

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

ABHANDLUNGEN · NEUE FOLGE HEFT 81

WINFRIED OTTO SCHUMANN

Über die zeitliche Form und das Spektrum
ausgesendeter Dipolsignale
in einer dielektrischen Hohlkugel
mit leitenden Wänden

mit besonderer Anwendung auf atmosphärische Signale

Mit 32 Abbildungen

Vorgelegt am 4. Mai 1956

MÜNCHEN 1956

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KOMMISSION BEI DER C.H.BECK'SCHEN VERLAGSBUCHHANDLUNG

INHALT

I. Ausbreitung des Grundfeldes	6
1. Zeitliche Form der Zeichen des Grundfeldes	6
a) Dirac-Impuls	7
b) Einheitsstufe	7
c) Linear ansteigender Strom	8
d) Linear abfallender Strom	9
e) Dreieckstrom	10
f) $(1 - \cos \alpha)$ Strom	12
g) Exponentiell ansteigender und abfallender Strom	14
2. Spektrale Verteilung der Zeichen des Grundfeldes	15
a) Dirac-Impuls	15
b) Einheitsstufe	15
c) $(1 - \cos \alpha)$ Strom	15
d) Linear ansteigender Strom	17
e) Linear abfallender Strom	18
f) Exponentiell ansteigender und abfallender Strom	18
g) Spektrum einer Pulsreihe	19
h) Spektrum einer Reihe von Sinuswellen	21
II. Ausbreitung der Oberfelder	23
1. Zeitlicher Verlauf der Zeichen der Oberfelder	23
a) Verlauf des Zeichenbeginns	24
α) Rechteckimpuls	24
b) Atmosphäre als idealer Hochpaß, vertikaler Dipol, Einheitsstufe	25

c) Paßmethode	31
α) Dämpfung des vertikalen Dipols	33
β) Dämpfung des horizontalen Dipols	34
γ) Amplitude und Dämpfung der Einheitsstufe, des Dirac-Impulses, des exponentiell ansteigenden und abfallenden Stromes und des Hoch- frequenzpulses	35
2. Spektrale Verteilung, z. B. des Rechteckpulses	41
III. Grenzen der Gültigkeit des vorausgesetzten Ausbreitungsspektrums	44
IV. Bipolare Impulse und horizontaler Dipol	48
Zusammenfassung	52
Literatur	53

In einer Reihe von Arbeiten [1] habe ich die Ausbreitung elektrischer Schwingungen vertikaler und horizontaler Dipole in dem Luftraum zwischen Erde und Ionosphäre diskutiert, bei so geringen Frequenzen, daß die Ionosphäre in erster Näherung als Leiter (von $\kappa \sim 10^{-4} \frac{S}{m}$) aufgefaßt werden darf.

In der vorliegenden Arbeit wird die Ausbreitung von Signalen beschrieben, die durch gegebene zeitliche Verläufe des Dipolstromes bestimmt sind, wobei solche zeitliche Verläufe bevorzugt werden, die bei Blitzentladungen wahrscheinlich sind, um sie mit experimentell beobachteten vergleichen zu können. Es wird zunächst die Zeichen, die durch das Grundfeld transportiert werden, sowohl in ihrem zeitlichen als auch in ihrem spektralen Verlauf. Im zweiten Teil werden die Zeichenformen behandelt, die von den Oberfeldern herrühren. Es werden hierzu drei Näherungen verwendet. Zuerst wird die Tatsache benützt, daß kurz nach Beginn des Zeichens nur die hohen spektralen Frequenzen bestimmend sind, d. h. daß die Zeichen in diesem Stadium prinzipiell wie die Zeichen des Grundfeldes verlaufen, nur mit der doppelten Amplitude und der doppelten Dämpfung. Die zweite Näherung setzt voraus, daß die Atmosphäre für die Oberfelder sich wie ein Hochpaß verhält, der eine untere Grenzfrequenz ω_k besitzt. Die dritte Näherung schließlich versucht die komplizierten Ausbreitungsintegrale mit Hilfe der Paßmethode für den späteren Verlauf des Zeichens zu lösen. Anschließend werden dann die spektralen Zeichenverteilungen diskutiert, die von den Oberfeldern herrühren. Im dritten Teil werden auf Grund experimenteller Ergebnisse die Grenzen des Frequenzbereichs besprochen, innerhalb deren die Vorstellung einer leitenden Ionosphäre zulässig ist.

Im letzten Abschnitt werden bipolare Impulse und die Zeichen des horizontalen Dipols kurz behandelt.

I. AUSBREITUNG DES GRUNDFELDES

1. DIE ZEITLICHE FORM DER ZEICHEN

Wird ein Blitz als ein senkrechter Dipol aufgefaßt, dessen Strom ein Signal von der Frequenz ω aussendet, so ergibt sich nach [1] die radiale Feldstärke senkrecht zur Erdoberfläche für das Grundfeld im Strahlungsfeld als

$$E_{r|_m} = C \frac{1}{\sqrt{D}} \sqrt{\dot{p}} e^{-\beta\tau - \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\dot{p}}} \quad \text{I 1}$$

wenn D die Distanz längs der Erdoberfläche in m , $\dot{p} = j\omega$ und $\alpha = \frac{D^2}{4H^2} \cdot \frac{\varepsilon}{\varkappa}$ bedeuten. H ist die Höhe der Unterkante der als homogen und als Leiter angenommenen Ionosphäre, ε und \varkappa sind D. K. und Leitwert der Ionosphäre. $C = 6 \cdot 10^{-3} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \cdot \frac{Jh}{H} \sqrt{\frac{\vartheta}{\sin \vartheta}}$, J ist der Strom, h die Länge des Blitzes, $\tau = \frac{D}{c}$ und ϑ die Winkeldistanz vom Ort des Blitzes.

Die in Frage kommenden Werte von α sind

\varkappa	$10^{-4} \frac{S}{m}$	$10^{-6} \frac{S}{m}$
$D = H$	$2,2 \cdot 10^{-8}$	$2,2 \cdot 10^{-6}$
$D = 10 H$	$2,2 \cdot 10^{-6}$	$2,2 \cdot 10^{-4}$
$D = 100 H$	$2,2 \cdot 10^{-4}$	$2,2 \cdot 10^{-2}$

Für diese Form der Ausbreitung ergibt sich die Phasengeschwindigkeit als

$$v_p = \frac{c}{1 + \frac{c}{2\sqrt{2}H} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\omega\varkappa}}} \quad \text{und die Gruppengeschwindigkeit als } v_g = \frac{c}{1 + \frac{c}{4\sqrt{2}H} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varkappa\omega}}}$$

Beide sind bei kleinen Frequenzen ω gering und steigen mit wachsender Frequenz bis zur Lichtgeschwindigkeit an. Das „Ausbreitungsspektrum“ der Frequenz ω ist $\sqrt{\dot{p}} \exp(-\sqrt{\alpha\dot{p}})$. Der Faktor $e^{-\beta\tau}$ bedeutet lediglich, daß der Zeichenbeginn mit Lichtgeschwindigkeit vom Sender zum Empfänger wandert. Dieses Spektrum ist mit dem Spektrum des Stromverlaufs zu multiplizieren und das Fourierintegral nach der Frequenz gibt den zeitlichen Verlauf des Zeichens. Im Zeitverlauf bedeutet dann t die Zeit seit Beginn des Zeichens.

a) Dirac-Impuls des Dipolstromes

Der Einheitsimpuls hat für alle Frequenzen die spektrale Amplitude 1. Das Spektrum des ausgesendeten Signals ist also $\sqrt{p} \exp(-\sqrt{\alpha p})$ und der daraus folgende zeitliche Verlauf des Signals

$$E_r \frac{\sqrt{D}}{C} = \frac{1}{\alpha^{3/2}} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2x} - 1 \right) \frac{1}{x^{3/2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{4x}\right), \quad x = \frac{t}{\alpha}.$$

Die Funktion, Abb. 1, beginnt mit einer positiven Halbwelle, erreicht ihr Maximum für $x = 0,09$, geht bei $x = \frac{1}{2}$ durch Null und durchläuft für $x = 0,91$ ein negatives Maximum.

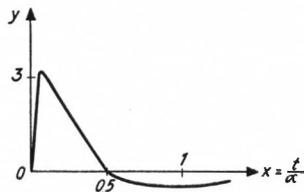


Abb. 1

Ausbreitung des Dirac-Impulses,

$$y = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2x} - 1 \right) \frac{1}{x^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4x}\right)$$

b) Einheitsstufe des Dipolstroms

Für die Einheitsstufe des Stromes mit dem Spektrum $\frac{1}{p}$ ist das Signalspektrum $\frac{1}{\sqrt{p}} \exp(-\sqrt{\alpha p})$ und der auftretende zeitliche Verlauf $E_r = \frac{C}{\sqrt{D}} \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{1}{4x}\right)$. Die Funktion hat ein Maximum für $x = \frac{1}{2}$ und fällt dann langsam ab, Abb. 2, Kurve 1. Die Zeit vom Einsatz des Signals bis zum Erreichen des Maximums wächst also proportional mit dem Quadrat der Entfernung, genauso wie beim Dirac-Impuls des Stromes. Das Maximum von E_r nimmt hier nur mit $1/D^{1/2}$ ab, im Gegensatz zum Dirac-Impuls, dessen Maximum mit $1/D^{3/2}$ abnimmt.

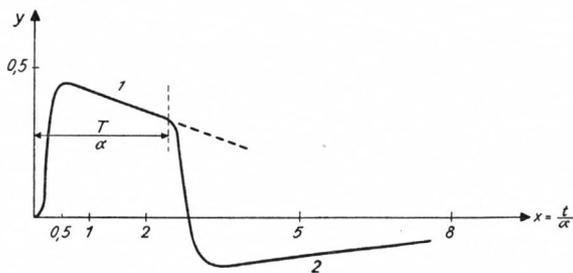


Abb. 2

Ausbreitung des Rechteckimpulses, $y = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \exp\left[-\frac{1}{4x}\right]$ für die Einheitsstufe

Bei einem zeitlichen Rechteckverlauf des Stromes von der Dauer T setzt nach der Zeit T eine negative Einheitsstufe ein, Abb. 2, Kurve 2, die die erste auf Null bringt.

¹ Siehe G. A. CAMPBELL und R. M. FOSTER, Fourier Integrals for Practical Applications. Bell Syst. Mon. B 584 N. Y. 1931, Nr. 806, S. 93, dem die meisten der angegebenen Fourierintegrale entnommen sind.

c) Linear ansteigender Strom

Als Beispiel endlicher Stromdauer sei zunächst der *lineare Anstieg* betrachtet $i = \frac{J_0}{T} t$; sein Spektrum ist $\frac{J_0}{T p^2} [1 - (pT + 1) e^{-pT}]$, Abb. 3.

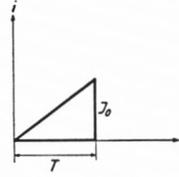


Abb. 3

und sein Ausbreitungsspektrum ist:

$$\frac{C}{T\sqrt{D}} \left[\frac{1}{p^{3/2}} e^{-p\tau} - \left(\frac{T}{p^{1/2}} + \frac{1}{p^{3/2}} \right) e^{-p(\tau+T)} \right] \exp(-\sqrt{\alpha} \sqrt{p}).$$

Nach der Zeit τ fällt das Zeichen mit dem Spektrum $\frac{1}{p^{1/2}} \exp(-\sqrt{\alpha} \sqrt{p})$ ein, und um die Zeit T später das Zeichen $-\left(\frac{T}{p^{1/2}} + \frac{1}{p^{3/2}}\right) \exp(-\sqrt{\alpha} \sqrt{p})$.

Das Spektrum $\frac{1}{p^{3/2}} \exp(-\sqrt{\alpha} \sqrt{p})$ gibt das Zeitzeichen

$$\frac{E_r \sqrt{D}}{C} \cdot T = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha}{4t}\right) - \sqrt{\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{t}}\right),$$

wobei $\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z)$, und $\operatorname{erf}(z)$ die GAUSS'sche Fehlerfunktion $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-z^2) dz$ ist. Mit $x = \frac{t}{\alpha}$ wird

$$y = \frac{E_r \sqrt{D}}{C} T = \sqrt{\alpha} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x} \exp\left(-\frac{1}{4x}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \right\}. \quad \text{I 2}$$

Die Kurve $\frac{y}{\sqrt{\alpha}}$ ist in Abb. 4 dargestellt:

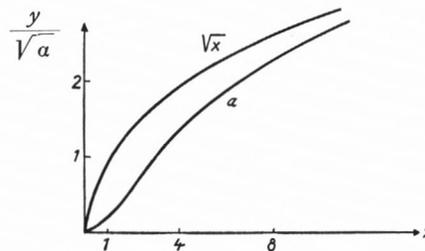


Abb. 4

$$\frac{y}{\sqrt{\alpha}} = E_r \frac{\sqrt{D}}{C} \frac{T}{\sqrt{\alpha}}$$

a Zeitzeichen des Spektrums $\frac{1}{p^{3/2}} \exp(-\sqrt{\alpha p}) \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$,

$$\frac{y}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x} \exp\left(-\frac{1}{4x}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

Nach der Zeit T setzt der Verlauf

$$T \frac{E_r \sqrt{D}}{C \sqrt{\alpha}} = \frac{T}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x'}} \exp\left(-\frac{1}{4x'}\right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x'} \exp\left(-\frac{1}{4x'}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{x'}}\right)$$

ein, wobei jetzt x' von dem neuen Anfangspunkt auszurechnen ist, Abb. 5.

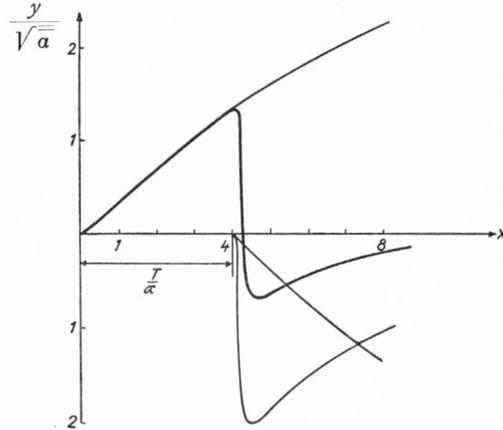


Abb. 5. Zeitlicher Verlauf der Ausbreitung des Stromverlaufs, Abb. 3 für $T = 4\alpha$

Die Kurve kommt dadurch immer ins Negative, um so mehr, je größer $\frac{T}{\alpha}$ ist (d. h. $\frac{T}{D}$ ist).

d) Linear abfallender Strom

Vergleicht man das Signal *eines linear anwachsenden* Stromes nach Abb. 3, der plötzlich abbricht, mit dem Signal *eines plötzlich anspringenden* Stromes nach Abb. 6, der *linear auf Null abnimmt*, so ist dessen Spektrum

$$J_0 \left\{ \frac{1}{p} - \frac{1}{T p^2} + \frac{1}{T p^2} \exp(-p T) \right\}.$$

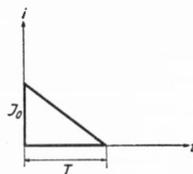


Abb. 6

Verglichen mit dem Spektrum des linear ansteigenden Stromes

$$J_0 \left\{ \frac{1}{T p^2} - \exp(-p T) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{T p^2} \right) \right\},$$

erkennt man den Unterschied der Signalformen. Während beim ansteigenden Strom zuerst das Signal des linearen Zeitanstiegs kommt und nach der Zeit T die negative Einheits-

sture und das negative Signal des Anstiegs, erscheint beim abfallenden Strom zuerst das Signal der Einheitsstufe gemeinsam mit dem des negativen Anstiegs, und nach der Zeit T erscheint dann das Signal des positiven Anstiegs. Abb. 7 zeigt den Signalverlauf wieder mit $\frac{T}{\alpha} = 4$ wie bei Abb. 5.

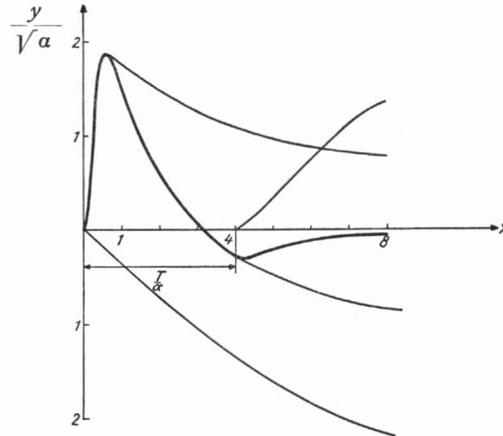


Abb. 7

Zeitlicher Verlauf der Ausbreitung des Stromverlaufs, Abb. 6
für $T = 4\alpha$

Bezogen auf den Ladungsverlauf des Dipols mit $i = -\frac{dq}{dt}$ bedeuten die beiden Signale Ladungsverläufe der Formen a) oder b) nach Abb. 8,

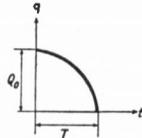


Abb. 8 a

Ladungsverlauf bei Stromverlauf, Abb. 3

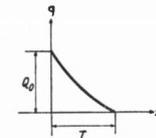


Abb. 8 b

Ladungsverlauf bei Stromverlauf, Abb. 6

wie sie beide im elektrostatischen Feld von Gewitterentladungen vorkommen (E. T. PIERCE [3].)

e) Dreieckskurve des Stromes

Um auch der beobachteten glatten Entladungsform ohne Ecken nahezukommen, Abb. 9, kann man in erster Näherung eine *dreieckige Stromkurve* der Form nach Abb. 10 benützen.

$$i = \frac{2J_0}{T} t \text{ von } t = 0 \text{ bis } t = \frac{T}{2}$$

$$i = 2J_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right) \text{ von } t = \frac{T}{2} \text{ bis } t = T.$$

Das Spektrum dieser Kurve ist

$$\frac{2J_0}{T} \frac{1}{p^2} \left[1 - 2 \exp\left(-\frac{pT}{2}\right) + \exp(-pT) \right].$$

Es treten nur die Spektren der linearen Stromzu- und -abnahme auf und keine Einheitsstufe. Nach der Zeit $T/2$ und T wiederholt sich das Anfangssignal, nach $T/2$ mit doppelter

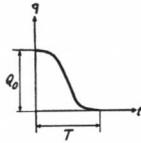


Abb. 9

Ladungsverlauf bei Stromverlauf, Abb. 10

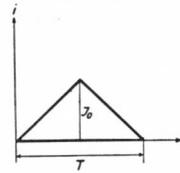


Abb. 10

„Dreieckstrom“

Amplitude und negativ, nach T mit einfacher Amplitude und positiv. Mit Berücksichtigung der Ausbreitung ist dann das Spektrum des Signals

$$E_r = \frac{C}{\sqrt{D}} \cdot \frac{2}{T} \frac{1}{p^{3/2}} \left[1 - 2 \exp\left(-\frac{pT}{2}\right) + \exp(-pT) \right] \cdot \exp(-p\tau - \sqrt{\alpha} \sqrt{p}).$$

Das Zeitzeichen für das Spektrum $\frac{1}{p^{3/2}} \exp(-\sqrt{\alpha} \sqrt{p})$ ist bereits Abschn. I 1c, Gl. I 2 angegeben. In Abb. 11 ist der zeitliche Verlauf des Signals für $\frac{T}{\alpha} = 8$ und $\frac{T}{\alpha} = 16$ dargestellt mit Gl. (I 2)

$$\frac{E_r \sqrt{D}}{C} \frac{T}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x} \exp\left(-\frac{1}{4x}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

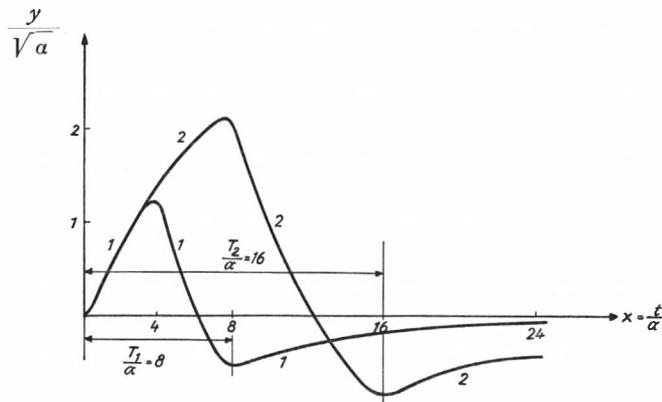


Abb. 11

Ausbreitung des „Dreieck“stromes, Abb. 10

Kurve 1: $\frac{T}{\alpha} = 8$.

Kurve 2: $\frac{T}{\alpha} = 16$

Kurve 2 geht wie $\frac{\alpha^2}{4x^{3/2}}$ gegen 0 bei $x \rightarrow \infty$

$$\frac{y}{\sqrt{\alpha}} = \frac{E_r}{\sqrt{\alpha}} \frac{\sqrt{D}}{C} \cdot T$$

Es tritt erst eine verzerrte positive Welle auf, der eine kleinere allmählich verschwindende negative Welle folgt.

Das Maximum des Zeichens wird für $t \approx \frac{T}{2}$ erreicht. Ist $\frac{T}{\alpha} \gg 1$ (s. folgenden Abschn.), so ist die Amplitude proportional zu $\frac{1}{\sqrt{DT}}$. Sein Höchstwert nimmt also nur langsam mit der Entfernung ab, mit $D^{-\frac{1}{2}}$, verglichen mit einem sehr spitzen Impuls, z. B. dem Dirac-Impuls, dessen Amplitude mit $D^{-\frac{3}{2}}$ abnimmt. An sich ist das Zeichen um so kleiner, je größer T ist, d. h. je langsamer der Strom des Dipols ansteigt. „Langsamere“ Zeichen geben also „schwache“ Signale, die aber mit der Entfernung viel langsamer verschwinden als sehr spitze Zeichen. Wird hingegen $\frac{T}{\alpha} \ll 1$, so wird das Zeichen mit der Entfernung rasch sehr klein. Die Grenze beider Gebiete kann etwa bei $T = \alpha$ gesetzt werden. Dies ergibt $T = \frac{1}{4} \left(\frac{D}{H}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\epsilon}{\kappa}$. Mit $\kappa = 10^{-4} \frac{S}{m}$ wird für $D = 10 H$, $T \approx 2,5 \mu\text{sek}$, für $D = 100 H$, $T \approx \frac{1}{4} \text{ msek}$. Für $\kappa = 10^{-6} \frac{S}{m}$ wird T etwa 100 mal größer. Man sieht den großen Einfluß, den H , d. h. die Höhe des Luftraums, auf die Entfernung hat, bis zu der die Zeichen relativ langsam abnehmen, da $D = 2H \sqrt{\frac{T\epsilon}{\kappa}}$ ist. In großen Entfernungen werden also, wie von der Leitungstheorie her bekannt, alle Zacken und schnellen Pulsationen schon weggedämpft sein und nur die niedersten vorkommenden Frequenzen des Zeichens übrigbleiben.

f) Trapezkurve des Stromes.

Eine bessere Annäherung an einen Stromimpuls, der „allmählich“ im Endlichen ansteigt und wieder verschwindet, gibt die $(1 - \cos \alpha)$ -Kurve, die durch einen trapezförmigen Verlauf des Stromes sehr angenähert darzustellen ist,

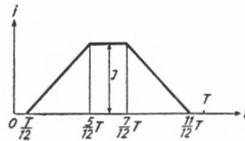


Abb. 12

Annäherung des Stromes $(1 - \cos \alpha)$, $\alpha = 2\pi \frac{t}{T}$, durch ein Trapez

Dieser Verlauf führt auf bekannte einfache Fourierintegrale und approximiert die \cos -Funktion bekanntlich sehr gut. Das Fourierspektrum ist, mit $a = 1/12$

$$\frac{J}{T} \frac{3}{p^2} \left[\exp(-apT) - \exp(-5apT) - \exp(-7apT) + \exp(-11apT) \right], \quad p = j\omega$$

und multipliziert mit dem Ausbreitungsspektrum ergibt sich

$$\frac{E_r \sqrt{D}}{C} = \exp(-p\tau) \cdot \frac{3}{T} \frac{1}{p^{3/2}} \exp(-\sqrt{\alpha} \sqrt{p}) \left[\exp(-apT) - \exp(-5apT) - \exp(-7apT) + \exp(-11apT) \right]$$

Das Zeitzeichen für $\frac{1}{\rho^{3/2}} \exp\left(-\sqrt{\alpha} \sqrt{\rho}\right)$ ist auf Seite 8 Gl. I 2 angegeben als

$$y = \sqrt{\alpha} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x} \exp\left(-\frac{1}{4x}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \right\} \text{ mit } x = \frac{t}{\alpha}, \sqrt{\alpha} = \frac{D}{2H} \sqrt{\frac{\varepsilon}{K}}.$$

Für sehr geringe Dämpfung bzw. sehr geringe Abstände, $t \gg \alpha$, $x \gg 1$, geht es über in

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\alpha} \sqrt{x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t},$$

dagegen für $x \ll 1$, $t \ll \alpha$, sehr große Dämpfung bzw. sehr große Abstände geht es über in

$$\sqrt{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{3/2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{4x}\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\alpha} t^{3/2} \cdot \exp\left(-\frac{\alpha}{4t}\right).$$

Zur Zeit $\tau = \frac{D}{c}$ nach dem Verlassen der Quelle ist der „Beginn“ des Signals. Nach der Zeit $a \cdot T$ von da ab gerechnet trifft das erste Signal y ein, in dem t von $(\tau + a \cdot T)$ abgerechnet ist. Zu den späteren Zeiten $5a \cdot T$, $7a \cdot T$ und $11a \cdot T$ treffen weitere Signale der Form y ein, bei denen jeweils t von dem Beginn des Eintreffens der betreffenden Signale an zu rechnen ist. Für den Fall, daß nach Verstreichen der Zeitintervalle $a \cdot T$, $5a \cdot T$ usw. x bereits so groß geworden ist, daß $y \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t}$ gesetzt werden darf (also für geringe Dämpfung bzw. geringen Abstand), zeigt Abb. 13 den zeitlichen Verlauf des Signals. Es ist dann annäherungsweise der Verlauf des Signals gegeben durch

$$y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \sqrt{t-m} - \sqrt{t-5m} - \sqrt{t-7m} + \sqrt{t-11m} \right\}, m = \frac{T}{12},$$

wobei in dieser Form t vom Signalbeginn, also von der Zeit τ ab gerechnet wird und jede Wurzel erst wirksam wird, wenn der Radikand größer als Null ist. In dieser Näherung ist die Form des Zeichens nicht von der Entfernung abhängig, sondern nur seine Größe.

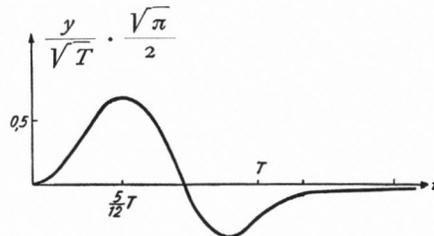


Abb. 13

Ausbreitung des $(1 - \cos \alpha)$ Stromes, Abb. 12, nahe der Quelle.

$$T \gg 12a$$

$$\frac{y}{\sqrt{T}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{E_r}{C} \sqrt{DT} \cdot \frac{1}{3}$$

In diesem Gebiet ist die Amplitude von y unabhängig von α , d. h. von der Entfernung, und E_r ist proportional zu $\frac{1}{\sqrt{DT}}$. Ist nun (bei größerer Dämpfung, bzw. größerem

Abstand) $\frac{aT}{\alpha}$ nicht so groß, daß die oben benützte Näherungsformel angewendet werden kann, sondern daß der exakte Verlauf der Funktion y (nach Abb. 4) benützt werden muß, so zeigt die Abb. 14 den Verlauf für $\frac{T}{12\alpha_1} = \frac{1}{2}$ in Kurve 1, und für $\frac{T}{12\alpha_2} = \frac{1}{8}$ (d. h. im doppelten Abstand D von der Quelle) in Kurve 2 abhängig von der Zeit t seit „Beginn“ des Signals, wobei also $\alpha_2 = 4\alpha_1$ ist.

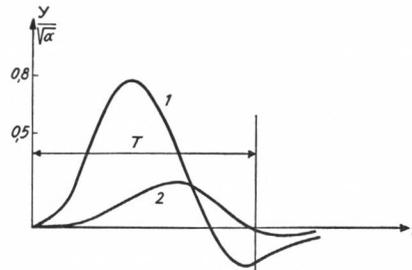


Abb. 14

Ausbreitung des $(1 - \cos \alpha)$ Stromes, Abb. 12, in größeren Abständen von der Quelle

$$\text{Kurve 1: } \frac{T}{\alpha} = 6.$$

$$\text{Kurve 2: } \frac{T}{\alpha} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{y}{\sqrt{\alpha}} = \frac{E_r \sqrt{D}}{C} \cdot \frac{T}{3\sqrt{\alpha}}, \quad \alpha_2 = 4\alpha_1.$$

Man sieht aus der Abbildung, wieviel langsamer die Welle im doppelten Abstand ansteigt und wie die Länge der positiven Halbwelle mit dem Abstand anwächst. Die Amplitude von $y/\sqrt{\alpha}$ ist bei Kurve 2 auf $\sim \frac{1}{4}$ des Wertes bei Kurve 1 gefallen und damit der Wert von E_r auf $\sim 0,35$. Nimmt man etwa den zeitlichen Anstieg des Signals von kleinen Werten bis zum Maximum in der Nähe der Quelle zu $\sim 500 \mu\text{sek}$ an, wie HEPBURN und PIERCE [10] für den „slow tail“ angeben, so würde dies nach Abb. 13 etwa $\frac{T}{3}$ sein, und $T = 1500 \mu\text{sek}$ sein. In Abb. 14, Kurve 2, ist diese Anstiegszeit auf $\sim \frac{T}{2}$ gewachsen, d.h. auf das 1,5fache. Nach HEPBURN und PIERCE entspricht dies einer Entfernung von $\sim 1000 \text{ km}$ bei Tag und $\sim 2500 \text{ km}$ bei Nacht. Für $T = 1,5\alpha$, wie in Abb. 14, Kurve 2 würde das ein α von $\sim 10^{-3}$ verlangen. Setzt man eine Ionosphärenhöhe $H = 100 \text{ km}$ voraus, so würde daraus ein Leitwert von $\kappa \approx 2,5 \cdot 10^{-4} \frac{S}{m}$ bei Tag und $1,5 \cdot 10^{-3} \frac{S}{m}$ bei Nacht folgen. Nimmt man bei Tag eine Höhe $H = 50 \text{ km}$ an, so würde bei Tag $\kappa \approx 10^{-3} \frac{S}{m}$ folgen. Man braucht also gar keinen so sehr kleinen Leitwert, um eine derartige Verschleifung eines solchen Zeichens zu erklären.

g) Exponentiell ansteigender und abfallender Strom

Den zeitlichen Verlauf des Signales eines nach abklingenden Exponentialfunktionen verlaufenden Stromes $A(e^{-at} - e^{-bt})$ hat H. G. STÄBLEIN [2] diskutiert.

2. DIE SPEKTRALE VERTEILUNG DER ZEICHEN DES GRUNDFELDS

Da ein ganz wesentlicher Teil der Gewitterforschung auf der Beobachtung der spektralen Zerlegung des Zeichens beruht, sollen auch noch einige typische Spektren besprochen werden:

Da bisher nur die absoluten Werte der spektralen Komponenten gemessen wurden, beschränken wir uns auf die Angabe der Absolutwerte.

a) Dirac-Impuls

Der *Dirac-Impuls* gibt mit dem Ausbreitungsspektrum die spektrale Verteilung $\sqrt{p} \cdot \exp(-\sqrt{\alpha} \sqrt{p})$, deren Absolutwert $\sqrt{\omega} \exp\left(-\frac{\sqrt{\alpha}}{2} \sqrt{\omega}\right)$ ist. In Abb. 15 ist der Verlauf angegeben.

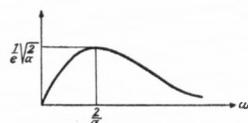


Abb. 15

Ausbreitungsspektrum des Dirac-Impulses

Die Lage des spektralen Maximums $\frac{2}{\alpha}$ verschiebt sich proportional $\frac{1}{D^2}$ ins Gebiet tieferer Frequenzen mit wachsendem Abstand. Die maximale Amplitude nimmt proportional $\frac{1}{D}$ mit dem Abstand ab.

b) Einheitsstufe

Die *Einheitsstufe* ergibt das resultierende Spektrum $\frac{1}{\sqrt{\omega}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\omega}\right)$, das bei $\omega = 0$ gegen ∞ geht und monoton mit der Frequenz abfällt.

c) $(1 - \cos \alpha)$ -Impuls

Das Spektrum des $(1 - \cos \alpha)$ -Impulses, Abb. 16,

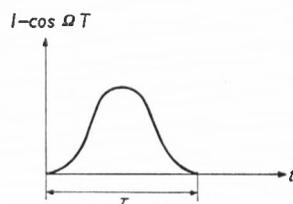


Abb. 16

$$(1 - \cos \alpha) \text{ Strom. } \Omega = \frac{2\pi}{T}, \alpha = \frac{2\pi}{T} t$$

das bei der Berechnung des Fourierintegrals angenähert durch ein gleichzeitiges Trapez dargestellt wurde, um eine einfache und strenge Lösung des Fourierintegrals zu erhalten, kann direkt aus der cos-Funktion berechnet werden als

$$[(1 - \exp(-pT))] \frac{\Omega^2}{p(p^2 + \Omega^2)}, \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Multipliziert mit der Ausbreitungsfunktion $\sqrt{p} e^{-\sqrt{\alpha} \sqrt{p}}$ ist das Spektrum des Signals

$$[1 - \exp(-pT)] \frac{\Omega^2}{\sqrt{p}(p^2 + \Omega^2)} \exp(-\sqrt{\alpha} \sqrt{p}),$$

dessen Absolutwert

$$2 \left| \sin \frac{\omega T}{2} \right| \cdot \frac{\Omega^2}{\sqrt{\omega} |\Omega^2 - \omega^2|} \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\omega}\right)$$

ist. Abgesehen von dem Exponentialfaktor beginnt das Spektrum mit dem Wert Null bei $\omega = 0$, durchläuft ein erstes Maximum sehr nahe bei $\omega = \frac{\Omega}{2}$, $f = \frac{1}{2T}$ und einen ersten Nullwert bei $\omega = 2\Omega$, $f = \frac{2}{T}$. Es folgt darauf eine unendliche Menge von Maxima, das nächste zwischen $\omega = 2\Omega$ und $\frac{5}{2}\Omega$, und von Nullwerten, die bei $\omega = g\Omega$, $g = 3, 4, 5, \dots$ auftreten und die mit wachsender Frequenz abnehmen. Bei höheren Frequenzen verläuft die Enveloppe nach dem Gesetz $\frac{1}{\omega^{1/2}}$. Der Punkt $\omega = \Omega$, $f = \frac{1}{T}$ spielt keine singuläre Rolle.

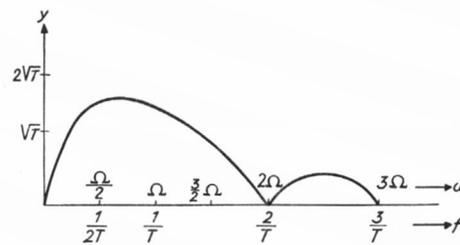


Abb. 17

Ausbreitungsspektrum des $(1 - \cos \alpha)$ Stromes, Abb. 16

$$y = 2 \left| \sin \frac{\omega T}{2} \right| \frac{\Omega^2}{\sqrt{\omega} |\Omega^2 - \omega^2|}$$

$$\omega = \frac{\Omega}{2}, \quad y = 1,5 \sqrt{T}$$

$$\omega = \Omega, \quad y = 1,27 \sqrt{T}$$

Abb. 17 gibt eine Darstellung des Verlaufs. Mit Berücksichtigung der Dämpfung kann man setzen

$$y \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\omega}\right) = u.$$

Für das Maximum von u , $\frac{du}{d\omega} = 0$ folgt

$$\frac{dy}{d\omega} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \frac{y}{\sqrt{\omega}}.$$

Das Maximum des Spektrums wird also mit wachsender Dämpfung kleiner und rückt zu kleineren Frequenzen. Das gilt insbesondere für die Abhängigkeit des Spektrums von der Entfernung D von der Quelle ($\sqrt{\alpha}$ ist proportional D). Mit wachsender Frequenz nimmt die Größe des Spektrums mit $e^{-\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\omega}}$ ab, so daß bei großen Abständen nur das erste Segment von $\omega = 0$ bis 2Ω praktisch übrigbleibt.

d) Linear ansteigender Strom

Als Beispiel unsymmetrischer Impulse seien noch die Fälle von Abb. 3 und Abb. 6 betrachtet, der *linear ansteigende und plötzlich abfallende Strom und der sehr rasch ansteigende und dann langsamer abfallende Strom*).

Der *linear ansteigende Strom* ergibt nach Abschn. I 1 c den spektralen Verlauf des Signals als

$$\frac{1}{T} \cdot \left[\frac{1}{p^{3/2}} - \left(\frac{T}{p^{3/2}} + \frac{1}{p^{3/2}} \right) \exp(-pT) \right] \cdot e^{-\sqrt{\alpha} p}.$$

Der Absolutwert dieses Spektrums ist, abgesehen vom Dämpfungsfaktor $e^{-\sqrt{\frac{\alpha \omega}{2}}}$ gleich

$$T^{3/2} \cdot \sqrt{\frac{1}{(\omega T)^3} [(\omega T)^2 + 2(1 - \cos \omega T) - 2 \omega T \cdot \sin \omega T]}.$$

In Abb. 18 ist der Ausdruck unter der Wurzel y als Funktion von ωT dargestellt. Das Spektrum legt sich mit abnehmenden Wellungen um die Hyperbel $\frac{1}{\omega T}$.

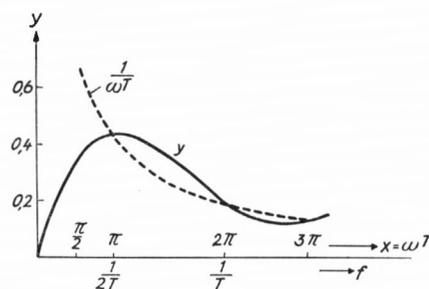


Abb. 18

Ausbreitungsspektrum der linearen Stromverläufe, Abb. 3 und Abb. 6

$$y = \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3} \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2}{x^2} \sin x \quad x = \omega T$$

Der nicht berücksichtigte Dämpfungsfaktor $e^{-\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\omega}}$ bewirkt, daß das Spektrum rascher in der Richtung wachsender Frequenzen abnimmt, und daß das Maximum sich in der Richtung abnehmender Frequenz verschiebt.

e) Linear abfallender Strom

Bestimmt man nun das Signalspektrum des *plötzlich anspringenden und dann langsam abklingenden Stromes* (siehe Abschn. I 1 d)

$$\frac{1}{T} \left[\frac{T}{p^{1/2}} - \frac{1}{p^{3/2}} + \frac{1}{p^{3/2}} \exp(-pT) \right] \cdot e^{-\sqrt{\alpha} \sqrt{p}},$$

so ergibt sich genau derselbe Verlauf des absoluten Wertes des Spektrums wie bei dem obigen Fall des linear ansteigenden und dann plötzlich abreißen Stromes. Es ist das ein typisches Beispiel, wie vorsichtig man sein muß, wenn man aus dem Spektralverlauf auf die zeitlichen Abläufe Schlüsse ziehen will, wenn nur die absoluten Werte des Spektrums bekannt sind und nicht die Phasenwinkel der einzelnen Frequenzen.

f) Exponentiell steigender und fallender Strom

Der von H. G. STÄBLEIN [2] behandelte Fall, daß der *Strom nach Exponentialfunktionen ansteigt und abfällt*, $i = e^{-at} - e^{-bt}$, Abb. 19,

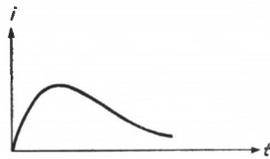


Abb. 19

Exponential ansteigender und abfallender Strom

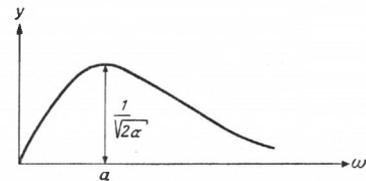


Abb. 20

Ausbreitungsspektrum des Exponentialstromes, Abb. 19

ergibt multipliziert mit der Ausbreitungsfunktion das Signalspektrum

$$\sqrt{p} \left(\frac{1}{p+a} - \frac{1}{p+b} \right) \exp(-\sqrt{\alpha} \sqrt{p}).$$

Abgesehen von der Exponentialfunktion ist der Absolutwert des Spektrums

$$y = (b-a) \sqrt{\frac{\omega}{(\omega^2+a^2)(\omega^2+b^2)}}.$$

Das Maximum des Spektrums liegt bei

$$\omega_m^2 = -\frac{a^2+b^2}{6} + \frac{1}{6} \sqrt{a^4+b^4+14a^2b^2};$$

ist nun $b \gg a$, d. h. steigt der Strom sehr rasch an und fällt dann langsam ab, so wird $\omega_m \approx a$ und $y_m \approx \frac{1}{\sqrt{2a}}$. Das Spektrum hat im Endlichen keine Nullwerte und fällt bei großem ω mit $\frac{1}{\omega^{3/2}}$ ab. Abb. 20 gibt eine schematische Skizze.

Es macht sich also im Spektrum nur der langsame Abfall des Stromes geltend, während der rasche Stromanstieg nur geringen Einfluß hat. Der Dämpfungsfaktor macht sich wieder in einer Verkleinerung des Maximums und Verschiebung desselben zu kleineren Frequenzen bemerkbar.

g) Spektrum einer Pulsreihe

Wiederholen sich regelmäßig dieselben Impulse n mal (wie es z. B. beim stepped-leader, der ruckweisen Vorentladung eines Blitzes, der Fall zu sein scheint) und ist τ die Pulsdauer, T die Wiederholungszeit, Abb. 21,

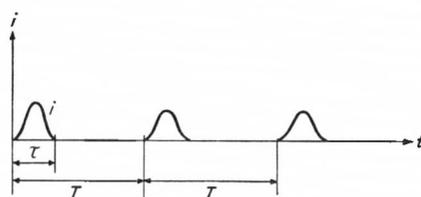


Abb. 21

Regelmäßig wiederholter Impuls

so ergibt sich ein Spektrum von

$$\int_0^{\tau} i(t) \cdot e^{-pt} dt + \int_T^{T+\tau} i(t) \cdot e^{-pt} dt + \dots + \int_{(n-1)T}^{(n-1)T+\tau} i(t) \cdot e^{-pt} dt.$$

Mit der Substitution $t' = t - mT$ im Integral

$$\int_{mT}^{mT+\tau} i(t) \cdot e^{-pt} dt$$

ergibt sich daraus

$$\int_0^{\tau} i(t' + mT) e^{-p(t' + mT)} dt'$$

und da $i(t' + mT) = i(t')$ ist, folgt

$$e^{-p m T} \int_0^{\tau} i(t') e^{-p t'} dt'.$$

Wird $\int_0^{\tau} i(t') \cdot e^{-p t'} dt'$, das Spektrum des einzelnen Impulses, mit $v(p)$ bezeichnet, so ergibt die Summation

$$v_p [1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \dots + e^{-(n-1)T}] = v_p \cdot \frac{1 - e^{-pTn}}{1 - e^{-pT}}. \tag{Gl. I 3}$$

Das Spektrum der Reihe ist also das Spektrum des Einzelpulses multipliziert mit $\frac{1 - e^{-nT\dot{p}}}{1 - e^{-T\dot{p}}}$, dessen Absolutwert $\frac{\sin \frac{nT\omega}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}}$ ist. Das Spektrum wird kanneliert und hat regelmäßige Nullwerte für $\frac{nT\omega}{2} = g\pi$, $\omega = g \frac{2\pi}{nT}$, $f = \frac{g}{nT}$. Der niedrigste Frequenzwert, bei dem es verschwindet, ist also $f = \frac{1}{nT}$. Eine Ausnahme machen nur die Frequenzen $\frac{\omega T}{2} = \pi k$, $k = 1, 2, \dots$, $\omega = \frac{2\pi k}{T}$, $f = \frac{k}{T}$ für $g = kn$, in welchem Fall das Verhältnis gleich n wird, d. h. der spektrale Wert des Einzelpulses dieser Frequenz n mal vergrößert wird.

Durch eine solche Wiederholung werden zwangsläufig Nullstellen des Spektrums erzeugt, die durch die Gesamtdauer $T \cdot n$ bedingt sind.

Ist z. B. der Einzelpuls von der Dauer τ rechteckig, so ist sein Spektrum $v_{\dot{p}} = \frac{1}{\dot{p}}(1 - e^{-\dot{p}\tau})$ und das Spektrum der Pulsreihe

$$\frac{1}{\dot{p}}(1 - e^{-\dot{p}\tau}) \frac{1 - e^{-n\dot{p}T}}{1 - e^{-\dot{p}T}}.$$

Ist $T = \tau$, so bildet sich ein einziger langer Rechteckimpuls von der Länge $n \cdot T$ und sein Spektrum ist dann $\frac{1}{\dot{p}}(1 - e^{-n\dot{p}T})$. Mit der Ausbreitungsfunktion multipliziert entsteht

$$\frac{1}{\sqrt{\dot{p}}} (1 - e^{-\dot{p}\tau}) \frac{1 - e^{-n\dot{p}T}}{1 - e^{-\dot{p}T}} \exp(-\sqrt{\alpha} \sqrt{\dot{p}}),$$

dessen Absolutwert

$$\frac{2}{\sqrt{\omega}} \left| \sin \frac{\omega\tau}{2} \frac{\sin \frac{nT\omega}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} \right| e^{-\sqrt{\frac{\alpha\omega}{2}}} \text{ ist.}$$

Die Kannelierung durch den Einzelpuls tritt erst bei sehr hohen Frequenzen auf, da $\frac{\omega\tau}{2} = \pi$, $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$, $f = \frac{1}{\tau}$ bedeutet, das viel größer ist als $\frac{1}{T}$. Für $T = 5\tau$, $n = 10$ ergibt sich abgesehen von dem Faktor $\frac{2}{\sqrt{\omega}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha\omega}{2}}\right)$ folgende Skizze (Abb. 22):

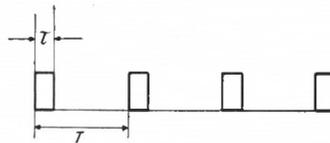


Abb. 22 a

Regelmäßig wiederholter Rechteckimpuls

Ist z. B. bei einem „Stepped leader“ (Precursor), einer ruckweisen Vorentladung, $T = \frac{1}{10}$ ms., $\tau = 20\mu$ sek und $n = 10$, so wäre $\frac{1}{\tau} = 50000$ H, $\frac{1}{T} = 10000$ H, $\frac{1}{nT} = 1000$ H. Der erste Nullwert des Spektrums läge bei 1000 Hz, die aufeinanderfolgenden Maxima bei 10, 20, 30 . . . kHz, und der erste Nullwert entsprechend dem ursprünglichen Signal bei 50 kHz.

Es wird zu Null in den Punkten $\omega = \frac{2\pi}{nT} \cdot g$, $f = \frac{1}{nT} \cdot g$, mit Ausnahme des Punktes $g = n$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \Omega$, wo es einen endlichen Maximalwert von der Größe $\frac{nT}{2}$ durchläuft, der um so höher ist, je mehr solche Wellen vorhanden sind. Das Spektrum erstreckt sich praktisch von $\omega = 0$, wo es den Wert Null hat, bis etwa ins Gebiet $\omega = 2\Omega$ bis 3Ω , wo es rasch sehr klein wird. Die übrigen Maxima zwischen den Nullwerten sind gegeben durch

$$\operatorname{tg} \frac{\omega n T}{2} = \frac{n T}{2} \left[\omega^2 - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \right]$$

und liegen bei den ersten Halbwellen ziemlich in der Mitte zwischen zwei Nullpunkten und verschieben sich mit wachsender Frequenz in die Nähe des kommenden Nullwertes.

In Abb. 23 ist der Verlauf für $n = 1$ angegeben.

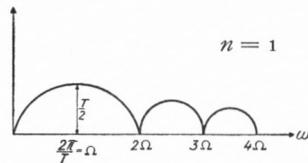


Abb. 23

Spektrum einer einzelnen Sinuswelle der Frequenz Ω , $n = 1$

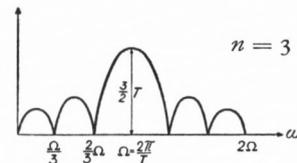


Abb. 24

Spektrum einer 3mal wiederholten Sinuswelle der Frequenz Ω , $n = 3$

Es tritt immer ein Maximum des Spektrums bei der Frequenz $\omega = \Omega$ auf. Bei Wiederholung treten auch bei kleineren Frequenzen Maxima und Nullwerte auf, s. Abb. 24 mit $n = 3$.

Das Signalspektrum ist dann $\sqrt{p} \frac{\Omega}{p^2 + \Omega^2} \cdot (1 - e^{-pT}) \cdot e^{-\sqrt{\alpha} \sqrt{p}}$.

Die Nullwerte ändern sich dadurch nicht. Der Faktor $\sqrt{\omega}$ bewirkt, daß das Maximum bei $\omega = \Omega$ nun $\frac{nT}{2} \sqrt{\Omega}$ wird, also um so ausgeprägter wird, je höher die Frequenz Ω ist. Die Enveloppe des Spektrums läuft nun nicht nach dem Gesetz $\frac{2\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}$, sondern nach dem Gesetz $2\Omega \frac{\sqrt{\omega}}{\omega^2 - \Omega^2}$, d. h. abseits vom absoluten Maximum verläuft ihre Größe nicht mehr nach $\frac{1}{\omega^2}$, sondern $\frac{1}{\omega^{3/2}}$, d. h. sie nimmt langsamer ab als beim Originalspektrum. Der Faktor $\exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\omega}\right)$ bewirkt, daß die Amplituden bei höheren Frequenzen immer kleiner werden und daß die Maxima sich nach geringeren Frequenzen verschieben, auch das absolute Maximum.

Spektrale Verläufe dieser Art sind für die Deutung von Beobachtungen dann nützlich, wenn man sich die ganze Blitzentladung als eine Halbwelle einer periodisch verlaufenden Fourierreihe denkt.

II. AUSBREITUNG DER OBERFELDER

1. DER ZEITLICHE VERLAUF DER ZEICHEN DER OBERFELDER

Die radiale Feldstärke auf der Erdoberfläche ist für ein Oberfeld des vertikalen Dipols nach [1] gegeben durch

$$E_r = 2 \frac{C}{\sqrt{D}} \sqrt{\rho} \left(1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}\right)^{3/4} \exp \left[-\tau \rho \sqrt{1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}} - \frac{2\sqrt{\alpha\rho}}{\sqrt{1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}}} \right] \quad \text{II 1}$$

$$\omega_k = \pi \cdot \frac{c}{H} \cdot g, \quad g = 1, 2, 3 \dots$$

Verglichen mit dem Grundfeld (Gl. I 1) tritt zur Amplitude noch der Faktor $2 \left(1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}\right)^{3/4}$ hinzu. Der Ausbreitungsfaktor des Grundfeldes $-\rho\tau$ ist mit $\sqrt{1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}}$ multipliziert und der Dämpfungsfaktor des Grundfeldes $-\sqrt{\alpha\rho}$ ist mit $\frac{2}{\sqrt{1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}}}$ multipliziert.

Ist die spektrale Ausbreitung für das Grundfeld

$$\sqrt{\rho} \exp(-\rho\tau - \sqrt{\alpha\rho}), \quad \text{II 2}$$

so wird sie für die Oberfelder des vertikalen Dipols

$$2 \sqrt{\rho} \left(1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}\right)^{3/4} \exp \left[-\tau \rho \sqrt{1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}} - \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}}} \cdot \sqrt{\alpha\rho} \right]. \quad \text{II 3}$$

Für diese Oberfelder verhält sich die Atmosphäre ähnlich wie ein Hochpaß der N T, der erst für $\omega > \omega_k$ Wellen durchläßt. Aber dieser Hochpaß hat keine scharfe Frequenzgrenze, sondern der Übergang von der Amplitude 0 bis zur vollen Amplitude vollzieht sich etwa im Frequenzgebiet von $\omega = \omega_k$ bis $\omega \approx 3 \omega_k$, wobei in der Hauptsache der Faktor $\left(1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}\right)^{3/4}$ maßgebend ist, außer in unmittelbarer Nähe von $\omega = \omega_k$.

Die strenge Fourierintegration dieses Ausdrucks ist noch nicht durchgeführt. Eine exakte Lösung für die Funktion $\frac{1}{\rho} \exp \left[-\tau \rho \sqrt{1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}} \right]$, die für genügend große $\omega_k \tau$ einem idealen H. P. der N. T. entspricht, gibt M. COTTE (Ann. d. Telecommunications 1, März 1946, Seite 49) und berücksichtigt (L'onde Electrique 34, 1954, 143) auch näherungsweise den Fall, daß neben diesem Ausbreitungsfaktor noch ein Dämpfungsfaktor auftritt, für die Berechnung des zeitlichen Verlaufs des Signals in einem Hohlleiter kurz nach Eintreffen eines Dirac-Impulses. In unserem Falle würde dies das Spektrum eines Stromes sein, der nach dem zeitlichen Gesetz $2 \sqrt{\frac{t}{\pi}}$ verläuft.

Rechnet man für die Oberfelder aus dem Phasenfaktor die Phasengeschwindigkeit aus, so ergibt sich

$$v_P = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}} + \frac{c}{H\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\kappa\omega}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}}}}$$

Die Phasengeschwindigkeit beginnt bei $\omega = \omega_k$ mit dem Werte 0 und nähert sich mit steigender Frequenz allmählich der Lichtgeschwindigkeit (Anomale Dispersion). Die Gruppengeschwindigkeit ergibt sich zu

$$v_g = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}} + \frac{c}{2H\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\kappa\omega}} \frac{1 - 3 \frac{\omega_k^2}{\omega^2}}{\left(1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}\right)^{3/2}}}$$

auch sie beginnt bei der Frequenz $\omega = \omega_k$ mit dem Werte 0 und nähert sich mit steigender Frequenz der Lichtgeschwindigkeit. Wie immer bestimmt sich die Phasenverschiebung des Signals im Abstände D gegenüber der Phase am Ursprung nach der Formel $\varphi = \frac{\omega}{v_P} \cdot D$.

a) Verlauf des Zeichenbeginns

Wir wollen uns zunächst mit einer Näherung begnügen, indem wir für die erste Zeit nach dem Eintreffen für den zeitlichen Verlauf nur die höchsten Frequenzen als maßgebend ansehen, wie z. B. aus der Theorie der Laplacetransformation bekannt ist. Für diese hohen Frequenzen ist ω_k/ω klein, so daß wir es in erster Näherung vernachlässigen, d. h. so tun, als ob ω_k gleich Null wäre. Für den weiteren zeitlichen Verlauf ist dies natürlich nicht mehr richtig, sondern gilt nur etwa bis zu Bruchteilen der Zeit $\frac{1}{\omega_k}$. Insbesondere für zeitlich sehr steil ansteigende und kurz dauernde Signale ist dieses Verfahren geeignet.

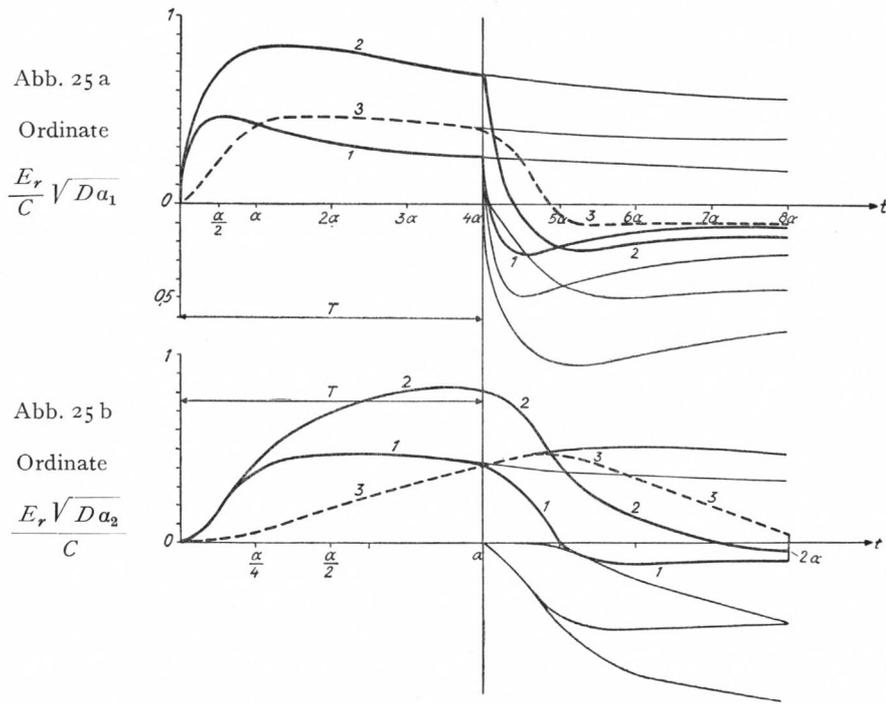
Wir wollen also für die ersten Momente nach Zeichenbeginn mit dem Ausbreitungsspektrum $2\sqrt{p} \exp[-2\sqrt{\alpha p}]$ rechnen, das sich vom Spektrum der Grundwelle nur durch den Faktor 2 in der Amplitude und durch eine Vervierfachung des Faktors α unterscheidet.

α) RECHTECKIGER STROMIMPULS

Nimmt man z. B. an, daß der *Stromimpuls ursprünglich rechteckig war*, d. h. das Spektrum $\frac{1}{p}(1 - e^{-pT})$ hatte, so ist nach Abschn. I 1 b der zeitliche Verlauf unmittelbar nach dem Eintreffen Abschn. I 1 b

$$\frac{E_T \sqrt{D}}{C} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{1}{4x}\right), \quad x = \frac{t}{\alpha}$$

dem nach der Zeit T ein genau gleicher Verlauf mit negativen Vorzeichen folgt. Für ein Oberfeld ist ein analoger Verlauf zu erwarten, nur mit der doppelten Amplitude und dem vierfachen Wert von α . Da das Maximum dieser Funktion prop. $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ ist, ist es für alle Oberfelder mit dem vierfachen Wert von α gerade $\frac{1}{2}$ mal so groß, was aber durchaus nicht bei anderen zeitlichen Verläufen der Fall zu sein braucht. Da aber die ausgestrahlte Amplitude des Oberfeldes doppelt so groß ist wie die des Grundfeldes, werden die Amplitude des Grundfeldes und der Oberfelder in diesem Fall gleich groß, nur treten sie zu verschie-



Zeitlicher Verlauf des Grundfeldes (1) mit überlagertem erstem Oberfeld (3) zum gesamten Zeitverlauf des Zeichens (2), wenn für das Oberfeld mit $\omega_k = 0$ gerechnet wird, d. h. gültig nur für sehr kurze Zeit nach Eintreffen des Zeichens. Rechteckimpuls. $T = 4 \alpha_1$

Abb. 25b bei doppelter Entfernung von der Quelle wie bei Abb. 25a, $T = \alpha_2$

$$\alpha_2 = 4 \alpha_1$$

denen Zeiten auf (nach der vierfachen Zeit, bei der das Grundfeld den entsprechenden Wert erreicht). In Abb. 25 a) und b) ist der zeitliche Verlauf des Signals eines Rechteckimpulses des Stromes dargestellt. In a) ist $T = 4 \alpha$ angenommen und der zeitliche Verlauf in Kurve 1 für das Grundfeld, in Kurve 3 für ein Oberfeld und in Kurve 2 für beide Felder zusammen dargestellt. T muß größer als $\frac{\alpha}{2}$ bzw. 2α sein, wenn das Maximum durchlaufen werden soll. Man sieht, wie bei dem Oberfeld Anstieg und Abfall allmählicher vor sich gehen und wie die positive „Halbwelle“ des Oberfeldes länger wird als die des Grundfeldes.

In Abb. 25 b) ist der gleiche Stromimpuls für den doppelten Abstand D , d. h. für das vierfache α gezeichnet. Abgesehen von der Verkleinerung des Zeichens sieht man in den entsprechenden Kurven 1, 2 und 3 die Verschleifung der Zeichen, die besonders bei den

Oberfeldern stark ausgeprägt ist. Nun ist zu beachten, daß nach der Berechnung des Fourierintegrals alle Oberfelder möglich sind. Diese liefern aber nicht alle die gleichen Beiträge, denn je höher die kritische Frequenz ω_k liegt, desto geringer ist ihr Beitrag zum Fourierintegral. Wir haben theoretisch eine unendliche Summe von abnehmenden Beiträgen, deren Wert nur angegeben werden kann, wenn die Werte der Fourierintegrale exakt bekannt sind. Es ist aber durchaus möglich, daß die Summe so groß ist gegen das Grundfeld, daß der zeitliche Verlauf praktisch nur durch die Oberfelder bestimmt ist (Kurve 3). Ist schließlich $T \gg \alpha$, z. B. in der Nähe des Senders oder bei sehr geringer Dämpfung, so erhält man Abb. 26.

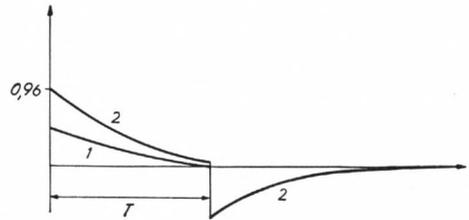


Abb. 26

Wie Abb. 25 a und b aber sehr nahe beim Sender. $T = 100\alpha$

$$\text{Ordinate } \frac{E_r}{C} \sqrt{aD}$$

Es entstehen praktisch zwei ungefähr gleiche positive und negative Halbwellen von der Länge T . Inwieweit diese Verläufe ungestört stattfinden oder nicht, hängt von der Größe von T ab. Ist $T \ll \frac{1}{\omega_k}$, so dürften sie richtig sein. Anderenfalls werden sie schon sehr bald nach Beginn von den in den folgenden Abschnitten beschriebenen Oszillationen abgelöst.

b) Approximation des späteren Zeitverlaufs,
in dem für den vertikalen Dipol die Atmosphäre als idealer
Hochpaß angenommen wird

Um zu einer ersten Annäherung für spätere Zeiten zu kommen, nehmen wir zunächst an, daß die Atmosphäre sich für diese Felder wie ein idealer Hochpaß verhält, d. h., daß das Spektrum bis zu einer kritischen Frequenz exakt Null ist, dann mit voller Stärke beginnt und weiterhin einen Verlauf hat, der dem des Grundfeldes entspricht. Diese „kritische“ Frequenz ist nicht genau gleich ω_k , sondern etwa zwischen dem 1–3fachen von ω_k zu denken (siehe Abschn. II 1). Setzen wir also für die spektrale Funktion des Oberfeldes den Wert $2\sqrt{p} e^{-2\sqrt{\alpha p}}$ für ω größer als die Grenzfrequenz ω_k , und Null für kleinere Frequenzen, so ist das Spektrum der Einheitsstufe $\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\sqrt{\alpha p}}$, wo wir α für die Oberfelder viermal so groß setzen wie für das Grundfeld, und den Faktor 2 zunächst weglassen. Der Zeitverlauf ist dann gegeben durch

$$J = -\frac{j}{2\pi} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{1}{\sqrt{p}} e^{pt - \sqrt{\alpha p}} \cdot dp.$$

Mit Hilfe der Transformation

$$v = -j \left[\sqrt{pt} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{t}} \right]$$

wird das Integral zu

$$J = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\alpha}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} \cdot dv.$$

Für die Grenzen $\pm \infty$ darf das Integral längs der reellen Achse der v -Ebene genommen werden und ergibt dann $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} \cdot dv = \sqrt{\pi}$, so daß die Zeitfunktion den bekannten üblichen Wert

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{\alpha}{4t}} \quad (\text{II 4})$$

erhält. Hat nun das Spektrum zwischen $+\omega_k$ und $-\omega_k$ den Wert Null, so ist das gewünschte Integral gleich

$$J = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\alpha}{4t}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} \cdot dv - \int_{-v_k}^{+v_k} e^{-v^2} \cdot dv \right\}.$$

Nun ist

$$\int_{-v_k}^{+v_k} e^{-v^2} \cdot dv = e^{-\frac{\alpha}{4t}} \int_{-\omega_k}^{+\omega_k} (1-j) \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t}{2\omega}} \cdot e^{-\sqrt{\frac{\omega\alpha}{2}}} \cdot e^{j(\omega t - \sqrt{\frac{\omega\alpha}{2}})} \cdot d\omega,$$

und da bei der Integration von $-\omega_k$ bis $+\omega_k$ nur der reelle Teil übrigbleibt,

$$\int_{-v_k}^{+v_k} e^{-v^2} \cdot dv = e^{-\frac{\alpha}{4t}} \int_0^{\omega_k} \left[\cos \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega\alpha}{2}} \right) + \sin \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega\alpha}{2}} \right) \right] \sqrt{\frac{t}{2\omega}} \cdot e^{-\sqrt{\frac{\omega\alpha}{2}}} \cdot d\omega.$$

Setzt man schließlich $\omega t = \frac{\pi}{2} u^2$, so wird daraus

$$e^{-\frac{\alpha}{4t}} \int_0^{u_k} \sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha\pi}{t}} u} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} u^2 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha\pi}{t}} \cdot u \right) + \sin \left(\frac{\pi}{2} u^2 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha\pi}{t}} u \right) \right] du,$$

so wird schließlich

$$\int_{-v_k}^{+v_k} e^{-v^2} dv = \sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{\alpha}{4t}} \int_0^{u_k} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} u^2 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha\pi}{t}} u \right) + \sin \left(\frac{\pi}{2} u^2 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha\pi}{t}} u \right) \right] \cdot e^{-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha\pi}{t}} \cdot u} \cdot du,$$

II 5

wobei

$$u_k = \sqrt{\frac{2t\omega_k}{\pi}}.$$

4*

Für den Fall verschwindender Dämpfung $\alpha = 0$, bei der die Zeitfunktion für die Grenzen $\pm \omega \rightarrow \infty$ in $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ übergeht, wird

$$\int_{-v_k}^{+v_k} e^{-v^2} dv = \sqrt{\pi} \cdot \int_0^{u_k} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) \right] \cdot du.$$

Das Integral geht dann in die bekannten Fresnelintegrale

$$C = \int_0^u \cos\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) du \quad \text{und} \quad S = \int_0^u \sin\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) du$$

über, die z. B. bei JAHNKE-EMDE, Tafeln höherer Funktionen, 4. Aufl. 1948, S. 35 dargestellt sind. Ihr Verlauf, abhängig von $u^2 \frac{\pi}{2} = z = \omega t$, ist in Abb. 27 skizziert.

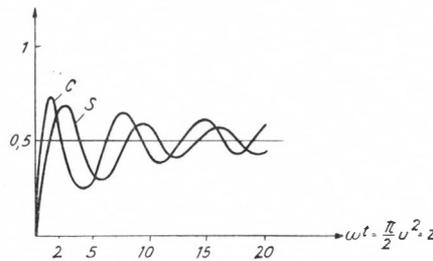


Abb. 27. Fresnelintegrale

Beide Integrale pendeln mit dauernd abnehmender Amplitude um den Wert $\frac{1}{2}$, dem sie sich schließlich unbegrenzt nähern. Für $u_k \rightarrow \infty$ wird also $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} \cdot dv = \sqrt{\pi}$, wie es sein muß.

Das komplexe Integral $F(u) = C(u) + jS(u)$ läßt sich durch eine Potenzreihe darstellen

$$F(u) = u \left[1 + \frac{j}{3} \frac{\pi}{2} u^2 - \frac{1}{10} \left(\frac{\pi}{2} u^2\right)^2 - \frac{j}{42} \left(\frac{\pi}{2} u^2\right)^3 + \dots \right]$$

oder für genügend große u durch eine semikonvergente Entwicklung

$$F(u) = F(\infty) + \frac{e^{j\frac{\pi}{2} u^2}}{j\pi u} \left[1 - \frac{j}{\pi u^2} - \frac{3}{(\pi u^2)^2} + j \frac{15}{(\pi u^2)^3} - \dots \right]$$

(s. SOMMERFELD, Theor. Physik, Bd. IV, Optik S. 246).

Als Funktion von $\frac{\pi}{2} u^2 = \omega t$ aufgefaßt, nähern sich die Schwankungen Sinusschwingungen von der Frequenz ω_k . Aber trotz dieser Oszillationen mit $\omega \approx \omega_k$ ist die spektrale

Intensität bei $\omega = \omega_k$ streng gleich Null (s. Abschn. II 2). Es treten also dauernd abnehmende Oszillationen mit nahezu der unteren kritischen Frequenz ω_k auf, wie dies bei Hochpässen dieser Frequenz üblich ist. Solange $v_k < 1$ ist, so lange spielt das Glied $\int_{-v_k}^{+v_k} e^{-v^2} \cdot dv$ gegenüber dem Glied $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} \cdot dv$ noch keine Rolle, d. h. bis zu dieser Zeit $t \ll \frac{\pi}{2\omega_k}$ ist es erlaubt, von der Hochpaßeigenschaft abzusehen, wie wir dies auf S. 24 angenähert getan haben. Aber schon nach dieser kurzen Zeit, die für die unterste Grenzfrequenz $\omega_k \approx 10^4$ den Wert $1,5 \cdot 10^{-4}$ sek hat, beginnen die Oszillationen mit der Frequenz ω_k . Um so früher beginnen die höheren kritischen Frequenzen.

Diese Oszillationen modulieren den ungestörten Pulsverlauf $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \right)$ mit zeitlich abnehmender Amplitude. Der gesamte Zeichenverlauf für das Oberfeld mit der Grenzfrequenz ω_k , ohne Dämpfung, wäre nach Gleichung (II 5), entsprechend Abb. 28,

$$J = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} [1 - C(u_k) - S(u_k)] \quad \text{II 6a}$$

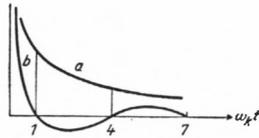


Abb. 28

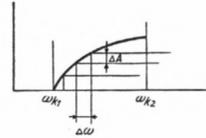


Abb. 29

Abb. 28. Verformung des Signals des Grundfeldes der Einheitsstufe des Stromes (a) durch das 1. Oberfeld (b), wenn die Atmosphäre für das Oberfeld als idealer Hochpaß mit der Grenzfrequenz ω_k aufgefaßt wird.

Kurve a $\sqrt{\frac{\omega_k}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\omega_k \cdot t}}$.

aus der man sieht, wie das ursprüngliche Signal $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$, Kurve a, durch die Existenz der Hochpaßgrenzen $\pm \omega_k$ verformt wird und die Schwingungen der Frequenz $\sim \omega_k$ entstehen (Kurve b).

Um das allmähliche Anwachsen der spektralen Intensität von ω_k aus nach oben zu berücksichtigen, entsprechend dem Faktor $\left(1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}\right)^{1/4}$, zerlegen wir dieses Intervall in kleinere Stufen, Abb. 29, und addieren deren Wirkungen.

Es entsteht dann die Summe $\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{\omega_{k_1}}^{\omega_{k_2}} \Delta A \cdot [C(u_k) + S(u_k)]$.

Für linearen Anstieg ist z. B. $\Delta A = \frac{\Delta \omega}{\omega_{k_2} - \omega_{k_1}}$

und es entsteht $\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{\omega_k}^{\omega_{k_2}} \frac{d\omega}{\omega_{k_2} - \omega_{k_1}} [C(\omega t) + S(\omega t)]$.

Eine Diskussion dieses Integrals ergibt, daß sich durch den allmählichen Anstieg der spektralen Intensität der zeitliche Anstieg der Funktion in Abb. 27 bzw. der zeitliche Abfall in Fig. 28 etwa im Verhältnis 2/3, also nicht sehr viel verringert, daß aber die Amplituden der Schwingungen etwa im Verhältnis $\frac{1}{\omega_2 t} \approx \frac{1}{3\omega_{k_1} t}$ verringert werden, also wesentlich kleiner werden. Es ist danach zu erwarten, daß bis etwa zur zeitlichen Größenordnung $\omega_k t \approx 1$ das ungestörte Signal analog der Grundwelle nur mit doppelter Amplitude und Dämpfung wirkt, daß es dann rasch sehr klein wird und daß anschließend abklingende Schwingungen nahe der Frequenz ω_k erfolgen. Je höher die kritische Frequenz liegt, desto rascher erfolgt dieses Abklingen des „ungestörten“ Signals und um so kleiner werden die folgenden Oszillationen.

Nun treten im Fourierintegral nicht nur eine, sondern unendlich viele Grenzfrequenzen auf, $\omega_k = \pi \cdot \frac{c}{H} g, g = 1, 2, 3 \dots$, und jede dieser Grenzfrequenzen ergibt ein Signalende mit Oszillationen nahe der Frequenz ω_k . Die Summe ergibt also annähernd eine Fourierreihe, die in ihrem Verlauf den nacheinander eintreffenden unendlich vielen Reflexionssignalen entspricht, die der Sender ausstrahlt und die nach einer bestimmten Anzahl von Reflexionen an der Erde und der Ionosphäre beim Empfänger eintreffen, s. [5]. Die zeitliche Aufeinanderfolge zweier Reflexionen hoher Ordnung strebt dem asymptotischen Wert $\tau_R \approx \frac{2H}{c}$ zu, ebenso wie oben die Frequenz dem Wert ω_k zustrebt. Die Kreisfrequenz mit der Periode τ_R ist $\frac{2\pi}{\tau_R} = \pi \frac{c}{2H} = \omega_{k_1} (g = 1)$. Die höheren ω_k sind dann die Oberwellen des Reflexionsimpulses.

Bei einem Rechteckimpuls von der Zeitbreite T trifft, um die Zeit T verspätet, nochmals das gleiche Signal mit entgegengesetztem Vorzeichen ein. Ist $\omega_k T < \approx \pi$, d. h. $T \approx \frac{H}{cg}$, so wird der ursprüngliche Impuls wohl verzerrt, aber annähernd entsprechend seiner Grundfeldausbreitung wiedergegeben, ist aber $\omega_k T > \approx \pi$, so wird der Rechteckimpuls in zwei spitze Impulse mit nachfolgenden Oszillationen aufgelöst, d. h. die ursprüngliche Form kann vollkommen geändert werden.

Mit Berücksichtigung der Dämpfung wird nun das Signal der Einheitsstufe der Ordnung k mit der Grenzfrequenz ω_k

II 6b

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \left\{ e^{-\frac{\alpha}{4t}} - \int_0^{u_k} e^{-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha\pi}{t}} \cdot u} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} u^2 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha\pi}{t}} u \right) + \sin \left(\frac{\pi}{2} u^2 - \sqrt{\frac{\alpha\pi}{t}} \cdot u \right) \right] du \right\}$$

Ohne auf weitere Einzelheiten einzugehen, kann aus dem Bau des Integranden gefolgert werden, daß die Vorgänge „langsamer“ verlaufen, d. h., daß der Anstieg des Signals langsamer erfolgt und daß die Schwankungen eine größere Periode haben, um so mehr, je größer $\sqrt{\frac{\alpha}{t}}$ ist, und sich erst allmählich der Periode von ω_k nähern. Außerdem werden die Amplituden kleiner, und es verschwindet das Signal um so rascher, je größer die Dämpfung ist. Auch für die Ausbreitung der Zeichen des horizontalen Dipols quer zu seiner Richtung mit dem Ausbreitungsspektrum $\sqrt{p} \exp \left[\frac{\omega_k^2 \cdot \sqrt{\alpha}}{p^{3/2}} \right]$ für $\omega \gg \omega_k$ läßt sich die Fourierintegration für die Einheitsstufe analog durchführen und führt bei geringer Dämpfung wieder auf Fresnelintegrale.

c) Näherungsberechnung der Zeichen der Oberfelder für spätere Zeiten mit der Paßmethode

Eine bessere Annäherung an den streng richtigen Frequenzverlauf der Oberfelder auch der Phase nach kann man mit Hilfe der Paßmethode erreichen. Wenn ein Fourierintegral in der Form

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{f(\omega)} d\omega,$$

wobei $A(\omega)$ eine „langsam“ veränderliche Funktion ist, gegeben ist, so ist der Punkt $f'(\omega) = 0$ in der komplexen ω -Ebene ein Sattelpunkt, d. h. ein solcher, von dem aus der Realteil der Funktion in bestimmten Richtungen nach beiden Seiten zu anwächst und in den dazu senkrechten Richtungen abnimmt. Wenn man also aus Gegenden kommt, wo $e^{f(\omega)}$ klein ist, und diesen Paß in richtiger Richtung überschreitet, um wiederum in Gebiete zu kommen, wo $e^{f(\omega)}$ klein ist, so ist der Hauptbeitrag zum Integral durch die Funktionswerte in unmittelbarer Nähe des Passes gegeben. Ist ω_s der Wert von ω im Sattelpunkt, und entwickelt man in der Umgebung von ω_s die Funktion

$$f(\omega_s + \Delta\omega) = f(\omega_s) + f'(\omega_s) \Delta\omega + f''(\omega_s) \cdot \frac{\Delta\omega^2}{2} + \dots,$$

so kann man in der Nähe des Sattelpunktes näherungsweise setzen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{f(\omega)} d\omega = A(\omega_s) e^{f(\omega_s)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2} f''(\omega_s) (\omega - \omega_s)^2} \cdot d\omega = \sqrt{\frac{2\pi}{-f''(\omega_s)}} \cdot A(\omega_s) e^{f(\omega_s)}.$$

Wir wollen das Verfahren zunächst auf die Verteilungsfunktion

$$e^{-j\tau \sqrt{\omega^2 - \omega_k^2}}, \quad \tau = \frac{D}{c}$$

anwenden.

Dann ist das Fourierintegral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\tau \sqrt{\omega^2 - \omega_k^2}} \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

und es ist

$$f(\omega) = -j\tau \sqrt{\omega^2 - \omega_k^2} + j\omega t.$$

Dieses Integral entspricht der Ausbreitung eines Diracimpulses mit der spektralen Verteilung 1 in einem Hohlleiter ohne Dämpfung. Es divergiert deshalb an der Stelle $t = \tau$, gibt aber, wie wir sehen werden, für $t > \tau$ brauchbare Werte. Die vernachlässigte Dämpfung, die das Integral überall konvergent macht, ist im nächsten Abschnitt berücksichtigt. Die $f(\omega)$ hat in der komplexen ω -Ebene zwischen $-\omega_k$ und $+\omega_k$ einen Verzweigungsschnitt, da $\sqrt{\omega^2 - \omega_k^2} = \sqrt{\omega - \omega_k} \cdot \sqrt{\omega + \omega_k}$ ist, und der Integrationsweg kann so gelegt

werden, daß für $t < \tau$ der Wert Null des Fourierintegrals entsteht. Die Lösung von $f'(\omega) = 0$ ergibt $\omega_s = \pm \frac{t\omega_k}{\sqrt{t^2 - \tau^2}}$. Es existieren also zwei Sattelpunkte, die für $t > \tau$ beide auf der reellen Achse liegen und deren Abszisse mit wachsender Zeit von $\omega_s \rightarrow \infty$ bei $t \rightarrow \tau$ bis auf $\omega_s = \omega_k$ für $t \gg \tau$ abnimmt. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\sqrt{\omega_s^2 - \omega_k^2} &= \pm \frac{\tau\omega_k}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} \\ f(\omega_s) &= \pm j\omega_k \sqrt{t^2 - \tau^2} \\ f''(\omega_s) &= \pm j \frac{1}{\tau^2\omega_s} \cdot (t^2 - \tau^2)^{3/2}.\end{aligned}$$

Hieraus schließen wir, daß dieses Verfahren nur für $t > \tau$ brauchbar ist. Für $t = \tau$ versagt es. Setzen wir nun $\omega = \omega_s + s e^{j\gamma}$ (Bogenlänge s reell), so wird

$$f(\omega_s + s e^{j\gamma}) = \pm j\omega_k \sqrt{t^2 - \tau^2} \pm j \frac{1}{\tau^2\omega_k} (t^2 - \tau^2)^{3/2} \cdot \frac{s^2}{2} (\cos 2\gamma + j \sin 2\gamma).$$

Die Konstanz des imaginären Teils verlangt $\cos 2\gamma = 0$, $\gamma = \pm \frac{\pi}{4}$. Der Sattelpunkt ist unter $\pm 45^\circ$ gegen die reelle Achse geneigt zu durchschreiten, um die Richtung des steilsten Anstiegs, bzw. steilsten Abstiegs des reellen Teils der Funktion zu haben. Damit ergibt sich der Näherungswert des Integrals als

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm j\omega_k \sqrt{t^2 - \tau^2}} \cdot \frac{\tau\omega_k^{1/2}}{(t^2 - \tau^2)^{3/4}}$$

und über beide Sattelpunkte summiert

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\tau\sqrt{\omega_k}}{(t^2 - \tau^2)^{3/4}} \cdot \cos \omega_k \sqrt{t^2 - \tau^2}, \quad \omega_k \sqrt{t^2 - \tau^2} = \varphi. \quad \text{II 7}$$

Die Lösung gilt nur für $t > \tau$ und versagt für $t = \tau$, weil dort $f''(\omega_s) = 0$ wird. Hier finden wir eine mit Zeit abnehmende momentane Frequenz $\omega_m = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_k \frac{t}{\sqrt{t^2 - \tau^2}}$, die für $t \gg \tau$ mit ω_k endet und die zur Zeit $t = \tau$ eintrifft. Für längere Zeiten nach dem Eintreffen des Signals treten Schwingungen mit dieser Frequenz nahe ω_k auf, die zeitlich nach dem Gesetz $t^{-3/2}$ abnehmen.

Die strenge Lösung des Ausgangsintegrals oben ist bekannt (s. CAMPBELL-FOSTER S. 111, Nr. 865. 1) und lautet

$$\text{Dirac-Impuls zur Zeit } (t = \tau) - \frac{\tau\omega_k J_1[\omega_k(t^2 - \tau^2)^{1/2}]}{(t^2 - \tau^2)^{1/2}}$$

und ergibt für große Argumente der Besselfunktion J_1 , d. h. für $t^2 - \tau^2 \gg \frac{1}{\omega_k^2}$ genau die gleichen Werte wie unsere Näherungsformel oben, bis auf eine Phasenverschiebung von 45° in der cos-Welle. Unsere Näherung gibt also in diesem Fall das ursprüngliche Signal, nämlich den Dirac-Impuls überhaupt nicht wieder, sondern nur das, was sich nachher anschließt.

Der oben angegebene Frequenzverlauf entspricht genau dem zeitlichen Verlauf der nacheinander am Empfangsort eintreffenden an einer unendlich gut leitenden Ionosphäre reflektierten Strahlen verschiedener Reflexionsordnung. Ist der Abstand Sender – Empfänger D und die Höhe der Ionosphäre H , so trifft der m mal an der Ionosphäre reflektierte Strahl zur Zeit $t_m = \frac{1}{c} \sqrt{D^2 + 4 m^2 H^2}$ nach Abgang beim Sender ein. Bildet man

$$\frac{dt_m}{dm} = \frac{1}{c} \frac{4 m H^2}{\sqrt{D^2 + 4 m^2 H^2}}$$

und setzt dt_m für $dm = 1$ gleich

$$T_m = \frac{1}{c} \frac{4 m H^2}{\sqrt{D^2 + 4 m^2 H^2}},$$

und definiert man die augenblickliche Frequenz durch $\omega_m = \frac{2\pi}{T_m}$ und setzt aus der Formel oben für t_m den Wert von $m = \frac{c}{2H} \sqrt{t_m^2 - \tau^2}$, $\tau = \frac{D}{c}$ ein, so wird $\omega_m = \frac{\pi c}{H} \frac{t_m}{\sqrt{t_m^2 - \tau^2}}$ wie oben gefunden, wenn $\omega_{k_1} = \pi \frac{c}{H}$ gesetzt wird.

Das Oberfeld ω_{k_1} beschreibt damit in seinem Verlauf das Nacheinandereintreffen aller an der Ionosphäre reflektierten Strahlen. Die höheren Oberfelder ω_{k_2}, \dots , die harmonisch zu ω_{k_1} sind, geben dann die entsprechenden Oberwellen dieser von ω_{k_1} herrührenden sich mit der Zeit ändernden „Grundfrequenz“ an. Da hier vorläufig $\varkappa = \infty$ in der Ionosphäre gedacht ist, tritt durch deren Dämpfung noch eine zusätzliche Formänderung der Zeichen ein, die später diskutiert wird.

α) DÄMPFUNG DER ZEICHEN DES VERTIKALEN DIPOLS

Berücksichtigen wir nun die Form des Spektrums, wie es nach Abschn. II 1 Gl. II 3 S. 23 für die Oberfelder des vertikalen Dipols gilt, so wird jetzt

$$f(\omega) = -j\tau \sqrt{\omega^2 - \omega_k^2} - \frac{\sqrt{j\alpha} \cdot \omega^{3/2}}{\sqrt{\omega^2 - \omega_k^2}} + j\omega t;$$

in diesem Falle wird

$$f'(\omega) = -j \frac{\omega \tau}{\sqrt{\omega^2 - \omega_k^2}} - \sqrt{j\alpha} \frac{\sqrt{\omega}}{2} \frac{(\omega^2 - 3\omega_k^2)}{(\omega^2 - \omega_k^2)^{3/2}} + jt = 0.$$

ω_s wird jetzt also komplex. Die strenge Lösung ist nicht möglich, aber die Newtonsche Näherungsformel

$$f'(\omega_s + \Delta\omega) = f'(\omega_s) + f''(\omega_s) \cdot \Delta\omega = 0$$

ergibt für kleine α die Korrektur

$$\Delta\omega = -\frac{f'(\omega_s)}{f''(\omega_s)} \approx e^{-j\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\alpha\omega_s}}{2\tau\omega_k^2} (\omega_s^2 - 3\omega_k^2).$$

Wir hätten also in $f(\omega)$ und $f''(\omega)$ den Wert $\omega = \omega_s + \Delta\omega$ einzusetzen. Für eine erste Näherung genügt es aber, als Korrektur des Früheren $f''(\omega)$ ungeändert zu lassen und in $f(\omega)$ nur das mittlere Dämpfungsglied mit $\omega = \omega_s$ einzusetzen. Dann kommt zu Gl. II 7 noch ein Dämpfungsfaktor von der Form

$$\exp \left[\frac{-\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \omega_s^{3/2}}{\sqrt{\omega_s^2 - \omega_k^2}} \right] = \exp \left[-\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\omega_k^{1/2}}{\tau} \frac{t^{3/2}}{(t^2 - \tau^2)^{1/4}} \right] \dots \text{II 8.}$$

Es tritt also eine mit der Zeit veränderliche Dämpfung auf. Zuerst ist die Dämpfung sehr stark, d. h. das Zeichen beginnt mit sehr kleinen Amplituden, dann nimmt die Dämpfung mit wachsender Zeit zunächst ab bis zu einem Minimum, bei welchem das Zeichen seine maximale Amplitude erreicht, und schließlich nähert sich die Dämpfung für $t \gg \tau$ einem Grenzwert, der proportional zu t anwächst. Je größer die Grenzfrequenz ω_k ist, desto stärker ist die Dämpfung. Da der Abstand D sowohl in $\sqrt{\alpha}$ als auch in τ vorkommt, macht sich wachsende Entfernung nur in dem Glied $\frac{t^{3/2}}{(t^2 - \tau^2)^{1/4}}$ bemerkbar, so daß das Signal während einer längeren Zeit stärker gedämpft, d. h. kleiner bleibt und es länger dauert, bis der entfernungsunabhängige Grenzwert der Dämpfung $\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \frac{\omega_k^{1/2}}{\tau} t$ erreicht wird.

Außerdem tritt neben der Dämpfung noch ein zusätzlicher Phasenfaktor von der gleichen Größe auf,

$$\exp \left[-j \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \frac{\omega_k^{1/2}}{\tau} \frac{t^{3/2}}{(t^2 - \tau^2)^{1/4}} \right] = \exp (-j\varphi),$$

der für t nahe τ sehr rasch mit der Zeit abnimmt, bei $t = \sqrt{\frac{3}{2}} \tau$, $\omega_m = \sqrt{3} \omega_k$ ein Minimum von der Größe $\frac{1}{2} \sqrt{\alpha \omega_k} \sqrt[4]{27}$ durchläuft und bei $t \gg \tau$ linear mit der Zeit ansteigt,

$$\varphi = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \omega_k^{1/2} \cdot \frac{t}{\tau}.$$

Führt man die „momentane“ Frequenz ω_m ein, so wird

$$\varphi = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \omega_m \cdot \frac{t}{\tau}.$$

Er entspricht der Änderung der Phasengeschwindigkeit der Wellen, die durch die Dämpfung hervorgerufen wird. Durch seinen Einfluß tritt in Gl. II 7 statt $\cos [\omega_k \sqrt{t^2 - \tau^2}]$ nunmehr $\cos [\omega_k \sqrt{t^2 - \tau^2} + \varphi]$ auf.

β) DÄMPFUNG DER ZEICHEN DES HORIZONTALEN DIPOLS

Vergleichen wir die Dämpfung der Oberwellen des senkrechten Dipols mit jenen der quer gestrahlten H-Wellen des horizontalen Dipols, so unterscheiden sich diese nur im Dämpfungsglied des Spektrums durch den zusätzlichen Faktor $\frac{\omega_k^2}{\omega^2}$. Dieses Dämpfungsglied wird jetzt $\sqrt{j\alpha} \cdot \frac{\omega^{3/2}}{\sqrt{\omega^2 - \omega_k^2}} \cdot \frac{\omega_k^2}{\omega^2}$, das für $\omega = \omega_s$ die Dämpfung

$$\exp \left[-\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \frac{\omega_k^{1/2}}{\tau t^{1/2}} (t^2 - \tau^2)^{3/4} \right] \dots \text{II 9)}$$

ergibt. Zum Unterschied von dort ist jetzt die Dämpfungswirkung zu Beginn der Zeichen klein und wächst mit wachsender Zeichendauer an, bis schließlich die Dämpfung ebenfalls proportional der Zeit t wird. Längere Zeit nach Zeichenbeginn sind also beide Signale gleich stark gedämpft, nur bei Zeichenbeginn ist ein Unterschied, wie auch zu erwarten, da kurze Zeit nach Zeicheneinsatz die hohen Frequenzen für den Zeichenverlauf maßgebend sind. Für $t > \tau$ sind die Oberfelder sowohl des vertikalen als auch des horizontalen Dipols mit $\exp\left[-\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \frac{\omega_k^{1/2}}{\tau} t\right]$ gedämpft. Auch hier tritt eine zusätzliche Phasenmodulation wie in α auf.

γ) BERÜCKSICHTIGUNG DER AMPLITUDEN DES SPEKTRUMS

Einheitsstufe und Rechteckimpuls des Stromes, Dirac Impuls, exponentiell ansteigender und verschwindender Strom und begrenzter Sinuswellenzug

Schließlich ist noch zu berücksichtigen, daß nach Gl. II 1 S. 24 im Ausbreitungsspektrum noch der Amplitudenfaktor

$$A(\omega) = \sqrt{j\omega} \left(1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}\right)^{3/4} \quad (\text{s. auch Abschn. II 1 c})$$

auftritt, der für die Einheitsstufe zum Zeichenspektrum $\frac{1}{\sqrt{j\omega}} \left(1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}\right)^{3/4}$ führt, das eine „langsam“ veränderliche Funktion von ω ist, mit Ausnahme von $\omega = 0$, wo sie einen quadratischen Pol ohne Residuum hat.

Mit $\omega = \omega_s$ entsteht daraus

$$\sqrt{\mp j} \frac{(t^2 - \tau^2)^{1/4}}{t^2} \frac{\tau^{3/2}}{\omega_k^{1/2}}.$$

Das gesamte zeitliche Zeichen der Einheitsstufe des Stromes wird über beide Sattelpunkte summiert analog Gl. II 7, und mit Berücksichtigung der Dämpfung Gl. II 8 ergibt sich für den vertikalen Dipol als

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\tau^{3/2}}{t^2 (t^2 - \tau^2)^{1/2}} \cdot \cos \left[\omega_k \sqrt{t^2 - \tau^2} + \varphi - \frac{\pi}{4} \right] \cdot \exp \left[-\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \frac{\omega_k^{1/2}}{\tau} \frac{t^{3/2}}{(t^2 - \tau^2)^{1/4}} \right]. \quad \text{II 10}$$

Gl. II 10 beschreibt cos-Schwingungen abnehmender Frequenz, die mit der Größe Null beginnen und nach Durchlaufen eines Maximums wieder verschwinden. Die Formel ist nur für $t \gg \tau$ brauchbar, während für kleinere Werte von $t - \tau$ die Näherungen von Abschn. II 1 a den Vorgang beschreiben. Es zeigt sich wieder, daß durch das allmähliche Anwachsen der spektralen Intensität von $\omega = \omega_k$ an die Schwingungen viel schwächer werden. Denn ohne das Glied $\left(1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}\right)^{3/4}$ wird der zeitliche Verlauf durch $\frac{\tau}{t^{1/2} \sqrt{t^2 - \tau^2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ gegeben, d. h. für $t \gg \tau$ durch $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\tau}{t^{3/2}}$, gegenüber $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\tau^{1/2}}{t^3}$ oben. Verglichen mit dem Verlauf des Zeitsignales der Einheitsstufe für das Grundfeld ohne Dämpfung $\frac{1}{\sqrt{\pi t'}}$, $t' = t - \tau$ erkennt man den viel schnelleren Abfall. Für kleine t' nähern sich beide Funktionen diesem Wert $\frac{1}{\sqrt{\pi t'}}$. Berücksichtigt man die doppelte Amplitude des Oberfeldes gegenüber dem

Grundfeld, so sind sie doppelt so groß als jenes. Für $t = 2\tau$ d. h. $t' = \tau$ sind sie aber schon auf weniger als die Hälfte des Signals des Grundfeldes gefallen. Für $t \gg \tau$ wird aus Gl. II 10

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\tau^{3/2}}{t^3} \exp\left[-\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \frac{\omega_k^{1/2}}{\tau} t\right] \cdot \cos\left(\omega_k t + \varphi - \frac{\pi}{4}\right),$$

woraus für gegebenes t folgt, daß große τ , d. h. große Abstände wohl für die Größe der Amplitude begünstigend wirken, während der Dämpfungsfaktor von D unabhängig ist. Bei gegebenem t/τ hingegen nimmt die Amplitude von E , Gl. II 1, mit $\frac{1}{D}$ ab, während die Dämpfung proportional der Entfernung D wird. Aus dem Verlauf der Exponentialfunktion der Gl. II 10 folgt, daß das Maximum des Signals zwischen $t = \tau$ und $(t - \tau) = 0,23\tau$ liegt. Die Gl. für das Maximum der Umhüllenden der cos-Kurve ergibt

$$(3t^2 - 2\tau^2)(t^2 - \tau^2)^{3/4} = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \frac{\omega_k^{1/2}}{2\tau} t^{3/2} (3\tau^2 - 2t^2).$$

Setzt man zur Lösung $t = \tau(1 + \varepsilon)$ und $\varepsilon \ll 1$, so folgt $\varepsilon = \frac{\omega_k^2 \alpha^2}{128}$. Es kann aber ε , wie gesagt, nicht größer werden als 0,23. Bei $\alpha = 4,2, 2 \cdot 10^{-4}$ mit $\kappa = 10^{-4} \frac{S}{m}$ und $D = 100 H \approx 7500$ km mit $H = 75$ km, $\tau = 0,025$ sek ist diese Grenze bereits überschritten und es wird $\varepsilon\tau \approx 6$ msek. Erst ~ 6 m/sec nach Beginn des Zeichens erreicht der cos-Wellenzug seine größte Amplitude bei der momentanen Frequenz $\sqrt{3}\omega_k$. Bei kleineren Distanzen natürlich schon früher, und bei entsprechend höheren momentanen Frequenzen.

Das Spektrum des Rechteckimpulses von der zeitlichen Länge T ist nach Abschn. I 2 g gleich $\frac{1}{p}(1 - e^{-Tp})$.

Zu dem bisher behandelten Spektrum $\frac{1}{p}$ der Einheitsstufe kommt also noch das Spektrum $-\frac{1}{p}e^{-Tp}$ hinzu. Nach der Zeit T trifft also nochmal das genau gleiche Signal, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen, ein. Es gilt für dieses zweite Signal wiederum die Formel II 10, nur ist überall statt t jetzt $(t - T)$ zu setzen.

Da auch hier entsprechend den unendlich vielen $\omega_k = \pi \frac{c}{H} g$, $g = 1, 2, \dots$ unendlich viele Sattelpunkte existieren, über die zu summieren ist und die eine Fourierreihe ergeben, deren Grundfrequenz $\omega_{k_1} = \pi \frac{c}{H}$ ist, entspricht diese Summe, wie schon erwähnt, den unendlich vielen Strahlenbündeln, die vom Sender in verschiedenen Richtungen emittiert werden und die sich nach wiederholten Reflexionen im Empfangsort vereinigen. Signale dieser Art dürften den hauptsächlich nur während der Nacht beobachteten „Twecks“ [6] entsprechen, die im Lautsprecher einen Pfiff mit abnehmender Tonhöhe ergeben, der unmittelbar auf den eigentlich „atmosphärisch“ folgt und der nach genauerer Analyse aus verschiedenen Tönen besteht, die harmonisch zueinander liegen. Die Tonhöhen am Ende des Twecks entsprechen den Frequenzen ω_{k_1} , $2\omega_{k_1}$, $3\omega_{k_1}$ u. s. f. d. h. ~ 2000 P/s, 4000 P/s und 6000 P/s. Die tiefste Frequenz geht nach POTTER von 2300 P/s bis auf 1650 P/s herunter. Die Dauer ist etwa 30–40 ms. Bei Sonnenaufgang verschwinden sie und beginnen praktisch mit Sonnenuntergang.

Dirac-Impuls des Stromes

Für den Dirac-Impuls des Stromes ist der erwähnte Amplitudenfaktor des Ausbreitungsspektrums

$$\sqrt{j\omega} \left(1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}\right)^{3/4}$$

zugleich auch für das Signalspektrum gültig. Rechnet man analog wie bei Gl. II 10 den zeitlichen Verlauf des Signales aus, so ergibt sich für den Verlauf der radialen Feldstärke

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega_k \cdot \tau^{3/2}}{t(t^2 - \tau^2)} \cos \left[\omega_k \sqrt{t^2 - \tau^2} + \varphi + \frac{\pi}{4} \right] \exp \left[-\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \frac{\omega_k^{1/2}}{\tau} \frac{t^{3/2}}{(t^2 - \tau^2)^{1/4}} \right].$$

Gegenüber dem zeitlichen Verlauf bei der Einheitsstufe, Gl. II 10, kommt hier noch der Faktor ω_k hinzu. Die Signalamplitude ist also um so größer, je höher die Ordnung des betreffenden Oberfeldes ist, wobei jedes Oberfeld harmonisch zu dem Oberfeld der geringsten Ordnung ist. Es sind hier also Signale zu erwarten, bei denen die Oberfelder um so stärker beteiligt sind, je höher ihre Ordnung ist, und die infolgedessen von der Sinuslinie sehr stark abweichende Bilder ergeben werden. Wie schon erwähnt, entsprechen diese Signale den nacheinander eintreffenden reflektierten Dirac-Impulsen des Senders, wie sie z. B. in [5] eschrrieben sind. Nur gibt die Formel oben noch den Einfluß der Pulsverformung bei jeder Reflexion mit wieder. Mit wachsender Zeit werden die höheren Oberfelder stärker gedämpft als die von geringerer Ordnung, so daß schließlich nur die Signale der tiefsten Ordnung übrigbleiben und das Bild einfacher abgerundeter reflektierter Impulse ergeben. Dieses Signal lagert sich über das Signal des Grundfeldes nach Fig. 1.

Exponentiell ansteigender und abfallender Strom

$$i = J(e^{-at} - e^{-bt}).$$

Die Ausbreitung dieses Stromes durch das Grundfeld hat STÄBLEIN (2) diskutiert. Für die Ausbreitung der Oberfelder ist der Amplitudenfaktor von E_r nach Gl. II 1

$$2 \frac{C}{\sqrt{D}} \sqrt{\dot{p}} \left(1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}\right)^{3/4} \cdot \left(\frac{1}{\dot{p} + a} - \frac{1}{\dot{p} + b}\right),$$

da das Spektrum von e^{-at} den Verlauf $\frac{1}{\dot{p} + a}$ hat. Mit $\omega = \omega_s = \frac{t \omega_k}{\sqrt{t^2 - \tau^2}}$ ergibt sich für den ersten Teil des Ausdrucks mit $\frac{1}{\dot{p} + a}$

$$2 \frac{C}{\sqrt{D}} \sqrt{\frac{\omega_s}{2}} \left\{ \frac{a + \omega_s}{a^2 + \omega_s^2} + j \frac{a - \omega_s}{a^2 + \omega_s^2} \right\} \cdot \frac{\tau^{3/2}}{t^{3/2}}.$$

Wird dies wieder multipliziert mit dem Näherungswert des Fourierintegrals nach S. 32

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\tau \omega_k^{1/2}}{(t^2 - \tau^2)^{3/4}} \exp [j \omega_k \sqrt{t^2 - \tau^2}]$$

und wird wieder über beide Sattelpunkte $\pm \omega_k$ summiert, so entsteht als Zeitzeichen des Oberfeldes

$$2 \frac{C}{\sqrt{D}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\omega_k \tau^{5/2}}{t \sqrt{t^2 - \tau^2}} \frac{1}{\sqrt{a^2 (t^2 - \tau^2) + t^2 \omega_k^2}} \cdot \cos [\omega_k \sqrt{t^2 - \tau^2} + \varphi],$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a - \omega_s}{a + \omega_s},$$

wobei noch der Dämpfungsfaktor

$$\exp \left[-\sqrt{\frac{a}{2}} \frac{\omega_k^{1/2}}{\tau} \frac{t^{3/2}}{(t^2 - \tau^2)^{1/4}} \right]$$

nach Gl. II 8 hinzuzufügen ist.

Wenn $a \rightarrow 0$ geht, geht der Ausdruck in den der Einheitsstufe Gl. II 10 über. Die Amplitude wird dann unabhängig von ω_k , d. h. für alle Oberfelder die gleiche. Je größer a ist, d. h. je rascher die Exponentialfunktion abfällt, um so kleiner werden die Zeichen, verglichen mit denen der Einheitsstufe. Aber für $a \gg \omega_k$ werden die Amplituden immer mehr proportional zu ω_k , d. h. je höher die Ordnung des Oberfeldes ist, desto größer wird seine Amplitude. Wir erhalten dann eine sehr stark verzerrte Fourierreihe als Summe aller Oberfelder und nähern uns dem zeitlichen Verlauf des Dirac-Impulses.

Für $t \gg \tau$ nähert sich das Zeichen der Form

$$2 \frac{C}{\sqrt{D}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega_k \tau^{5/2}}{t^3} \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega_k^2}} \cos [\omega_k t + \varphi] \exp \left[-\sqrt{\frac{a}{2}} \frac{\omega_k^{1/2}}{\tau} t \right]$$

Von diesem Ausdruck ist nun noch der analoge für das 2. Glied mit dem Faktor $\frac{1}{b + b}$ zu subtrahieren. Damit erhält man für $t \gg \tau$

$$2 \frac{C}{\sqrt{D}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega_k \tau^{5/2}}{t^3} \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega_k^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + \omega_k^2}} \right] \cos (\omega_k t + \varphi) \exp \left[-\sqrt{\frac{a}{2}} \frac{\omega_k^{1/2}}{\tau} t \right]$$

Für $a = b$ wird der Ausdruck zu Null, und er wird auch sehr klein für a und $b \ll \omega_k$. Für a und $b \gg \omega_k$ entsteht

$$2 \frac{C}{\sqrt{D}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega_k \tau^{5/2}}{t^3} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \cos (\omega_k t + \varphi) \exp \left(-\sqrt{\frac{a}{2}} \frac{\omega_k^{1/2}}{\tau} t \right)$$

und wird um so größer, je verschiedener a und b sind. Für a und b folgen nach NORINDER (19, 20) etwa die Werte $7 \cdot 10^3$ und $4 \cdot 10^4$, BRUCE und GOLDE (18) geben dafür $4,4 \cdot 10^4$ und $4,5 \cdot 10^5$, also etwa 10mal größere Werte an.

Man kann auch die von der Erde aus anwachsende Länge der Hauptentladung des Blitzes nach BRUCE und GOLDE berücksichtigen, indem die Geschwindigkeit des Blitzkopfes

$$v_t = v_0 e^{-\gamma t}$$

mit $v_0 = 8 \cdot 10^4 \frac{km}{sek}$, und $\gamma = 3 \cdot 10^4 / \text{sec}$. gesetzt wird.

Dann ist die Blitzhöhe

$$h = \int_0^t v_t dt = \frac{v_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t})$$

und das Dipolmoment

$$i h = J \frac{v_0}{\gamma} [e^{-a t} - e^{-b t} - e^{-(a+\gamma)t} + e^{-(b+\gamma)t}].$$

Man erhält einen viergliedrigen Exponentialausdruck, der analog dem vorhergehenden zu behandeln ist. Besonders einfach wird er, wenn $b \gg \gamma$ ist, was nach BRUCES und GOLDES Zahlen anzunehmen ist. Dann wird

$$i h = J \frac{v_0}{\gamma} [e^{-a t} - e^{-(a+\gamma)t}],$$

weil dann das langsame Anwachsen der Höhe den schnellen Anstieg des Stromes kompensiert. Das zeitliche Signal wird dann für $t \ll \tau$, entsprechend S. 38

$$2 \frac{C}{\sqrt{D}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega_k \tau^{3/2}}{t^3} \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega_k^2}} - \frac{1}{\sqrt{(a+\gamma)^2 + \omega_k^2}} \right] \cdot \cos(\omega_k t + \varphi) \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \frac{\omega_k^{1/2}}{\tau} t\right),$$

wobei in C für $h = \frac{v_0}{\gamma}$ zu setzen ist.

Anders verlaufen die Signale, wenn die Amplitudenfunktion des Spektrums $A(\omega)$ nicht überall langsam veränderlich ist, sondern z. B. Pole in der komplexen ω -Ebene hat, über die der Integrationsweg im Laufe der Zeit hinweggeht. Die Lage der Sattelpunkte $\omega_s = \frac{t\omega_k}{\sqrt{t^2 - \tau^2}}$, abgesehen von einer kleinen imaginären Komponente infolge der Dämpfung, ist bei $t \approx \tau$ sehr weit außen auf der reellen ω -Achse und wandert mit wachsender Zeit zu kleineren Werten bis zu $\omega_s = \omega_k$. Er liegt bei einem bestimmten t gerade bei der Laufzeit $\tau = \frac{D}{c}$, bei der das vom Sender mit Gruppengeschwindigkeit ausgesendete Zeichen der Frequenz ω_s den Empfänger erreicht, $v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_k^2}{\omega_s^2}}$, und $t = \frac{D}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_k^2}{\omega_s^2}}}$.

Begrenzter Sinuswellenzug

Das Spektrum eines zur Zeit $t = 0$ beginnenden Sinuswellenzuges von der Frequenz Ω mit dem Spektrum $\frac{\Omega}{\Omega^2 - \omega^2}$ hat einen Pol für $\omega = \pm \Omega$ auf der reellen Achse. Nur wenn $\Omega > \omega_k$ ist, wird dieser Pol vom Integrationsweg überstrichen und sein Residuum, das dann zu berücksichtigen ist, ergibt den endgültigen vollen Wert des übertragenen Wellenzuges, der also zur Zeit $t = \frac{D}{v_g}$, $v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_k^2}{\Omega^2}}$ beginnt. Dieser Fall ist von A. SOMMERFELD und L. BRILLOUIN [4] für ein Medium mit Dispersion behandelt worden und kann für unseren Fall umgerechnet werden. Danach beginnt das Signal eines sinusförmigen Wellenzuges

zur Zeit $t = \frac{D}{c}$ mit Sinusschwingungen sehr kleiner Amplitude und sehr hoher Frequenz, wobei aber mit wachsender Zeit die Amplitude zunimmt und die Frequenz abnimmt nach der Gleichung

$$\Omega \sqrt[4]{\frac{t'}{\xi}} J_{1/2}[2 \sqrt{\xi t'}], \quad \xi = \frac{\omega_k^2}{2c} \cdot D, \quad t' = t - \frac{D}{c},$$

wenn wir als spektrale Amplitude der Ausbreitung wieder $\sqrt{p} \cdot \left(1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}\right)^{3/4}$ voraussetzen.

Darin ist die Besselfunktion $J_{1/2}(\varrho) = \sqrt{\frac{2\varrho}{\pi}} \frac{\sin \varrho}{\varrho}$. Auch hier wird der Zeichenbeginn durch den spektralen Verlauf bei sehr hohen Frequenzen bestimmt. Solche Signale treten nur auf, wenn das Spektrum des Stromes stärker als $\frac{1}{p^{3/2}}$ mit der Frequenz abnimmt. Bei der Einheitsstufe mit dem Spektrum $\frac{1}{p}$ sind sie nicht vorhanden.

Für spätere Zeiten können wir wieder unser Verfahren der Sattelpunkte auf den begrenzten Sinuswellenzug anwenden, dessen Spektrum nach Abschn. I 2 h, S. 21, gleich $\frac{\Omega}{p^2 + \Omega^2} \times (1 - e^{-pnT})$ ist, wobei Ω die Frequenz, $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ und n die Zahl der durchlaufenen Wellen bedeutet, wobei wir zunächst $\omega_s > \Omega$ voraussetzen, also die Zeit vor Durchlaufen des Poles bis $t < \frac{\Omega\tau}{\sqrt{\Omega^2 - \omega_k^2}}$ betrachten. Multipliziert mit dem Ausbreitungsspektrum $\sqrt{p} \left(1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}\right)^{3/4} \times \frac{\Omega}{\Omega^2 - \omega_k^2}$ ergibt sich der Amplitudenfaktor zu

$$\sqrt{\pm j} \cdot \frac{\tau^{3/2} \omega_k^{1/2}}{t} \cdot \frac{(t^2 - \tau^2)^{3/4} \cdot \Omega}{(\Omega^2 - \omega_k^2)(t^2 - \tau^2) - \omega_k^2 \tau^2},$$

so daß entsprechend Gl. II 7, S. 32, der zeitliche Verlauf

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\tau^{5/2} \omega_k}{t} \cdot \frac{\Omega}{(\Omega^2 - \omega_k^2)(t^2 - \tau^2) - \omega_k^2 \tau^2} \cdot \cos \left[\omega_k \sqrt{t^2 - \tau^2} + \frac{\pi}{4} \right] \exp \left[-\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \frac{\omega_k^{1/2}}{\tau} \frac{t^{3/2}}{(t^2 - \tau^2)^{1/4}} \right]$$

wird. Hiernach würde für $t = \frac{\Omega\tau}{\sqrt{\Omega^2 - \omega_k^2}}$ bei der momentanen Frequenz $\omega_s = \Omega$ die Amplitude des Signals unendlich werden, was natürlich nicht möglich ist. ω_s ist eben bei Berücksichtigung der Dämpfung nicht reell, sondern hat eine imaginäre Komponente, die das Maximum begrenzt. Auch dies sind zunächst „Vorläufer“ des endgültigen Signals, die aber auch nach Durchlaufen von $\omega_s = \Omega$ noch existieren und bei begrenztem Signal als „Nachläufer“ auftreten können. Für $t > \tau$ geht die Formel über in

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\tau^{5/2} \omega_k}{t^3} \cdot \frac{\Omega}{\Omega^2 - \omega_k^2} \cdot \cos \left(\omega_k t + \frac{\pi}{4} \right) \exp \left[-\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \frac{\omega_k^{3/2}}{\tau} t \right].$$

Ist der Wellenzug nicht sofort in seiner vollen Größe da, sondern wachsen seine Amplituden erst allmählich an, so treten die gleichen Schwingungen auf, nur mit sehr viel kleinerer Amplitude.

Zur Zeit $t = \frac{D}{v_g}$, $\omega_s = \Omega$, $v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_k^2}{\Omega^2}}$ gehen bei einem unbegrenzten Sinuswellenzug die relativ schwachen Vorläufer ziemlich plötzlich in das endgültige Signal der Frequenz Ω über, s. Abb. 30.

Die Zeit $\frac{D}{v_g}$ ist um so kleiner, je kleiner ω_k gegen Ω ist. Oberfelder mit $\Omega \approx \omega_k$ werden also besonders lange Einschwingzeiten haben und erst relativ spät nach Zeichenbeginn ihre volle Amplitude ergeben. Für endgültige Ausbreitung kommen in diesem Fall nur die ω_k mit $\Omega > \omega_k$ in Frage.

Die Vorläufer sind in unserem Fall die geometrisch-optisch reflektierten Strahlenbündel des Senders, die sich beim Empfänger vereinigen.

Nach der Zeit nT fällt dann bei einem begrenzten Wellenzug nochmals dieses Signal mit entgegengesetztem Vorzeichen ein, und es ist dann in der Formel statt $t \rightarrow (t - nT)$

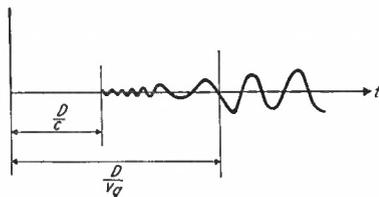


Abb. 30

„Allmähliche“ Entstehung des Signals eines Sinuswellenzugs für das Oberfeld mit der Grenzfrequenz ω_k

zu schreiben. Dann hängt es sehr stark von der Zeitdauer nT ab, ob das zuerst eingefallene Signal bereits stationär geworden ist oder nicht. Maßgebend dafür ist, ob $nT \leq \frac{D}{v_g} - \tau$, d. h.

$\geq \tau \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_k^2}{\Omega^2}}} - 1 \right]$ ist, was z. B. für $\frac{\omega_k}{\Omega} \ll 1$ bedeutet, daß $nT \leq \frac{\tau}{2} \frac{\omega_k^2}{\Omega^2}$ ist. Mit $T = \frac{2\pi}{\Omega}$

wird diese Bedingung zu $n \left(\frac{\Omega}{\omega_k} \right) \leq \frac{1}{4\pi} \omega_k \tau$. Nur wenn $n \frac{\Omega}{\omega_k}$ wesentlich größer ist, entsteht überhaupt das eigentliche Sinuszeichen, andernfalls wird es vollkommen verzerrt. Nach Ablauf des eigentlichen Signals beenden die erwähnten „Vorläufer“ als „Nachläufer“ das Zeichen.

Vom Standpunkt des Experiments aus ist für die Signale der Oberfelder zu folgern, daß mit einem empfindlichen Breitbandempfänger mit Braunschem Rohr Frequenzen in der Nähe von ω_k zu beobachten sein müßten, während aber ein Empfänger mit extrem schmalen Band bei ω_k den Wert Null ergeben müßte, da wir es eben mit einer abnehmenden gleitenden Frequenz zu tun haben, die theoretisch erst nach unendlich langer Zeit und mit unendlich schwacher Amplitude den Wert ω_k erreicht.

2. SPEKTRALE VERTEILUNG DER ZEICHEN DER OBERFELDER

Für die Beurteilung der spektralen Wirkung der Oberfelder des vertikalen Dipols berücksichtigen wir wieder, daß nach Gl. II 1 S. 23 für $\omega \gg \omega_k$ die spektrale Verteilung prinzipiell die gleiche ist wie bei den Grundfeldern (abgesehen von der doppelten Amplitude und der doppelten Dämpfung), daß dagegen, sobald ω in die Nähe von ω_k kommt, die

Amplitude stark abnimmt und die Dämpfung zunimmt. Ist also das Ausbreitungsspektrum des Grundfeldes $\sqrt{p} \exp[-\sqrt{p\alpha} - p\tau]$, so ist es für die Oberfelder des vertikalen Dipols

$$2\sqrt{p} \left(1 + \frac{\omega_k^2}{p^2}\right)^{3/4} \exp\left[-p \sqrt{1 + \frac{\omega_k^2}{p^2}} \cdot \tau - 2\sqrt{\alpha} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{1 + \frac{\omega_k^2}{p^2}}}\right]$$

zu setzen. Kommt es nur auf die Absolutwerte an, so muß das Spektrum des Stromverlaufs im Dipol beim Grundfeld multipliziert werden mit $\sqrt{\omega} \exp\left[-\sqrt{\frac{\omega\alpha}{2}}\right]$, bei den Oberfeldern des vertikalen Dipols dagegen mit $2\sqrt{\omega} \left(1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}\right)^{3/4} \exp\left[-\frac{\sqrt{2\alpha\omega}}{\sqrt{1 - \omega_k^2/\omega^2}}\right]$. Auf diese Weise kann man immer die Spektren beider Ausbreitungsformen miteinander vergleichen und findet, daß für $\omega \gg \omega_k$ das Oberfeldspektrum, abgesehen von der größeren Dämpfung in der Amplitude, doppelt so groß ist wie das Grundfeldspektrum, daß es für $\omega \approx 1,3 \omega_k$ ungefähr gleich groß ist und daß es dann bis $\omega = \omega_k$ rasch auf Null abnimmt. Daraus folgt zunächst, daß überall da, wo ein Oberfeld eine spektrale Intensität hat, auch eine spektrale Intensität des Grundfeldes vorhanden sein muß. Für $\omega = \omega_k$ ist die spektrale Intensität des Oberfeldes stets Null. Jede in Abschn. I 2 ausgerechnete spektrale Zeichenverteilung läßt sich so in das Spektrum eines Oberfeldes umrechnen. Auch hier ist zu berücksichtigen, daß es eine unendliche Menge von Oberfeldern gibt, deren Spektrum jeweils erst oberhalb der zugehörigen Grenzfrequenz $\omega_k = g \cdot \frac{\pi}{c} H$ wirksam wird.

Nehmen wir als Beispiel wieder den Rechteckimpuls von der zeitlichen Länge T , so ist der Absolutwert des Spektrums für das Grundfeld von

$$\frac{1}{\sqrt{p}} (1 - e^{-pT}) \cdot \exp(-\sqrt{\alpha p})$$

gleich
$$\frac{2}{\sqrt{\omega}} \sin \frac{\omega T}{2} \cdot \exp\left[-\sqrt{\frac{\alpha\omega}{2}}\right].$$

Das Spektrum ist Null für $\frac{\omega T}{2} = 0$ und für $\frac{\omega T}{2} = g\pi$ d. h. $\omega = 2\pi \frac{g}{T}$. Dazwischen liegen Maxima die für $x = \frac{\omega T}{2}$ gegeben sind durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} x = \frac{2x}{1 + \sqrt{x} \sqrt{\frac{\alpha}{T}}}$$

deren graphische Lösung in Abb. 31 angegeben ist.

Je größer $\sqrt{\frac{\alpha}{T}}$ ist, bei desto kleineren Frequenzen liegen die Maxima; Abb. 32 gibt eine Skizze des spektralen Verlaufes des Grundfeldes.

Die Oberfelder geben für $\omega \gg \omega_k$ analoge Spektren mit doppelter Amplitude und 4facher α . Sie beginnen erst oberhalb von $\omega = \omega_k$ zunächst mit sehr kleinen Amplituden und $\left(1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}\right)$ erreicht erst bei $\omega \approx 3 \omega_k$ seine volle Größe. Ob in der ersten Halbwelle von $\frac{\omega T}{2}$,

Abb. 32 von $\omega = 0$ bis $\omega = \frac{2\pi}{T}$ sich Spektra der Oberfelder bemerkbar machen oder nicht, hängt davon ab, ob $\omega = \frac{2\pi}{T} \leq \omega_{kl} = \frac{\pi c}{H}$ ist, oder ob $T \leq \frac{2H}{c}$ ist. Es kommt also auf die Impulsbreite T an. Für $H = 75$ km verlangt das $T \leq \frac{1}{2}$ msek. Die erste Abweichung vom Grundfeld-Spektrum beginnt bei $\omega_{kl} = \frac{\pi c}{H}$ aufzutreten. Aber

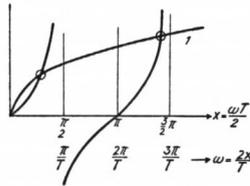


Abb. 31

Kurve 1

$$\frac{2x}{1 + \sqrt{x} \sqrt{\frac{\alpha}{T}}}$$

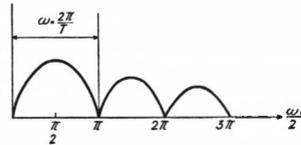


Abb. 32

Ausbreitungsspektrum eines Rechteckimpulses des Stromes von der Länge T

die Amplitude des Spektrums des Oberfeldes wächst erst allmählich an, bei $\omega \approx 2 \omega_k$ hat es den 1,6 fachen und erst bei $\omega \approx 3 \omega_k$ den endgültigen doppelten Wert des Spektrums des Grundfeldes erreicht (abgesehen von der Dämpfung).

III. GRENZEN DER GÜLTIGKEIT DES VORAUSGESETZTEN AUSBREITUNGSSPEKTRUMS

Die Grenzen der Gültigkeit des Ausbreitungsspektrums $\sqrt{p} \exp[-p\tau - \sqrt{\alpha p}]$ sind in [7] diskutiert.

1. Damit die Ionosphäre als Leiter aufgefaßt werden darf, muß $\kappa > \omega \varepsilon$ sein, oder $\omega < \frac{\kappa}{\varepsilon}$. Für $\kappa = 10^{-4} \frac{S}{m}$ ergibt dies $\omega < 10^7 \text{ sek}^{-1}$ und für $\kappa = 10^{-6} \frac{S}{m}$, $\omega < 10^5 \text{ sek}^{-1}$.
2. Es muß $\frac{\omega^2}{c^2} \ll \omega \mu \kappa$ sein, d. h. für $\kappa = 10^{-4} \frac{S}{m}$ muß $\omega \ll 10^7 \text{ sek}^{-1}$ sein, für $\kappa = 10^{-6} \frac{S}{m}$, $\omega \ll 10^5 \text{ sek}^{-1}$.
3. Es muß $H \ll \frac{2c}{\omega^{3/2}} \sqrt{\frac{\kappa}{\varepsilon}}$ sein, was für $\kappa = 10^{-4} \frac{S}{m}$, $\omega = 10^4 \text{ sek}^{-1}$, $H \ll 1800 \text{ km}$ verlangt, für $\omega = 10^5 \text{ sek}^{-1}$, $H \ll 60 \text{ km}$. Für $\kappa = 10^{-6} \frac{S}{m}$ werden diese Werte 10mal kleiner.

Es gilt also der obige Ausdruck zunächst voll nur im Gebiet kleiner Frequenzen, und besonders für $\kappa = 10^{-6} \frac{S}{m}$ sind bei höheren Frequenzen Abweichungen zu erwarten. Die Bedingung 3 ist nicht von prinzipieller Bedeutung, denn es zeigt sich bei genauerer Betrachtung, daß durch größere H , als nach 3 zulässig, der Dämpfungsfaktor im Prinzip lediglich kleiner wird, als näherungsweise berechnet. Dagegen hat eine Verletzung der Bedingung 1 prinzipielle Konsequenzen und soll deshalb kurz diskutiert werden.

Setzt man für sehr kleine Leitwerte κ die Ionosphäre nicht mehr als reinen Leiter, sondern als Dielektrikum mit Leitwert voraus, so daß in der Ionosphäre rot $H = (\kappa + j\omega\varepsilon) E$ zu setzen ist, wobei ε gleich der D. K. des Luftraums zu setzen ist, so ergibt sich mit der gleichen Näherung, wie in [7] beschrieben, der Ausbreitungsfaktor β in $e^{-j\beta x}$ als

$$\beta = \frac{\omega}{c} + \frac{\sqrt{-j\kappa\omega\varepsilon}}{2H(\kappa + j\omega\varepsilon)}.$$

Der Dämpfungsfaktor als der imaginäre Teil von β wird

$$\frac{\sqrt{\kappa\omega\varepsilon}}{2\sqrt{2}H} \cdot \frac{\kappa + \omega\varepsilon}{\kappa^2 + \omega^2\varepsilon^2}.$$

Solange $\omega\varepsilon \ll \kappa$ ist, wird er $\frac{1}{2\sqrt{2}H} \cdot \sqrt{\frac{\omega\varepsilon}{\kappa}}$, wie früher, sobald jedoch die Frequenz größer wird, zeigt sich, daß dann die Dämpfung nach Durchlaufen eines Maximums wieder abnimmt, und wenn $\omega\varepsilon \gg \kappa$ wird, verläuft sie nach der Form $\frac{1}{2\sqrt{2}H} \cdot \sqrt{\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}}$. Wir

haben danach also in der Gegend von $\omega = \frac{\varkappa}{\varepsilon}$ ein Dämpfungsmaximum zu erwarten und bei größeren und kleineren Frequenzen einen Dämpfungsabfall. Suchen wir diese Dämpfungsformel so anzupassen, daß sie bei 2000 P/s ein Dämpfungsmaximum ergibt, so müßte \varkappa einige $10^{-7} \frac{S}{m}$ sein. Dann wäre bei $\omega \approx \frac{\varkappa}{\varepsilon}$ ein Dämpfungsmaximum von der Größe $\frac{D}{2\sqrt{2}H}$ vorhanden und bei 16 kHz wäre dann der Dämpfungsfaktor auf einen Wert gesunken, der nach der Näherungsformel $\frac{1}{2\sqrt{2}H} \sqrt{\frac{\omega\varepsilon}{\varkappa}}$ gerechnet einem Wert von $\varkappa \approx 10^{-5} \frac{S}{m}$ entspricht.

Um den Einfluß eines solchen selektiven Dämpfungsmaximums auf die Gestalt des ausgesendeten Zeichens wenigstens roh abzuschätzen, kann man jetzt die Atmosphäre auch für das Grundfeld als eine Art Sperrfilter der N. T. auffassen, das etwa zwischen den Frequenzgrenzen ω_1 und ω_2 undurchlässig ist, und nach der Approximation von Abschn. II 1 b würde sich mit $u_1 = \sqrt{\frac{2t\omega_1}{\pi}}$ und $u_2 = \sqrt{\frac{2t\omega_2}{\pi}}$ für das Signal des Unit-steps an Stelle von Gl. II 6 a S. 29 jetzt ergeben

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} [1 + C(u_1) - C(u_2) + S(u_1) - S(u_2)].$$

Es würden also Schwingungen mit Frequenzen nahe an ω_1 und ω_2 auftreten, die sich überlagern, die aber erst viel allmählicher und mit viel kleineren Amplituden einsetzen als wie bei einem Hochpaß und den Ablauf des davon ungestörten Signals viel weniger beeinflussen als dort, und die möglicherweise zur Erklärung des „slow tail“ dienen können. Auch BUDDEN [12] berechnet derartige sinusartige Schwingungen dieser Frequenz nach Ablauf des Hauptsignals. Da für die Oberfelder nur das erste eine Grenzfrequenz ω_{H1} hat, die auch in der Gegend des Dämpfungsmaximums liegt, ist nur für diese ein wesentlicher Einfluß zu erwarten, der aber nicht groß sein wird, da deren Dämpfung nahe ω_{H1} sowieso schon gegen Unendlich geht.

Sobald $\omega\varepsilon > \varkappa$ wird, wirkt die Ionosphäre nicht mehr als begrenzender Leiter, sondern wir haben praktisch 2 Dielektrika der gleichen D. K., und die von einem Dipol ausgestrahlten Wellen treten dann bei höheren Frequenzen zum größten Teil ungestört in die Ionosphäre über, so daß hierdurch die Empfangsintensität sehr stark verringert wird, wenn nicht schließlich an höher gelegenen Stellen der Ionosphäre doch wieder eine Reflexion eintritt, die die ausgestrahlte Energie wieder zusammenhält, wie es offenbar der Fall ist; s. das Modell der D-Schicht nach PFISTER [13] und GARDNER und PAWSEY [14]. Für das Übergangsgebiet wäre dann das Ausbreitungsspektrum etwa

$$\sqrt{p} \exp \left(-p\tau - \sqrt{\varkappa\varepsilon} \frac{D}{2H} \cdot \frac{\sqrt{p}}{\varkappa + \varepsilon\sqrt{p}} \right).$$

Naturgemäß würde in dem Gebiet mit abnehmender Dämpfung auch die Reflexion an der Ionosphäre mit zunehmender Frequenz abnehmen. Die Phasengeschwindigkeit der Wellen ergibt sich mit dem obigen Ausbreitungsfaktor als

$$v_p = \frac{c}{1 + \frac{c}{2\sqrt{2}H} \sqrt{\frac{\varkappa\varepsilon}{\omega} \frac{\varkappa - \omega\varepsilon}{\varkappa^2 + \omega^2\varepsilon^2}}}.$$

Bei sehr kleinen Frequenzen, $\omega < \frac{\kappa}{\varepsilon}$, ist sie gering, und wird

$$v_p = \frac{c}{1 + \frac{c}{2\sqrt{2}H} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\omega\kappa}}}$$

wie in I 1, wächst dann mit der Frequenz, wird bei $\kappa = \omega\varepsilon$ gleich der Lichtgeschwindigkeit, steigt dann über diesen Wert, und strebt nach Durchlaufen eines Maximums für große Frequenzen, $\omega \gg \frac{\kappa}{\varepsilon}$, wieder der Lichtgeschwindigkeit zu. Auch die Gruppengeschwindigkeit ist bei kleinen Frequenzen klein, ist in der Gegend von $\kappa = \omega\varepsilon$ größer als c , durchläuft dann ein Minimum $< c$ und geht bei hohen Frequenzen wieder gegen c . Das Dämpfungsmaximum bei ~ 3000 P/sek ist experimentell von BOWE [8] nachgewiesen worden, aus dessen Kurven nach der Dämpfungsformel $\frac{D}{2\sqrt{2}H} \sqrt{\frac{\omega\varepsilon}{\kappa}}$ bei ~ 16 kHz ein $\kappa \approx 10^{-4} \frac{S}{m}$, bei 3000 P/sek bei $H = 50$ km dagegen ein κ von $\sim 10^{-8} \frac{S}{m}$ folgt. Vorher hatte schon GARDNER [9] einen starken Abfall der Ausbreitungsintensität von Blitzsignalen bei Tag unterhalb von ~ 10 kHz beobachtet. Auch CHAPMAN und MATTHEWS [11] stellen bei ihren niederfrequenten spektralen Beobachtungen von Blitzenladungen bei 2000 P/s ein sehr tiefes Minimum der Intensität fest. CHAPMAN und MACARIO [26] finden für dieses Minimum bei Tag mit $H = 50$ km, $\kappa = 6 \cdot 10^{-7} \frac{S}{m}$, bei Nacht mit $H = 80$ km, $\kappa = 2 \cdot 10^{-6} \frac{S}{m}$ nach den BUDDENSchen Rechnungen [12], und deuten es als eine selektive Absorption in diesem Frequenzgebiet. Das Maximum der spektralen Intensität im Bereich kleinster Frequenzen, < 2 kHz im „slow tail“, liegt bei Nacht bei einer höheren Frequenz als bei Tage, was durch die geringere Dämpfung bei Nacht verständlich wird. Auch die Tatsache, daß im unteren Teil des Spektrums $\omega < 2000$ P/s das Maximum der spektralen Intensität mit wachsendem Abstand sich nach kleinen Frequenzen zu verschiebt, während im oberen Spektralgebiet $\omega > 2000$ P/s sich dieses Maximum nach höheren Frequenzen hin verschiebt, deutet darauf hin, daß sich zwischen beiden Gebieten ein Dämpfungsmaximum befindet. (Siehe a. Nakai [17].)

Aus den Chapmanschen Messungen [26] ergibt sich mit der Näherungsformel

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{D}{2H} \cdot \sqrt{\frac{\omega\varepsilon}{\kappa}}$$

für die Dämpfung gerechnet, ein κ von

	Tag	Nacht	
100 P/s	10^{-5}	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$\frac{S}{m}$
2000 – 3000 P/s	$0,9 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-7}$	
10 – 20 kH	$4 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-4}$	

wenn H bei Tag ~ 50 km und bei Nacht ≈ 80 km gesetzt wird.

Im Frequenzgebiet von 10–20 kHz bei $\kappa \approx 10^{-4} \frac{S}{m}$ ist $\omega\varepsilon$ noch klein gegen κ , so daß die Anwendung der obigen Näherungsformel, die $\omega\varepsilon < \kappa$ voraussetzt, offenbar berechtigt ist. Von dieser Frequenz aus gegen höhere Frequenzen zu ist deshalb unser Ausbreitungsspektrum $\sqrt{p} \exp(-p\tau - \sqrt{\alpha p})$ wohl als richtig anzusehen, und zwar mit einem Leitwert von $\kappa \approx 10^{-4} \frac{S}{m}$, wie auch aus den Ausbreitungsmessungen von Langwellensendern folgt.

Auch WAIT und PERRY [23] schließen aus einer Berechnung der ionosphärischen Reflexionskoeffizienten mit Erdmagnetfeld für den ordinären und den extraordinären Strahl, abhängig von der Frequenz und dem Einfallswinkel, nach den Messungen von WEEKES [24] und von BAIN, BRACEWELL, STRAKER und WESTCOTT [25] auf einen wirksamen Leitwert der Ionosphäre von $\kappa \approx 10^{-6}$ bis $5 \cdot 10^{-6} \frac{S}{m}$ bei 16 kH bei Tag bzw. bei Nacht.

Eine exakte Lösung der Ausbreitungsverhältnisse für den obenerwähnten Fall, nämlich daß sich die Ionosphäre wesentlich als Dielektrikum und nicht als reiner Leiter verhält und durch $\kappa + j\omega\epsilon$ in ihren elektrischen Eigenschaften charakterisiert ist, wurde zuerst von K. G. BUDDEN [12] angegeben. Er stellt erstmals ein Dämpfungsmaximum bei $\sim 2000 \text{ P/s}$ fest, das um so ausgeprägter ist, je geringer die Höhe H der Ionosphäre ist, und findet für $H = 50 \text{ km}$ einen Leitwert von $\kappa \approx 10^{-6} \frac{S}{m}$. Bei Frequenzen von 20 kH kommt er mit diesem Leitwert auf Dämpfungen, die etwa unserer Näherungsformel mit $\kappa \approx 10^{-4} \frac{S}{m}$ entsprechen. Auf Grund dieser Tatsachen ist zu schließen, daß die Ausbreitungsfunktion $\sqrt{p} \exp[-p\tau - \sqrt{\alpha p}]$ im Gebiet kleiner Frequenzen, von etwa $\sim 16 \text{ kH}$ abwärts nicht mehr gilt bis auf ein schmales Gebiet allergeringster Frequenzen. In dieses Gebiet fällt auch der „slow tail“, dessen höchste Frequenz nahe der Quelle nach HEPBURN und PIERCE [10] bei $\approx 500 \text{ Hz}$ liegt. Bei $\kappa \approx 10^{-5}$ bis $10^{-6} \frac{S}{m}$ ist hier $\kappa \gg \omega\epsilon$. Sie muß aber offenbar im Frequenzgebiet von etwa 16 kH ab nach oben wieder gelten, da in diesem Gebiet die bekannte Austinsche Formel gilt, die auch aus unserem Ansatz mit $\kappa \approx 10^{-4} \frac{S}{m}$ folgt, und bis zu jenen Frequenzen, bei denen erfahrungsgemäß die Austinsche Formel gilt. Es muß sich also offenbar in diesem Frequenzgebiet wiederum eine höher liegende begrenzen-
 zende Schicht der Ionosphäre bemerkbar machen mit einer größeren Leitfähigkeit von etwa $\kappa = 10^{-4} \frac{S}{m}$, während die Dämpfung der darunterliegenden Schicht von $\kappa = 10^{-6} \frac{S}{m}$ verschwindend klein wird. Damit im unteren Frequenzgebiet mit der kleinen Leitfähigkeit von $\kappa = 10^{-6} \frac{S}{m}$ die volle Dämpfungswirkung dieser Schicht zur Geltung kommt, muß die Dicke dieser Schicht mindestens etwa 10–20 km betragen, denn so tief dringen Wellen von der Frequenz 2000 P/s in diese Schicht ein.

Der Wert von $\kappa = 10^{-6} \frac{S}{m}$ entspricht bei einer Stoßzahl $\nu = 10^7 \text{ sek}^{-1}$ einer Elektronendichte von $N \approx 300/\text{cm}^3$, was ungefähr der D-Schicht in einer Höhe von $\sim 70 \text{ km}$ entspricht, dem Wert $\kappa \approx 10^{-4} \frac{S}{m}$ entsprechen etwa 30000 El/cm^3 , was dem unteren Rande der E-Schicht bei $\sim 90 \text{ km}$ entspricht (s. PFISTER [13]).

Einen gewissen Widerspruch zu den geringen Leitwerten, die Chapman auch bei Nacht findet, bilden die bei Nacht beobachtbaren langen Züge von aufeinanderfolgenden Impulsen (bis zu 40 und mehr), die durch wiederholte Reflexion an Erde und Ionosphäre erklärt werden und die zur Beschreibung des Verlaufes ihrer Intensität erstaunlich hohe Leitwerte der Ionosphäre erfordern, s. HEPBURN and PIERCE [15], s. a. SCHUMANN [5]. Sollten diese hohen Werte des Leitwerts zutreffen, so würde bei Nacht das Ausbreitungsspektrum $\sqrt{p} \exp[-p\tau - \sqrt{\alpha p}]$ bis zu sehr tiefen Frequenzen herab durchwegs gültig sein. Die Annahme, daß der Leitwert lediglich infolge des Magnetfeldes der Erde so stark erhöht wird, dürfte wohl nicht zutreffen, da in den Ionosphärenhöhen, die für die Ausbreitung sehr langer Wellen in Frage kommen, das Magnetfeld der Erde stets die Leitfähigkeit der Ionosphäre herabsetzt [16] und dadurch die Dämpfung der Wellen in der Luft vergrößert.

IV. BIPOLARE IMPULSE UND HORIZONTALER DIPOL

Im Abschnitt I 1 sind nur unipolare Pulsströme behandelt worden, da diese in erster Linie den allgemeinen Verlauf der Hauptentladung des Blitzes bestimmen. Wie aber NORINDER (19, 20, 21) immer wieder betont, sind für den wirklichen Verlauf des Blitzstroms niemals nur solche glatten unipolaren Pulsströme zu erwarten, sondern immer darüber gelagert sehr komplizierte unregelmäßige Schwingungen und Zacken. Schon die Vorentladung besteht nur aus solchen Zacken, und auch in der Hauptentladung sind über dem glatten unipolaren Grundimpuls solche kurzzeitigen Zusatzimpulse verteilt, die sich ebenfalls in Grund- und Oberfeldern ausbreiten.

Es erscheint daher nicht überflüssig, auch einige einfache bipolare Pulsströme in bezug auf ihre Ausbreitung zu untersuchen.

1. Dirac-Doppelimpuls

Dieser Impuls, der aus einem positiven, unendlich hohen und zeitlich unendlich schmalen Strom besteht, dem sofort ein negativer unendlich hoher und unendlich schmaler Impuls folgt, hat das Spektrum p . Seine spektrale Ausbreitung im Grundfeld ist durch $p^{3/2} \exp(-\sqrt{ap})$ gegeben. Die zeitliche Verteilung ist die nach t differenzierte Kurve der Abb. 1 und hat die Gleichung

$$\frac{1}{4\sqrt{\pi} a^{3/2} x^{3/2}} \left[\frac{1}{x} \left(\frac{1}{4x} - 3 \right) + 3 \right] \exp \left(-\frac{1}{4x} \right), \quad x = \frac{t}{a}.$$

Man erhält also eine steile, hohe und schmale positive Halbwelle, die bei $x = \frac{t}{a} = 0,092$ durch Null geht. Dieser folgt eine wesentlich kleinere, aber viel länger dauernde negative Welle, die wiederum bei $x = 0,91$ durch Null geht. Als Abschluß erscheint eine sehr kleine positive Welle, die allmählich verschwindet. Der ursprünglich antisymmetrische Puls wird also vollkommen unsymmetrisch und erhält einen positiven Nachläufer.

2. Die einzelne Sinuswelle

$$\sin \frac{2\pi}{T} t, \quad \text{von } t = 0 \text{ bis } t = T.$$

Diese Welle läßt sich wieder, wie in Abschn. I 1 f S. 12 beschrieben, durch ein positives und ein negatives Trapez angenähert darstellen. Multipliziert mit dem Ausbreitungsspektrum, wird das Zeichenspektrum von E_r

$$\frac{C}{\sqrt{D}} \frac{b}{T} \frac{1}{p^{3/2}} e^{-\sqrt{ap}} \left[1 - e^{-\frac{pT}{6}} - e^{-\frac{pT}{3}} + e^{-\frac{2}{3}pT} + e^{-\frac{5}{6}pT} - e^{-pT} \right].$$

Das Fourier-Integral von $\frac{1}{p^{3/2}} \exp(-\sqrt{ap})$ ist wie in Gl. I 2, S. 8 angegeben

$$\sqrt{a} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x} \exp\left(-\frac{1}{4x}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \right\}$$

und der zeitliche Verlauf davon ist in Abb. 4 dargestellt. Derartige Zeichen gleicher Form fallen mit verschiedenen Vorzeichen zu den Zeiten

$$\tau = \frac{D}{c}, \quad \tau + \frac{T}{6}, \quad \tau + \frac{T}{3}, \quad \tau + \frac{2}{3}T, \quad \tau + \frac{5}{6}T, \quad \tau = T$$

am Empfangsort ein und überlagern sich alle. Tut man dies analog wie es für die $(t - \cos \alpha)$ -Kurve in Abschnitt I 1 f durchgeführt wurde, so erhält man eine sinusartige Kurve, deren positive Halbwelle aber schon vor $t - \tau = \frac{T}{2}$ durch Null geht, der dann eine längere negative Halbwelle folgt, die wieder durch Null geht, und der dann eine allmählich verschwindende kleine positive Halbwelle folgt. Besonders wichtig ist es, daß die Amplitude etwa proportional zu $\frac{1}{\sqrt{T}}$ ist, d. h. zeitlich kurze Sinusimpulse geben viel stärkere Zeichen als zeitlich lange.

Der Beitrag, den die Oberfelder bei der Ausbreitung eines solchen Sinusimpulses ergeben, ist schon im Abschnitt II 1 c besprochen.

Die Ausbreitung bipolarer Impulse, die entstehen, wenn den im Abschn. I 1 besprochenen positiven unipolaren Pulse der Dauer T sofort gleichartig verlaufende negative Pulse der gleichen Form folgen, gewinnt man sehr einfach dadurch, daß nach Ablauf der positiven Pulsdauer T nach Beginn des Zeichens unmittelbar noch einmal dasselbe Zeitsignal auftritt, wie es der positive Puls hatte, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen und wenn man dieses zweite Zeitsignal über das ursprüngliche erste lagert.

Zusammenfassend kann also gesagt werden, daß für das Grundfeld das Ausbreitungsspektrum $\sqrt{p} \exp(-\sqrt{ap})$ die Eigenschaft hat, den zeitlichen Stromverlauf, wenn auch verzerrt, so doch annähernd im zeitlichen Verlauf des Zeichens wiederzugeben, wie ein Blick auf die Abb. des Abschnittes I 1 a-g zeigt, daß aber andererseits bei zeitlich begrenzten Stromverläufen die Wurzel aus der Anstiegs- und Abfallgeschwindigkeit dieses Verlaufs proportional der Größe des ausgesendeten Zeichens ist. Es ist also durchaus möglich, daß z. B. die Stromkurve einer Hauptentladung, die ein „langsamer“ unipolarer Impuls von einigen 1000 μs Dauer ist, darübergelagerte kaum bemerkbare schwache, genügend hochfrequente Schwankungen hat, deren Dauer etwa einige μs beträgt, im Fernfeld, d. h. schon relativ nahe vom Sender, eine sehr stark verzerrte Kurve gibt, da die Amplituden dieser kleinen raschen Schwankungen im Zeitsignal etwa 30mal größer erscheinen im Verhältnis zur Größe des Zeitsignals des „langsamen“ Impulses, wie es z. B. NORINDERS [19] Figuren 25 und 26 auf S. 558 zeigen. Jede kleine hochfrequente Schwankung im Blitzstrom bildet sich auf diese Weise verstärkt im ausgesendeten Zeichen ab, um so stärker, je kürzer die Impulsdauer ist, und es mag vielleicht daher kommen, daß vielfach so außerordentlich komplizierte Blitzsignale beobachtet werden, die auf diese Weise Kenntnis vom zeitlichen Verlauf des Blitzes geben. Es ist wohl so, wie NORINDER immer wieder betont, daß die Blitzentladung als solche ein äußerst komplizierter Vorgang ist, der auch außerordentlich verschieden ablaufen kann, so daß eine Schematisierung auf einige wenige Typen vielleicht gar nicht möglich ist. Man könnte aber durch Analyse solcher Kurven, die nahe der Blitzentladung aufgenommen sind, sehr wertvolle Einblicke in den Charakter

der Entladung selbst bekommen. Bei weiterer Ausbreitung schleift natürlich die Dämpfung die höher frequenten Anteile immer mehr ab, so daß schon nach nicht allzu großen Entfernungen die Kurven glatter und einfacher werden.

Die Oberfelder ergeben in dem ersten kurzen Zeitintervall nach Beginn des Zeichens die gleichen Signale wie das Grundfeld, aber schon nach kurzer Zeit erzeugen sie periodische Schwingungen, die mit hohen Frequenzen beginnen und deren Frequenz mit der Zeit abnimmt bis auf die jeweilige Frequenz ω_k des betreffenden Oberfeldes. Diese Schwingungen beginnen beim vertikalen Dipol mit sehr kleinen Amplituden, durchlaufen dann ein Maximum und verschwinden dann wieder. Theoretisch gibt es unendlich viele solcher Schwingungen, die harmonisch zueinander sind, also eine Art Fourierreihe bilden, und je nach dem ursprünglichen Stromverlauf sind die „Oberwellen“ dieser Fourierreihe groß oder klein, so daß sowohl sinusartige als auch stark verzerrte impulsartige Folgen zustande kommen können. Diese können auch als Reflexionen an der Ionosphäre gedeutet werden.

Bei Beobachtungen nahe am Blitz ist zu beachten, daß Reflexionen frühestens nach der Zeit $\frac{2H}{c}$ eintreffen können. Für $H = 75$ km ist diese Zeit $\frac{1}{2}$ m sec. Alles was vorher verläuft, kann nicht durch Reflexionen verursacht sein, es sei denn, man nähme eine ganz anomal niedrige Reflexionshöhe an. Bei größeren Entfernungen trifft die erste Reflexion früher nach Zeichenbeginn ein, um so mehr, je weiter man von der Quelle entfernt ist.

In dieser Arbeit ist bisher nur von den Zeichen vertikaler Dipole gesprochen worden. Es gibt aber offenbar keinen Blitz, der nur vertikal verläuft, sondern nach den Messungen von NORINDER (21) haben wir fast immer damit zu rechnen, daß auch horizontale Anteile auftreten. Die Ausbreitung der Zeichen des horizontalen Dipols verläuft aber nach ganz anderen Gesetzen als beim vertikalen Dipol (22). Der horizontale Dipol strahlt erstens eine E -Welle (wie der vertikale Dipol mit E_r, E_θ, H_φ) vorzugsweise in seiner Richtung, deren Intensität mit $\cos \varphi$ abnimmt, wenn φ der Winkel zwischen Blitzrichtung und Richtung zum Beobachter ist. Die Dämpfung dieser Welle ist etwa gleich jener des vertikalen Dipols, aber das Ausbreitungsspektrum ist proportional zu

$$\frac{1}{V\dot{p}} e^{-V\alpha\dot{p}}$$

(gegen $\sqrt{\dot{p}} e^{-V\alpha\dot{p}}$ beim vertikalen Dipol). Dadurch entstehen ganz andere Signale. Der Dirac-Impuls z. B. würde das Zeitzeichen $\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{a}{4t}\right)$ geben (wie früher die Einheitsstufe) und die Einheitsstufe würde $\frac{2t^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{a}{4t}\right) - \sqrt{a} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{t}}\right)$ (wie früher der linear ansteigende Strom), so daß z. B. ein Rechteckstrom ein dreieckartiges Zeitzeichen ergeben würde.

Für die Oberfelder gilt jetzt das Ausbreitungsspektrum

$$\frac{1}{V\dot{p}} \left(1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}\right)^{1/4} \exp \left[-\tau \dot{p} \sqrt{1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}} - \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}}} \cdot \sqrt{\alpha\dot{p}} \right].$$

Es kommen also wieder durch die Oberfelder dieselben Schwingungen mit derselben Dämpfung zustande wie beim vertikalen Dipol, aber der Amplitudenverlauf ist wegen des Faktors $\frac{1}{V\dot{p}}$ (gegenüber $\sqrt{\dot{p}}$ beim vertikalen Dipol) ein ganz anderer.

Der horizontale Dipol strahlt aber außerdem quer zu seiner Richtung, d. h. proportional zu $\sin \varphi$ noch eine H -Welle aus (H_r, H_θ, E_φ). Das elektrische Feld weist parallel zur Erdoberfläche und ist nur bei endlicher Leitfähigkeit derselben mit einer Horizontalantenne meßbar, wohl aber immer das Magnetfeld H_θ parallel zur Erdoberfläche mit einem Rahmen, das in der Richtung zum Dipol hinzeigt. Besonders wichtig für diesen Feldtyp ist, daß die Dämpfung mit der Frequenz abnimmt. Der Exponentialfaktor der Ausbreitung ist

$$\exp \left[-\tau \rho \sqrt{1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}} - \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}}} \left(\frac{\omega_k}{\omega} \right)^2 \cdot \sqrt{\alpha \rho} \right]$$

[s. a. Abschn. II 1 c β]. Es entstehen also wieder dieselben Oszillationen wie bei den Oberfeldern des vertikalen Dipols, aber diese Oszillationen beginnen zunächst mit großer Amplitude und nehmen allmählich in ihrer Größe ab.

Diese Zeichen sind mit einer vertikalen Antenne nicht meßbar. Durch den Einfluß des magnetischen Erdfeldes auf die Ionosphäre kann aber zu der ursprünglichen H -Welle eine damit gekoppelte E -Welle erzeugt werden [16], so daß dann eine Messung mit vertikaler Antenne möglich ist. Gerade bei ausgesendeten H -Wellen dürfte dieser Einfluß ziemlich stark sein. Die Dämpfung beider Wellen ist dann allerdings wieder die größere der reinen E -Wellen und zusätzlich erhöht durch den Einfluß des Magnetfeldes auf die Elektronenbahnen in der Ionosphäre.

Typisch für diese Mitwirkung horizontaler Teile der Blitzentladung auf die ausgesendeten Zeichen je nach ihrer Richtung in bezug auf den horizontalen Dipol sind die Oszillogramme NORINDERS (19), Fig. 33 und 34, wo bei gleicher Entfernung von der Blitzentladung in 2 Stationen ganz verschiedene Feldformen gemessen werden. Außerdem zeigt NORINDER (21) durch Messungen des Magnetfeldes mit vertikalen und mit horizontalem Rahmen, daß die vertikalen magnetischen Felder in einer Entfernung von etwa 2 km von der Blitzentladung im Mittel Werte von $100 \cdot 10^{-4}$ Gauß bis zu $200 \cdot 10^{-4}$ Gauß haben. Das Verhältnis von senkrechter zu horizontaler Magnetfeldkomponente wurde bei Entfernungen von 0–12 km von der Entladung bei kleineren Entfernungen zu $\sim 30\%$ und bei größeren etwa zu 20% bestimmt.

Es folgt hieraus, daß die Erde für diese Vorgänge keinesfalls als unendlich gut leitend angenommen werden darf, denn sonst wären solche vertikalen Magnetfelder gar nicht möglich. Daraus folgt aber wiederum, daß man auch die horizontalen elektrischen Komponenten mit Erdantennen müßte messen können.

ZUSAMMENFASSUNG

Es werden auf Grund vorausgesetzter, bekannter Ausbreitungsbedingungen, wobei die Ionosphäre als Leiter mit einem Leitwert κ von $\approx 10^{-4} \frac{S}{m}$ vorausgesetzt wird, für vertikale Dipole die zeitlichen Verläufe und die absoluten spektralen Verteilungen von Signalen bestimmt, die aus bestimmten zeitlichen Verläufen des Dipolstromes folgen. Die behandelten zeitlichen Dipolstromverläufe sind als aperiodische Impulse vorausgesetzt und als periodische Wiederholungen solcher Einzelimpulse. Es werden auch die Absolutwerte der Spektren der Signale angegeben, wobei sich, wie bekannt, zeigt, daß die Messung nur der Absolutwerte (ohne die dazugehörigen Phasenwinkel) nur mit Vorsicht zu Rückschlüssen auf den zeitlichen Verlauf der Dipolentladung verwendet werden darf.

Es wird zunächst der Zeichenverlauf für das Grundfeld und anschließend für die Oberfelder diskutiert. Es zeigt sich, daß für kurze Zeit nach Beginn eines aperiodischen Dipolstromes, z. B. der Einheitsstufe, die Oberfelder analoge zeitliche Verläufe wie das Grundfeld erzeugen, daß aber sehr bald die Grösse der Zeichen sehr stark abnimmt und periodische Schwingungen mit abnehmender Frequenz auftreten, die sich schließlich der Frequenz $\omega_k = \pi \frac{c}{H} g$, $g = 1, 2, 3, \dots$ nähern, und die das Zeichen beenden. Es sind bei nicht allzu starker Dämpfung in den beobachteten Signalen eine große Zahl von zueinander harmonischen Frequenzen ω_k zu erwarten, die einem periodischen Wellenzug von der Grundfrequenz ω_{k_1} entsprechen und wie sie den häufig beobachteten Tweeks entsprechen. Bei den spektralen Verläufen macht sich das Spektrum eines Oberfeldes mit der Grenzfrequenz ω_k erst bei Frequenzen von $\omega \approx 3 \omega_k$ voll bemerkbar.

Ein Vergleich mit der beobachteten Ausbreitung der Signale von Blitzen und von Langwellensendern ergibt, daß die Annahme einer „leitenden“ Ionosphäre bei Tage streng nur gilt 1. im Bereich niedrigster Frequenzen von einigen Hundert P/s , mit $\kappa \approx 10^{-6} \frac{S}{m}$ und 2. im Bereich der üblichen Langwellensender mit $\kappa \approx 10^{-4} \frac{S}{m}$ von ~ 16 kHz aus nach höheren Frequenzen zu, während im Zwischengebiet der Frequenz die Ionosphäre wie ein Dielektrikum mit $\epsilon_r = 1$, $\kappa \approx 10^{-6} \frac{S}{m}$ wirkt, wodurch ein Dämpfungsmaximum bei 2000 – 3000 P/s auftritt, das nach höheren und tieferen Frequenzen abfällt.

Bei Nacht sprechen die beobachteten vielfachen Reflexionen von Signalen an Erde und Ionosphäre für eine Gültigkeit der Annahme einer leitenden Ionosphäre und ihres Ausbreitungsspektrums $\sqrt{p} \exp(-\tau p - \sqrt{\alpha p})$ im ganzen unteren Spektralgebiet. Allerdings geben spektrale Messungen auch hier ein Dämpfungsmaximum bei 2000 – 3000 P/s , das aber sehr viel kleiner ist als das bei Tage beobachtete, so daß wohl vermutlich noch weitere Messungen nötig sind, um diese Frage ganz eindeutig zu entscheiden.

Zum Schluß werden noch einige bipolare Impulse besprochen und die verschiedenen Zeichenformen, die ein horizontaler Dipol in seiner Richtung und quer dazu aussendet.

LITERATUR

- [1] W. O. SCHUMANN, Nuovo Cimento IX. 1116. 1952. Z. a. P. 4. 474. 1952; Z. a. P. 6. 35. 1954; Z. a. P. 6. 346. 1954
- [2] H. G. STÄBLEIN, Z. a. P. 7. 290. 1955
- [3] E. T. PIERCE, Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society V. 81. 1955. 211 und 229
- [4] A. SOMMERFELD, Vorl. über theor. Physik, Bd. IV, Optik S. 116; s. a. Ann. d. Phys. 44. 1914. 177. L. BRILLOUIN A. d. P. 44. 1914. 203
- [5] W. O. SCHUMANN, Z. a. P. 8. 24. 1956
- [6] R. K. POTTER, Pr. J. R. E. V. 39. 1951. S. 1067. E. T. BURTON und E. M. BOARDMAN, Bell System T. J. V. 12. 1933. S. 498. H. BARKHAUSEN Phys. Zschr. 20. 401. 1919. Pr. J. R. E. 18. 1930. 1155
- [7] W. O. SCHUMANN, Elektrische Wellen. C. Hanser München 1948. S. 281
- [8] P. W. A. BOWE, Phil. Mag. 87. 1953. S. 833. Phil. Mag. 42. 1951. S. 121
- [9] F. F. GARDNER, Phil. Mag. 112. 1950. S. 1259
- [10] HEPBURN F. und E. T. PIERCE, Nature 171. 837. 1953
- [11] CHAPMAN F. W. und MATTHEWS W. D. Nature, V. 172. 1953. 495; s. a. CHAPMAN F. W. und EDWARDS, A. G. Proc. U. R. S. I. 8. Pt. 2. 351. 1950
- [12] K. G. BUDDEN, Phil. Mag. 7. S. Bd. 42. S. 1. 1951. Phil. Mag. 7. S. Bd. 43. S. 1179. 1952
- [13] W. PFISTER, U. R. S. T. XI. Gen.vers. den Haag. 1954
- [14] F. F. GARDNER und I. L. PAWSEY, Journ. of Atm. and Terr. Physics 3. 1953. 321.
- [15] F. HEPBURN und E. T. PIERCE, Phil. Mag. 7. S. Vol. 45. p. 917. 1954
- [16] W. O. SCHUMANN, Z. a. P. 7. 284. 1955
- [17] TAKETOSI NAKAI, Proc. of the Res. Institute of Atmospheric V. 3. Nagoya University Nov. 1955. A. Kimpara.
- [18] BRUCE C. E. R. und GOLDE, R. H. J., Inst. El. Engrs. 88 II 1941. 487.
- [19] NORINDER, H., Arkiv f. Geophys. 1. 1952. 543.
- [20] NORINDER, H., Arkiv f. Geophys. 2. 1954. 161.
- [21] NORINDER, H., Arkiv f. Geophys. 2. 1956. 423.
- [22] W. O. SCHUMANN Z. a. P. 6. 1954. 225 und 267.
- [23] WAIT J. R. und PERRY L. B., Nat. Bur. of Standards NBS Report 3588. Mai 1956.
- [24] WEEKES K., Proc. Inst. Electr. Eng. III. 1950. Bd. 97 S. 100.
- [25] BAIN W. C., BRACEWELL R. N., STRAKER T. W. und WESTCOTT B. A., Proc. Inst. Electr. Engrs. 1952. Pt. IV Bd. 99. S. 250.
- [26] CHAPMAN F. W. und MACARIO R. C. V. Nature. Vol. 177. 1956. S. 930.