 (a_i - \alpha'_0)] + v_i, \\ & \cos^2 (a_i - \alpha'_0) \cdot d\kappa_1 + \sin^2 (a_i - \alpha'_0) d\kappa_2 + (\kappa'_1 - \kappa'_2) \cdot \sin 2 \cdot (a_i - \alpha'_0) \cdot d\alpha_0 \\ & = \frac{d\Delta H_i}{b_i^2} - [\kappa'_1 \cdot \cos^2 (a_i - \alpha'_0) + \kappa'_2 \cdot \sin^2 (a_i - \alpha'_0)] + v_i, \end{aligned}$$

oder in abgekürzter Schreibweise:

$$a_i d\kappa_1 + b_i d\kappa_2 + c_i d\alpha_0 - l_i = v_i, \quad (8.17)$$

wobei die Koeffizienten a_i , b_i , c_i und das Absolutglied l_i die Bedeutung

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \cos^2 (a_i - \alpha'_0) \\ b_i &= \sin^2 (a_i - \alpha'_0) \\ c_i &= (\kappa'_1 - \kappa'_2) \cdot \sin 2 \cdot (a_i - \alpha'_0) \\ l_i &= \frac{d\Delta H_i}{b_i^2} - [\kappa'_1 \cdot \cos^2 (a_i - \alpha'_0) + \kappa'_2 \cdot \sin^2 (a_i - \alpha'_0)] \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

haben.

Nach dieser Methode wurde versucht, Wert und Richtung der Hauptkrümmungen im Bereich des Isartalnetzes zu bestimmen. Die mittleren Fehler der ausgeglichenen Werte für κ_1 , κ_2 und α_0 ergaben sich jedoch größer als diese Werte selbst und zeigten damit, daß die Hauptvoraussetzung für eine sinnvolle Anwendung der Methode, nämlich der regelmäßige Krümmungsverlauf im Netzbereich nicht genügend erfüllt ist.

Es muß noch darauf hingewiesen werden, daß auch bei der soeben geschilderten Methode zur Bestimmung der Gestalt der Niveauflächen der Refraktionskoeffizient nicht in der Ausgleichung mitgeführt werden kann, da die Refraktion auf die Differenzen $d\Delta H$ wie eine zusätzliche Krümmung wirkt und von den Größen κ nicht getrennt werden kann.

6. BERECHNUNG UND AUSGLEICHUNG DER ELLIPSOIDISCHEN HÖHENUNTERSCHIEDE

Die im vorhergehenden Kapitel berechneten Lotabweichungen können zur Reduktion der beobachteten Höhenwinkel auf das Ellipsoid verwendet werden. Eine Berechnung des Höhennetzes mit den reduzierten Höhenwinkeln liefert dann ellipsoidische Höhenunterschiede. Werden – wie im vorliegenden Fall – die Lotabweichungskomponenten in einem Ausgangspunkt zu Null angenommen, dann beziehen sich die Höhenunterschiede auf ein Ellipsoid, das gegen das zugrunde liegende Referenzellipsoid um die Lotabweichungskomponenten ξ_0 und η_0 des Ausgangspunktes in der N-S- bzw. O-W-Richtung schräg gestellt ist. Ihr Vergleich mit den geoidischen Höhenunterschieden gibt nur die zusätzliche Krümmung der Niveauflächen, nicht aber ihre Neigung gegenüber dem Referenzellipsoid wieder.

Praktisch wird man nicht die Höhenwinkel selbst reduzieren, sondern an den geoidischen Höhenunterschieden Reduktionen anbringen, die den durch die Lotabweichungen verursachten Änderungen der Höhenwinkel entsprechen. Diese Reduktionen $\delta\Delta H$ sind aus der auf das erste Glied verkürzten Höhenformel

$$\Delta H = b \cdot \operatorname{tg} \beta$$

durch Differenzieren zu gewinnen:

$$\delta\Delta H = \frac{b}{\cos^2 \beta} \cdot d\beta. \quad (9.1)$$

Für $d\beta$ ist dabei für jede Visur das Mittel aus den in den beiden Endpunkten P_i und P_k in Richtung der Visur wirkenden Lotabweichungskomponenten λ_{ik} und λ_{ki} einzusetzen. Es gilt somit:

$$\delta\Delta H = \frac{b}{\cos^2 \beta} \cdot \frac{\lambda_{ik} + \lambda_{ki}}{2\rho^{\text{cc}}}. \quad (9.2)$$

λ_{ik} und λ_{ki} sind durch die bekannten, schon unter (8.2), S. 57 benutzten Beziehungen

$$\begin{aligned} \lambda_{ik} &= \xi_i \cdot \cos \alpha_{ik} + \eta_i \cdot \sin \alpha_{ik} \\ \lambda_{ki} &= -\xi_k \cdot \cos \alpha_{ik} - \eta_k \cdot \sin \alpha_{ik} \end{aligned} \quad (8.2)$$

zu berechnen.

Eine Zusammenstellung der so gewonnenen ellipsoidischen Höhenunterschiede zu geschlossenen Höhenpolygonen muß Schlußfehler ergeben, deren Größenordnung der Meßgenauigkeit der Höhenwinkel entspricht – sofern nur auch die Lotabweichungen mit ungefähr eben dieser Genauigkeit berechnet werden konnten. Dieselbe Größenordnung kommt den aus einer Ausgleichung der ellipsoidischen Höhenunterschiede resultierenden Verbesserungen und mittleren Fehlern zu.

Die Verbesserungen und mittleren Fehler der ausgeglichenen ellipsoidischen Höhenunterschiede können andererseits mit jenen verglichen werden, die aus der Ausgleichung der mit den unreduzierten Höhenwinkeln berechneten Höhenunterschiede hervorgehen. Die gute oder schlechte Übereinstimmung der Größenordnung beider ist ein Kriterium dafür, wie weit die Annahme einer konstanten zusätzlichen Geoidkrümmung längs der einzelnen Visuren berechtigt war, wieweit also die unreduzierten Höhenwinkel geoidische Höhenunterschiede liefern konnten.

Zur Durchführung dieses Vergleichs wurden die aus den ausgeglichenen Lotabweichungen hervorgehenden ellipsoidischen Höhenunterschiede im Isartalnetz berechnet und derselben Höhenausgleichung, die im 5. Kapitel des II. Abschnitts geschildert ist, unterzogen.

Die folgende Aufstellung zeigt die Schlußfehler, die sich dabei in 9 unabhängigen Höhendreiecken ergaben (in Klammern die Schlußfehler der unreduzierten Höhenunterschiede, die schon auf S. 54 aufgeführt wurden):

Dreieck

StJ-N – St – K:	$l_6 = + 1,1 \text{ cm}$	(– 1,8 cm)
StJ-N – HZ – K:	$l_7 = + 0,3 \text{ cm}$	(– 2,1 cm)
StJ-N – HB – K:	$l_8 = - 0,9 \text{ cm}$	(– 0,1 cm)
StJ-N – St – HB:	$l_9 = - 2,2 \text{ cm}$	(– 3,1 cm)
StJ-N – HZ – HB:	$l_{10} = - 0,6 \text{ cm}$	(– 2,4 cm)
StJ-N – GK – HB:	$l_{11} = + 2,4 \text{ cm}$	(+ 0,1 cm)
StJ-N – St – GK:	$l_{12} = - 0,6 \text{ cm}$	(– 0,5 cm)
StJ-N – HZ – GK:	$l_{13} = + 1,0 \text{ cm}$	(– 2,0 cm)
StJ-N – St – HZ:	$l_{14} = - 1,1 \text{ cm}$	(– 5,6 cm)

Die Resultate der Ausgleichung waren (in Klammern wieder die entsprechenden Werte der ersten Ausgleichung):

Mittlerer Gewichtseinheitsfehler $m_0 = \pm 1,8 \text{ cm}$ ($\pm 2,1 \text{ cm}$).

Ausgeglichebene Höhenunterschiede ΔH_i , mittlere Fehler m_i und wahrscheinlichste Verbesserungen v_i :

Nr.	Visur	ΔH_i cm	m_i cm	v_i cm
1	StJ-N - St:	- 204,022	$\pm 0,8$ (0,9)	0 (- 0,9)
2	StJ-N - HZ:	- 390,657	$\pm 0,8$ (0,9)	+ 0,1 (+ 2,5)
3	StJ-N - GK:	- 314,745	$\pm 1,0$ (1,1)	- 0,5 (+ 0,1)
4	StJ-N - HB:	- 113,099	$\pm 0,8$ (0,9)	- 0,2 (- 0,1)
5	StJ-N - K:	- 343,445	$\pm 0,7$ (0,8)	+ 0,1 (0)
6	K - St:	+ 139,425	$\pm 0,8$ (0,9)	- 1,0 (+ 0,9)
7	K - HZ:	- 47,212	$\pm 0,8$ (0,9)	- 0,1 (- 0,4)
8	K - HB:	+ 230,346	$\pm 0,7$ (0,8)	+ 0,6 (- 0,6)
9	HB - Dt:	- 90,923	$\pm 0,8$ (0,9)	+ 2,0 (+ 3,9)
10	HB - HZ:	- 227,558	$\pm 0,7$ (0,8)	+ 0,5 (- 0,2)
11	HB - GK:	- 201,646	$\pm 0,8$ (0,9)	- 2,1 (- 0,3)
12	GK - St:	+ 110,723	$\pm 1,0$ (1,0)	+ 1,1 (- 0,5)
13	GK - HZ:	- 75,912	$\pm 0,8$ (0,9)	- 1,4 (- 0,4)
14	HZ - St:	+ 186,636	$\pm 0,9$ (1,0)	+ 1,3 (+ 2,2)

Die Ausgleichung der ellipsoidischen Höhenunterschiede zeigt also eine geringfügige Steigerung der Genauigkeit. Der auf Grund der errechneten Lotabweichungsverteilung gezogene Schluß, daß die Höhenunterschiede der ersten Ausgleichung noch mit kleinen systematischen Fehlern behaftet seien, erfährt dadurch eine weitere Stütze. Die Genauigkeit der ausgeglichenen ellipsoidischen Höhenunterschiede zeigt weiter, daß die berechneten Lotabweichungen den wirklichen Verhältnissen entsprechen müssen. Denn Fehler in der Lotabweichungsbestimmung hätten größere Widersprüche und mittlere Fehler der ellipsoidischen Höhen zur Folge gehabt. Damit ist auch der verhältnismäßig hohe Wert des Refraktionskoeffizienten mit $k \approx 0,20$ nochmals als reell bestätigt.

III. DAS ÜBERTRAGUNGSPROFIL

1. THEORETISCHE BETRACHTUNGEN

Wie schon im 1. Kapitel des II. Abschnittes erwähnt, muß im Isartal infolge der Verteilung der sichtbaren Massen eine Depression des Geoids angenommen werden, deren Schnitt senkrecht zur Talachse stark angenähert cosinusförmigen Verlauf hat. Der Tiefpunkt der cosinusförmigen Mulde ist dabei unter der Talsohle anzunehmen, die Höchstpunkte, in denen die Depression in die Fläche konstanter Krümmung – wie sie im 6. Kapitel des I. Abschnittes beschrieben wurde – einmündet, liegen unter den beiden Begrenzungskämmen im Norden und Süden.

Würde man den Höhenunterschied zwischen Tal- und Gipfelpunkten innerhalb einer solchen Depression nur mit einer einzigen trigonometrischen Visur überbrücken, so erhielte man nicht geoidische Höhen, sondern Höhen, die sich auf die gegenüber dem Ellipsoid konstant gekrümmte Fläche beziehen. Dies sei nochmals in Figur 21 veranschaulicht.

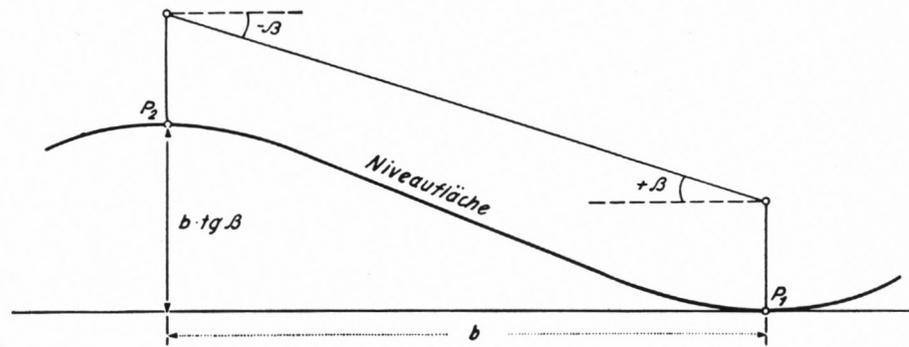


Fig. 21

Die Punkte P_1 und P_2 sind dabei zur Vereinfachung auf dem cosinusförmigen Schnitt der Niveaufläche selbst angenommen, da ihre Höhenlage über der Fläche für die vorliegende Betrachtung keine Rolle spielt. Ihr Meereshöhenunterschied ist also Null.

Als weitere Vereinfachung, die für die Untersuchung der Undulation belanglos ist, wurde der Normalschnitt der konstant gekrümmten Fläche als Gerade angenommen. Die trigonometrische Visur zwischen den Punkten P_1 und P_2 der Niveaufläche ist dann in P_1 bzw. P_2 gegen die zueinander parallelen Horizontalen in diesen Punkten um die Höhenwinkel $+\beta$ bzw. $-\beta$ geneigt und liefert die Höhenunterschiede $\Delta H_1^2 = +b \cdot \operatorname{tg} \beta$ und $\Delta H_2^1 = -b \cdot \operatorname{tg} \beta$. Die trigonometrische Höhenmessung ergibt also statt des Höhenunterschiedes Null den Höhenunterschied $\Delta H = +b \cdot \operatorname{tg} \beta$ zwischen den Punkten P_1 und P_2 . Um denselben Betrag wird auch bei verschiedener Höhenlage der Punkte über der Niveaufläche ihr Höhenunterschied verfälscht; da Hin- und Rückvisur – absolut gesehen –

einen um β zu großen Höhenwinkel ergeben, findet man den Höhenunterschied um den Betrag $|b \cdot \operatorname{tg} \beta|$ zu groß.

Will man den auf die wirkliche Niveaufläche bezogenen Höhenunterschied zwischen Tal- und Gipfelpunkt erhalten, so müssen am aufsteigenden Hang Zwischenpunkte so eingeschaltet werden, daß die Krümmung des Geoidschnittes zwischen je zwei Stationen als konstant betrachtet werden kann. Theoretisch ist dies nur durch Einschaltung unendlich vieler Punkte möglich – eine Anordnung, der das geometrische Nivellement mit seinen verhältnismäßig sehr kurzen, horizontalen Zielweiten praktisch sehr nahe kommt.

Der Verlauf einer cosinusförmigen Geoiddepression kann durch die Gleichung

$$h = m \cdot \cos(n \cdot b) \quad (10. 1)$$

dargestellt werden. Dabei ist angenommen, daß der Ansatzpunkt A der Depression auf der h -Achse eines kartesischen h - b -Koordinatensystems ($h =$ Höhe, $b =$ Horizontalentfernung) liegt und von dessen Nullpunkt den Abstand m besitzt. Die Lotabweichung in A ist gleich Null gesetzt. Der Tiefstpunkt E der Depression, der um den Betrag $2m$ unter A liegt, ist durch die Beziehung

$$n \cdot b_E = \pi \quad b_E = \frac{\pi}{n} \quad (10. 2)$$

festgelegt. Die Entfernung b_E des Tiefstpunktes vom Ansatzpunkt der Depression sei mit B bezeichnet. Bei bekanntem B ist die Konstante n nach (10. 2) durch die Gleichung

$$n = \frac{\pi}{B} \quad (10. 3)$$

bestimmt. m und n sind demnach 2 Maßstabsfaktoren, durch welche die „Normalform“ $y = \cos x$ der Cosinuslinie mit den Substitutionen $y = \frac{h}{m}$ und $x = n \cdot b$ auf ein Geoidprofil von bekannter Länge B und Senkung $2m$ eingepaßt wird.

Die Neigung α des Geoidprofils gegen das Ellipsoid erhält man durch Differentiation von (10. 1) nach b :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dh}{db} = -m \cdot n \sin(n \cdot b). \quad (10. 4)$$

α ist gleich der negativen, auf A reduzierten Lotabweichung in den Profilverpunkten. Da die Amplitude eines cosinusförmigen Geoidprofils als sehr klein im Verhältnis zu seiner Periode anzunehmen ist, also nur sehr kleine Neigungen α und Lotabweichungen ξ zu erwarten sind, kann in (10. 4) $\operatorname{tg} \alpha$ durch α selbst, bzw. $-\xi$ ersetzt werden. Es gilt danach mit sehr scharfer Annäherung:

$$\xi = mn \cdot \sin(nb). \quad (10. 5)$$

Mit Hilfe von (10. 5) können die Konstanten m und n aus 2 Lotabweichungen in Profilverpunkten mit bekanntem b und ξ gewonnen werden.

Die Gestalt der Cosinuslinie legt eine Annäherung durch 2 Kreisbögen, die sich den Scheitelkrümmungen bei A und E anschmiegen, und eine zwischen beiden vermittelnde Gerade nahe. Eine solche Annäherung erreicht man bei der trigonometrischen Höhen-

messung, wenn man im Profil zwischen A und E zwei Zwischenpunkte P_1 und P_2 mit den Horizontalentfernungen b_1 und b_2 von A einschaltet. Die Lotabweichungen in P_1 und P_2 seien ξ_1 und ξ_2 .

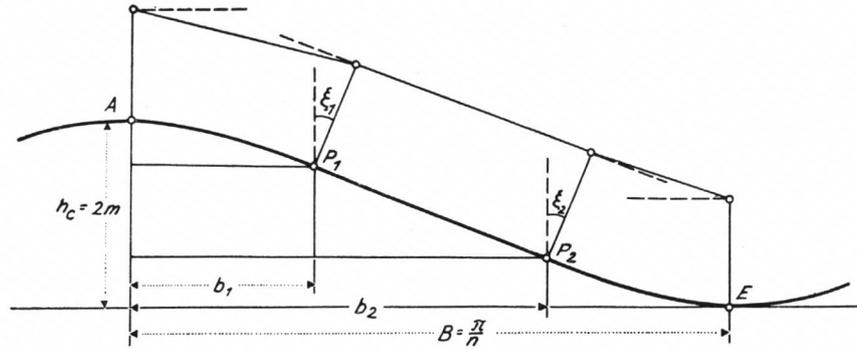


Fig. 22

Im folgenden soll untersucht werden, wie weit sich die aus einem solchen treppenartigen Annäherungsprofil gewonnene Senkung h_T von der tatsächlichen Senkung $h_C = 2m$ der Cosinuslinie zwischen A und E unterscheidet. Die Senkung h_T setzt sich aus 3 Teilbeiträgen zusammen (s. Fig. 22):

$$1. \text{ Senkung zwischen } A \text{ und } P_1: \quad h_A^1 = b_1 \cdot \frac{\xi_1}{2} \quad (10.6)$$

$$2. \text{ Senkung zwischen } P_1 \text{ und } P_2: \quad h_1^2 = (b_2 - b_1) \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} \quad (10.7)$$

$$3. \text{ Senkung zwischen } P_2 \text{ und } E: \quad h_2^E = (B - b_2) \frac{\xi_2}{2}. \quad (10.8)$$

Summierung der drei Ausdrücke (10. 6–8) und Einführung von $B = \frac{\pi}{n}$ nach (10. 3) ergibt:

$$\begin{aligned} h_T &= b_1 \cdot \frac{\xi_1}{2} + (b_2 - b_1) \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} + \left(\frac{\pi}{n} - b_2 \right) \frac{\xi_2}{2} \\ h_T &= b_2 \cdot \frac{\xi_1}{2} + \left(\frac{\pi}{n} - b_1 \right) \frac{\xi_2}{2}. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Ersetzt man ξ_1 und ξ_2 nach (10. 5), so folgt

$$h_T = \frac{m}{2} [n \cdot b_2 \cdot \sin(n b_1) + (\pi - n b_1) \sin(n b_2)]. \quad (10.10)$$

Der Unterschied Δh zwischen tatsächlicher Senkung h_C und angenäherter Senkung h_T beträgt demnach

$$\Delta h = h_C - h_T = 2m - \frac{m}{2} [n \cdot b_2 \cdot \sin(n b_1) + (\pi - n b_1) \cdot \sin(n b_2)]. \quad (10.11)$$

Δh ist dem Senkungsbetrag h_T , der sich aus der trigonometrischen Höhenmessung als Differenz zwischen den mit einer durchgehenden Visur bzw. mit 3 Zwischenvisuren bestimmten Höhenunterschied von E und A ergibt, hinzuzuzählen. Zur Berechnung von Δh

ist allerdings die Kenntnis der Konstanten m und n nötig, die streng nur aus astronomischen Messungen von mindestens 2 Lotabweichungen im Profil gewonnen werden können. Doch ergibt die trigonometrische Höhenmessung sehr gute Näherungen für m und n , wenn nur der untere Profildpunkt nahe genug am Tiefstpunkt E der Cosinuslinie liegt. Da dieser Tiefstpunkt bei Geoiddepressionen in symmetrisch gebauten Tälern sehr nahe mit der Talsohle zusammenfallen wird, kann diese Bedingung leicht eingehalten werden. Aus dem Horizontalabstand B von Tal- und Gipfelpunkt ergibt sich dann n sehr scharf nach (10. 3). Für m und damit auch für den Senkungsbetrag der Cosinuslinie $h_c = 2m$ ergibt sich eine entsprechend scharfe Näherung aus (10. 10) mit

$$m = \frac{2h_T}{nb_2 \cdot \sin(nb_1) + (\pi - nb_1) \cdot \sin(nb_2)}.$$

Wieweit in der Wirklichkeit eine Geoiddepression cosinusförmigen Verlauf hat und wie genau m und n aus trigonometrischen Messungen gewonnen werden können, soll später am Beispiel des Übertragungsprofils im Isartal untersucht werden.

Zuerst ist noch die Frage zu klären, wie groß b_1 und b_2 zu wählen sind, wenn Δh ein Minimum werden soll, wenn also die beiden Zwischenpunkte P_1 und P_2 so gelegt werden sollen, daß sich die bestmögliche Anschmiegung der Profiltreppe an die Cosinuslinie ergibt.

Aus der Symmetrie der Cosinuslinie ist zunächst ersichtlich, daß in diesem Fall P_1 ebenso weit von A entfernt sein muß wie P_2 von E . Das heißt

$$b_1 = \frac{\pi}{n} - b_2 \quad \text{oder} \quad b_2 = \frac{\pi}{n} - b_1. \quad (10. 13)$$

Führt man (10. 13) in (10. 11) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta h &= 2m - \frac{m}{2} \left[nb_2 \sin n \cdot \left(\frac{\pi}{n} - b_2 \right) + nb_2 \sin(nb_2) \right] \\ &= 2m - \frac{m}{2} (nb_2 \sin(nb_2) + nb_2 \sin(nb_2)) \\ &= 2m - mn b_2 \sin(nb_2). \end{aligned} \quad (10. 14)$$

Das Minimum für Δh ist durch die Gleichung

$$\frac{d\Delta h}{db_2} = -mn^2 b_2 \cos(nb_2) - mn \cdot \sin(nb_2) = 0$$

bestimmt, die in der Form

$$nb_2 \cos(nb_2) + \sin(nb_2) = 0 \quad (10. 15)$$

geschrieben werden kann. Die graphische oder iterative Auflösung dieser transzendenten Gleichung führt mit (10. 13) auf die Werte:

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{2.029}{n} \quad \text{oder} \quad nb_2 = 116.25^\circ \\ b_1 &= \frac{1.113}{n} \quad \text{oder} \quad nb_1 = 63.75^\circ, \end{aligned}$$

die – wie zu erwarten war – von der Konstanten m unabhängig sind. Betrachtet man die Profillänge B als halbe Periode $\pi = 180^\circ$ der Cosinuslinie, so sieht man, daß P_1 und P_2 am

günstigsten in den Abständen $\frac{63.75}{180} \cdot B$ und $\frac{116.25}{180} \cdot B$ von A angeordnet werden. Für die Praxis dürfte die einfache Relation

$$b_1 \approx \frac{1}{2} b_2 \approx \frac{1}{3} B,$$

d. h. eine Drittelung des Profiles als Regel für die günstigste Wahl von P_1 und P_2 genügen. Von Interesse ist noch der Wert des Minimums von Δh . Er wird nach (10. 14)

$$\Delta h_{min} = 2m + mn \cdot \frac{2.029}{n} \cdot \sin 116,25^\circ = 0,09 \cdot 2m.$$

Die Geoidsenkung wird also aus der trigonometrischen Höhenmessung bei günstigster Wahl zweier Zwischenpunkte um 9⁰/₁₀ zu klein erhalten. Bei Drittelung des Profiles durch die Zwischenpunkte steigt dieser Fehlbetrag auf 9,4⁰/₁₀ von $2m$. Da jedoch in der Praxis nur in seltenen Fällen die Zwischenpunkte genau oder auch nur angenähert gleich abständig von den Endpunkten eines Übertragungsprofiles und in jeweils ein Drittel Abstand der Gesamtlänge gelegt werden können, wird meist die Berechnung der Senkung $2m$ nach der komplizierteren Formel (10. 12) statt nach dem angeführten einfachen Prozentverhältnis nötig sein.

2. TRIGONOMETRISCHE MESSUNGEN IM ÜBERTRAGUNGSPROFIL

Die Höhenwinkelmessungen im Übertragungsprofil wurden vom 16.–18. August 1951 im selben Verfahren und mit demselben Instrument wie die des Höhennetzes durchgeführt. Sie wurden am 12. und 13. Juni 1952 im gegenseitig-gleichzeitigen Verfahren wiederholt. Auch dabei entsprach die Meßanordnung der im Höhennetz angewandten. Die 1951 gemessenen Höhenwinkel und ihre Genauigkeit sind bereits in der Tabelle S. 51 aufgeführt. In der folgenden Aufstellung sind die aus den Messungen von 1951 bzw. 1952 berechneten Höhenunterschiede einander gegenübergestellt.

	Visur	1951		1952		1952-1951 cm
		m	m	m	m	
1	J 49-St		+ 746,684		+ 746,686	+ 0,2
2	J 49-PP 141	+ 104,210		+ 104,220		+ 1,0
3	PP 141-HH	+ 451,534		+ 451,527		- 0,7
4	HH-St	+ 190,894		+ 190,888		- 0,6
5	$\Sigma 2+3+4$		+ 746,638		+ 746,635	- 0,4
6	$\Delta 5-1$		- 0,046		- 0,051	- 0,5
7	J 49-StJ-N		+ 950,702		+ 950,702	0
8	St-StJ-N	+ 204,020		+ 204,019		- 0,1
9	$\Sigma 5+8$		+ 950,658		+ 950,654	- 0,4
10	$\Delta 9-7$		- 0,044		- 0,048	- 0,4

Zunächst ist aus der letzten Spalte dieser Tabelle zu ersehen, daß die aus den gegenseitig-zeitigen Messungen hervorgehenden Höhenunterschiede von den aus den nicht gleichzeitigen Messungen errechneten nur um Beträge differieren, die innerhalb der trigonometrischen Meßgenauigkeit liegen. Damit ist erwiesen, daß die Refraktion zwischen den Messungen auf den einzelnen Profilverpunkten innerhalb der Meßtage des Jahres 1951 praktisch konstant geblieben ist. Der Einfluß ihrer Änderung auf das Mittel gegenseitiger, jedoch nicht gleichzeitiger Höhenbestimmungen liegt unterhalb der trigonometrischen Meßgenauigkeit. Der bedeutend größere Aufwand an Zeit, Personal und Material, den gegenseitig-zeitige Messungen erfordern, kann somit ohne Einbuße an Genauigkeit immer eingespart werden, wenn nur die Messungen innerhalb derselben Wetterlage erfolgen können.

Zu verschiedenen Jahreszeiten und in verschiedenen Wetterlagen kann allerdings die Refraktion sehr beträchtlich schwanken. Das geht aus dem Vergleich der einseitigen Höhenunterschiede des Übertragungsprofils vom Jahre 1951 bzw. 1952 hervor, der in folgender Tabelle gegeben ist:

	1951	1952	1952-1951
J 49-St	+ 746,810	+ 746,770	- 4,0
St-J 49	- 746,558	- 746,602	- 4,4
J 49-PP 141	+ 104,248	+ 104,235	- 1,3
PP 141-J 49	- 104,173	- 104,205	- 3,2
PP 141-HH	+ 451,562	+ 451,546	- 1,6
HH-PP 141	- 451,506	- 451,508	- 0,2
HH-St	+ 190,890	+ 190,883	- 0,7
St-HH	- 190,899	- 190,893	+ 0,6
J 49-StJ-N	+ 950,825	+ 950,796	- 2,9
StJ-N-J 49	- 950,579	- 950,608	- 2,9
St-StJ-N	+ 204,467	+ 204,387	- 8,0
StJ-N-St	- 203,573	- 203,651	- 7,8

Die Tabelle zeigt, daß die Refraktion während der Messungen des Jahres 1951 beträchtlich stärker war als im Meßzeitraum des Jahres 1952. Welche Werte für beide Zeiträume den Refraktionskoeffizienten zukommen, soll erst später nach Ermittlung der Geoidkrümmung im Übertragungsprofil untersucht werden.

Aus den Werten der letzten Spalte ist wieder zu ersehen, daß sich die Refraktion auf Hin- und Rückvisur selbst bei den relativ bodennahen Sichten des Übertragungsprofils im allgemeinen gleichmäßig auswirkt und das Mittel der gegenseitigen Höhenunterschiede nicht mehr innerhalb der cm-Stellen verfälscht.

Die für die Arbeiten im Übertragungsprofil wichtigste Zahl erscheint unter Nr. 6 der Tabelle S. 76. Sie ist der Unterschied zwischen dem mit einer durchgehenden Visur bestimmten Höhenunterschied der Punkte J 49 und Staffel und dem über die „Treppe“

PP 141–HH ermittelten. Wie erwartet, ergibt die durchgehende Messung einen größeren Höhenunterschied; es liegt also tatsächlich im Isartal eine Geoiddepression vor. Die angenäherte Senkung h_T ergibt sich aus den Messungen des Jahres 1951 zu 4,6 cm, aus denen von 1952 zu 5,1 cm. Beide Werte stimmen innerhalb der Meßgenauigkeit gut überein. Da beide Messungen als gleich genau zu betrachten sind, kann das Mittel von 4,8₅ cm als wahrscheinlichster Wert für h_T gelten.

Aus h_T ist nach Formel (10. 12) die Größe $h_c = 2m$ zu berechnen. Dazu sind folgende Eingangsgrößen notwendig.

$$\text{Entfernung St - HH} \quad b_1 = 691 \text{ m}$$

$$\text{Entfernung St - PP 141} \quad b_2 = 2034 \text{ m}$$

$$\text{Entfernung St - J 49} \quad B = 2926 \text{ m}$$

$$n = \frac{\pi}{B} = 0,001074 \text{ m}^{-1}$$

$$nb_1 = 0,742 = 42,5^\circ$$

$$\sin(nb_1) = 0,675$$

$$nb_2 = 2,185 = 125,2^\circ$$

$$\sin(nb_2) = 0,817$$

Damit wird

$$m = \frac{9,70}{2,185 \cdot 0,675 + 2,400 \cdot 0,817} = 2,8_2 \text{ cm.}$$

Als wahrscheinlichster Wert für die Senkung des Geoids im Isartal ergibt sich daher aus der trigonometrischen Höhenmessung der Betrag

$$h_c = 2m = 5,6_4 \text{ cm.}$$

3. ASTRONOMISCHE MESSUNGEN UND MERIDIONALE LOTABWEICHUNGEN IM ÜBERTRAGUNGSPROFIL

Um die Frage der Realität und Genauigkeit des trigonometrisch gewonnenen Wertes für die Geoidsenkung im Isartal prüfen zu können, wurde der Geoidverlauf im Übertragungsprofil astronomisch bestimmt. Da das Profil stark angenähert nord-südlich gerichtet ist, genügte hierzu die Ermittlung der Meridiankomponenten ξ der Lotabweichung in den Stationen, d. h. ihrer geographischen Breiten. Es kam dabei weniger darauf an, die strengen Lotabweichungen gegenüber einem bestimmten Referenzellipsoid zu gewinnen als vielmehr die Lotabweichungsdifferenzen zwischen den einzelnen Punkten des Übertragungsprofils. Die astronomischen Messungen wurden daher vor allem auf diesen Zweck abgestellt. Er sollte durch folgende Maßnahmen erreicht werden:

1. Benutzung derselben Sterne auf allen Stationen,
2. Anwendung desselben Meßverfahrens auf allen Stationen,
3. Messung innerhalb derselben Wetterlage in aufeinanderfolgenden Nächten.

Nach Versuchen noch im Herbst des Jahres 1951, die infolge von Wetterstörungen oder wegen langanhaltender Bedeckung des Himmels fehlschlagen, konnten die astronomischen Beobachtungen vom 1.–6. Juni 1952 unter Einhaltung der eben genannten Bedingungen durchgeführt werden.

Als Ziele dienten auf allen Stationen die beiden Süd-Sterne α und η des Sternbildes Bootes.

Beobachtet wurden Zirkummeridianzenitdistanzen, und zwar je 12 vor und nach der Kulmination jedes der beiden Gestirne mit Meridianabständen bis zu 10 Zeitminuten. Je 12 der 24 Beobachtungen jedes Gestirns fanden in der 1. bzw. 2. Fernrohrlage statt. Insgesamt liegen somit auf jeder Station 48 Beobachtungen zur Ermittlung der geographischen Breite vor.

Die Messungen konnten vom 1. bis 6. Juni 1952 mit einer Unterbrechung am 3. Juni in aufeinanderfolgenden Nächten innerhalb einer stabilen Schönwetterperiode ausgeführt werden, und zwar

- am 1. Juni 1952 auf Punkt PP 141,
- am 2. Juni 1952 auf Punkt Hirschhörndl,
- am 4. Juni 1952 auf Punkt J 49,
- am 5. Juni 1952 auf Punkt Stuhlbachjoch-N,
- am 6. Juni 1952 auf Punkt Staffel.

Als Instrument diente der Wild-Theodolit T 2 Nr. 22571, derselbe, der zur Höhentriangulation verwendet wurde. Als Zeitmesser stand das sehr präzise Taschenchronometer von Herrn Dipl.-Ing. G. LINDIG, München, zur Verfügung. Es wurde vor dem Aufbruch und nach der Rückkunft zu bzw. von jeder Messung in Fall/Isar mit dem stündlichen Zeitzeichen des Senders AFN-Munich verglichen und zeigte eine ausreichende Konstanz seines Ganges. Die meteorologischen Daten zur Ermittlung der astronomischen Refraktion wurden mit einem Aneroidbarometer und einem Schleuderthermometer erhoben.

Die Berechnung der geographischen Breiten φ_a , die mit den ALBRECHTSchen Hilfstafeln durchgeführt wurde, lieferte folgendes Ergebnis:

Pkt.	φ_a			m_{φ_a} "
	°	'	"	
St	47	35	25,5	$\pm 0,2$
HH	47	34	59,2	$\pm 0,3$
PP 141	47	34	14,9	$\pm 0,3$
J 49	47	33	49,8	$\pm 0,3$
StJ-N	47	32	35,6	$\pm 0,3$

Es ist nicht anzunehmen, daß die aus den je 48 Bestimmungen errechnete Genauigkeit, die mit $\pm 0,3''$ einen erstaunlich hohen Wert erreicht, den absoluten Werten der geographischen Breiten zukommt. Vielmehr stecken wahrscheinlich in den berechneten Werten noch systematische Fehler, die durch das auf 2 benachbarte Sterne beschränkte Beobach-

tungsverfahren nicht zutage treten. Da jedoch diese Fehler, wenn sie vorhanden sind, sich auf alle Breiten im selben Sinn und mit der gleichen Größe auswirken, sind die Breitenunterschiede tatsächlich mit einer Genauigkeit von $\pm 0,3'' \cdot \sqrt{2} = \pm 0,4'' = \pm 1,3^{\text{cc}}$ bestimmt. Der Wert von $\pm 0,3'' = 0,9^{\text{cc}}$ paßt gut zu der Meßgenauigkeit von $\pm 1,6''$, die mit dem Theodolit T 2 für Höhenwinkel bei 18facher Repetition erzielt wurde.

Aus den SOLDNERSCHEN Koordinaten der Profilpunkte im Bayerischen Landeskoordinatensystem (Nullpunkt: München, nördl. Frauenturm, Abszissenachse: Meridian des Nullpunktes) ergaben sich für die geodätischen Breiten φ_g der Punkte folgende Werte:

Pkt.	φ_g		
	°	'	''
St	47	35	15,2
HH	47	34	52,9
PP 141	47	34	09,5
J 49	47	33	40,7
StJ-N	47	32	24,4

Die meridionalen Lotabweichungen ξ in den Profilpunkten, bezogen auf die SOLDNER-Kugel des Bayerischen Landeskoordinatensystems und berechnet im Sinne $\xi = \varphi_a - \varphi_g$, betragen demnach:

Pkt.	ξ''
St	+ 10,3''
HH	+ 6,3''
PP 141	+ 5,4''
J 49	+ 9,1''
StJ-N	+ 11,2''

Die Reduktion auf Punkt Staffel, die mit der plausiblen Annahme einer Schrägstellung des Geoids gegen das Ellipsoid um $10,3''$ zusammenfällt, führt auf die Werte

Pkt	ξ red
St	0''
HH	- 4,0''
PP 141	- 4,9''
J 49	- 1,2''
StJ-N	+ 0,9''

Der Unterschied der reduzierten Lotabweichungen in Staffel und J 49 läßt darauf schließen, daß die Geoiddepression im Punkte J 49 noch nicht ihren Tiefstpunkt erreicht hat. Das Überwiegen der Lotabweichung in StJ-N gegen die in Staffel legt weiter die Annahme nahe, daß das Geoid im Bereich des Isartales eine – bezogen auf das Ellipsoid – nach oben konkave Krümmung aufweist, daß also dieses Gebiet noch innerhalb der Aufbiegung des Geoids am Alpenrand liegt. Doch müßte dies erst durch weitere Messungen überprüft werden.

4. VERLAUF DER NIVEAUFÄCHEN IM ÜBERTRAGUNGSPROFIL

Mit Hilfe der gemessenen Lotabweichungen kann nun untersucht werden, wieweit sich der Normalschnitt der Niveauflächen im Übertragungsprofil tatsächlich einer Cosinuslinie der Form $h = m \cdot \cos(n \cdot b)$ anschmiegt.

Die Konstanten m und n sind aus Gleichung (10. 5), S. 73, zu berechnen:

$$\xi = m \cdot n \cdot \sin(n \cdot b).$$

Im vorliegenden Fall, wo 3 Lotabweichungen zur Verfügung stehen, ist eine Ausgleichung für m und n nach vermittelnden Beobachtungen möglich. Sie liefert für den Niveaufächenschnitt die Gleichung

$$h_{(\text{cm})} = 2,71 \cdot \cos(0,00103 \cdot b_{(\text{m})}), \quad (10. 16)$$

wobei $(n \cdot b)$ als Winkel im Bogenmaß eingeführt ist, oder

$$h_{(\text{cm})} = 2,71 \cdot \cos(0,0590 \cdot b_{(\text{m})}) \quad (10. 17)$$

für $(n \cdot b)$ im Gradmaß.

Die aus der Gleichung hervorgehenden wahrscheinlichsten Verbesserungen der Lotabweichungen betragen

in HH	+ 0,23''
in PP 141	– 0,07''
in J 49	+ 0,40''.

Die Größenordnung dieser Werte entspricht der des mittleren Fehlers der Lotabweichungen. Die Anschmiegung der berechneten Cosinuslinie an das tatsächliche Profil der Niveauflächen kann daher praktisch als vollkommen bezeichnet werden.

Die Gesamtsenkung des Geoids im Isartal gegenüber dem Ellipsoid beträgt nach (10. 16)

$$2 m = 5,4 \text{ cm.}$$

Der Tiefstpunkt liegt nach (10. 2) bei $b = \frac{\pi}{n}$, also in einer Entfernung von

$$b = \frac{\pi}{0,00103} = 3052 \text{ m}$$

vom Ausgangspunkt Staffel. Der Punkt J 49 liegt demnach noch 126 m vor und 0,3 mm über diesem Tiefstpunkt.

Die Steigung der Wendetangente an die Sinuslinie beträgt gegenüber dem schief gestellten Ellipsoid $5,8''$.

Das aus den astronomischen Messungen hervorgehende Profil der Niveaulächen zwischen J 49 und Staffel ist in Figur 23 dargestellt. Als Bezugsfläche dient dabei das um die meridionale Lotabweichung in Staffel ($\xi = 10,3''$) schräggestellte Ellipsoid. Sein Normalchnitt in Profilrichtung ist als Gerade gezeichnet.

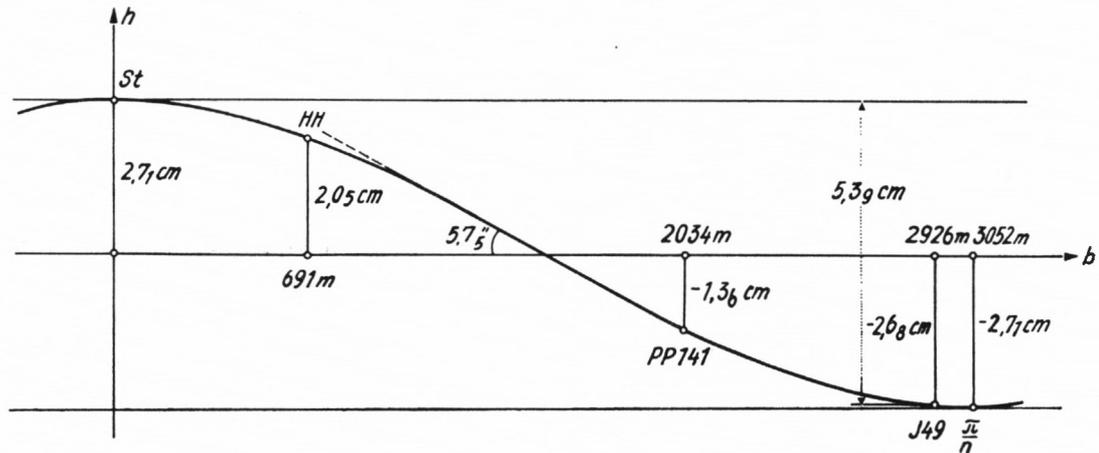


Fig. 23

Ist somit die Realität eines stark angenähert cosinusförmigen Verlaufs der Niveaulächen im Isartal erwiesen, so bleibt noch zu untersuchen, wieweit sich ihm das trigonometrische Übertragungsprofil anschmiegen konnte. Zunächst ist festzustellen, daß die trigonometrisch gemessene Senkung von 5,6 cm um 0,2 cm größer ist als die astronomisch bestimmte. Diese Differenz ist nicht so sehr durch die Ungenauigkeit der für m und n benutzten Näherungswerte als durch die Ungenauigkeit der trigonometrischen Höhenmessung selbst verursacht, wie folgende Betrachtung zeigt:

Berechnet man aus den für das astronomisch bestimmte Profil geltenden Eingangsgrößen

$$b_1 = 691 \text{ m}$$

$$b_2 = 2034 \text{ m}$$

$$B = 3052 \text{ m}$$

$$m = 2,71 \text{ m}$$

$$n = 0,00103$$

$$nb_1 = 0,711 = 40,8^\circ \quad \sin(nb_1) = 0,653$$

$$nb_2 = 2,095 = 120,0^\circ \quad \sin(nb_2) = 0,866$$

nach (10. 10) den Wert für h_T , der sich als Senkungsbetrag der trigonometrischen Höhenmessung ergeben sollte, so erhält man

$$h_T = 1,355 (2,095 \cdot 0,653 + 2,431 \cdot 0,366) = 4,70 \text{ cm,}$$

also einen um 0,15 cm kleineren Betrag als den aus der trigonometrischen Höhenmessung folgenden. Der Korrektionsbetrag $\Delta h = 2m - h_T$ ergibt sich für das astronomische Profil zu 0,7 cm, während er aus der trigonometrischen Höhenmessung zu 0,8 cm bestimmt wurde. Nur 0,1 cm der Differenz zwischen dem astronomischen und dem trigonometrischen Wert der Geoidsenkung geht daher zu Lasten der ungenauen Ausgangswerte von h_T und b . Der Rest ist durch die Ungenauigkeit der trigonometrischen Höhenmessung verursacht. Dieser Rest ist im vorliegenden Fall mit 0,15 cm sehr klein. Bringt man für ihn den mittleren Fehler der trigonometrischen Höhenmessung im Profil mit $\pm 1,0$ cm in Ansatz, so erkennt man, daß auch die Geoidsenkung mit einer Genauigkeit von etwa $\pm 1,0$ cm aus trigonometrischen Höhenmessungen bestimmt werden kann.

5. ELLIPSOIDISCHE HÖHENUNTERSCHIEDE UND REFRAKTION IM ÜBERTRAGUNGSPROFIL

Mit Hilfe der gemessenen meridionalen Lotabweichungen können nun auch die Höhenunterschiede im Übertragungsprofil auf das Ellipsoid reduziert werden, wie dies im 7. Kapitel des II. Abschnitts für das Höhennetz geschehen ist.

Die Berechnung der ellipsoidischen Höhenunterschiede, die nach derselben Methode wie im Höhennetz durchgeführt ist, führt auf folgende Ergebnisse:

Visur	1951 m	1952 m	1952-1951 cm
J 49-PP 141	+ 104,224	+ 104,233	+ 0,9
PP 141-HH	+ 451,566	+ 451,559	- 0,7
HH-St	+ 190,902	+ 190,895	- 0,7
J 49-St	+ 746,694	+ 746,696	+ 0,2
J 49-StJ-N	+ 950,714	+ 950,714	0
PP 141-StJ-N	+ 846,496	—	—
HH-StJ-N	+ 394,928	—	—
St-StJ-N	+ 204,032	+ 204,031	- 0,1

Da die ellipsoidischen Höhenunterschiede von den Einflüssen der Lotabweichungen und der Undulationen der Niveaulächen befreit sind, können sie unmittelbar zu Höhenpolygonen zusammengeschlossen werden. Die Schlußfehler ergeben nochmals ein wich-

tiges Kriterium für die Genauigkeit der Höhenwinkelmessungen und der Lotabweichungsbestimmung.

Bei 4 unabhängigen Höhenunterschieden zwischen den 5 Punkten des Übertragungsprofils sind zwischen den 8 gemessenen Höhenunterschieden 4 unabhängige Polygon-schlüsse möglich, die aus den 4 Höhendreiecken, die an den Punkt Stuhlbachjoch-Nord anschließen, gebildet sind. Die Schlußfehler w betragen:

Dreieck	w cm
StJ-N-J 49-PP 141	+ 0,6
StJ-N-PP 141-HH	- 0,2
StJ-N-HH-St	+ 0,6
StJ-N-J 49-St	+ 1,2

Die Größenordnung der Widersprüche zeigt, daß die Höhenunterschiede im Übertragungsprofil noch genauer ermittelt werden konnten als im Höhennetz. Dies ist in Anbetracht der bedeutend kürzeren Visurlängen auch nicht verwunderlich. Eine Ausgleichung der ellipsoidischen Höhenunterschiede würde Verbesserungen von wenigen mm ergeben; sie lohnt sich daher nicht.

Wiederum ist damit erwiesen, daß die Höhe vom Talpunkt ins Gipfelnetz mit mindestens cm-Genauigkeit übertragen und die Geoiddepression im Isartal mit derselben Genauigkeit bestimmt werden konnte. Die trigonometrische Höhenmessung ist also als sicheres Mittel zur Untersuchung der Geoidgestalt zu betrachten.

Schließlich können aus den um die Lotabweichungen reduzierten gegenseitigen Höhenwinkeln noch die in den einzelnen Visuren des Übertragungsprofils wirksamen Refraktionskoeffizienten berechnet werden. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle aufgeführt:

Visur	k		Δk
	1951	1952	1951-1952
J 49-PP 141	0,1882	0,1357	+ 0,0525
PP 141-HH	0,1786	0,1266	+ 0,0520
HH-St	0,1376	0,1001	+ 0,0375
J 49-St	0,1794	0,1226	+ 0,0568
J 49-StJ-N	0,1950	0,1646	+ 0,0304
PP 141-Stj-N	0,1752	—	—
HH-StJ-N	0,1946	—	—
St-StJ-N	0,1980	0,1620	+ 0,0360
Mittel ohne HH-St	0,1870	0,1423	+ 0,0447

Die Visur Hirschhörndl-Staffel weist in beiden Jahren eine Anomalie gegenüber den übrigen Visuren des Übertragungsprofils auf. Als Ursache hierfür kommt wohl nur die relativ größere Bodennähe dieser Visur in Betracht. Die übrigen Visuren zeigen eine bemerkenswert nahe Übereinstimmung der wirksamen Refraktionskoeffizienten, die auf Grund der Verschiedenartigkeit in Länge und Höhenunterschied nicht erwartet werden konnte.

Wenn auch die Refraktionskoeffizienten von 1951 im Übertragungsprofil nicht den für das Höhennetz abgeleiteten Wert von 0,20 erreichen, so liegen sie doch bedeutend höher als der sonst als wahrscheinlich angenommene Wert von 0,13. Dies ist eine neue Stütze für das schon auf Seite 63 erwähnte Vorhandensein einer ungewöhnlich starken Refraktion im und über dem Isartal im August 1951.

Während der Messungen vom 12.–14. Juni 1952 war die Refraktion geringer; ihr Mittelwert im Übertragungsprofil überschreitet aber immer noch den Gebrauchswert von 0,13.

Die berechneten Refraktionswerte mit den meteorologischen Daten beider Meßzeiträume in Beziehung zu setzen, war leider nicht möglich. Die bei den Messungen selbst angestellten Beobachtungen von Temperatur und Luftdruck sind dafür zu ungenau. Die gegenseitigen Höhenwinkelmessungen des Jahres 1951 waren zudem nicht gleichzeitig, so daß keine direkten Anhaltspunkte für die Ermittlung des vertikalen Temperatur- und Druckgradienten vorliegen.

Wenn auch die Arbeiten im Isartal gezeigt haben, daß bei zweckmäßiger Anlage der Messungen die Refraktion keinen, die cm-Grenze überschreitenden Fehlereinfluß auf gegenseitige Höhenunterschiede ausübt, so bleibt die Untersuchung der Refraktion selbst doch noch ein wichtiges und interessantes Problem, zu dessen Lösung mehr Beobachtungsmaterial mit geeigneteren Mitteln beigebracht werden muß.

LITERATURVERZEICHNIS

- Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz. – Das astronomische Nivellement im Meridian des St. Gotthard. Band XIX, I. Teil: Die beobachteten Lotabweichungen. Bern 1932. – Band XX, II. Teil: Die berechneten Geoiderhebungen und der Verlauf des Geoidschnittes. Bern 1939
- BAESCHLIN, C. F.: Lehrbuch der Geodäsie. Zürich 1948
- BAUERNFEIND, C.: Ergebnisse der terrestrischen Refraktion. Abh. der kgl. Bayer. Akad. d. Wiss., II. Kl., XV. Bd., I. Abt., München 1883
- BROCKS, K.: Vertikaler Temperaturgradient und terrestrische Refraktion, besonders im Hochgebirge. Veröff. des Meteor. Inst. der Univ. Berlin. Bd. III Heft 4, 1939
- Eine Methode zur Beobachtung des vertikalen Dichte- und Temperaturgefälles in den bodenfernen Atmosphärenschichten. Meteor. Zeitschr. 1940/I, S. 19–26
- Lokale Unterschiede und zeitliche Änderungen der Dichteschichtung in der Gebirgsatmosphäre. Meteor. Zeitschr. 1940/II, S. 62–73
- Die terrestrische Refraktion, ein Grenzgebiet der Meteorologie und Geodäsie. Annalen der Meteorologie 1948, S. 329–36
- Meteorologische Hilfsmittel für geodätische Höhenmessungen. Zeitschr. f. Verm.-Wesen 1950, Heft 3, 4 und 5
- ENGI, P.: Zur trigonometrischen Höhenmessung im Gebirge. Schweiz. Zeitschr. f. Verm.-Wesen 1951, Nr. 10
- FINSTERWALDER, R.: Die Haupttriangulation am Nanga Parbat. Allg. Verm.-Nachr. 1935, S. 94 ff.
- Die Bestimmungen von Lotabweichungen aus der trigonometrischen Höhenmessung. Zeitschr. f. Verm.-Wesen 1937, Heft 13, 14 und 16
- Die geodätischen, gletscherkundlichen und geographischen Ergebnisse der Deutschen Himalaya-Expedition 1934 zum Nanga-Parbat. Deutsche Forschung, Neue Folge Bd. 2, Berlin 1938
- und GÄNGER, H.: Die trigonometrische Höhenmessung im Gebirge. Bericht über eine genaue Höhen-
triangulation in den Chiemgauer Alpen. Nachr. aus dem Reichsverm.-Dienst 1941, Nr. 1
- Bestimmung der Refraktion durch meteorologische Messung. Zeitschr. f. Verm.-Wesen 1949, S. 111–13
- Über Art und Genauigkeit von trigonometrisch bestimmten Höhen. Zeitschr. f. Verm.-Wesen 1951, S. 129–37
- Entwicklung, Stand und Möglichkeiten der trigonometrischen Höhenmessung. Sitz.Ber. der Bayer.-Akad. d. Wiss. 1953
- GALLE, A.: Das Geoid im Harz. Veröff. d. kgl. preuß. Institutes, Neue Folge Nr. 61, Berlin 1914
- HELMERT, F. R.: Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie. 2 Bände, Leipzig 1880–84
- Die Schwerkraft im Hochgebirge. Veröff. des kgl. preuß. Geod. Institutes, Berlin 1890
- Zur Bestimmung kleiner Flächenstücke des Geoids aus Lotabweichungen mit Rücksicht auf Lotkrümmung. Sitz.-Ber. der kgl. preuß. Akad. d. Wiss. Nr. 42, Berlin 1900
- HUNZIKER, E.: Geoidprofile in der Schweiz. Schweiz. Zeitschr. für Verm.-Wesen 1942, Nr. 1
- Geoiderhebungen in der Schweiz. Schweiz. Zeitschr. für Verm.-Wesen 1951, Nr. 10
- JORDAN-EGGERT: Handbuch der Vermessungskunde. 5 Bände, 9. Aufl. Stuttgart 1933

- KNEISSL, M.: Begriff und Bedeutung der Lotabweichungen in der Geodäsie. Allg. Verm.-Nachr. 1951, Heft 4
- KOBOLD, F.: Die Bestimmung der Lotabweichungskomponenten im Meridian des St. Gotthard aus Höhenwinkelmessungen. Annexe au Procès-Verbal de la 96. Séance de la Commission Géodésique Suisse, Neuchâtel 1951
- KOPPE, C.: Trigonometrische Höhenmessung zur Triangulation des Gotthardtunnels. Zeitschr. f. Verm.-Wesen 1876, S. 129-45
- KUKKAMÄKI, T. J.: Über die nivellitische Refraktion. Veröff. des Finnischen Geod. Inst. Nr. 25, Helsinki 1938
- Einwirkung der bodennahen Refraktion auf das Präzisionsnivellement. Verh. der 9. Tagung der Balt. Geod. Komm., Helsinki 1937
- KUNY, W.: Der Sylvensteinspeicher und seine Vermessungsaufgaben. Zeitschr. f. Verm.-Wesen 1951, S. 330-36
- LICHTE, H.: Die trigonometrische Höhenmessung als Hilfsmittel der Landesvermessung. Geod. Inst. der TH Hannover 1948
- NIETHAMMER, TH.: Nivellement und Schwere als Mittel zur Berechnung wahrer Meereshöhen. Veröff. der Schweiz. Geod. Komm. 1932
- REICHENEDER, K.: Eine Formel zur trigonometrischen Höhenmessung bei großen Höhenunterschieden und Zielweiten. Allg. Verm.-Nachr. 1937, S. 181 ff.