

**Abhandlungen  
der Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse**

Neue Folge. Heft 74.

1955

---

**Statistische Beschreibung  
der dielektrischen Turbulenz  
in der Troposphäre**

(Erster Teil einer Theorie der Streuung elektrischer Wellen  
in turbulenter Atmosphäre)

von

**Gottfried Eckart**

in Saarbrücken

Mit 2 Abbildungen

Vorgelegt von Herrn Winfried O. Schumann

am 1. Juli 1955

---

München 1955

**Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**

in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München



## INHALT

1. Definition der „dielektrischen Turbulenz“ . . . . .	5
2. Die mathematische Beschreibung des Phänomens . . . . .	5
a) in Form einer Fourierreihe in Raum und Zeit . . . . .	5
b) in Form eines Fourierintegrals . . . . .	7
3. Die Variation der DK. der Atmosphäre als Zufallsprozeß . . . . .	8
a) Allgemein . . . . .	8
b) Vorbemerkungen über den stationär-homogenen und isotropen Prozeß . . . . .	8
4. Die Zusammenhänge zwischen den Häufigkeitsfunktionen des Prozesses und denen der Fourierkoeffizienten . . . . .	9
a) Die Häufigkeitsfunktion erster Ordnung . . . . .	9
b) Die höheren Häufigkeitsfunktionen . . . . .	10
c) Die Umkehrung . . . . .	11
d) Eine Bemerkung über den Gauß-Laplaceschen Charakter der Verteilungen . . . . .	12
5. Die Bildung der Momente und eine Lösung des Momentenproblems mittels Mellin- (zweiseitiger Laplace-) Transformation . . . . .	13
a) Die Bildung der Momente . . . . .	13
b) Die Ermittlung der Häufigkeitsfunktion aus den Momenten mittels Mellin- (zweiseitiger Laplace-) Transformation . . . . .	15
1. Allgemeine Bemerkungen . . . . .	15
2. Exkurs über die Mellintransformation . . . . .	16
3. Die eigentliche Ermittlung der Häufigkeitsfunktion. . . . .	18
6. Das homogene stationäre Raum-Zeit-Intervall . . . . .	21
a) Definition und allgemeine Sätze . . . . .	21
b) Die Abgrenzung des homogen-stationären Intervalls und die Ermittlung der zugehörigen Entwicklungskoeffizienten . . . . .	23
c) Eigenschaften der Koeffizienten . . . . .	25
d) Die isotrope Turbulenz . . . . .	27
7. Kriterien für das Auftreten eines homogen-stationären Intervalls und damit zusammenhängende Fragen zu 6d . . . . .	30
8. Schrifttum . . . . .	34

## 1. DEFINITION DER „DIELEKTRISCHEN TURBULENZ“

Unter dem (von Herrn Frager geprägten) Wort „dielektrische Turbulenz“ wollen wir in der vorliegenden Arbeit diejenigen Störungen  $\Delta\varepsilon$  der Dielektrizitätskonstante der unteren Atmosphäre verstehen, die turbulente Erscheinungen als Ursache haben und weiterhin sich als ein Phänomen erweisen, das man zweckmäßig statistisch erfaßt. Die hier beschriebenen Erscheinungen brauchen also nicht nur von turbulenten Strömungserscheinungen hervorgerufen zu sein, sie können z. B. auch von mehr oder weniger gleichmäßiger Sonneneinstrahlung herrühren, die verschiedene räumliche Bereiche verschieden stark erwärmt (was seinerseits Strömungserscheinungen auslösen muß). In Wüstengebieten häufig auftretende Sandstürme fallen in diesen Rahmen. In Windkanälen werden turbulente Erscheinungen erzeugt, indem man Gitter in den Luftstrom stellt. Diese mit Dichteschwankungen verbundenen Durchwirbelungen erzeugen natürlich Schwankungen der DK.

## 2. DIE MATHEMATISCHE BESCHREIBUNG DES PHÄNOMENS

Zunächst stellt ein einzelner solcher Prozeß in einem endlichen Raumzeitbereich betrachtet ein Phänomen dar, das in jedem Fall mittels einer 4-dimensionalen Fourierreihe beschrieben werden kann, oder auch mittels eines Fourierschen Integrals. Wir können aus physikalisch evidenten Gründen für diese Fourierreihen alle diejenigen mathematischen Voraussetzungen als gegeben erachten, die z. B. die Vertauschung von Summierung und Integration ermöglichen, d. h. wir können sie als „stückweise glatt“ annehmen.

Beobachten wir ein solches Phänomen viele Male, z. B. in einem Windkanal oder indem wir sehr viele Sandstürme studieren, so kommt ihm ein statistischer Charakter zu. Wir können z. B. in einer Reihe von festen Punkten zu bestimmten Zeiten vom Beginn des Vorgangs angenommen  $\Delta\varepsilon(x, y, z, t)$  messen und für jede der untersuchten „Realisationen“ als Fourierreihe darstellen. Damit können wir Häufigkeitsfunktionen für  $\Delta\varepsilon$  in Raum und Zeit angeben, andererseits Häufigkeitsfunktionen für die Fourierkoeffizienten.

### a) Die mathematische Beschreibung eines Phänomens als Fourierreihe in Raum und Zeit

Wir denken uns aus der gesamten Atmosphäre und der gesamten Zeit ein 4-dimensionales Intervall herausgegriffen, in dem wir den Prozeß studieren. Für jede Realisation wollen wir uns eine Fourierreihe angeschrieben denken. Wir wollen es folgendermaßen begrenzen:

$$(1) \quad \begin{aligned} -X &\leq x \leq +X \\ -Y &\leq y \leq +Y \\ -Z &\leq z \leq +Z \\ -T &\leq t \leq +T \end{aligned}$$

Dann ist zu jeder festen Zeit ( $t$ ) das Phänomen eine Funktion des Ortes ( $x, y, z$ ) und an jedem Ort ( $x, y, z$ ) eine Funktion der Zeit ( $t$ ).

Fourierreihen kann man reell und komplex schreiben; wir werden je nach Bedarf beide Schreibweisen verwenden und sie im folgenden angeben.

Die komplexe Schreibweise lautet:

$$(2) \quad \Delta \varepsilon(x, y, z, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{klmn} \exp \left[ j \left( \frac{k\pi t}{T} + \frac{l\pi x}{X} + \frac{m\pi y}{Y} + \frac{n\pi z}{Z} \right) \right]$$

Wir können dies nach der obigen Bemerkung so auffassen, daß dies eine Funktion der Zeit ist, deren Entwicklungskoeffizienten vom Ort abhängen, z. B.

$$(3) \quad \Delta \varepsilon(x, y, z, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k(x, y, z) \exp \left[ j \frac{k\pi t}{T} \right]$$

wo dann

$$(4) \quad A_k(x, y, z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{klmn} \exp \left[ j \left( \frac{l\pi x}{X} + \frac{m\pi y}{Y} + \frac{n\pi z}{Z} \right) \right]$$

ist.

Da die Größe  $\Delta \varepsilon$  stets reell ist, unterliegen die Koeffizienten  $a_{klmn}$  gewissen Einschränkungen; es muß immer zu jedem Glied der Entwicklung das konjugierte komplexe vorhanden sein, d. h. wenn  $a^*$  den konjugierten Wert von  $a$  bedeutet, muß sein:

$$(5) \quad a_{klmn} = a_{-k-l-m-n}^*$$

für irgendeine Kombination von positiven und negativen Werten  $k l m n$ .

Daneben spielt die reelle Schreibweise eine Rolle. Sie hat die Form:

$$(6) \quad \Delta \varepsilon(x, y, z, t) = \sum_{k=+0}^{+\infty} \sum_{l=+0}^{+\infty} \sum_{m=+0}^{+\infty} \sum_{n=+0}^{+\infty} C_{klmn} \begin{matrix} s s s s \\ c c c c \end{matrix} \sin \frac{k\pi t}{T} \sin \frac{l\pi x}{X} \sin \frac{m\pi y}{Y} \sin \frac{n\pi z}{Z}$$

Diese Schreibweise ist folgendermaßen zu verstehen:

Für irgendeine Kombination  $k l m n$  hat man Glieder mit jeder möglichen Kombination von Sinus und Cosinus über die 4 Veränderlichen, und zu jeder solchen Kombination gehört ein Koeffizient, dessen untere Indices die  $k l m n$  sind, während die oberen die Kombination des Sinus und Cosinus erkennen lassen, z. B.

$$(7) \quad C_{klmn}^{s c c s} \frac{\sin k\pi t}{T} \frac{\cos l\pi x}{X} \frac{\cos m\pi y}{Y} \frac{\sin n\pi z}{Z}$$

Für eine Kombination  $k l m n$  haben wir 16 Koeffizienten  $C$  und 16 Koeffizienten  $a$ , die sich eindeutig zugeordnet sind.

Im eindimensionalen Falle wollen wir kurz die Umrechnung angeben. Für ein  $k$  haben wir:

$$(8) \quad a_k^* \cdot e^{-j \frac{k\pi t}{T}} + a_k \cdot e^{+j \frac{k\pi t}{T}} = C_k^c \cos \frac{\pi k t}{T} + C_k^s \sin \frac{\pi k t}{T}$$

Dann zeigt eine elementare Rechnung, daß

$$(9) \quad \begin{aligned} C_k^c &= 2R(a_k) \\ C_k^s &= -2J(a_k) \end{aligned}$$

Die Ausrechnung des 4-dimensionalen Falles sei dem Leser überlassen. Im Falle der statistischen Betrachtung sind dann alle diese Koeffizienten Zufallsvariable.

#### b) Die Beschreibung in Form eines Fourierintegrals

Wir können anstatt der Fourierschen Reihen den gesamten Vorgang als Fouriersches Integral beschreiben, wobei dann bei der statistischen Betrachtung die dargestellte Funktion und ihre Fouriertransformierte Zufallsfunktionen sind.

Für jede Realisation kann man schreiben:

$$f(x, y, z, t) =$$

$$(10) \quad \frac{1}{(V 2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k, l, m, n) \exp [j(kt + lx + my + nz)] dk dl dm dn$$

wo

$$\varphi(k, l, m, n) =$$

$$(11) \quad \frac{1}{(V 2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z, t) \exp [-j(kt + lx + my + nz)] dt dx dy dz$$

wobei in allen physikalisch sinnvollen Fällen  $\varphi(k, l, m, n)$  mit kontinuierlichen Werten seiner Veränderlichen eindeutig durch  $a_{k, l, m, n}$  oder  $C_{k, l, m, n}$  bestimmt ist.

### 3. DIE VARIATION DER DIELEKTRIZITÄTSKONSTANTE IN RAUM UND ZEIT ALS ZUFALLSPROZESS

#### a) Allgemein

Wenn wir ein solches Phänomen unter möglichst gleichmäßigen Anfangsbedingungen sehr viele Male beobachten, so werden wir feststellen, daß  $\Delta\varepsilon$  als Funktion der Zeit, genommen von einem Anfangspunkt an, sich sehr verschieden verhalten wird; wir werden aber Häufigkeitsfunktionen angeben können z. B. für  $\Delta\varepsilon$  an einer Stelle im Windkanal zu bestimmten Zeiten nach dem Einschaltvorgang.

Im Falle eines Sandsturmes wird man für die Beobachtung anzustreben haben,  $\Delta\varepsilon$  an möglichst vielen Stellen innerhalb desselben laufend zu registrieren. Man wird dann verschiedene Sandstürme so betrachten, daß man ausgehend von der Hauptzugrichtung ein räumliches Koordinatensystem orientiert, in dem abhängig von der Zeit der Sturm wandert, und diese Koordinatensysteme aufeinanderlegt.

Im Falle des Windkanals werden die Anfangsbedingungen viel gleichmäßiger sein als im Falle des Sandsturmes, bei dem dann die Streuung der Werte um die Mittelwerte viel größer sein wird. Man kann ferner z. B. die Variation der DK der Luft auf einer sonnenbestrahlten Hochfläche viele Male studieren und Verteilungsfunktionen ermitteln. Aus all diesen und anderen Möglichkeiten abstrahieren wir einen 4-dimensionalen stochastischen Prozeß, den wir in der oben angegebenen Weise darstellen. Es wird ein Teil unserer Aufgabe darin bestehen, Zusammenhänge zwischen den Häufigkeitsfunktionen im Prozeß selbst und denjenigen der Fouriertransformierten herzustellen. Wir werden weiter eine Lösung des Momentenproblems mittels Mellin- und zweiseitiger L-Transformation angeben.

#### b) Vorbemerkungen über den stationär-homogenen isotropen Prozeß

In einem solchen Sandsturm und noch viel mehr in einem Windkanal wird ein Teilintervall in den 4 Dimensionen existieren, wo wir den Vorgang als stationär-homogen und isotrop ansehen können. Dort können dann auf Grund ergodischer Sätze die über die vielen Realisationen genommenen Mittel durch raum-zeitliche Mittel ersetzt werden. Wir werden uns mit Kriterien zu befassen haben dafür, daß diese Bedingungen erfüllt sind. Dies soll das engere Programm der vorliegenden Untersuchung sein.

4. DER ZUSAMMENHANG ZWISCHEN  
DEN HÄUFIGKEITSFUNKTIONEN DES PROZESSES UND  
DENJENIGEN DER FOURIERKOEFFIZIENTEN

Es handelt sich jetzt darum, die Zusammenhänge für die Häufigkeitsfunktionen der Koeffizienten der Fourierentwicklung und diejenigen des Prozesses zu ermitteln.

a) Die Häufigkeitsfunktion erster Ordnung

Wir gehen hier aus von der reell geschriebenen Fourierreihe und nehmen die Häufigkeitsfunktionen der Fourierkoeffizienten  $C$  als gegeben an. Wir denken uns die Reihe in 4 Dimensionen in einer geeigneten Reihenfolge angeschrieben, etwa so, daß man immer alle Glieder nimmt, bei denen ein fester Wert als Index nicht überschritten wird;  
z. B.

$$(12) \quad \begin{array}{l} C_{0000}^{cccc} + \text{alle Glieder mit sämtlichen Indices} \leq 1 \\ + \text{restliche Glieder mit allen Indices} \leq 2 \\ + \text{restliche Glieder mit allen Indices} \leq 3 \end{array}$$

usw.

Innerhalb einer Indexgruppe  $k, l, m, n$  sollen dann wieder die Glieder mit  $C_{klmn}^{ssss}$  in einer beliebig vorgegebenen Reihenfolge angeordnet sein. Den  $p$ -ten Koeffizienten mit der  $p$ -ten Kombination der 4 Veränderlichen schreiben wir als  $C_p f_p(x, y, z, t)$ , also bekommt unsere Reihe dann die Form:

$$(13) \quad \Delta \varepsilon(x, y, z, t) = \sum_{p=0}^{\infty} C_p f_p(x, y, z, t)$$

Von den  $f_p$  können auch welche herausfallen, wenn etwa der Koeffizient verschwindet. Nun seien die i. a. bedingten Häufigkeitsfunktionen der Koeffizienten  $C_p$  gegeben:

$$(14) \quad \begin{array}{l} \tau(C_0) dC_0 \text{ soll die Wahrscheinlichkeit bedeuten, daß } C_0 \text{ zwischen } C_0 \text{ und } C_0 \pm dC_0/2 \\ \text{liegt. } \tau_1(C_1/C_0) dC_1 \text{ die Wahrscheinlichkeit, daß } C_1 \text{ zwischen } C_1 \text{ und } C_1 \pm dC_1/2 \\ \text{liegt, wenn } C_0 \text{ bei } C_0 \text{ liegt; analog ist definiert} \end{array}$$

$$(15) \quad \tau_2(C_2/C_0, C_1) dC_2 \dots \dots \quad \tau_p(C_p/C_0, C_1 \dots C_{p-1}) dC_p \dots$$

Dann ist

$$(16) \quad \tau_p dC_0 \dots dC_p = \tau_0(C_0) \tau_1(C_1/C_0) \tau_2(C_2/C_0 C_1) \dots \tau_p(C_p/C_0 C_1 \dots C_{p-1}) dC_0 \dots dC_p$$

die verbundene Wahrscheinlichkeit dafür, daß  $C_0, C_1 \dots C_p$  bei den genannten Werten liegen. Wir fassen nun  $N+1$  Glieder der Reihe (13) zusammen und fragen nach der Häufigkeitsverteilung dieser Summe. Wir können die von Chandrasekhar [12] im Anschluß an Markoff angegebene Methode der Berechnung der Häufigkeitsfunktion einer Summe verwenden, wobei die zu summierenden Glieder die Variablen  $C_p$  sind, die mit  $f_p$  multipliziert sind. Bedeutet nun  $W_N(\Delta\varepsilon)_{x,y,z,t}$  die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei gegebenen  $x, y, z, t$  die Summe von  $N$  Gliedern in  $-\frac{1}{2} \cdot d(\Delta\varepsilon) + \Delta\varepsilon < \Delta\varepsilon < \Delta\varepsilon + \frac{1}{2} \cdot d(\Delta\varepsilon)$  liegt, so wird nach der in [12] dargelegten Theorie unmittelbar:

$$(17) \quad W_N(\Delta\varepsilon)_{x,y,z,t} d(\Delta\varepsilon) = d(\Delta\varepsilon) / 2\pi \int_{\varrho_2 = -\infty}^{+\infty} \exp[-j(\Delta\varepsilon)\varrho] A_N(\varrho) d\varrho$$

wo

$$(18) \quad A_N(\varrho) = \int_{C_0 = -\infty}^{+\infty} \int_{C_1 = -\infty}^{+\infty} \dots \int_{C_N = -\infty}^{+\infty} \prod_{p=0}^{N-1} \tau_p(C_p/C_0 \dots C_{p-1}) \exp\left[j\varrho \sum_{p=0}^{N-1} C_p f_p(x, y, z, t)\right] dC_0 dC_1 \dots dC_N$$

wobei nach (16)

$$(19) \quad \prod_{p=0}^{N-1} \tau_p = \tau(C_0 \dots C_N)$$

Hier haben wir nun die erste Häufigkeitsfunktion der Summe der Fourierreihe mittels der verbundenen Häufigkeitsfunktion der Koeffizienten dargestellt.

## b) Die höheren Häufigkeitsfunktionen

Jetzt führen wir die höheren Häufigkeitsfunktionen ein. Wir wollen die Wahrscheinlichkeit angeben, daß an  $n$  verschiedenen Raum-Zeit-Stellen  $(x_1, y_1, z_1, t_1)$   $(x_2, y_2, z_2, t_2)$   $\dots$   $(x_n, y, z_n, t_n)$   $\Delta\varepsilon$  bei den Werten  $\Delta\varepsilon_1 \Delta\varepsilon_2 \dots \Delta\varepsilon_n$  liegt. Diese Wahrscheinlichkeit wollen wir mit  ${}^n W_N(\Delta\varepsilon)$  bezeichnen; wir bekommen direkt aus der Chandrasekharschen Arbeit:

$$(20) \quad {}^n W_N(\Delta\varepsilon) = \frac{d(\Delta\varepsilon_0) d(\Delta\varepsilon_1) d(\Delta\varepsilon_2) \dots d(\Delta\varepsilon_n)}{2^n \pi^n} \times \int_{\varrho_0 = -\infty}^{+\infty} \int_{\varrho_n = -\infty}^{+\infty} \exp\left[-j \sum_{k=0}^n (\Delta\varepsilon)_k \varrho_k\right] {}^n A_N(\varrho_0 \dots \varrho_n) d\varrho_1 d\varrho_2 \dots d\varrho_n$$

wo

$$(21) \quad {}^n A_N(\varrho_0 \dots \varrho_n) = \int_{C_0=-\infty}^{+\infty} \dots \int_{C_N=-\infty}^{+\infty} \prod_{p=0}^N \tau_p(C_p/C_0 \dots C_{p-1}) \cdot \exp \left[ j \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^N \varrho_k C_p f_p(x_k, y_k, z_k, t_k) \right] dC_0 \dots dC_N$$

Wir haben hier eine  $(N+1)$ te Häufigkeitsfunktion (der Index läuft von 0 bis  $N$ ) von  $\Delta \varepsilon$  mittels der Häufigkeitsfunktionen der Koeffizienten  $C$  dargestellt. Diese Darstellung in Form der Fourierintegrale legt die Umkehrung nahe.

### c) Die Umkehrung

Um die Häufigkeitsfunktionen der Koeffizienten aus denen des Prozesses zu erhalten, drehen wir zuerst (20) um und erhalten  $A_N$ ; dann drehen wir (21) um und erhalten die Häufigkeitsfunktion der Koeffizienten. Damit dies eindeutig möglich ist, muß ersichtlich  $n = N$  sein. Unter Voraussetzung von für die Fouriertransformation und ihre Umkehrung hinreichenden Bedingungen erhalten wir:

$$(22) \quad {}^N A_N(\varrho_0 \dots \varrho_N) = \int_{\Delta \varepsilon_0=-\infty}^{+\infty} \dots \int_{\Delta \varepsilon_N=-\infty}^{+\infty} {}^N W_N(\Delta \varepsilon) \exp \left[ j \sum_{k=0}^N (\Delta \varepsilon_k) \varrho_k \right] d(\Delta \varepsilon_0) d(\Delta \varepsilon_1) \dots d(\Delta \varepsilon_N)$$

Schreiben wir in (21) den Exponenten in folgender Form:

$$(23) \quad \sum_{k=0}^N \sum_{p=0}^N \varrho_k C_p f_p(x_k, y_k, z_k, t_k) = C_0 \sum_{k=0}^N \varrho_k f_0(x_k, y_k, z_k, t_k) + C_1 \sum_{k=0}^N \varrho_k f_1(x_k, y_k, z_k, t_k) + \dots + C_N \sum_{k=0}^N \varrho_k f_N(x_k, y_k, z_k, t_k)$$

so sehen wir, daß  ${}^N A_N$  sich in der Form schreiben läßt:

$$(24) \quad {}^N A_N(\varrho_0 \dots \varrho_N) = {}^N A_N \left( \sum_{k=0}^N \varrho_k f_0(x_k, y_k, z_k, t_k); \sum_{k=0}^N \varrho_k f_1(x_k, y_k, z_k, t_k); \dots \sum_{k=0}^N \varrho_k f_N(x_k, y_k, z_k, t_k) \right)$$

Wir setzen nun

$$(25) \quad \sum_{k=0}^N \varrho_k f_i(x_k, y_k, z_k, t_k) = \sigma_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N)$$

2\*

und erkennen unter Beachtung von (19)

$$(26) \quad \tau(C_0 \dots C_N) = \frac{1}{(2\pi)^{N+1}} \int_{\sigma_0=-\infty}^{+\infty} \dots \int_{\sigma_N=-\infty}^{+\infty} A_N(\sigma_0 \dots \sigma_N) \exp[-j[C_0\sigma_0 + C_1\sigma_1 + \dots + C_N\sigma_N]] d\sigma_0 \dots d\sigma_N$$

$$\sum_{i=0}^N c_i \sigma_i$$

Aus  $\tau(C_0 \dots C_N)$  können wir aber leicht  $\tau(C_0 \dots C_{N-1})$ ,  $\tau_0(C_0 \dots C_{N-2}) \dots \tau(C_0)$  ableiten, indem wir über die Veränderlichen, die wir auszuschalten wünschen, von  $-\infty$  bis  $\infty$  integrieren.

Diese Integration muß möglich sein, da die  $\tau$  Häufigkeitsfunktionen sind. Aus den  $\tau$  können wir uns dann mit Hilfe des Satzes über die verbundene Wahrscheinlichkeit (Gl. 19) auch die bedingten Häufigkeitsfunktionen  $\tau_p$  verschaffen.

#### d) Eine Zusatzbemerkung über den Gauß-Laplaceschen Charakter der Verteilungen

Wir hatten bisher die  $\varepsilon$ -Störungen in einem Intervall entwickelt, das wir willkürlich wählten, z. B. so, daß außerhalb die turbulenten Störungen verschwinden; für einen Sandsturm würde dieses Raum-Zeit-Intervall eben nur das vom genannten Phänomen überdeckte Intervall darstellen. Nun hätten wir das Intervall größer oder kleiner wählen können. Würden wir z. B. in einem etwas kleineren Intervall die Entwicklung vorgenommen haben, so könnten wir uns diese auch so erhalten denken: Wir entwickeln unsere Funktion, die in Form der Reihe (2) oder (6) gegeben ist, in dem etwas kleineren neuen Intervall. Dann sind die neuen Koeffizienten unendliche Linearformen der alten. Aus physikalischen Gründen ist es einleuchtend anzunehmen, daß die Verteilung beider Koeffizientenreihen den sehr allgemeinen Bedingungen des „Central-Limit Theorems“ [7] genügen.

Da sich nun die alten Koeffizienten aus den neuen und endlich vielen ebenfalls linear zusammensetzen lassen müssen, so müssen bei diesen alten notwendigerweise Gauß-Laplace-Verteilungen herauskommen.

5. DIE BILDUNG DER MOMENTE  
UND EINE LÖSUNG DES MOMENTENPROBLEMS MITTELS  
MELLIN- (ZWEISEITIGER LAPLACE-) TRANSFORMATION

a) Die Bildung der Momente

Wir haben einen 4-dimensionalen Prozeß vor uns, den wir etwa in der Weise untersuchen können, daß wir in einem festen Raumpunkt  $x, y, z$  die Zeitabhängigkeit studieren und nachher diese Betrachtungen auf die Raumpunkte erstrecken. Um den Umfang der formalen Rechnung nicht zu stark anschwellen zu lassen, wollen wir die folgenden Überlegungen nur in einer Dimension durchführen und dem Leser die Übertragung auf vier Dimensionen überlassen.

In bezug auf die Bildung von Mitteln wollen wir zunächst feststellen, daß die von uns zunächst angegebenen Mittel über die große Zahl der Realisationen des Prozesses zu nehmen sind. Nur im Falle der stationären Prozesse (oder der räumlich homogenen) können auf Grund ergodischer Theoreme die Realisationsmittel durch Zeit- oder Raummittel ersetzt werden.

In der komplexen Schreibweise lautet unser Prozeß:

$$(3) \quad \Delta \varepsilon(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k(x, y, z) e^{j \frac{k\pi t}{T}}$$

Wir bilden jetzt die Korrelationsfunktion ohne sie zu normieren, d. h. die Größe, die man in der Literatur auch „Kovarianz“ nennt ([4]); nämlich

$$(27) \quad C(t, \tau) = \overline{\Delta \varepsilon(t) \Delta \varepsilon(t + \tau)}$$

wo der Strich über den Buchstaben die Mittelung über die Realisationen bedeutet.

Hier erweist sich jedoch noch eine Zusatzbetrachtung als notwendig.

Wir hatten bisher ein festes Intervall  $-T \leq t \leq T$  vorausgesetzt, indem wir unseren Prozeß in Form einer Fourierreihe studierten. Wir haben uns nicht darum gekümmert, was außerhalb dieses Intervalles geschieht.

Wenn wir aber nun  $\Delta \varepsilon(t)$  und  $\Delta \varepsilon(t + \tau)$  anschreiben, und wir  $t$  in dem alten Intervall variieren lassen, so überschreitet der Wert der unabhängigen Veränderlichen  $t + \tau$  das vorausgesetzte Intervall. Wir wollen nun den dadurch entstehenden Schwierigkeiten folgendermaßen aus dem Wege gehen:

Physikalisch haben wir ja das Problem als ein raum-zeitlich begrenztes angesehen: ein Sandsturm, eine Zone im Windkanal in der Zeit zwischen dem Ein- und Ausschalten des Luftstromes, einen räumlichen turbulenten Bereich in der Troposphäre während einer Feldstärkenregistrierung. Wir setzen also zweckmäßig  $\Delta \varepsilon$  außerhalb dieses Intervalls

identisch gleich Null. Weiterhin beschränken wir uns in bezug auf die Größe  $\tau$  auf eine Größe  $< \tau_{max}$ , wo  $\tau_{max}$  noch klein gegenüber der Intervalllänge sein soll, aber immerhin so groß, daß die Korrelationsfunktion in  $0 < \tau < \tau_{max}$  noch genügend ihren Charakter zeigt. Wir erstrecken das Entwicklungsintervall nun beiderseits um  $\tau_{max}$  über das Intervall des Phänomens hinaus, etwa nach folgender Abb. 1, die in 4 Dimensionen zu denken wäre, wenn wir eine räumliche Korrelation mit einbeziehen.

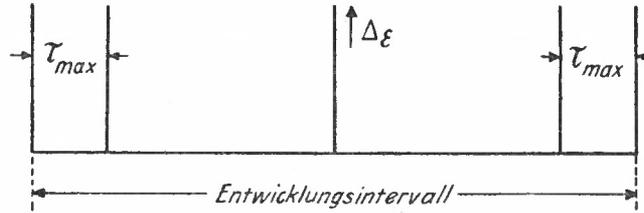


Abb. 1 Entwicklungsintervall

Zunächst betrachten wir aber den Prozeß in einem festen Raumpunkt in Abhängigkeit von der Zeit.

Da nun hier die Größen  $t$  und  $\tau$  auftreten, so erweitern wir dieses eindimensionale Intervall in  $t$  auf ein zweidimensionales in  $t$  und  $\tau$  mit

$$(28) \quad -T_e < t < T_e; \quad -\tau_{max} < \tau < +\tau_{max};$$

In einem Raumpunkt ist dann die Größe (27) eine Funktion von  $t$  und  $\tau$  und im stationären Fall von  $\tau$  allein, was allerdings wieder  $T_e \rightarrow \infty$  verlangen würde. Darauf werden wir noch zurückkommen.

Bilden wir jetzt  $C(t, \tau)$ , so bekommen wir:

$$(29) \quad C(t, \tau) = \frac{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{j \frac{k\pi t}{T_e}} \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} A_{k'} e^{j \frac{k'\pi(t+\tau)}{T_e}}}{\sum_{N=-\infty}^{+\infty} \sum_{M=-\infty}^{+\infty} A_{N-M} A_M e^{jNt} e^{jM\tau}}$$

Wir weisen nochmals darauf hin, daß sich im allgemeinen Falle die Mittelung auf die Realisation und nicht auf die Zeit bezieht. Wir können statt (29) auch schreiben:

$$(30) \quad C(t, \tau) = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \sum_{M=-\infty}^{+\infty} \overline{A_{N-M} A_M} e^{jNt} e^{jM\tau}$$

und dies als eine Fourierreentwicklung in dem Bereich (28) auffassen. Die Größen  $A_{N-M}$   $A_M$  sind dann die Entwicklungskoeffizienten von  $C(t, \tau)$ , d. h. es wird hier evident, daß wir hier jede mathematisch vernünftige Kovarianz entwickeln können. Setzen wir  $\tau = 0$ , so muß das mittlere Quadrat von  $\Delta \varepsilon(t)$  aus (30) hervortreten, wobei wir die hier physikalisch selbstverständliche Voraussetzung machen, daß der Prozeß stochastisch stetig sei. Also:

$$(31) \quad \overline{\Delta \varepsilon(t)^2} = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \sum_{M=-\infty}^{+\infty} \overline{A_{N-M} A_M} e^{jNt}$$

Wir sehen hier, daß wir es mit dem diskontinuierlichen Analogon der Faltung zu tun haben.

Hätten wir den Prozeß mittels eines Fourierintegrals dargestellt, wobei wir ebenfalls voraussetzen wollen, daß  $\Delta\varepsilon$  außerhalb eines endlichen Integrals identisch verschwindet, so hätten wir anzuschreiben gehabt:

$$(32) \quad \Delta\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} C(k) e^{jkt} dk$$

$$(33) \quad \Delta\varepsilon(t + \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} C(k) e^{jk\tau} e^{jkt} dk$$

wo

$$(34) \quad C(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\varepsilon(t) e^{-jkt} dt$$

und

$$(35) \quad C(k) e^{jk\tau} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\varepsilon(t + \tau) e^{-jkt} dt.$$

Dann würde aus dem Faltungssatz der Fouriertransformation folgen:

$$(36) \quad \overline{\Delta\varepsilon(t) \Delta\varepsilon(t + \tau)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jkt} dk \int_{-\infty}^{+\infty} C(u) e^{ju\tau} C(k - u) du$$

wo wir die Faltung im üblichen Sinn direkt sehen. Wenn wir das direkte Mittel von  $\Delta\varepsilon$  mit anschreiben

$$(37) \quad \overline{\Delta\varepsilon(t)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overline{A_k} e^{jkt}$$

so haben wir in (37) und (30) die ersten beiden Momente der ersten Verteilung von  $\Delta\varepsilon$  angegeben. Höhere Momente können wir dann durch sukzessives „Falten“ ermitteln, was wir aber nicht explizit anschreiben wollen.

## b) Die Ermittlung der Häufigkeitsfunktion aus den Momenten mittels Mellin- (zweiseitiger Laplace-) Transformation

### 1. Allgemeine Bemerkungen

Diese Momente, die wir im vorigen Abschnitt angegeben haben, sind definiert durch die Beziehung:

$$(38) \quad M_n = \int_{-\infty}^{+\infty} u^n f(u) du$$

wo  $f(u)$  die Häufigkeitsfunktion darstellt.

Um aus den Momenten nun die Funktion  $f(u)$  zu ermitteln, liegt es nahe, an die Mellintransformation zu denken. Das Momentenproblem als solches hat umfangreiche Behandlung von seiten der verschiedensten Bearbeiter erfahren. ([23] [24]) Es tritt in verschiedenen Formen auf, je nach den Grenzen des Integrals ( $-\infty +\infty$ ,  $0 \infty$ ,  $0 1$ ). Schon allein die Frage, wann die diskreten Momente die Funktion  $f$  eindeutig oder bis auf Nullfunktionen eindeutig bestimmen, erweist sich als nicht ganz einfach zu behandeln. Für unsere physikalischen Anwendungen dürften i. a. hinreichende Bedingungen genügen. Ferner wollen wir neben der Angabe hinreichender Bedingungen dem Leser für die Anwendbarkeit der folgenden Beziehungen in praktischen Fällen folgendes Kriterium empfehlen:

Hat man eine formale Lösung gefunden, so braucht man nur mit dieser die Momente umgekehrt zu berechnen, um zu sehen, ob die gefundene Lösung des Problems richtig ist. Zunächst findet man bei Cramér ([7] S. 176) eine hinreichende Bedingung für die eindeutige Bestimmung der Häufigkeitsfunktion durch ihre Momente:

Cramér befaßt sich zwar nicht mit der Häufigkeitsfunktion  $f(u)$ , sondern mit der Verteilungsfunktion  $F(u)$ , die definiert ist durch

$$(39) \quad F(u) = \int_{-\infty}^u f(u') du'$$

so daß sich (38) bei ihm schreibt

$$(40) \quad M_n = \int_{-\infty}^{+\infty} u^n dF(u)$$

als Stieltjessches Integral.

Wenn wir dann die zusätzliche Voraussetzung einführen, daß  $f(u)$  stetig sein soll, was bei unserem physikalischen Problem unmittelbar sinnvoll ist, so wird  $F(u)$  differenzierbar, und wir können dann die folgende Bedingung für die eindeutige Bestimmung der Verteilungsfunktion in Anspruch nehmen:

Es seien  $M_0 = 1, M_1, M_2, \dots, M_n$  die Momente einer Verteilungsfunktion  $F(u)$ , die alle als endlich angenommen seien. Wir nehmen weiterhin an, daß die Reihe  $\sum_0^{\infty} \frac{M_n}{n!} r^n$  für ein  $r > 0$  absolut konvergiere, dann ist  $F(u)$  die einzige Verteilungsfunktion mit den Momenten  $M_0, M_1, \dots, M_n$ .

Im Falle eines differenzierbaren  $F$  mit stetigem  $f$  wird dann die Bestimmung von  $f$  ebenfalls eindeutig.

## 2. Exkurs über die Mellintransformation

Zunächst schreiben wir die allgemeinen Beziehungen der Mellintransformation und ihrer Umkehrungen an, ferner gehen wir von ihr durch eine Substitution zur zweiseitigen

Laplace-Transformation über. Man findet darüber Angaben und Beweise in [21] [22] [23] [25] [26]. In unserem Falle wollen wir uns der Darstellung der Mellintransformation und der zweiseitigen Laplace-Transformation bedienen, wie wir sie bei Doetsch [21] S. 33, 114, 115 und [22] S. 60, 408 f. finden.

Definieren wir die zweiseitige Laplace-Transformation durch

$$(41) \quad f_{\text{II}}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)e^{-st} dt = L_{\text{II}}\{F(t)\}$$

und führen wir folgende Substitutionen ein:

$$(42) \quad e^{-t} = z \qquad (43) \quad F(-\log z) = \Phi(z)$$

dann wird

$$(44) \quad f_{\text{II}}(s) = \int_0^{\infty} z^{s-1} \Phi(z) dz = \mathfrak{M}\{\Phi(z)\} = \varphi(s)$$

In vielen Fällen läßt sich die  $L_{\text{II}}$ -Transformation umkehren durch die Formel:

$$(45) \quad F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts} f_{\text{II}}(s) ds$$

wo  $x$  eine dem Konvergenzstreifen von  $f_{\text{II}}(s)$  angehörende Abszisse darstellt. Analog zu (44) ergibt sich für die Mellin-Transformation die Umkehrung

$$(46) \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} z^{-s} \varphi(s) ds$$

Eine umfangreiche Theorie dieser Transformation und der Gültigkeit der Umkehrformeln findet man bei Doetsch (l. c.). Wir wollen hier nur für die Mellintransformation die zwei Funktionenklassen angeben (eine für den Originalbereich und eine für den Bildbereich), die einander zugeordnet sind:

Die Klasse  $\mathfrak{B}$  der in einem Winkelraum  $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$  mit eventuellem Ausschluß des Nullpunktes analytischen Funktionen  $\Phi(z)$ , die der Potenzabschätzung genügen

$$(47) \quad \begin{aligned} |\Phi(z)| &\leq C \varrho^{-x_1} \quad \text{für } \varrho \leq 1 \\ |\Phi(z)| &\leq C \varrho^{-x_2} \quad \text{für } \varrho > 1 \end{aligned} \quad \text{mit } x_1 < x_2$$

die Klasse  $\mathfrak{b}$  der in einem Vertikalstreifen  $x_1 \leq x \leq x_2$  analytischen Funktionen  $\varphi(s)$ , die der Exponentialabschätzung genügen:

$$(48) \quad \begin{aligned} |\varphi(s)| &\leq C e^{-\vartheta_2 y} \quad \text{für } y \geq 0 \\ |\varphi(s)| &\leq C e^{-\vartheta_1 y} \quad \text{für } y < 0 \end{aligned} \quad \vartheta_1 < \vartheta_2$$

Wir können [25] S. 87 ff. auch auf die Forderung einer analytischen Häufigkeitsfunktion verzichten. Es sei hier ohne Beweis (siehe l. c.) nur der Wortlaut des Satzes über die Mellintransformation und ihre Umkehrung gegeben:

1. Es sei  $S = \sigma + \tau i$  eine komplexe Variable. In dem Streifen  $a < \sigma < \beta$  sei die Funktion  $f(s)$  regulär und daselbst  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(s + i\tau)| dt$  konvergent; ferner strebe in jedem schmälern Streifen  $a + \delta \leq \sigma \leq \beta - \delta$  die Funktion  $f(s)$  mit zunehmendem Absolutbetrag der Ordinate gleichmäßig gegen Null. Setzt man dann für reelle positive  $x$  und festes  $\sigma$

$$(a) \quad g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} x^{-s} f(s) ds$$

so ist in dem Streifen  $a < \sigma < \beta$

$$(b) \quad f(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} g(x) dx$$

2. Für  $x > 0$  sei  $g(x)$  stückweise glatt, und für  $a < \sigma < \beta$  sei  $\int_0^{\infty} x^{s-1} g(x) dx$  absolut konvergent. Dann folgt aus (b) die Umkehrung (a).

### 3. Die eigentliche Ermittlung der Häufigkeitsfunktion

Die Gleichung (44) kann für ganzzahlige  $s$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) als Definition der Momente angesehen werden.

Nun sind aber die Momente in (44) im Intervall  $(0, \infty)$  definiert, während (40) sie in  $(-\infty, +\infty)$  erfordert. Das Problem, das (40) entspricht, ist das sogenannte Hamburgersche Momentenproblem, während (44) das Stieltjessche definiert. Ferner sind die Momente nur auf der diskreten Punktmenge der ganzzahligen  $s$  definiert, während die Mellintransformation eine Funktion betrachtet, die auf dem Kontinuum definiert ist. Die Erweiterung von den diskreten Punkten auf das Kontinuum werden wir später eindeutig vornehmen; zunächst wollen wir das Hamburgersche Problem auf das Stieltjessche umschreiben. Es ist:

$$(49) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x^n f(x) dx + \int_0^{\infty} x^n f(x) dx = \int_0^{\infty} x^n (f(x) + (-1)^n f(-x)) dx$$

Ist  $n$  gerade, so haben wir:

$$(50) \quad M_{2n} = \int_0^{\infty} x^{2n} (f(x) + f(-x)) dx = {}_s M_{2n}$$

Ist  $n$  ungerade, so ergibt sich:

$$(51) \quad M_{2n+1} = \int_0^{\infty} x^{2n} (xf(x) - xf(-x)) dx = {}_u M_{2n}$$

wo  ${}_g M_{2n}$ ,  ${}_u M_{2n}$  eine durch (50, 51) definierte Schreibweise darstellt. Wir formen die obigen Ausdrücke durch die Substitution

$$(52) \quad x^2 = z \quad dx = dz/2\sqrt{z}$$

um. Dann wird

$$(53) \quad {}_g M_{2n} = \int_0^{\infty} z^{n-1} \left( \frac{zf(\sqrt{z}) + zf(-\sqrt{z})}{2\sqrt{z}} \right) dz$$

und

$$(54) \quad {}_u M_{2n} = \int_0^{\infty} z^{n-1} \left( \frac{z^{3/2} f(\sqrt{z}) - z^{3/2} f(-\sqrt{z})}{2\sqrt{z}} \right) dz$$

Damit haben wir also das Hamburgersche Momentenproblem für  $f(x)$  auf das Stieltjesche von 2 Funktionen zurückgeführt. Wenn wir das Stieltjesche Problem für die beiden Funktionen gelöst haben, so ersehen wir unmittelbar, wie  $f(x)$  und  $f(-x)$  aus den Integralen von (53) und (54) zu entnehmen sind.

Wir haben, um dies durchführen zu können, die diskrete Folge der Momente auf eine analytische Funktion über dem Kontinuum zu interpolieren. Dazu hilft uns wieder die Theorie der Laplace-Transformation.

Zunächst, wenn z. B. unsere Momente als analytische Ausdrücke in  $n$  gegeben sind, können wir direkt diesen Ausdruck nehmen. Er ist eindeutig, denn wir finden bei Doetsch [21] S. 35:

1. Verschwindet eine  $L_1$ -Transformierte  $f(s)$  in einer unendlichen Folge von äquidistanten Punkten, die auf der reellen Achse oder einer Parallelen zu ihr liegen

$$(55) \quad s = s_0 + n\sigma$$

( $s_0$  im Konvergenzbereich des Laplace-Integrals,  $\sigma > 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ), so ist jede zugehörige Originalfunktion eine Nullfunktion.

Nun ist aber dieses Verhalten durchaus nicht daran gebunden, daß  $f(s)$  eine einseitige Laplace-Transformierte ist. Es gilt nämlich überhaupt für analytische Funktionen: [21] S. 122.

2.  $f(s)$  sei analytisch in einer Halbebene  $x > x_1$  und genüge dort der Ungleichung

$$(56) \quad |f(s)| < C e^{q|s|} \quad q \geq 0$$

Verschwindet  $f(s)$  in einer horizontalen äquidistanten Punktreihe

$$(57) \quad s = s_0 + n\pi/\vartheta_0 \quad (Rs > x_1, \quad n = 0, 1, 2, \dots)$$

und ist  $\vartheta_0 > q$ , so ist  $f(s) \equiv 0$ .

Wir fassen nun die Momente als die Werte einer  $L_{II}$ -Transformierten auf, deren Konvergenzstreifen in eine nach rechts ins Unendliche reichende Halbebene übergeht. Ferner verlangen wir von den Momenten die folgende Beschränkung in ihrer Größe; bezeichnen wir mit  $f(s+1)$  das  $s$ te Moment (siehe Gleichung (44)); so soll die Reihe

$$(58) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} f(ns) e^{nst} \quad \text{absolut konvergieren.}$$

Wenn dies der Fall ist, können wir die Phragménésche Umkehrformel der  $L_I$ -Transformation ([21] S. 133 ff.) auf die  $L_{II}$ -Transformation übertragen, und wir bekommen als Lösung des Momentenproblems direkt:

$$(59) \quad \int_0^t F(\tau) d\tau = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} f(ns) e^{nst}, \quad t > 0$$

Diese Beziehung liefert also die Umkehrung der zweiseitigen  $L_{II}$ -Transformation aus den Werten der Transformierten in einer äquivalenten Punktfolge.

Hat man aus (59) dann  $F(\tau)$  gewonnen, so kann man umgekehrt  $f(s)$  ausrechnen und nachprüfen, ob  $f(s)$  der Bedingung (56) genügt. Hier lieferte uns die Theorie der  $L_{II}$ -Transformation direkt die Lösung des Momentenproblems. Nach (41) (42) wäre hier  $\tau$  durch  $\log z$  zu ersetzen.

Wenn die Momente als analytischer Ausdruck direkt  $\varphi(s)$  in (46) aufzeigen, so können wir  $\Phi(z)$  aus dieser Gleichung in der Mellinschen Schreibweise entnehmen.

Wie oben bemerkt, muß in jedem Falle die Richtigkeit der Lösung durch unmittelbares Ausrechnen verifiziert werden.

Wir wollen für die Momente eine hinreichende Bedingung angeben, damit sie (58) erfüllen:

Es genügt, daß:

$$(60) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} f(ns) e^{nst} = O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right) \text{ mit } \varepsilon > 0 \text{ beliebig.}$$

Wenn auf diese Weise die durch (53) und (54) gegebenen Momentenprobleme gelöst sind, braucht man nur noch elementar  $f(x)$  und  $f(-x)$  zu ermitteln.

Ist  ${}_n M_{2n} = 0$ , d. h. sind die ungeraden Momente in  $-\infty + \infty$  alle Null, so zeigt (54), daß  $f(z)$  eine gerade Funktion ist.

Es erübrigt sich, noch ein Beispiel dafür anzugeben. Wir wählen das trivialste, die Gauß-Laplacesche Häufigkeitsfunktion, wobei wir auf den Normierungsfaktor verzichten. Wir nehmen einfach die Funktion  $e^{-z^2}$ , ermitteln ihre Mellintransformierte und drehen diese um; die Funktion ist eine gerade, die ungeraden Momente in  $(-\infty + \infty)$  sind Null. Wir erhalten:

$$(61) \quad f_{II}(s) = \mathfrak{M}\{\Phi(z)\} = \int_0^{\infty} z^{s-1} e^{-z^2} dz = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$$

Dann folgt aus [25] S. 87 f.

$$(62) \quad e^{-z^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} z^{-s} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) ds$$

mit einem beliebigen  $\sigma$  auf der positiv reellen Achse.

## 6. DAS HOMOGEN-STATIONÄRE RAUM-ZEIT-INTERVALL

### a) Definitionen und allgemeine Sätze

Schon in der Einleitung war darauf hingewiesen worden, daß wir bei den von uns studierten Phänomenen darauf rechnen können, daß ein Teilintervall in Raum und Zeit existieren wird, in dem der Prozeß zeitlich stationär und räumlich homogen ist. Dies wird z. B. besonders der Fall sein, wenn wir die dielektrische Turbulenz in einem Windkanal betrachten. Auch in einem Sandsturm dürfte sich eine solche Zone ausbilden können.

Unter „homogen“ wollen wir in bezug auf die Raumkoordinaten dasselbe verstehen, was „stationär“ für die Zeitkoordinate bedeutet. Nun kommt der Begriff „stationär“ in der Literatur über stochastische Prozesse hauptsächlich in zwei Bedeutungen vor:

- a) im Sinne von „strikt stationär“,
- b) im Sinne von „stationär von 2. Ordnung“ ([4] [16] [17]).

„Strikt stationär“ bedeutet im eindimensionalen Fall, daß die Verteilungsfunktion  $n$ ter Ordnung für beliebiges  $n$  ( $u = f(t)$ , Verteilungsfunktion = Integral der Häufigkeitsfunktion)  $F(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$  und diejenige, die bei Verschiebung von  $t$  um ein beliebiges  $h$  entsteht, von  $n$  unabhängig sind.

Weniger einschneidend ist die Forderung der Stationarität von 2. Ordnung, die nur fordert:

- a)  $E\{u(t)\}$  und  $E\{u^2(t)\}$  unabhängig von  $t$ ,
- b)  $E\{u(t)u(t+h)\}$  nur von  $h$  abhängig, nicht aber von  $t$ .

Während die strikte Stationarität die gesamten Häufigkeitsfunktionen (über die Verteilungsfunktionen) erfaßt, und zwar diejenigen hoher Ordnung, betrifft die Stationarität von 2. Ordnung nur die beiden ersten Momente der ersten Verteilung und das erste Moment der 2. Verteilung.

Die Bedeutung stationärer Prozesse in der Theorie beruht unter anderem darauf, daß sie ergodischen Sätzen unterliegen, von denen wir den folgenden von Slutsky ([9] S. 42) heranziehen werden:

Eine Zufallsfunktion genüge folgenden Bedingungen:

1. Sie sei im Intervall  $-\infty < t < +\infty$  definiert.
2. Sie sei stationär bis zu den Momenten der Ordnung 2 der 1. Verteilung, d. h.  $E\{u(t)\} E\{(u, t) - E\{u(t)\}\}^2$  sei konstant, und die Korrelation zwischen  $u(t)$  und  $u(t + \tau)$  hänge nur von  $\tau$  ab.

$$(63) \quad E\{u(t) u(t + \tau)\} / E\{u(t)^2\} = \varrho(\tau)$$

3.  $u(t)$  sei im stochastischen Sinne stetig, was nach den gemachten Voraussetzungen der Bedingung  $\varrho(+0) = \varrho(-0) = 1$  und  $\varrho(t) =$  stetige Funktion gleichkommt.
4. Das Moment 4. Ordnung  $E\{u(t)^4\}$  ist beschränkt.
5.  $u(t)$  ist  $L$ -meßbar.
6.  $u(t)$  ist normiert in dem Sinne, daß  $E\{u(t)\} = 0$ ,  $E\{u(t)^2\} = \sigma^2 = 1$ .

Die letztere Voraussetzung bedeutet keine Einschränkung, denn wir können jedem solchen Prozeß durch Subtraktion von  $E\{u(t)\}$  und eine Maßstabsänderung in  $u$  einen Prozeß nach Bedingung 6 zuordnen.

Dann ist die Bedingung

$$(64) \quad \bar{\varrho} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\infty} \varrho(\tau) d\tau = 0$$

notwendig und hinreichend dafür, daß „fast sicher“, d. h. mit einer Wahrscheinlichkeit 1 der zeitliche Mittelwert von  $u(t)$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} u(t) dt \quad (= 0 \text{ nach Bedingung 6})$$

gleich der mathematischen Erwartung des Prozesses ist, wobei wir jetzt den normierten auf Null-Mittel gebrachten zugeordneten Prozeß betrachten.

Nun gilt aber weiterhin nach Slutsky (l. c.):

Die diesen Bedingungen genügende stationäre zugeordnete Zufallsfunktion besitzt stochastische Fourierkoeffizienten, deren mathematische Erwartungen Null sind, deren quadratische Mittelwerte gleich sind den Fourier-cos-Koeffizienten der Korrelation (Wiener und Kintchine) und die paarweise nicht miteinander korreliert sind.

Wir haben bisher immer einen festen Raumpunkt  $x, y, z$  im Auge gehabt und dort den Prozeß in seiner Zeitabhängigkeit studiert. Nun hängt der Prozeß aber auch für jeden Zeitmoment von den Raumkoordinaten ab. Wir fordern nun räumliche Homogenität in jedem Zeitintervall und definieren dies folgendermaßen: Für jedes  $t, y, z$  soll der Prozeß längs  $x$  den obigen Forderungen genügen, ebenso für jedes  $t, x, z$  längs  $y$  und für jedes  $t, x, y$  längs  $z$ . Dabei sollen die in unserer Rechnung auftretenden Momente von allen 4 Koordinaten unabhängig sein.

b) Die Abgrenzung des homogen-stationären Intervalls  
und die Ermittlung der zugehörigen Entwicklungskoeffizienten

Die oben angegebenen Definitionen für das stationär-homogene Verhalten erforderten ein unendliches Intervall in jeder Koordinate. Wir haben aber nur ein endliches zur Verfügung und wollen einmal sehen, wie wir die Definition abschwächen können, um vor allem noch mit genügender Näherung das ergodische Verhalten zu retten.

Wir denken uns jetzt den Prozeß in ein Teilintervall des ursprünglichen Entwicklungsintervalls eingeschlossen, das folgendermaßen gegeben sei:

Die Grenzen des homogen-stationären Intervalls seien in diejenigen des gesamten Entwicklungsintervalls  $-T, +T, -X, +X, -Y, +Y, -Z, +Z$  im allgemeinen unsymmetrisch so eingebettet, daß

$$(65) \quad \begin{aligned} -X < x_1 < x < x_1 + 2X' < +X \\ -Y < y_1 < y < y_1 + 2Y' < +Y \\ -Z < z_1 < z < z_1 + 2Z' < +Z \\ -T < t_1 < t < t_1 + 2T' < +T \end{aligned}$$

wo  $x_1, y_1, z_1, t_1$  die unteren Grenzen des homogen-stationären Intervalls bedeuten,  $X', Y', Z', T'$  die Hälfte von dessen Ausdehnung.

Das ergodische Verhalten des Prozesses zeigt sich nun vor allem darin, daß für den zugeordneten normierten Prozeß das Mittel

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t) dt = 0$$

wird für jede Realisation „fast sicher“.

Wir wollen nun unser Intervall der Größe  $2X', 2Y', 2Z', 2T'$  so groß annehmen, daß z. B. in  $T$

$$(66) \quad \frac{1}{2T'} \int_{-T'}^{+T'} u(t) dt < \varepsilon_T = O\left(\frac{1}{T'}\right)$$

ist, wo  $\varepsilon$  zwar nicht beliebig klein angenommen werden kann, sondern eine Größe haben soll, die wir in unseren weiteren Rechnungen vernachlässigen wollen, die z. B. im Vergleich zum quadratischen Erwartungswert unter 1% liegt.

Da wir es aber noch mit Korrelationen zu tun haben werden, so müssen wir beachten, daß wir in dem betrachteten Intervall Verschiebungen vorzunehmen haben werden (vergleiche Abschnitt 5,1).

Wir nehmen nun einmal an, daß unser  $\varepsilon$  aus (66) uns ein bestimmtes Intervall erlaube. Nennen wir  $\tau_x, \tau_y, \tau_z, \tau_t$  die Inkremente der Koordinaten, die wir bei der Berechnung der

Korrelation einführen, und beschränken wir deren Absolutbeträge auf Größen  $\tau_{x \max}$ ,  $\tau_{y \max}$ ,  $\tau_{z \max}$ ,  $\tau_{t \max}$ , die ihrerseits sehr klein gegenüber der Ausdehnung des homogen-stationären Intervalls sein sollen, so wollen wir zunächst die zu (66) analogen Integrale in  $x, y, z$  mit Größen  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ , begrenzen, und das durch (66) gegebene Intervall noch in allen Koordinaten bzw. oben und unten um  $\tau_{x \max}, \tau_{y \max}, \tau_{z \max}, \tau_{t \max}$  verkleinern und die dadurch gegebenen Grenzen mit  $x_1, x_1 + 2X', y_1, y_1 + 2Y'$  usw. bezeichnen. Dann wollen wir unsere durch (2) gegebene Funktion  $\Delta\varepsilon(x, y, z, t)$  in diesem Intervall neu entwickeln. Zu diesem Zwecke führen wir ein neues Koordinatensystem derart ein, daß dem Intervall

$$(67) \quad \begin{array}{ll} \text{in } x: & x_1 < x < x_1 + 2X' & \text{das Interv. in } \xi & -\pi < \xi < +\pi \\ \text{in } y: & y_1 < y < y_1 + 2Y' & \text{das Interv. in } \eta & -\pi < \eta < +\pi \\ \text{in } z: & z_1 < z < z_1 + 2Z' & \text{das Interv. in } \zeta & -\pi < \zeta < +\pi \\ \text{in } t: & t_1 < t < t_1 + 2T' & \text{das Interv. in } \tau & -\pi < \tau < +\pi \end{array}$$

entspricht. Die Transformation hat dann die folgende Gestalt:

$$(68) \quad \begin{array}{ll} \xi = \frac{\pi}{X'} x - \frac{\pi(x_1 + X')}{X'} & x = \frac{X'}{\pi} \xi + (x_1 + X') \\ \eta = \frac{\pi}{Y'} y - \frac{\pi(y_1 + Y')}{Y'} & y = \frac{Y'}{\pi} \eta + (y_1 + Y') \\ \zeta = \frac{\pi}{Z'} z - \frac{\pi(z_1 + Z')}{Z'} & z = \frac{Z'}{\pi} \zeta + (z_1 + Z') \\ \tau = \frac{\pi}{T'} t - \frac{\pi(t_1 + T')}{T'} & t = \frac{T'}{\pi} \tau + (t_1 + T') \end{array}$$

Setzen wir nun die Ausdrücke der rechten Hälfte von (68) in (2) ein, so erhalten wir:

$$(69) \quad \begin{aligned} \Delta\varepsilon(\xi, \eta, \zeta, \tau) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{klmn} \times \\ &\exp \left\{ j \left[ \frac{k\pi}{T'} (t_1 + T') + \frac{l\pi}{X'} (x_1 + X') + \frac{m\pi}{Y'} (y_1 + Y') + \frac{n\pi}{Z'} (z_1 + Z') \right] \right\} \\ &\times \exp \left\{ j \left[ \frac{kT'}{T} \tau + \frac{lX'}{X} \xi + \frac{mY'}{Y} \eta + \frac{nZ'}{Z} \zeta \right] \right\} \end{aligned}$$

Diese Funktion haben wir in dem 4-dimensionalen  $(-\pi, +\pi)$  Intervall nach Fourier zu entwickeln. Zunächst setzen wir:

$$(70) \quad \alpha_{klmn} = a_{klmn} \exp \left\{ j \left[ \frac{k\pi}{T'} (t_1 + T') + \frac{l\pi}{X'} (x_1 + X') + \frac{m\pi}{Y'} (y_1 + Y') + \frac{n\pi}{Z'} (z_1 + Z') \right] \right\}$$

Wir haben also zu entwickeln:

$$(71) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{klmn} \exp \left\{ j \left[ \frac{kT'}{T} \tau + \frac{lX'}{X} \xi + \frac{mY'}{Y} \eta + \frac{nZ'}{Z} \zeta \right] \right\} \\ = \sum_{k'} \sum_{l'} \sum_{m'} \sum_{n'} b_{k'l'm'n'} \exp \{ j [k'\tau + l'\xi + m'\eta + n'\zeta] \} \quad \text{in } -\pi < \begin{matrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{matrix} < +\pi$$

Die Koeffizienten  $b_{k'l'm'n'}$  bekommen wir in bekannter Weise: Wir multiplizieren die Reihe in (69) mit  $\frac{1}{(2\pi)^4} \exp \{ -j [k'\tau + l'\xi + m'\eta + n'\zeta] \}$  und integrieren in allen 4 Veränderlichen von  $-\pi$  bis  $+\pi$ . Dies ergibt:

$$(72) \quad b_{k'l'm'n'} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_k \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_n \alpha_{klmn} \times \\ \exp \left\{ j \left[ \left( \frac{kT'}{T} - k' \right) \tau + \left( \frac{lX'}{X} - l' \right) \xi + \left( \frac{mY'}{Y} - m' \right) \eta + \left( \frac{nZ'}{Z} - n' \right) \zeta \right] \right\} d\tau d\xi d\eta d\zeta$$

Wir machen hinreichende Voraussetzungen für die Vertauschbarkeit von Summation und Integration (z. B. fast sicher beschränkte Konvergenz) und haben dann einfach die Exponentialfunktionen im Integranden zu integrieren. Für jedes  $k', l', m', n'$  zerfällt ersichtlich das Integral in 4 Faktoren, von denen wir nur den ersten, die Zeit betreffenden, auswerten:

$$(73) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp \left\{ j \left[ \left( \frac{kT'}{T} - k' \right) \tau \right] \right\} d\tau = \frac{1}{\pi \left( \frac{kT'}{T} - k' \right)} \sin \left( \frac{kT'}{T} - k' \right) \pi$$

was sich im Falle  $\frac{kT'}{T} - k' = 0$  auf 1 reduziert.

Somit wird

$$(74) \quad b_{k'l'm'n'} = \frac{1}{\pi^4} \sum_k \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_n \alpha_{klmn} \times \\ \frac{\sin \left( \frac{kT'}{T} - k' \right) \pi \sin \left( \frac{lX'}{X} - l' \right) \pi \sin \left( \frac{mY'}{Y} - m' \right) \pi \sin \left( \frac{nZ'}{Z} - n' \right) \pi}{\left( \frac{kT'}{T} - k' \right) \left( \frac{lX'}{X} - l' \right) \left( \frac{mY'}{Y} - m' \right) \left( \frac{nZ'}{Z} - n' \right)}$$

### c) Eigenschaften der Koeffizienten

Diese Koeffizienten sind abgeleitet für das endliche Intervall. Dagegen gilt die Slutskysche Bemerkung über die Fourierkoeffizienten für ein unendliches Intervall  $-T + T$  in der Form (wir bleiben hier bei einer Dimension), daß

$$(75) \quad b_{\lambda T} = \frac{2}{T} \int_0^T t(u) e^{-j\lambda t} dt \rightarrow 0.$$

Da wir von diesem Prozeß, der unendlich lange dauert, keine absolute Integrierbarkeit im unendlichen Intervall verlangen können (dies wäre physikalisch sinnlos), verlangt man Integrierbarkeit nach Cesàro. Verlangen wir für unser 4-dimensionales Intervall

$$(76) \quad E \{b_{k' l' m' n'}\} = 0$$

und zwar für den zugeordneten normierten Prozeß; ferner

$$(77) \quad |E \{b_{k_1 l_1 m_1 n_1} b_{k_2 l_2 m_2 n_2}\}| = |E \{b_{k_1 l_1 m_1 n_1}\}| |E \{b_{k_2 l_2 m_2 n_2}\}|$$

mit einem genügend kleinen  $\delta = O\left\{\frac{1}{T'X'Y'Z'}\right\}$ , so wird näherungsweise durch (76) (77) das stationäre Verhalten gewährleistet sein.

Gehen wir aber so vor, daß wir (76) und (77) mit  $\delta = 0$  von vornherein verlangen auch für das endliche Intervall, so sind notwendige Bedingungen für die stationäre Homogenität im endlichen Intervall erfüllt. Weiterhin: wir fordern, daß die Korrelation nicht von  $\tau, \xi, \eta, \zeta$ , sondern nur von  $\tau_t, \tau_\xi, \tau_\eta, \tau_\zeta$  abhängen soll. Der Zuwachs  $\tau_t, \tau_\xi, \tau_\eta, \tau_\zeta$  wird dabei auf Werte unter  $\tau_{t \max}, \tau_{\xi \max}, \tau_{\eta \max}, \tau_{\zeta \max}$  beschränkt. Wir berechnen dies zunächst in einer Dimension für die zeitliche Korrelation:

$$(78) \quad \begin{aligned} \rho(\tau, \tau_t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\tau} \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} b_{k'} e^{jk'(\tau+\tau_t)} \\ &= \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \sum_{P=-\infty}^{+\infty} b_{KP} e^{jK\tau} e^{jP\tau_t} \end{aligned}$$

Dann wird, wie man leicht sieht,

$$(79) \quad b_{KP} = b_P b_{K-P}.$$

Diese zweidimensionale Fourierentwicklung soll nach unserer Forderung im Mittel nicht von  $\tau$ , sondern nur von  $\tau_t$  abhängen (natürlich muß  $b_{-K} = b_K$  sein). Damit dies erfüllt ist, muß für alle  $K \neq 0$  der Koeffizient

$$(80) \quad \overline{b_{KP}} = 0 \quad (\text{im Mittel}) \text{ sein, was durch (76) (77) automatisch geliefert wird.}$$

Fordern wir dies, so wird beim Mitteln:

$$(81) \quad \begin{aligned} \rho(\tau, \tau_t) &= \rho(\tau_t) = \sum_{P=-\infty}^{+\infty} \overline{a_P a_P} e^{jP\tau_t} \\ &= \sum_{P=-\infty}^{+\infty} |\overline{a_P}|^2 e^{jP\tau_t} = |\overline{a_0}|^2 + 2 \sum_{P=1}^{\infty} |\overline{a_P}|^2 \cos P\tau_t \end{aligned}$$

sein.

So erhalten wir hier das bekannte Theorem von Wiener und Kintchine.

In 4 Dimensionen erhalten wir analog, wenn wir die 4-dimensionale Korrelation nur von dem Zuwachs  $\tau_x, \tau_y, \tau_z, \tau_t$ , aber nicht von  $\tau, \xi, \eta, \zeta$  abhängen lassen wollen, daß (76) (77) dies erfüllt.

#### d) Die isotrope Turbulenz

Wir wollen unter isotroper Turbulenz verstehen, daß die räumliche Korrelation nur von dem Abstand der jeweils betrachteten zwei Punkte abhängt, dagegen nicht von der Richtung.

Um dies näher zu studieren, führen wir für  $\xi, \eta, \zeta$  ein neues Koordinatensystem ein. Zunächst müssen  $\xi, \eta, \zeta$  gleiche Maßstäbe haben. Wir müssen entweder  $X' = Y' = Z'$  machen, was unter Beschränkung dieser Größen auf ihre jeweils kleinste jederzeit möglich ist, oder  $\xi, \eta, \zeta$  mit Maßstabsfaktoren versehen, wir ersetzen dann einfach  $\xi, \eta, \zeta$  durch  $\alpha\xi, \beta\eta, \gamma\zeta$ , dann führen wir ein Polarkoordinatensystem für  $\tau_x, \tau_y, \tau_z$  ein:

$$(82) \quad \tau_x = \hat{\tau} \sin \vartheta \cos \psi, \quad \tau_y = \hat{\tau} \sin \vartheta \sin \psi, \quad \tau_z = \hat{\tau} \cos \vartheta$$

Wir entwickeln zunächst Formeln, die wir später brauchen.

Wir bemerken die bekannten Identitäten:

$$(83) \quad \sin \vartheta \cos \psi = \frac{1}{2} \sin (\vartheta + \psi) + \frac{1}{2} \sin (\vartheta - \psi),$$

$$(84) \quad \sin \vartheta \sin \psi = -\frac{1}{2} \cos (\vartheta + \psi) + \frac{1}{2} \cos (\vartheta - \psi)$$

Außerdem erinnern wir uns an die bekannten Beziehungen zwischen Besselschen und trigonometrischen Funktionen:

$$(85) \quad \exp [jkr \cos \psi] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} j^m J_m(kr) e^{jm\psi}$$

$$(86) \quad \exp [jkr \sin \psi] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(kr) e^{jn\psi}$$

Damit wird:

$$(87) \quad \begin{aligned} e^{jl\tau_x} &= \exp \left[ j \frac{l\hat{\tau}}{2} \sin (\vartheta + \psi) \right] \exp \left[ j \frac{l\hat{\tau}}{2} \sin (\vartheta - \psi) \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n \left( \frac{l\hat{\tau}}{2} \right) e^{jn\vartheta} e^{jn\psi} \times \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m \left( \frac{l\hat{\tau}}{2} \right) e^{jm\vartheta} e^{-jm\psi} \end{aligned}$$

4\*

Die Ausmultiplizierung dieser 2 Reihen ergibt:

$$(88) \quad e^{j l \hat{\tau} \xi} = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \sum_{M=-\infty}^{+\infty} \kappa_{NM} \left( \frac{\hat{\tau} l}{2} \right) e^{j N \vartheta} e^{j M \psi}$$

wo

$$(89) \quad \kappa_{NM} = J_{\frac{N+M}{2}} \left( \frac{\hat{\tau} l}{2} \right) J_{\frac{N-M}{2}} \left( \frac{\hat{\tau} l}{2} \right) \quad \text{wenn } N \text{ und } M \text{ beide gerade}$$

oder beide ungerade

= 0 in allen anderen Fällen.

Wir können dies auch geschlossen so ausdrücken:

$$(90) \quad e^{j l \tau \xi} = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \sum_{L=-\infty}^{+\infty} J_{K+L} \left( \frac{\hat{\tau} l}{2} \right) J_{K-L} \left( \frac{\hat{\tau} l}{2} \right) e^{2j K \vartheta} e^{2j L \psi}$$

$$+ \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \sum_{L=-\infty}^{+\infty} J_{K+L+1} \left( \frac{\hat{\tau} l}{2} \right) J_{K-L} \left( \frac{\hat{\tau} l}{2} \right) e^{j(2K+1)\vartheta} e^{j(2L+1)\psi}$$

Die Gleichung (88) stellt also eine Fourierreentwicklung für  $e^{j l \tau \xi}$  dar.

Analog bekommen wir:

$$(91) \quad e^{j m \tau \eta} = \exp [j m \hat{\tau} \sin \vartheta \sin \psi] = \exp \left[ j m \frac{\hat{\tau}}{2} (-\cos(\vartheta + \psi) + (\cos \vartheta - \psi)) \right]$$

woraus mit (85) (86) folgt:

$$(92) \quad e^{j m \tau \eta} = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} (-j)^N J_N \left( \frac{m \hat{\tau}}{2} \right) e^{j N \vartheta} e^{j N \psi} \sum_{M=-\infty}^{+\infty} (j)^M J_M \left( \frac{m \hat{\tau}}{2} \right) e^{j M \vartheta} e^{-j M \psi}$$

was wir folgendermaßen schreiben:

$$(93) \quad e^{j m \tau \eta} = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \sum_{L=-\infty}^{+\infty} e^{2j K \vartheta} e^{2j L \psi} (-1)^L J_{K+L} \left( \frac{m \hat{\tau}}{2} \right) J_{K-L} \left( \frac{m \hat{\tau}}{2} \right)$$

$$+ \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \sum_{L=-\infty}^{+\infty} e^{j(2K+1)\vartheta} e^{j(2L+1)\psi} (-1)^L J_{K+L+1} \left( \frac{m \hat{\tau}}{2} \right) J_{K-L} \left( \frac{m \hat{\tau}}{2} \right)$$

oder

$$(94) \quad e^{j m \tau \eta} = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \sum_{M=-\infty}^{+\infty} \lambda_{NM} e^{j N \vartheta} e^{j M \psi},$$

wo

$$(95) \quad \lambda_{NM} = J_{\frac{K+L}{2}} \left( \frac{m \hat{\tau}}{2} \right) J_{\frac{K-L}{2}} \left( \frac{m \hat{\tau}}{2} \right) \quad \text{wenn } K \text{ und } L \text{ beide gerade}$$

oder beide ungerade sind

= 0 anderwärts, ferner:

$$(96) \quad e^{jn\tau\zeta} = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} j^K J_K(n\hat{\tau}) e^{jK\theta} = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \mu_K J_K(n\hat{\tau}) e^{jK\theta}$$

Jetzt bilden wir einmal die Korrelation, und zwar die hier interessierende räumliche:

$$(97) \quad \overline{\Delta\varepsilon(\tau, \alpha\xi, \beta\eta, \gamma\zeta) \Delta\varepsilon(\tau, \alpha\xi + \tau_\xi, \beta\eta + \tau_\eta, \gamma\zeta + \tau_\zeta)}$$

und denken uns die Mittelungen zuerst über die Realisationen vorgenommen. Dies schreiben wir

$$(98) \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_{klmn} e^{j(k\tau + l\alpha\xi + m\beta\eta + n\gamma\zeta)} \\ \times \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} \sum_{l'=-\infty}^{+\infty} \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} b_{k'l'm'n'} e^{j(k'\tau + l'\alpha\xi + m'\beta\eta + n'\gamma\zeta)} e^{j(l'\tau_\xi + m'\tau_\eta + n'\tau_\zeta)}$$

Hier benötigen wir zunächst die Entwicklung von  $e^{j(l'\tau_\xi + m'\tau_\eta + n'\tau_\zeta)}$ , die wir mittels Multiplikation aus den Entwicklungen (86) — (96) gewinnen.

Mit

$$(99) \quad \exp[j(l'\tau_\xi + m'\tau_\eta + n'\tau_\zeta)] = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \sum_{L=-\infty}^{+\infty} C_{KL}^{l'm'n'} e^{jK\theta} e^{jL\psi}$$

wird

$$(100) \quad C_{KL}^{l'm'n'} = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \sum_{P=-\infty}^{+\infty} \sum_{M=-\infty}^{+\infty} \varkappa_{NM} \lambda_{PQ} \mu_R$$

wo

$$(101) \quad Q = L - M$$

$$(102) \quad R = K - (N + P).$$

In  $\varkappa, \lambda, \mu$  ist in dem Argument der Besselfunktion ( $l', m', n'$ ) zu setzen.

Gehen wir nun mit (99) in (98) herein, so finden wir mit dem Ansatz

$$(103) \quad \overline{\Delta\varepsilon(\tau, \alpha\xi, \beta\eta, \gamma\zeta) \Delta\varepsilon(\tau, \alpha\xi + \tau_\xi, \beta\eta + \tau_\eta, \gamma\zeta + \tau_\zeta)} = \\ \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \sum_{L=-\infty}^{+\infty} \overline{B_{KL}} e^{jK\theta} e^{jL\psi} \text{ für } B_{KL}$$

$$(104) \quad B_{KL} =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} \sum_{l'=-\infty}^{+\infty} \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \exp\{j[(k+k')\tau + (l+l')\alpha\xi + (m+m')\beta\eta + (n+n')\gamma\zeta]\} \times b_{klmn} b_{k'l'm'n'} C_{KL}^{l'm'n'}$$

Damit (103) unabhängig von  $\psi$  wird in dem ganzen Isotropie-Intervall, ist notwendig und hinreichend, daß außer  $B_{00}$  alle  $\overline{B_{KL}}$  identisch Null werden.

Wie kann man für ein beliebiges  $\tau, \xi, \eta, \zeta$  dieses erreichen? Zunächst machen wir:

$$(105) \quad \overline{b_{klmn}} = 0$$

Ferner machen wir alle  $b_{klmn}$  voneinander unabhängig, und weiterhin muß die Summe der Glieder, die  $\overline{b_{klmn}^2}$  enthalten, verschwinden an der betreffenden Stelle:

$$(106) \quad \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \exp [j 2 (k\tau + l\xi + m\beta\eta + n\gamma\zeta)] \overline{b_{klmn}^2} = 0$$

Damit dies identisch in  $\tau, \xi, \eta, \zeta$  im ganzen Isotropie-Intervall verschwindet, muß

$$(107) \quad \overline{b_{klmn}^2} = 0$$

sein; d. h. aber die Forderung der Isotropie identisch im ganzen homogenen Intervall ist nur mit im quadratischen Mittel verschwindenden Fourierkoeffizienten zu erfüllen.

In Teilintervallen beliebiger Größe ist aber die Bedingung jederzeit mit endlichen  $\overline{b_{klmn}^2}$  zu erfüllen, wie der Verfasser in [19] gezeigt hat.

Befindet man sich am Rande des Bereiches der Isotropie, so muß die Korrelation nach innen zu eine andere sein als die nach außen; wir müssen im Innern bleiben, ohne den Rand zu berühren. Abhängig vom Abstand vom Rand müssen dann die  $\overline{b_{klmn}^2}$  Bedingungen der Art genügen, wie sie vom Verfasser in [19] aufgestellt wurden. Diese Frage wollen wir im folgenden Abschnitt noch diskutieren.

Wir sehen hier also: nimmt man  $b_{klmn}$  unter den Bedingungen

$$(108) \quad \overline{b_{klmn}} = 0, \quad \overline{b_{klmn} b_{k'l'm'n'}} = \overline{b_{klmn}} \cdot \overline{b_{k'l'm'n'}}$$

so hat man nach unserer für das eingeschränkte Intervall vorgeschlagenen Definition homogene und in kleineren Intervallen auch isotrope Turbulenz, wenn die  $b_{klmn}^2$  so bestimmt sind, daß  $B_{NL} = 0$ , außer wenn  $K = 0, L = 0$ .

## 7. KRITERIEN FÜR DAS AUFTRETEN EINES HOMOGEN-STATIONÄRISOTROPEN INTERVALLS UND DAMIT ZUSAMMENHÄNGENDE FRAGEN ZU 6,4

In [19] hat der Verfasser das Problem behandelt:

Welchen Kriterien haben die Koeffizienten einer Fourierreihe zu genügen, damit diese eine Funktion wiedergibt, die in einem Teilintervall der Entwicklungsperiode verschwindet. Dieses Teilintervall war in der dortigen Arbeit zwischen  $0$  und einem Wert  $+b$  an-

genommen worden. Um die Frage hier nicht zu verwirren, wollen wir in einer Dimension bleiben. Um die Ergebnisse anwenden zu können, müssen wir unsere Koeffizienten den hierzu notwendigen Transformationen unterwerfen. Wir müssen unsere Reihen so umschreiben, daß wir die Kriterien von [19] auf sie anwenden können; die Reihe muß periodisch über das Entwicklungsintervall hinaus fortgesetzt werden und der Nullpunkt an den Punkt gelegt werden, wo der Beginn des Nullwerdens zu untersuchen ist. Bleiben wir in der Zeitdimension, so benutzen wir

$$(3) \quad \Delta \varepsilon = \sum_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}_k e^{j \frac{k\pi t}{T}}$$

oder in reeller Schreibweise

$$(8) \quad \Delta \varepsilon = \sum_0^{\infty} C_k^c \cos \frac{k\pi t}{T} + \sum_1^{\infty} C_k^s \sin \frac{k\pi t}{T}$$

Um den Nullpunkt an die Stelle  $t = b$  zu schieben, schreibt man zweckmäßig

$$(108a) \quad t = \tau - b$$

und an Stelle von (3) erhält man nun mit

$$(109) \quad \Delta \varepsilon = \sum_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}_k e^{j \frac{k\pi \tau}{T}}$$

$$(110) \quad \tilde{A}_k = A_k e^{j \frac{k\pi b}{T}}$$

In der reellen Schreibweise würde man erhalten:

$$(111) \quad \tilde{C}_k^s = -C_k^c \sin \frac{k\pi b}{T} + C_k^s \cos \frac{k\pi b}{T}$$

$$(112) \quad \tilde{C}_k^c = C_k^c \cos \frac{k\pi b}{T} + C_k^s \sin \frac{k\pi b}{T}$$

Durch diese Transformation haben wir jetzt den Nullpunkt an die kritische Stelle gelegt. Nun haben wir aber das vollständige Kriterium, das wir in [19] angaben, auf den Fall beschränkt, daß es sich um eine reine Cosinusreihe handelt (l. c. S. 24). Wir könnten jetzt in erweiterter Form dasselbe machen, nämlich ein System von Vektoren im Hilbertschen Raum angeben, das gerade (ein Koeffizientensystem = Vektor) den Unterraum aufspannt, dem die Koeffizientensysteme angehören müssen, damit die Reihe in dem fraglichen Teilintervall identisch verschwindet.

Wir können aber diese mühevollen Rechnungen dadurch umgehen, daß wir unsere Koeffizienten auf die der Cosinusreihe transformieren, was eben auf eine affine Transformation des Hilbertschen Raumes hinausläuft.

Haben wir die  $\tilde{A}_k$ , so sind dies Entwicklungskoeffizienten in einem Intervall der Länge  $2T$ .

Wir wollen nun eine neue Variable  $\tau'$  einführen =  $\frac{\tau}{2}$ , so daß wir in dieser letzteren ein

Intervall der Länge  $T$  bekommen:

$$(113) \quad \tau' = \frac{\tau}{2}, \quad \tau = 2\tau'.$$

Wir nehmen nun unsere schon richtig plazierte Funktion ( $\tau = 0$  am Beginn des fraglichen Nullintervalles) und setzen sie nach  $-\tau$  gerade fort (Abb. 2).

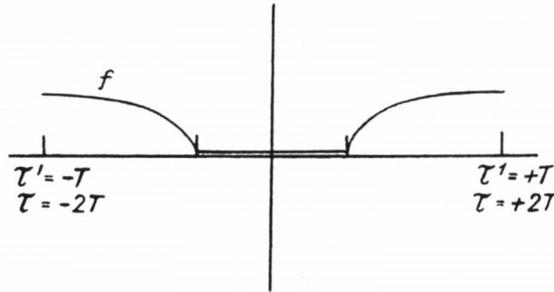


Abb. 2

Entwickeln wir diese Funktion in dem neuen Intervall  $-T < \tau' < +T$  nach  $e^{j \frac{k\pi}{T} \tau'}$ , so bekommen wir lauter reelle Koeffizienten, und wir können die Reihe gleich in eine Cosinusreihe der verlangten Form umschreiben. Wir verwenden das in  $(-T, +T)$  normierte Orthogonalsystem:

$$\frac{1}{2T} \exp \left[ j \frac{k\pi}{T} \tau' \right] \quad (k = 0, 1, \dots)$$

Dieses  $f(t)$  ist dann definiert:

$$(115) \quad \begin{aligned} \text{in } 0 < \tau' < T : f(\tau') &= \sum_{-\infty}^{+\infty} A'_k e^{j \frac{k\pi 2\tau'}{T}} \\ \text{in } -T < \tau' < 0 : f(\tau') &= \sum_{-\infty}^{+\infty} A'_k e^{-j \frac{k\pi 2\tau'}{T}} \end{aligned}$$

Dann bekommt man für die neuen Fourierkoeffizienten, wenn wir jetzt nach  $\tau'$  entwickeln, aus:

$$(116) \quad f(\tau') = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_k e^{j \frac{k\pi \tau'}{T}}$$

für  $B_k$

$$(117) \quad B_k = \int_{-T}^0 e^{-j \frac{k\pi \tau'}{T}} \sum_{-\infty}^{+\infty} A'_k e^{-j \frac{2k'\pi \tau'}{T}} d\tau' + \int_0^{+T} e^{-j \frac{k\pi \tau'}{T}} \sum_{-\infty}^{+\infty} A'_k e^{2j \frac{k'\pi \tau'}{T}} d\tau'$$

Also

$$(118) \quad B_k = \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} A'_k j \left\{ \frac{\left(1 - e^{-j \frac{\pi}{T} (k+2k') T}\right)}{\frac{\pi}{T} (k+2k')} + \frac{\left(e^{-j \frac{\pi}{T} (k-2k') T} - 1\right)}{\frac{\pi}{T} (k-2k')} \right\}$$

Damit haben wir jetzt in  $\tau'$  folgende Entwicklung gewonnen:

$$(119) \quad f(\tau') = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_k e^{j \frac{\pi}{T} k \tau'} = B_0 + 2 \sum_1^{\infty} B_k \cos \frac{\pi k \tau'}{T}$$

Dann hat man als Kriterium, daß die  $B_k$  sich aus dem Vektorensystem von [19] S. 189 aufbauen lassen müssen.

Analog für (6.4) erhalten wir dann für die  $\overline{b_{k l m n}^2}$  durch Übertragung auf den mehrdimensionalen Fall eine Bedingung, die wir aber nicht im einzelnen ausrechnen wollen. Damit nun die Entwicklung (106) auch am Ende des Intervalls ein Teilintervall besitzt, in dem sie identisch verschwindet, muß für dieses Teilintervall dieselbe Rechnung wie in [19] durchgeführt werden, und die  $\overline{b_{k l m n}^2}$  haben dann zwei solchen Bedingungen zu genügen, d. h. sie haben im Hilbertschen Raum dem Durchschnitt der beiden Unterräume anzugehören, die von den Vektoren (= Koeffizientensystemen) aufgespannt werden, die ein Verschwinden der Reihe in einem Teilintervall am Anfang und einem solchen am Ende des Entwicklungsintervalls hervorrufen. Diese Rechnungen können ganz im Rahmen des letzten Abschnittes von [19] bleiben: dort hatten wir die Reihe:

$$(120) \quad f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nt \quad 0 < t < \pi$$

d. h. wir setzen  $t$  für  $\frac{\pi \tau'}{T}$ , d. h. es wird

$$(121) \quad a_0 = B_0, \quad a_n = 2 B_n, \quad n > 0.$$

Diese Funktion (120) sollte in  $0 < \mu\pi < \pi, \mu < 1$  identisch verschwinden. Das Ergebnis war: betrachten wir das Koeffizientensystem

$$(122) \quad a_0, a_1 \dots \quad a_k, \dots a_l \dots$$

als einen unendlich-dimensionalen Vektor im Hilbertschen Raum, so muß dieser nach dem Vektorensystem (172) der zitierten Arbeit ohne Rest zerlegbar sein, was wir nicht explizit hier anschreiben wollen. Soll nun die Reihe auch in  $(\pi - \mu\pi, \pi)$  identisch verschwinden, d. h. in einem Teilintervall der Länge  $\mu\pi$ , aber am oberen Ende des Intervalls, so muß wegen

$$(123) \quad \begin{aligned} \cos n(\pi - a) &= \cos n\pi \cos a = -\cos a \quad n \text{ ungerade} \\ &+ \cos a \quad n \text{ gerade} \end{aligned}$$

das Koeffizientensystem:

$$(124) \quad a_0, -a_1, +a_2, -a_3, \dots + a_{2n}, -a_{2n+1} \dots$$

ebenfalls ohne Rest nach dem in der zitierten Arbeit angegebenen Vektorensystem zerlegbar sein.

## 8. SCHRIFTTUM

1. BASS, Les méthodes modernes du calcul des probabilités et leur application au problème de la turbulence. Rapport technique No. 28 C. R. A. Paris 1946
2. FRENKIEL, Etude statistique de la turbulence, fonctions spectrales et coefficients de la corrélation. Rapport technique No. 34 ONERA
3. LÉVY, Théorie de l'addition des variables aléatoires. Gauthier-Villars, Paris 1937
4. LÉVY, Processus stochastiques et mouvement Brownien. Gauthier-Villars, Paris 1948 (avec une note de M. LOEVE)
5. USPENSKY, Introduction to mathematical probability. McGraw-Hill, New York-London 1937
6. DAVID, Probability theory for statistical methods. Cambridge University Press 1951.
7. CRAMÉR, Mathematical methods of statistics. Princeton University Press 1951
8. KENDALL, The advanced theory of statistics 2 volumes. Charles Griffin and Comp., London 1948
9. BERNSTEIN-SLUTZKY-STEINHAUS, Les fonctions aléatoires. Herrmann, Paris 1938, Actualités scient. et ind. No. 738
10. CRAMÉR-LEVY-MISES, Les sommes et les fonctions des variables aléatoires. Herrmann, Paris 1938, Act. Sc. et Ind. No. 736
11. LAWSON-UHLENBECK, Threshhold signals. McGraw-Hill, New York-Toronto-London 1950 (Rad. Lab. Séries M I T)
12. CHANDRASECKHAR, Stochastic problems in Physics and Astronomy. Rev. of modern physics vol. 15 No. 1 p. 1-89
13. CHEN-WANG-UHLENBECK, On the theory of Brownian motion. Rev. of modern physics vol. 17 No. 253 p. 323-342
14. RICE, Mathematical analysis of random noise. Bell systems technical Journal, July 44, January 45.
15. MOYAL, Stochastic processes and statistical physics. Journal of the royal statistical soc. séries B (methodological vol. XI No. 2, 1949
16. FORTET, Calcul des Probabilités. CNRS édition 1950
17. DOOB, Stochastic Processes. Wiley and Sons, Chapman and Hall 1953
18. BOCHNER, Vorlesungen über Fouriersche Integrale. Ak. Verl.Ges. Leipzig 1933
19. ECKART, Über Fourierreihen, die in einem Teilintervall der Entwicklungsperiode identisch verschwinden (Sitz.-Ber. Bayer. Ak. der Wissenschaften, Math.-nat. Kl., 1953 Nr. 15)
20. BLANC-LAPIERRE FORTET, Les Fonctions aléatoires. Mason, Paris 1953
21. DOETSCH, Theorie und Anwendung der Laplacetransformation. Springer 1937
22. DOETSCH, Handbuch der Laplacetransformation I. Birkhäuser, Basel 1950
23. WIDDER, The Laplace-Transform. Princeton 1946
24. SHOCHAT-TAMARKIN, The problem of Moments. Amer. Math. Soc. 1943
25. COURANT-HILBERT, Methoden der Mathematischen Physik. Springer 1931.
26. TITCHMARSH, Introduction to the Theory of Fourier Integrals. Oxford 1948.

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften - Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1955

Band/Volume: [NF\\_74](#)

Autor(en)/Author(s): Eckart Gottfried

Artikel/Article: [Statistische Beschreibung der dielektrischen Turbulenz in der Troposphäre. Erster Teil einer Theorie der Streuung elektrischer Wellen in turbulenter Atmosphäre 2-34](#)