

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

ABHANDLUNGEN · NEUE FOLGE, HEFT 89

HELMUT EMDE

Homogene Polytope

Mit 4 Figuren, 36 Einzelabbildungen und 21 Stereobildern
sowie zahlreichen Symbolen, Schemas und Tafeln

Vorgelegt von Herrn Josef Lense am 10. Mai 1957

MÜNCHEN 1958

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KOMMISSION BEI DER C. H. BECK'SCHEN VERLAGSBUCHHANDLUNG MÜNCHEN

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei Nördlingen
Printed in Germany

MEINEM VEREHRTEN LEHRER PROFESSOR H. GRAF

ZUM 60. GEBURTSTAG GEWIDMET

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort	7
Literaturverzeichnis	9
1 <i>Grundbegriffe</i>	11
1.1 Die geometrischen Elemente	11
1.2 Polytope	12
1.3 Anschlüsse und Anschlußzahlen der Elemente	12
1.4 Homogenität	13
1.5 Anschlußzahlen, Elementezahlen, Kennzahlen homogener Polytope	13
2 <i>Die Grundgleichungen homogener Polytope</i>	15
2.1 Feste Anschlußzahlen	15
2.2 Gleiche Anschlußzahlen	15
2.3 Kombinierte Anschlußzahlen	16
2.4 Verknüpfungsgleichungen	16
3 <i>Darstellung homogener Polytope durch Kennschemas</i>	17
3.1 Symmetrien der Grundgleichungen	17
3.2 Kennschema eines Polytopes	17
3.3 Darstellung der Grundgleichungen im Kennschema	18
4 <i>Folgerungen aus den Grundgleichungen</i>	20
4.1 Beziehungen zwischen Elemente- und Anschlußzahlen	20
4.2 Multiplikative Beziehungen zwischen den Anschlußzahlen	20
4.3 Additive Beziehung zwischen reziproken Anschlußzahlen	21
4.4 Beziehung zwischen den Elementezahlen	22
4.5 Normzahlen und Normgleichung	23
5 <i>Die geometrischen Polaritäten</i>	24
5.1 Folgerungen aus den Symmetrien des Kennschemas	24
5.2 Geometrische Polaritäten und Polarisatoren	25
5.3 Einschränkungende Bedingungen durch die festen und gleichen Anschlußzahlen	26
5.4 Die Gruppe der Polarisatoren	27

6	<i>Existenz homogener Polytope und Kennzahlenberechnung</i>	31
6.1	Existenzvoraussetzungen	31
6.2	Gleichungen des halben Kennschemas	32
6.3	Ungerade und gerade Kennzahlen	33
6.4	Bestimmung der Kennschemas und Benennung der Polytope	35
7	<i>Bestimmung aller Kennschemas finiter homogener Polytope</i>	37
7.1	Homogene Polytopelemente	37
7.2	Bestimmung aller finiten Raum-Flächen-Typen	38
7.3	Darstellung aller Kennschema-Typen	42
8	<i>Realisierung aller finiten homogenen Polytope</i>	46
8.1	Homogene Polytope mit polygon-diedralen Räumen	46
8.2	Homogene Polytope mit digon-polyedralen Räumen	51
8.3	Homogene Polytope mit trigon-tetraedralen Räumen	55
8.4	Homogene Polytope mit trigon-oktaedralen Räumen	58
8.5	Homogene Polytope mit trigon-ikosaedralen Räumen	59
8.6	Homogene Polytope mit tetragon-hexaedralen Räumen	60
8.7	Homogene Polytope mit pentagon-dodekaedralen Räumen	61
	Abkürzungs-, Gleichungs- und Symbolverzeichnis (seitlich herausklappbar)	67

VORWORT

In der vorliegenden Arbeit werden die Anschlußverhältnisse der als selbständige Individuen verstandenen Elemente: Punkte, Kurven, Flächen und Räume beim Zusammenschluß zu homogenen Polytopen untersucht.

Nach Einführung der benötigten Grundbegriffe werden die Grundgleichungen aufgestellt; diese enthalten alle Bedingungen, denen die Kennzahlen, das sind die Elementezahlen und Anschlußzahlen der homogenen Polytope, unterworfen werden. Die Kennzahlen, die Grundgleichungen und weitere Folgerungen aus ihnen werden sodann in einem Kennschema dargestellt. Mit Hilfe dieses Kennschemas wird die Gruppe der Polarisatoren untersucht, die durch Kennzahlvertauschungen einem gegebenen Polytop jeweils ein zweites gegenüberstellen. Abschließend werden alle Kennschemas finiter homogener Polytope und deren mögliche Polarisatoren bestimmt, die Polytope selbst beschrieben und dargestellt.

Der nun folgende historische Abriß soll das Verhältnis der vorliegenden Problemstellung zu den Ergebnissen früherer Arbeiten über Polyeder und Polytope aufzeigen.

Den neueren Ausgangspunkt dieses bereits im Altertum behandelten elementargeometrischen Wissenszweiges bildet der nach L. Euler benannte Polyedersatz (vgl. 2. 3). Er war bereits R. Descartes [1] bekannt, wie sich aus einem später aufgefundenen, von G. W. Leibniz stammenden Manuskript ergab. Euler [2] bewies diesen Satz im Jahre 1752 durch vollständige Induktion.

Die Gleichung „Punktzahl + Flächenzahl = Kurvenzahl + Raumzahl“ der vorliegenden Arbeit wurde inhaltlich bereits 1813 von A. L. Cauchy [3] nachgewiesen. Er fand diesen Satz für allgemeine Polytope, die den unter 1.1 und 1.2 beschriebenen Grundbegriffen genügen, jedoch keine Homogenitätsforderungen zu erfüllen brauchen.

Im Jahre 1862 bewies der Göttinger Mathematiker J. B. Listing [4] die „Census-Gleichung räumlicher Komplexe“, die eine sehr weitgehende Verallgemeinerung des Kurven-, Flächen- und Raumbegriffes umfaßt und gegenüber der Cauchyschen Gleichung eine ähnliche Erweiterung darstellt, wie die Formel von S. Lhuillier [5] gegenüber der Eulerschen.

Mit der im folgenden verwendeten Schreibweise würde die Cauchysche Formel lauten: $p + f = k + \bar{r} + 1$. Die Inhomogenität dieser Gleichung rührt daher, daß Cauchy unter der Raumzahl nur die Anzahl der „inneren Zellen“ eines endlich ausgedehnten Polytopes verstand. Die homogene Schreibweise der Elementegleichung (4.4) erhält man hieraus durch Mitzählen des Umgebungsraumes, der später von Listing als „Amplexum“ bezeichnet wurde. In der vorliegenden Arbeit wird jedoch bei der Abzählung der Elemente keine Unterscheidung zwischen endlichen und unendlich ausgedehnten Räumen vorgenommen (vgl. 1.1).

In der homogenen Listingschen Census-Gleichung $A - B + C - D = 0$ enthalten die Zahlen A, B, C und D die Anzahlen der weniger einschränkend definierten Punkte, Kurven, Flächen bzw. Räume, sowie Beitragszahlen aus den verschiedenartigen Zusammenhängen der einzelnen Kurven, Flächen und Räume.

L. Schläfli [6] entwickelte 1852 in seiner „Theorie der vielfachen Kontinuität“ die n -dimensionale Erweiterung der Cauchyschen Formel $\sum (-1)^k a_k = 1$, worin k die Dimensionszahl, a_k die Elementezahl der betreffenden Dimension angibt.

Neuere zusammenfassende Veröffentlichungen über die Theorie der Polyeder und Polytope wurden herausgegeben von M. Brückner [7], E. Steinitz [8], H. Rademacher [9], W. Lietzmann [10] und H. S. M. Coxeter [11].

In Coxeters „Regular Polytopes“ findet sich auch ein Nachweis der Cauchyschen Formel für allgemeine Polytope, die in ähnlicher Weise hergeleitet und auf die gleiche Form gebracht wurde wie die Elementegleichung (4.4). Hinzielend auf mehrdimensionale Polytope behandelt er die verschiedenartigen Polytope gestuft nach der höchsten Dimensionszahl ihrer Elemente.

Die in der vorliegenden Arbeit als Anschlußzahlen bezeichneten Beizahlen der homogenen Polytope wurden bereits bei älteren Arbeiten verwendet; ihre allgemeinen Gesetzmäßigkeiten bei dreidimensionalen homogenen Polytopen der hier beschriebenen Art waren jedoch bisher nicht Gegenstand systematischer Untersuchungen.

Die Möglichkeiten polarer Gegenüberstellung je zweier homogener Polytope mit vergleichbaren Anschlußzahlen wurden mit Ausnahme der „Dualitäten“ bisher ebenfalls nicht untersucht. Die Gründe hierfür sind wohl die dimensionsmäßig gestufte Behandlung in den seitherigen Betrachtungen über Polytope, der Ausschluß des von Listing „Amplexum“ genannten Umgebungsraumes sowie die Beschränkung auf geradlinig und ebenflächig begrenzte reguläre Polytope.

Die bei den Grundbegriffen erklärte Voraussetzung, daß der Träger der beschriebenen Elemente der gesamte dreidimensionale projektive Raum sei, wird mit Rücksicht auf Untersuchungen getroffen, die an diese Arbeit anschließen. Hier werden nach der allgemeinen Behandlung homogener Polytope nur alle finiten Polytope erfaßt; das sind solche, die außer dem Amplexum kein ins Unendliche reichendes Element besitzen. Es ergeben sich dabei unter anderem Konfigurationen, die bisher nur als „dreidimensionale Projektionen der vierdimensionalen regulären Polytope“ behandelt wurden, und solche, die bisher nicht beachtet werden konnten wegen der Unmöglichkeit, sie so aufzubauen, daß alle Polytopkurven gerade und alle Polytopflächen eben sind. Alle finiten homogenen Polytope lassen sich so verwirklichen, daß ihre Kurven Kreiskurventeile, ihre Flächen Kugelflächenteile sind.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] R. Descartes: Oeuvres inéd. par Foucher de Careil, Paris 1860, S. 214; vgl. auch R. Baltzer: Berl. Mon.-Ber. 1861, S. 1043 (zitiert nach M. Zacharias: Elementargeometrie, Enc. d. Math. Wiss. III. 1.2, S. 1051).
- [2] L. Euler: Elementa doctrinae solidorum; und Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita. Novi Commentarii Acad. Sc. petrop. IV (1752/1753), Petersburg 1758, S. 109 u. S. 140 (zitiert nach J. B. Listing [4], S. 1).
- [3] A. L. Cauchy: Recherches sur les polyèdres, 2^{de} partie. Journal de l'Ecole Polytechnique 16, Paris 1813, S. 76 (zitiert nach J. B. Listing [4], S. 1).
- [4] J. B. Listing: Der Census räumlicher Komplexe oder Verallgemeinerung des Eulerschen Satzes von den Polyedern. Abh. d. Kgl. Ges. d. Wiss. X, Göttingen 1862.
- [5] S. Lhuillier: Mémoire sur la polyédrométrie. Ann. de mathém. par Gergonne III, Dez. 1812, S. 160 (zitiert nach J. B. Listing: Über einige Anwendungen des Census-Theorems. Nachr. v. d. Kgl. Ges. d. Wiss. 22, Göttingen 1867, S. 437).
- [6] L. Schläfli: Theorie der vielfachen Kontinuität. Neue Denkschriften d. allg. schweiz. Ges. f. d. ges. Nat.-Wiss. 38, Zürich 1901; neu herausgegeben in L. Schläfli: Gesammelte Mathematische Abhandlungen I, Basel 1950, S. 167 ff.
- [7] M. Brückner: Vielecke und Vielfache, Leipzig 1900.
- [8] E. Steinitz: Polyeder und Raumeinteilungen. Enc. d. Math. Wiss. III. 1.2, S. 1 ff.; und Vorlesungen über die Theorie der Polyeder. Herausgegeben von H. Rademacher [9], Berlin 1934.
- [9] H. Rademacher: Vorlesungen über die Theorie der Polyeder. Aus dem Nachlaß von E. Steinitz [8] herausgegeben und ergänzt, Berlin 1934.
- [10] W. Lietzmann: Anschauliche Einführung in die mehrdimensionale Geometrie, München 1952.
- [11] H. S. M. Coxeter: Regular Polytopes, London 1948.

Ausführliche Literaturangaben über das Gesamtgebiet der Polyeder und Polytope finden sich insbesondere bei M. Brückner [7], im Enzyklopädieartikel von E. Steinitz [8], bei H. S. M. Coxeter [11], ferner in: G. Holzmüller: Elemente der Stereometrie II, Leipzig 1900, S. 312 ff.
 R. Haußner: Abhandlungen über die regelmäßigen Sternkörper, Leipzig 1906, S. 98 ff.

1. GRUNDBEGRIFFE

Die Gegenstände der nachfolgenden Untersuchung sind „homogene Polytope“. Hierbei handelt es sich um räumliche Konfigurationen, die unter Beachtung gewisser Homogenitätsforderungen durch Verknüpfung von Punkten, Kurven, Flächen und Räumen entstehen.

In diesem Kapitel werden mit Hilfe einer beschriebenen räumlichen Figur (Elementarpolytop) die benötigten Grundbegriffe eingeführt.

1.1 DIE GEOMETRISCHEN ELEMENTE

Die „geometrischen Elemente“ sind die Bausteine der zu untersuchenden Konfigurationen. Ihr Träger ist der gesamte dreidimensionale projektive Raum.

Es lassen sich vier verschiedene „Elementesorten“ unterscheiden: Punkte, Kurven, Flächen und Räume.

An der in Figur 1 dargestellten einfachen Konfiguration sollen die geometrischen Elemente zunächst beschrieben werden. Ihre allgemeine Definition erfolgt sodann durch Begriffserweiterung.

Im Raum befinde sich eine Kugel, darauf ein Großkreis, auf diesem ein Paar von Gegenpunkten.

Der Raum, die Kugelfläche und die Kreiskurve werden jeweils zweigeteilt:

der Gesamtraum durch die Kugelfläche in Kugellinnen- und Kugelaußenraum,

die Gesamtfläche durch die Kreiskurve in zwei Halbkugelflächen,

die Gesamtkurve durch das Punktepaar in zwei Halbkreiskurven.

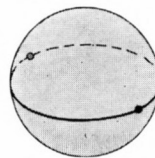
Die so paarweise entstandenen Raum-, Flächen- und Kurventeile seien kurz als „Räume“, „Flächen“ und „Kurven“ bezeichnet. Demnach besteht die gesamte Konfiguration aus folgenden, nach ihrer Dimensionszahl geordneten Elementen:

zwei Punkte

zwei Kurven

zwei Flächen

zwei Räume



Figur 1

Diese aus vier Elementepaaren der vier verschiedenen Elementesorten gebildete Konfiguration wird als „Elementarpolytop“ bezeichnet.

Nun werden die geometrischen Elemente allgemein definiert: „Punkt“, „Kurve“, „Fläche“ und „Raum“ sind Dinge, die sich im projektiven Raum jeweils auf eins der gleichbenannten beiden Elemente des Elementarpolytopes topologisch abbilden lassen.

Daraus folgt u. a., daß jede Kurve, jede Fläche und jeder Raum wie das entsprechende Element des Elementarpolytopes im topologischen Sinn „einfach zusammenhängend“ ist.

1.2 POLYTOPE

Jedes Element einer Elementesorte schließt unmittelbar an Elemente der anderen Elementesorten an. Von allen Elementen der eigenen Sorte ist es durch Elemente fremder Sorten getrennt.

Beim Elementarpolytop (Figur 1) schließt ein Punkt an zwei Kurven, zwei Flächen und zwei Räume an; entsprechend eine Kurve an zwei Punkte, zwei Flächen und zwei Räume; ferner eine Fläche an zwei Punkte, zwei Kurven und zwei Räume; letztlich ein Raum an zwei Punkte, zwei Kurven und zwei Flächen.

Die an ein Element angeschlossenen Elemente werden als dessen „Anschlußelemente“ bezeichnet.

Die Gesamtheit aller zu einer Konfiguration zusammengeschlossenen Elemente wird „Polytop“ genannt, wenn sie von jeder der vier Elementesorten eine endliche Anzahl von Elementen besitzt und jedes einzelne Element an mindestens ein Element jeder der drei anderen Elementesorten anschließt.

1.3 ANSCHLÜSSE UND ANSCHLUSSZAHLEN DER ELEMENTE

Die Anzahl der Anschlüsse eines Polytopelementes an Elemente einer fremden Elementesorte wird als „Anschlußzahl dieses Elementes“ definiert. Jedem einzelnen Element einer jeden Elementesorte ist dementsprechend ein Tripel von Anschlußzahlen zugeordnet.

Die Anschlüsse eines Elementes sind als drei Arten von Anschlußarmen vorstellbar, mit denen es nach den entsprechenden Anschlußarmen seiner Anschlußelemente greift.

Die Anschlüsse selbst können einfach oder mehrfach sein. Mehrfach ist der Anschluß eines Elementes dann, wenn es mehrfach an ein und dasselbe Element einer fremden Elementesorte anschließt, d. h. anschaulich, wenn es mit mehreren Anschlußarmen nach der gleichen Anzahl von Anschlußarmen eines fremden Elementes greift. So kann z. B. eine Kurve (Kreis) zweifach an einen Punkt (einen Punkt dieses Kreises) anschließen oder eine Fläche (Kreisscheibe) zweifach an einen Raum (den Umgebungsraum dieser Scheibe) anschließen.

Für die Anschlußzahl eines Elementes ist es bedeutungslos, ob seine Anschlußarme mehrere Anschlußarme eines fremden Elementes ergreifen oder gleich oft je einen Anschlußarm mehrerer Elemente der betreffenden Sorte; d. h. die Anschlußzahl zählt ein einziges mehrfach angeschlossenes Element wie die gleiche Mehrzahl einfach angeschlossener Elemente.

1.4 HOMOGENITÄT

Ein Polytop heißt „homogen“, wenn jedes Element einer Sorte das gleiche Tripel von Anschlußzahlen besitzt.

Die Homogenität eines Polytopes schließt folgende Eigenschaften seiner Elementesorten ein:

- „Punkthomogenität“: Alle Punkte schließen an gleichviele Kurven, gleichviele Flächen und gleichviele Räume an;
- „Kurvenhomogenität“: Alle Kurven schließen an gleichviele Punkte, gleichviele Flächen und gleichviele Räume an;
- „Flächenhomogenität“: Alle Flächen schließen an gleichviele Punkte, gleichviele Kurven und gleichviele Räume an;
- „Raumhomogenität“: Alle Räume schließen an gleichviele Punkte, gleichviele Kurven und gleichviele Flächen an.

1.5 ANSCHLUSSZAHLEN, ELEMENTEZAHLEN, KENNZAHLEN
HOMOGENER POLYTOPE

Das in einem homogenen Polytop für alle Elemente einer Elementesorte gleiche Anschlußzahlen-Tripel wird als „Anschlußzahlen-Tripel der Elementesorte“ bezeichnet. Da in der vorliegenden Arbeit nur homogene Polytope behandelt werden, wird im folgenden nur von „Anschlußzahlen-Tripeln“ oder von „Anschlußzahlen“ gesprochen.

Jede der vier Elementesorten besitzt drei Anschlußzahlen. Es müssen also $4 \cdot 3 = 12$ Anschlußzahlen unterschieden werden. Diese werden durch jeweils zwei Buchstaben so bezeichnet, daß der große die betreffende Elementesorte, der kleine Indexbuchstabe die Sorte der Anschlußelemente angibt:

- P_k = Punkt-Kurvenanschlußzahl
- P_f = Punkt-Flächenanschlußzahl
- P_r = Punkt-Raumanschlußzahl
- K_p = Kurven-Punktanschlußzahl
- K_f = Kurven-Flächenanschlußzahl
- K_r = Kurven-Raumanschlußzahl
- F_p = Flächen-Punktanschlußzahl
- F_k = Flächen-Kurvenanschlußzahl
- F_r = Flächen-Raumanschlußzahl
- R_p = Raum-Punktanschlußzahl
- R_k = Raum-Kurvenanschlußzahl
- R_f = Raum-Flächenanschlußzahl

Die Anzahl der Elemente jeder Elementesorte wird durch ihre „Elementezahl“ angegeben:

p = Punktzahl

k = Kurvenzahl

f = Flächenzahl

r = Raumzahl

Die zwölf Anschlußzahlen und die vier Elementezahlen bilden insgesamt die sechzehn „Kennzahlen“ eines homogenen Polytopes.

Alle Kennzahlen sind als Anzahlen natürliche Zahlen.

2. DIE GRUNDGLEICHUNGEN HOMOGENER POLYTOPE

Nachdem die benötigten Grundbegriffe anschaulich eingeführt worden sind, werden in diesem Kapitel die Grundgleichungen zusammengestellt, denen die Kennzahlen homogener Polytope genügen sollen. Die Realisierbarkeit dieser Forderungen ist für die definierten geometrischen Elemente evident (vgl. 1.1).

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden außer diesen Grundgleichungen keine weiteren Voraussetzungen über allgemeine homogene Polytope getroffen.

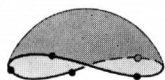
2.1 FESTE ANSCHLUSSZAHLEN

Der „Zweiseitigkeit einer Fläche“ (Figur 2) und der „Zweideutigkeit einer Kurve“ (Figur 3) entsprechen die folgenden Festsetzungen:

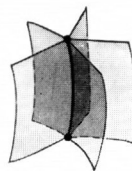
$$(2.1 \text{ F}) \quad F_r = 2$$

$$(2.1 \text{ K}) \quad K_p = 2$$

Hiermit ist festgelegt: Jede Fläche besitzt zwei Raumanschlüsse, jede Kurve zwei Punktanschlüsse.



Figur 2



Figur 3

2.2 GLEICHE ANSCHLUSSZAHLEN

Eine Fläche besitzt gleichviel Punktanschlüsse und Kurvenanschlüsse (Figur 2). Ebenso besitzt eine Kurve gleichviel Raumanschlüsse und Flächenanschlüsse (Figur 3). Diesen der Anschauung entnommenen Bedingungen entsprechen die folgenden Gleichsetzungen:

$$(2.2 \text{ F}) \quad F_p = F_k$$

$$(2.2 \text{ K}) \quad K_r = K_f$$

2.3 KOMBINIERTE ANSCHLUSSZAHLEN

Aus (2.1 F) und (2.2 F) bzw. aus (2.1 K) und (2.2 K) ergeben sich für die Anschlußzahlen der Polytopflächen und -kurven die Gleichungen

$$\begin{aligned} F_k + F_r &= F_p + 2 & \text{bzw.} \\ K_f + K_p &= K_r + 2 \end{aligned}$$

Entsprechend werden für die Polytopräume und -punkte folgende Kombinationen ihrer Anschlußzahlen gefordert:

$$\begin{aligned} (2.3 R) \quad R_p + R_f &= R_k + 2 \\ (2.3 P) \quad P_r + P_k &= P_f + 2 \end{aligned}$$

Da sich jeder einzelne Polytopraum mit seinen Anschlußelementen auf einen entsprechenden Eulerschen Polyeder topologisch abbilden läßt (vgl. 1.1), ist die Forderung (2.3 R) gleichwertig dem Eulerschen Polyedersatz „Punktzahl + Flächenzahl = Kurvenzahl + 2“. Das zeigt sich, wenn man diesen Satz auf die Anschlußelemente eines Polytopraumes anwendet und dann anstelle der Anschlußelemente die entsprechenden Anschlußarme des Polytopraumes zählt.

Die Gleichung (2.3 P) läßt sich anschaulich aus (2.3 R) herleiten, indem man die Oberfläche einer Kugel mit genügend kleinem Radius, deren Mittelpunkt in einem Polytoppunkt liegt, mit den Anschlußelementen des Punktes zum Schnitt bringt. Die Kurvenanschlüsse des Punktes ergeben dann P_k Schnittpunkte, die Flächenanschlüsse P_f Schnittpunkte und die Raumanschlüsse P_r Schnittflächen. Aus der Gültigkeit von (2.3 R) für die Anzahlen der Schnittpunkte, -kurven und -flächen auf der Kugeloberfläche folgt dann für die sie erzeugenden Anschlüsse des Polytoppunktes die Gleichung (2.3 P).

2.4 VERKNÜPFUNGSGLEICHUNGEN

Die Verknüpfung zweier ungleichsortiger Polytopelemente sei stets derart, daß jedes der beiden Elemente Anschlußelement des anderen ist. Das heißt für die Gesamtheit aller Verknüpfungen anschaulich: Jeder einzelne Anschlußarm eines Polytopelementes ergreift einen ihm entsprechenden Anschlußarm eines anderen Polytopelementes.

Zählt man alle sich gegenseitig ergreifenden Anschlußarme der Elemente zweier Elementesorten ab, so ist die Gesamtzahl dieser Anschlußarme bei der einen Elementesorte gleich der Gesamtzahl der entsprechenden Anschlußarme der anderen Elementesorte. Für je zwei Elementesorten sind also die Produkte aus Elementezahl und entsprechender Anschlußzahl einander gleich.

Im einzelnen ergeben sich demnach folgende „Verknüpfungsgleichungen“:

$$\begin{aligned} (2.4 PK) \quad p \cdot P_k &= k \cdot K_p \\ (2.4 KF) \quad k \cdot K_f &= f \cdot F_k \\ (2.4 FR) \quad f \cdot F_r &= r \cdot R_f \\ (2.4 RP) \quad r \cdot R_p &= p \cdot P_r \\ (2.4 PF) \quad p \cdot P_f &= f \cdot F_p \\ (2.4 KR) \quad k \cdot K_r &= r \cdot R_k \end{aligned}$$

(Lies z. B.: Punktzahl mal Punkt-Kurvenanschlußzahl gleich Kurvenzahl mal Kurven-Punktanschlußzahl.)

5. DARSTELLUNG HOMOGENER POLYTOPE DURCH KENNSCHEMAS

Ein geometrisches Element eines homogenen Polytopes ist durch seine drei Anschlußzahlen vollständig charakterisiert, ein Polytop durch die vier Elementezahlen seiner Elementesorten und deren insgesamt zwölf Anschlußzahlen.

Die aus Elementezahlen und Anschlußzahlen bestehenden sechzehn Kennzahlen sollen im folgenden Kapitel zu einem besonders übersichtlichen Zahlenschema zusammengefaßt werden.

5.1 SYMMETRIEN DER GRUNDGLEICHUNGEN

Betrachtet man die Grundgleichungen (2.1), (2.2), (2.3) und (2.4) homogener Polytope, so fällt neben der vielfachen Symmetrie in (2.4) eine spezielle Symmetrie in den Formeln (2.1), (2.2) und (2.3) auf.

Aus der Gegenüberstellung

(2.1 F)	$F_r = 2$	(2.1 K)	$K_p = 2$
(2.2 F)	$F_p = F_k$	(2.2 K)	$K_r = K_f$
(2.3 R)	$R_p + R_f = R_k + 2$	(2.3 P)	$P_r + P_k = P_f + 2$

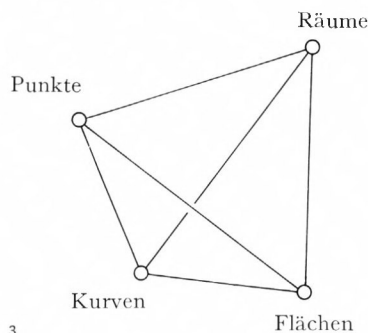
erkennt man, daß bei folgender Vertauschung der Begriffe

Punkt — Raum
Kurve — Fläche

und ebensolcher Vertauschung aller ihnen zugeordneten Buchstaben die links stehenden Formeln in die rechts stehenden übergehen und umgekehrt.

5.2 KENNSCHEMA EINES POLYTOPES

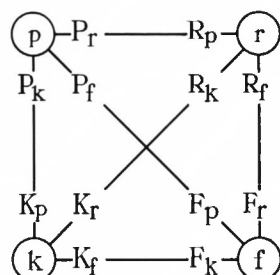
Ordnet man die Begriffe der vier geometrischen Elementesorten in den Ecken eines regulären Tetraeders an, so symbolisieren die sechs Tetraederkanten die $\binom{4}{2}$ möglichen Wechselbeziehungen zwischen den Sorten.



Durch spezielle Projektion eines solchen Tetraeders erhält man ein Quadrat mit Diagonalen, die in dieser Deutung den Seiten des Quadrates gleichwertig sind.

Nachstehend sind in ein solches Quadrat die Elementezahlen und die Anschlußzahlen der Elemente gemäß ihren Wechselbeziehungen eingefügt.

Das entsprechende quadratische Schema der Kennzahlen eines homogenen Polytopes wird als dessen „Kennschema“ bezeichnet.



p	P _r	R _p	r
P _k	P _f	R _k	R _f
K _p	K _r	F _p	F _r
k	K _f	F _k	f

3.3 DARSTELLUNG DER GRUNDGLEICHUNGEN IM KENNSCHEMA

Die Grundgleichungen, denen die Kennzahlen eines homogenen Polytopes genügen müssen, sollen in den folgenden „leeren Kennschemas“ symbolisch zum Ausdruck gebracht werden. Zum besseren Überblick empfiehlt es sich, das Abkürzungs-, Gleichungs- und Symbolverzeichnis (letzte Seite der Abhandlung) seitlich herauszuklappen und ein auf transparentes Papier gepaustes Kennschema zu Hilfe zu nehmen.

(2.1) Feste Anschlußzahlen

$$(2.1 \text{ F}) \quad F_r = 2$$

$$(2.1 \text{ K}) \quad K_p = 2$$

2			2

Symbolschema (2.1)

(2.2) Gleiche Anschlußzahlen

$$(2.2 \text{ F}) \quad F_p = F_k$$

$$(2.2 \text{ K}) \quad K_r = K_f$$

Symbolschema (2.2)

(2.3) Kombinierte Anschlußzahlen

$$(2.3 \text{ R}) \quad R_p + R_f = R_k + 2$$

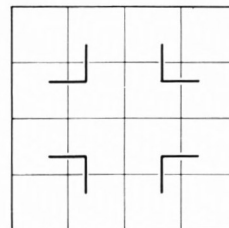
$$(2.3 \text{ P}) \quad P_r + P_k = P_f + 2$$

	└─┘	└─┘	

Symbolschema (2.3)

Wie bereits in Abschnitt 2.3 angegeben wurde, folgen aus (2.1 F) und (2.2 F) bzw. aus (2.1 K) und (2.2 K) die beiden zu (2.3 R) und (2.3 P) analogen Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} (2.3 \text{ F})^* & F_k + F_r = F_p + 2 \\ (2.3 \text{ K})^* & K_f + K_p = K_r + 2 \end{array}$$

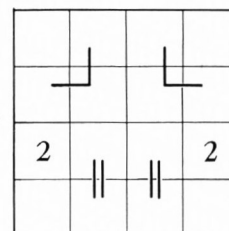


Symbolschema
(2.3), (2.3)*

Sie sind mit * versehen, da sie als hergeleitete Gleichungen nicht zu den geforderten Grundgleichungen zählen.

Durch Kombination der drei Symbolschemas (2.1), (2.2) und (2.3) erhält man für die geforderten sechs „Anschlußgleichungen“ das folgende Symbolschema:

$$\begin{array}{ll} (2.1 \text{ F}) & F_r = 2 \\ (2.1 \text{ K}) & K_p = 2 \\ (2.2 \text{ F}) & F_p = F_k \\ (2.2 \text{ K}) & K_r = K_f \\ (2.3 \text{ R}) & R_p + R_f = R_k + 2 \\ (2.3 \text{ P}) & P_r + P_k = P_f + 2 \end{array}$$

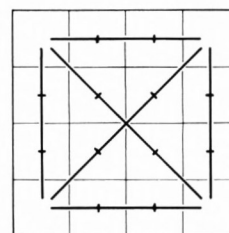


Symbolschema
(2.1), (2.2), (2.3)

Die sechs Verknüpfungsgleichungen seien im leeren Kennschema symbolisch durch die Verbindungsgeraden der Felder von je zwei Elementezahlen dargestellt. Es soll dann auf jeder dieser sechs Geraden das Produkt der beiden Kennzahlen an einem Ende gleich dem Produkt der beiden Kennzahlen am anderen Ende sein.

(2.4) Verknüpfungsgleichungen

$$\begin{array}{ll} (2.4 \text{ PK}) & p \cdot P_k = k \cdot K_p \\ (2.4 \text{ KF}) & k \cdot K_f = f \cdot F_k \\ (2.4 \text{ FR}) & f \cdot F_r = r \cdot R_f \\ (2.4 \text{ RP}) & r \cdot R_p = p \cdot P_r \\ (2.4 \text{ PF}) & p \cdot P_f = f \cdot F_p \\ (2.4 \text{ KR}) & k \cdot K_r = r \cdot R_k \end{array}$$



Symbolschema (2.4)

4. FOLGERUNGEN AUS DEN GRUNDGLEICHUNGEN

Die Anschlüsse eines Elementes an die umgebenden Elemente der drei anderen Elementesorten werden durch die sechs Anschlußgleichungen (2.1), (2.2) und (2.3) geregelt, die Verknüpfung der Elemente je zweier Sorten durch die sechs Verknüpfungsgleichungen (2.4).

In diesem Kapitel sollen aus den zwölf Grundgleichungen weitere Beziehungen zwischen den Anschlußzahlen und Elementezahlen hergeleitet werden.

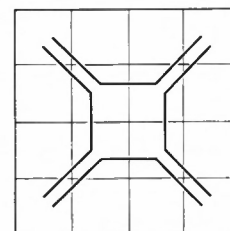
4.1 BEZIEHUNGEN ZWISCHEN ELEMENTE- UND ANSCHLUSSZAHLEN

Durch Zusammenfassung der Gleichungen (2.2) und (2.4) erhält man

$$\begin{array}{ccccc}
 (2.4 \text{ PF}) & (2.2 \text{ F}) & (2.4 \text{ KF}) & (2.2 \text{ K}) & (2.4 \text{ KR}) \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 p \cdot P_f = f \cdot F_p = f \cdot F_k = k \cdot K_f = k \cdot K_r = r \cdot R_k
 \end{array}$$

Hieraus folgen die Gleichungen (4.1)

$$\begin{array}{ll}
 (4.1 \text{ PK}) & p \cdot P_f = k \cdot K_r \\
 (4.1 \text{ KF}) & k \cdot K_r = f \cdot F_p \\
 (4.1 \text{ FR}) & f \cdot F_p = r \cdot R_k \\
 (4.1 \text{ RP}) & r \cdot R_k = p \cdot P_f
 \end{array}$$



Symbolschema (4.1)

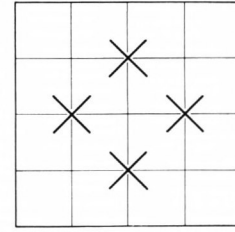
4.2 MULTIPLIKATIVE BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DEN ANSCHLUSSZAHLEN

Durch Elimination der Elementezahlen aus den Gleichungen (2.4) und (4.1) gemäß

$$\begin{array}{ll}
 (2.4 \text{ PK}) & p \cdot P_k = k \cdot K_p \\
 (4.1 \text{ PK}) & p \cdot P_f = k \cdot K_r \\
 \hline
 & P_k : P_f = K_p : K_r \\
 (2.4 \text{ FR}) & f \cdot F_r = r \cdot R_f \\
 (4.1 \text{ FR}) & f \cdot F_p = r \cdot R_k \\
 \hline
 & F_r : F_p = R_f : R_k
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 (2.4 \text{ KF}) & k \cdot K_f = f \cdot F_k \\
 (4.1 \text{ KF}) & k \cdot K_r = f \cdot F_p \\
 \hline
 & K_f : K_r = F_k : F_p \\
 (2.4 \text{ RP}) & r \cdot R_p = p \cdot P_r \\
 (4.1 \text{ RP}) & r \cdot R_k = p \cdot P_f \\
 \hline
 & R_p : R_k = P_r : P_f
 \end{array}$$

ergeben sich die Gleichungen (4.2)

$$\begin{aligned}
 (4.2 \text{ PK}) \quad & P_k \cdot K_r = K_p \cdot P_f \\
 (4.2 \text{ KF}) \quad & K_f \cdot F_p = F_k \cdot K_r \\
 (4.2 \text{ FR}) \quad & F_r \cdot R_k = R_f \cdot F_p \\
 (4.2 \text{ RP}) \quad & R_p \cdot P_f = P_r \cdot R_k
 \end{aligned}$$



Symbolschema (4.2)

Die Gleichung (4.2 KF) sagt wegen (2.2) eine Trivialität aus, während (4.2 PK), (4.2 FR) und (4.2 RP) Beziehungen darstellen, die sich anschaulich nicht ohne weiteres interpretieren lassen.

4.3 ADDITIVE BEZIEHUNG ZWISCHEN REZIPROKEN ANSCHLUSSZAHLEN

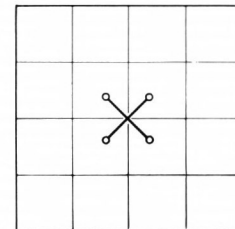
Ersetzt man in (4.2 RP) die Anschlußzahlen P_r und R_p mit Hilfe von (2.3 P), (2.3 R), (4.2 PK), (4.2 FR), (2.1 K) und (2.1 F), so erhält man eine neuartige Beziehung (4.3), welche die reziproken Werte der vier Anschlußzahlen P_f , F_p , K_r , R_k additiv verknüpft.

Dieser Rechnungsgang ist nachfolgend abgekürzt dargestellt.

$$\begin{array}{rcccl}
 & & (4.2 \text{ RP}) & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & P_r \cdot R_k = R_p \cdot P_f & & \\
 (2.3 \text{ P}) \rightarrow & & \parallel & & \leftarrow (2.3 \text{ R}) \\
 & & \overbrace{\parallel} & & \\
 & & P_f - P_k + 2 & & R_k - R_f + 2 \\
 (4.2 \text{ PK}) \rightarrow & & \parallel & & \leftarrow (4.2 \text{ FR}) \\
 & & K_p \cdot \frac{P_f}{K_r} & & F_r \cdot \frac{R_k}{F_p} \\
 (2.1 \text{ K}) \rightarrow & & \parallel & & \leftarrow (2.1 \text{ F}) \\
 & & 2 & & 2 \\
 & & -2 \frac{P_f}{K_r} R_k + 2 R_k & = & -2 \frac{R_k}{F_p} P_f + 2 P_f
 \end{array}$$

Nach Division durch $2 P_f \cdot R_k$ und Umformung erhält man

$$(4.3) \quad \frac{1}{P_f} + \frac{1}{F_p} = \frac{1}{K_r} + \frac{1}{R_k}$$



Symbolschema (4.3)

4.4 BEZIEHUNG ZWISCHEN DEN ELEMENTEZAHLEN

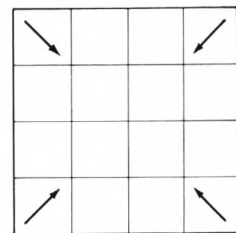
Ersetzt man in (2.4 RP) die Anschlußzahlen P_r und R_p mit Hilfe von (2.3 P), (2.3 R), (4.2 PK), (4.2 FR), so erhält man nach weiteren Umformungen mit (2.1), (2.2) und (2.4) die Gleichung (4.4), die eine wesentliche Beziehung zwischen den Elementezahlen ausdrückt.

$$\begin{array}{rcccl}
 & & (2.4 \text{ RP}) & & \\
 & & \downarrow & & \\
 (2.3 \text{ P}) & \rightarrow & p \cdot P_r & = & r \cdot R_p & \leftarrow (2.3 \text{ R}) \\
 & & \parallel & & \parallel & \\
 & & \overbrace{P_f - P_k + 2} & & \overbrace{R_k - R_f + 2} & \\
 (4.2 \text{ PK}) & \rightarrow & \parallel & & \parallel & \leftarrow (4.2 \text{ FR}) \\
 & & \frac{P_k}{K_p} \cdot K_r & & \frac{R_f}{F_r} \cdot F_p &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \frac{p \cdot P_k}{K_p} \cdot K_r - p \cdot P_k + 2p & = & \frac{r \cdot R_f}{F_r} \cdot F_p - r \cdot R_f + 2r \\
 \begin{array}{c} | \\ (2.4 \text{ PK}) \\ | \\ k \end{array} & \cdot & \begin{array}{c} | \\ (2.2 \text{ K}) \\ | \\ K_f \end{array} & - & \begin{array}{c} | \\ (2.4 \text{ PK}) \\ | \\ 2k \end{array} & + & \begin{array}{c} | \\ (2.1 \text{ K}) \\ | \\ 2p \end{array} & = & \begin{array}{c} | \\ (2.4 \text{ FR}) \\ | \\ f \end{array} \cdot \begin{array}{c} | \\ (2.2 \text{ F}) \\ | \\ F_k \end{array} & - & \begin{array}{c} | \\ (2.4 \text{ FR}) \\ | \\ 2f \end{array} & + & \begin{array}{c} | \\ (2.1 \text{ F}) \\ | \\ 2r \end{array} \\
 k \cdot K_f - 2k + 2p & = & f \cdot F_k - 2f + 2r
 \end{array}$$

Unter Berücksichtigung von (2.4 KF) erhält man hieraus

$$(4.4) \quad p + f = k + r.$$



Symbolschema (4.4)

Diese Gleichung verknüpft die Elementezahlen eines homogenen Polytopes derart, daß die Summe der gerad-dimensionalen Elemente gleich der Summe der ungerad-dimensionalen Elemente ist. Die Gleichung (4.4) wird daher als „Elementgleichung“ bezeichnet.

Ein zweiter, eleganterer Beweis der Elementgleichung ergibt sich bei der Herleitung der Gleichung (4.5).

4.5 NORMZAHLEN UND NORMGLEICHUNG

Mit Hilfe der Gleichungen (4.1), (4.3) und (4.4) lassen sich für jedes homogene Polytop „Normzahlen“ definieren, welche die Beschreibung des Polytopes und die Berechnung der Kennzahlen erleichtern.

Diese Normzahlen werden auf folgende Weise benannt und eingeführt:

$$\text{„Hauptnorm“} \quad H = p \cdot P_f = f \cdot F_p = k \cdot K_r = r \cdot R_k \quad \equiv \quad (4.1)$$

$$\text{„Anschlußnorm“} \quad A = \frac{1}{P_f} + \frac{1}{F_p} = \frac{1}{K_r} + \frac{1}{R_k} \quad \equiv \quad (4.3)$$

$$\text{„Elementenorm“} \quad E = p + f = k + r \quad \equiv \quad (4.4)$$

Zwischen diesen Normzahlen besteht die folgende, als „Normgleichung“ bezeichnete Beziehung:

$$(4.5) \quad H = \frac{E}{A}$$

Ihre Herleitung ergibt gleichzeitig einen zweiten Nachweis der Elementgleichung (4.4) aus (4.1) und (4.3):

$$\begin{array}{ccccc}
 & (4.3) & & (4.3) & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 \frac{H}{P_f} + \frac{H}{F_p} & = & HA & = & \frac{H}{K_r} + \frac{H}{R_k} \\
 (4.1) \rightarrow \parallel \parallel \leftarrow (4.1) & & (4.1) \rightarrow \parallel \parallel \leftarrow (4.1) & & \\
 \frac{p \cdot P_f}{P_f} \quad \frac{f \cdot F_p}{F_p} & & \frac{k \cdot K_r}{K_r} \quad \frac{r \cdot R_k}{R_k} & & \\
 \parallel \quad \parallel & & \parallel \quad \parallel & & \\
 p + f & = & E & = & k + r \\
 & \uparrow & & \uparrow & \\
 & (4.4) & & (4.4) &
 \end{array}$$

5. DIE GEOMETRISCHEN POLARITÄTEN

Durch Vertauschung der Kennzahlen eines homogenen Polytopes im Kennschema entsteht ein neues Zahlenschema, das unter gewissen Voraussetzungen wiederum Kennschema eines homogenen Polytopes sein kann.

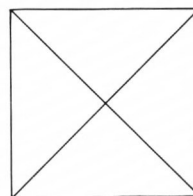
In diesem Kapitel sollen zunächst allgemein alle Kennzahlvertauschungen untersucht werden, die auf neue Kennschemas führen können, sodann die einschränkenden Bedingungen, denen die Kennzahlen des ursprünglichen Kennschemas in den einzelnen Fällen genügen müssen. Für jede in Frage kommende Kennzahlvertauschung wird ein Operator eingeführt und der Gruppencharakter aller dieser Operatoren untersucht.

5.1 FOLGERUNGEN AUS DEN SYMMETRIEN DES KENNSCHEMAS

Unter den Grundgleichungen und den aus ihnen gefolgerten Gleichungen weisen (2.4), (2.3), (2.3)*, (4.1), (4.2), (4.3) und (4.4) vielfache Symmetrien auf, (2.1) und (2.2) nur Achsensymmetrie bezüglich der vertikalen Mittelachse des Kennschemas.

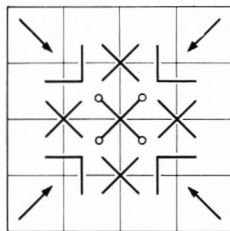
Bei den Verknüpfungsgleichungen (2.4) wird jede der vier Elementezahlen über zwei entsprechende Anschlußzahlen mit jeder der drei anderen Elementezahlen verknüpft. Diese $\binom{4}{2} = 6$ Beziehungen zwischen den vier Elementezahlen lassen sich symbolisch durch die sechs Verbindungsgeraden der vier Ecken eines Tetraeders darstellen. Nach spezieller ebener Projektion des Tetraeders wurde auf diese Weise die Kennschema-Anordnung festgelegt (vgl. 3.2).

Ein reguläres Tetraeder läßt sich auf 24 verschiedene Arten in einen Würfel derart einlagern, daß die Tetraederecken in vier der Würfecken zu liegen kommen. Bei orthogonaler Projektion auf die feste Würfelbasisfläche ergibt sich in allen Fällen die gleiche Figur,



die gleichzeitig die Verknüpfungsgleichungen (2.4) im leeren Kennschema symbolisch wiedergibt. Demgemäß sind die Verknüpfungsgleichungen invariant gegenüber den $4! = 24$ möglichen Permutationen der Elementezahlen in den vier Ecken des quadratischen Zahlenschemas, wenn die Anschlußzahlen entsprechend mitvertauscht werden.

Die Gesetze (2.3), (2.3)*, (4.1), (4.2), (4.3) und (4.4) können dagegen nur bei solchen Kennzahlvertauschungen eingehalten werden, bei denen sich im neuen Zahlenschema die beiden gerad- und die beiden ungerad-dimensionalen Elementezahlen jeweils diagonal gegenüberstehen.



Die Grundgleichungen (2.1) und (2.2) erfordern für die Kennzahlen weitere einschränkende Bedingungen, die in Abschnitt 5.3 behandelt werden.

5.2 GEOMETRISCHE POLARITÄTEN UND POLARISATOREN

Bei Vertauschung der Elementezahlen bleiben die Verknüpfungsgleichungen (2.4) stets gültig, wenn mit den Elementezahlen auch die Anschlußzahlen so vertauscht werden, daß gleiche Buchstaben durch gleiche ersetzt werden. Damit sind bei allen Kennzahlvertauschungen die Vertauschungen der Anschlußzahlen an die der Elementezahlen gebunden.

Ausgehend von einem Kennschema mit den Ausgangselementezahlen p_0, k_0, f_0, r_0 errechnet sich die Zahl der möglichen Kennzahlانordnungen zu neuen, die Gleichungen (2.3) bis (4.4) erfüllenden Zahlenschemas auf folgende Weise: Zur Lokalisierung der ersten Elementezahl p_0 stehen im Kennschema vier Eckfelder zur Verfügung. Damit ist gleichzeitig der Platz der Elementezahl f_0 festgelegt, da sich die beiden gerad-dimensionalen Elementezahlen diagonal gegenüberstehen müssen. Für die beiden ungerad-dimensionalen Elementezahlen k_0 und r_0 existieren dann noch zwei Anordnungsmöglichkeiten. Demgemäß gibt es insgesamt $4 \cdot 2 = 8$ Anordnungen der sechzehn Kennzahlen eines gegebenen Kennschemas, welche die Gesetze (2.3) bis (4.4) erfüllen.

Es sollen nun zwei Kennschemas dann zueinander „polar“ genannt werden, wenn die Kennzahlen des ersten durch eine der acht möglichen Umordnungen in die Kennzahlen des zweiten Kennschemas übergehen. Die symbolisch dargestellten Operatoren, welche diese Umordnungen bewirken, werden als „Polarisatoren“ bezeichnet.

Ausgehend von einem Kennschema S_0 mit den Elementezahlen p_0, k_0, f_0, r_0 erhält man mit Hilfe der jeweils darüber angegebenen Polarisatoren die nachfolgend aufgeführten Zahlenschemas S_1 bis S_8 .

p_0	P_{f_0}	R_{p_0}	r_0
P_{k_0}	P_{f_0}	R_{k_0}	R_{f_0}
K_{p_0}	K_{f_0}	F_{p_0}	F_{f_0}
k_0	K_{f_0}	F_{k_0}	f_0

Ausgangskennschema S_0

Jeder Polarisator bildet hierbei das Ausgangskennschema auf ein bestimmtes Zahlenschema ab. Das Zeichen des Polarisators läßt leicht erkennen, in welcher Art das neue Zahlenschema aus dem gegebenen gewonnen wird.

Die ersten vier Polarisatoren bewirken für die Kennzahlen des Ausgangskennschemas Drehungen um den Quadratmittelpunkt um die Winkel 0 , $+\frac{\pi}{2}$, $\pm\pi$ und $-\frac{\pi}{2}$ (keine Bewegung, Linksdrehung, Zentralspiegelung bzw. Rechtsdrehung); die vier restlichen Polarisatoren bewirken Spiegelungen an den in den Zeichen angedeuteten Geraden. Alle Spiegelungen können auch als räumliche Drehungen aufgefaßt werden.

																																																																			
<table border="1"> <tr><td>p_o</td><td>P_{r_o}</td><td>R_{p_o}</td><td>r_o</td></tr> <tr><td>P_{k_o}</td><td>P_{f_o}</td><td>R_{k_o}</td><td>R_{f_o}</td></tr> <tr><td>K_{p_o}</td><td>K_{r_o}</td><td>F_{p_o}</td><td>F_{r_o}</td></tr> <tr><td>k_o</td><td>K_{f_o}</td><td>F_{k_o}</td><td>f_o</td></tr> </table>	p_o	P_{r_o}	R_{p_o}	r_o	P_{k_o}	P_{f_o}	R_{k_o}	R_{f_o}	K_{p_o}	K_{r_o}	F_{p_o}	F_{r_o}	k_o	K_{f_o}	F_{k_o}	f_o	<table border="1"> <tr><td>r_o</td><td>R_{f_o}</td><td>F_{r_o}</td><td>f_o</td></tr> <tr><td>R_{p_o}</td><td>R_{k_o}</td><td>F_{p_o}</td><td>F_{k_o}</td></tr> <tr><td>P_{r_o}</td><td>P_{f_o}</td><td>K_{r_o}</td><td>K_{f_o}</td></tr> <tr><td>p_o</td><td>P_{k_o}</td><td>K_{p_o}</td><td>k_o</td></tr> </table>	r_o	R_{f_o}	F_{r_o}	f_o	R_{p_o}	R_{k_o}	F_{p_o}	F_{k_o}	P_{r_o}	P_{f_o}	K_{r_o}	K_{f_o}	p_o	P_{k_o}	K_{p_o}	k_o	<table border="1"> <tr><td>f_o</td><td>F_{k_o}</td><td>K_{f_o}</td><td>k_o</td></tr> <tr><td>F_{r_o}</td><td>F_{p_o}</td><td>K_{r_o}</td><td>K_{p_o}</td></tr> <tr><td>R_{f_o}</td><td>R_{k_o}</td><td>P_{f_o}</td><td>P_{k_o}</td></tr> <tr><td>r_o</td><td>R_{p_o}</td><td>P_{r_o}</td><td>p_o</td></tr> </table>	f_o	F_{k_o}	K_{f_o}	k_o	F_{r_o}	F_{p_o}	K_{r_o}	K_{p_o}	R_{f_o}	R_{k_o}	P_{f_o}	P_{k_o}	r_o	R_{p_o}	P_{r_o}	p_o	<table border="1"> <tr><td>k_o</td><td>K_{p_o}</td><td>P_{k_o}</td><td>p_o</td></tr> <tr><td>K_{f_o}</td><td>K_{r_o}</td><td>P_{f_o}</td><td>P_{r_o}</td></tr> <tr><td>F_{k_o}</td><td>F_{p_o}</td><td>R_{k_o}</td><td>R_{p_o}</td></tr> <tr><td>f_o</td><td>F_{r_o}</td><td>R_{f_o}</td><td>r_o</td></tr> </table>	k_o	K_{p_o}	P_{k_o}	p_o	K_{f_o}	K_{r_o}	P_{f_o}	P_{r_o}	F_{k_o}	F_{p_o}	R_{k_o}	R_{p_o}	f_o	F_{r_o}	R_{f_o}	r_o
p_o	P_{r_o}	R_{p_o}	r_o																																																																
P_{k_o}	P_{f_o}	R_{k_o}	R_{f_o}																																																																
K_{p_o}	K_{r_o}	F_{p_o}	F_{r_o}																																																																
k_o	K_{f_o}	F_{k_o}	f_o																																																																
r_o	R_{f_o}	F_{r_o}	f_o																																																																
R_{p_o}	R_{k_o}	F_{p_o}	F_{k_o}																																																																
P_{r_o}	P_{f_o}	K_{r_o}	K_{f_o}																																																																
p_o	P_{k_o}	K_{p_o}	k_o																																																																
f_o	F_{k_o}	K_{f_o}	k_o																																																																
F_{r_o}	F_{p_o}	K_{r_o}	K_{p_o}																																																																
R_{f_o}	R_{k_o}	P_{f_o}	P_{k_o}																																																																
r_o	R_{p_o}	P_{r_o}	p_o																																																																
k_o	K_{p_o}	P_{k_o}	p_o																																																																
K_{f_o}	K_{r_o}	P_{f_o}	P_{r_o}																																																																
F_{k_o}	F_{p_o}	R_{k_o}	R_{p_o}																																																																
f_o	F_{r_o}	R_{f_o}	r_o																																																																
S_1	S_2	S_3	S_4																																																																
																																																																			
<table border="1"> <tr><td>p_o</td><td>P_{k_o}</td><td>K_{p_o}</td><td>k_o</td></tr> <tr><td>P_{r_o}</td><td>P_{f_o}</td><td>K_{r_o}</td><td>K_{f_o}</td></tr> <tr><td>R_{p_o}</td><td>R_{k_o}</td><td>F_{p_o}</td><td>F_{k_o}</td></tr> <tr><td>r_o</td><td>R_{f_o}</td><td>F_{r_o}</td><td>f_o</td></tr> </table>	p_o	P_{k_o}	K_{p_o}	k_o	P_{r_o}	P_{f_o}	K_{r_o}	K_{f_o}	R_{p_o}	R_{k_o}	F_{p_o}	F_{k_o}	r_o	R_{f_o}	F_{r_o}	f_o	<table border="1"> <tr><td>k_o</td><td>K_{f_o}</td><td>F_{k_o}</td><td>f_o</td></tr> <tr><td>K_{p_o}</td><td>K_{r_o}</td><td>F_{p_o}</td><td>F_{r_o}</td></tr> <tr><td>P_{k_o}</td><td>P_{f_o}</td><td>R_{k_o}</td><td>R_{f_o}</td></tr> <tr><td>p_o</td><td>P_{r_o}</td><td>R_{p_o}</td><td>r_o</td></tr> </table>	k_o	K_{f_o}	F_{k_o}	f_o	K_{p_o}	K_{r_o}	F_{p_o}	F_{r_o}	P_{k_o}	P_{f_o}	R_{k_o}	R_{f_o}	p_o	P_{r_o}	R_{p_o}	r_o	<table border="1"> <tr><td>f_o</td><td>F_{r_o}</td><td>R_{f_o}</td><td>r_o</td></tr> <tr><td>F_{k_o}</td><td>F_{p_o}</td><td>R_{k_o}</td><td>R_{p_o}</td></tr> <tr><td>K_{f_o}</td><td>K_{r_o}</td><td>P_{f_o}</td><td>P_{r_o}</td></tr> <tr><td>k_o</td><td>K_{p_o}</td><td>P_{k_o}</td><td>p_o</td></tr> </table>	f_o	F_{r_o}	R_{f_o}	r_o	F_{k_o}	F_{p_o}	R_{k_o}	R_{p_o}	K_{f_o}	K_{r_o}	P_{f_o}	P_{r_o}	k_o	K_{p_o}	P_{k_o}	p_o	<table border="1"> <tr><td>r_o</td><td>R_{p_o}</td><td>P_{r_o}</td><td>p_o</td></tr> <tr><td>R_{f_o}</td><td>R_{k_o}</td><td>P_{f_o}</td><td>P_{k_o}</td></tr> <tr><td>F_{r_o}</td><td>F_{p_o}</td><td>K_{r_o}</td><td>K_{p_o}</td></tr> <tr><td>f_o</td><td>F_{k_o}</td><td>K_{f_o}</td><td>k_o</td></tr> </table>	r_o	R_{p_o}	P_{r_o}	p_o	R_{f_o}	R_{k_o}	P_{f_o}	P_{k_o}	F_{r_o}	F_{p_o}	K_{r_o}	K_{p_o}	f_o	F_{k_o}	K_{f_o}	k_o
p_o	P_{k_o}	K_{p_o}	k_o																																																																
P_{r_o}	P_{f_o}	K_{r_o}	K_{f_o}																																																																
R_{p_o}	R_{k_o}	F_{p_o}	F_{k_o}																																																																
r_o	R_{f_o}	F_{r_o}	f_o																																																																
k_o	K_{f_o}	F_{k_o}	f_o																																																																
K_{p_o}	K_{r_o}	F_{p_o}	F_{r_o}																																																																
P_{k_o}	P_{f_o}	R_{k_o}	R_{f_o}																																																																
p_o	P_{r_o}	R_{p_o}	r_o																																																																
f_o	F_{r_o}	R_{f_o}	r_o																																																																
F_{k_o}	F_{p_o}	R_{k_o}	R_{p_o}																																																																
K_{f_o}	K_{r_o}	P_{f_o}	P_{r_o}																																																																
k_o	K_{p_o}	P_{k_o}	p_o																																																																
r_o	R_{p_o}	P_{r_o}	p_o																																																																
R_{f_o}	R_{k_o}	P_{f_o}	P_{k_o}																																																																
F_{r_o}	F_{p_o}	K_{r_o}	K_{p_o}																																																																
f_o	F_{k_o}	K_{f_o}	k_o																																																																
S_5	S_6	S_7	S_8																																																																

Die acht polaren Gegenüberstellungen des Zahlenschemas S_0 mit den Zahlenschemas S_1 bis S_8 werden als „geometrische Polaritäten“ bezeichnet.

5.3 EINSCHRÄNKENDE BEDINGUNGEN DURCH DIE FESTEN UND GLEICHEN ANSCHLUSSZAHLEN

Jedes der Zahlenschemas S_1 bis S_8 erfüllt die Gesetze (2.3) bis (4.4). Es soll jedoch nur dann als Kennschema bezeichnet werden, wenn zusätzlich die Gleichungen (2.1) der festen Anschlußzahlen und (2.2) der gleichen Anschlußzahlen erfüllt sind.

Die durch (2.1) und (2.2) gegebenen einschränkenden Bedingungen für die Anwendbarkeit der Polarisatoren auf ein gegebenes Kennschema sind nachfolgend für die acht Polaritäten zusammengestellt. Sie lassen sich leicht aus den Zahlenschemas S_1 bis S_8 ablesen durch Vergleich mit dem Symbolschema, das die Grundgesetze (2.1) und (2.2) darstellt:

2			2

Da das Ausgangszahlenschema S_0 als Kennschema vorausgesetzt wird, sind für die Kennzahlen bereits die Gleichungen erfüllt:

$$\begin{array}{ll}
 (2.1 \text{ F o}) & F_{r_0} = 2 \\
 (2.1 \text{ K o}) & K_{p_0} = 2 \\
 (2.2 \text{ F o}) & F_{p_0} = F_{k_0} \Rightarrow F_0 \\
 (2.2 \text{ K o}) & K_{r_0} = K_{f_0} \Rightarrow K_0
 \end{array}$$

Die nach ihrer Berücksichtigung verbleibenden einschränkenden Bedingungen sind in der folgenden Zusammenstellung auf Seite 28 in der rechten Spalte aufgeführt.

Für die beiden Polarisatoren $\bigcirc$ und $\textcircled{1}$ bedeuten die Gleichungen (2.1) und (2.2) keine einschränkenden Bedingungen.

Dies ist für den Polarisator $\bigcirc$ evident, da er das Kennschema unverändert läßt und damit dem ursprünglichen homogenen Polytop ein kongruentes gegenüberstellt oder ein solches, das man durch eine topologische Abbildung aus dem gegebenen erzeugen kann. Zwei derartige Polytope mit gleichem Kennschema werden als „isomorph“ bezeichnet.

Die Polarität $S_0 \rightarrow S_8$ ist in der Topologie als Dualität im vierdimensionalen Raum bekannt. Der Polarisator $\textcircled{1}$ ist also ein Dualitätskorrelator.

5.4 DIE GRUPPE DER POLARISATOREN

Die acht definierten Polarisatoren, die ein Kennschema bei zusätzlicher Erfüllung der Gleichungen (2.1) und (2.2) in ein „polares“ Kennschema transformieren, weisen sich durch die Erfüllung der folgenden Gesetzmäßigkeiten als Elemente einer nicht kommutativen Gruppe aus:

- I. Jede geordnete Aufeinanderfolge zweier Polarisatoren läßt sich durch einen einzigen Polarisator ersetzen.
- II. Die Aufeinanderfolge dreier Polarisatoren ist assoziativ.
- III. Einer der acht Polarisatoren ist „Einselement“.
- IV. Zu jedem Polarisator existiert ein „inverser Polarisator“.

Polaritäten und Polarisatoren	Einschränkende Bedingungen insgesamt	Einschränkende Bedingungen nach Berücksichtigung der Gleichungen auf Seite 27
$S_0 \rightarrow \text{---} \bigcirc \text{---} S_1$	(2.1 F 1) $F_{r_0} = 2$ (2.1 K 1) $K_{p_0} = 2$ (2.2 F 1) $F_{p_0} = F_{k_0}$ (2.2 K 1) $K_{r_0} = K_{f_0}$	keine Bedingungen
$S_0 \rightarrow \text{---} \bigcirc \text{---} S_2$	(2.1 F 2) $K_{f_0} = 2$ (2.1 K 2) $P_{r_0} = 2$ (2.2 F 2) $K_{r_0} = K_{p_0}$ (2.2 K 2) $P_{f_0} = P_{k_0}$	$K_0 = 2$ $P_{r_0} = 2$ $P_{f_0} = P_{k_0}$
$S_0 \rightarrow \text{---} \bigcirc \text{---} S_3$	(2.1 F 3) $P_{k_0} = 2$ (2.1 K 3) $R_{f_0} = 2$ (2.2 F 3) $P_{f_0} = P_{r_0}$ (2.2 K 3) $R_{k_0} = R_{p_0}$	$P_{k_0} = 2$ $R_{f_0} = 2$ $P_{f_0} = P_{r_0}$ $R_{k_0} = R_{p_0}$
$S_0 \rightarrow \text{---} \bigcirc \text{---} S_4$	(2.1 F 4) $R_{p_0} = 2$ (2.1 K 4) $F_{k_0} = 2$ (2.2 F 4) $R_{k_0} = R_{f_0}$ (2.2 K 4) $F_{p_0} = F_{r_0}$	$R_{p_0} = 2$ $F_0 = 2$ $R_{k_0} = R_{f_0}$
$S_0 \rightarrow \text{---} \bigcirc \text{---} S_5$	(2.1 F 5) $F_{k_0} = 2$ (2.1 K 5) $R_{p_0} = 2$ (2.2 F 5) $F_{p_0} = F_{r_0}$ (2.2 K 5) $R_{k_0} = R_{f_0}$	$F_0 = 2$ $R_{p_0} = 2$ $R_{k_0} = R_{f_0}$
$S_0 \rightarrow \text{---} \bigcirc \text{---} S_6$	(2.1 F 6) $R_{f_0} = 2$ (2.1 K 6) $P_{k_0} = 2$ (2.2 F 6) $R_{k_0} = R_{p_0}$ (2.2 K 6) $P_{f_0} = P_{r_0}$	$R_{f_0} = 2$ $P_{k_0} = 2$ $R_{k_0} = R_{p_0}$ $P_{f_0} = P_{r_0}$
$S_0 \rightarrow \text{---} \bigcirc \text{---} S_7$	(2.1 F 7) $P_{r_0} = 2$ (2.1 K 7) $K_{f_0} = 2$ (2.2 F 7) $P_{f_0} = P_{k_0}$ (2.2 K 7) $K_{r_0} = K_{p_0}$	$P_{r_0} = 2$ $K_0 = 2$ $P_{f_0} = P_{k_0}$
$S_0 \rightarrow \text{---} \bigcirc \text{---} S_8$	(2.1 F 8) $K_{p_0} = 2$ (2.1 K 8) $F_{r_0} = 2$ (2.2 F 8) $K_{r_0} = K_{f_0}$ (2.2 K 8) $F_{p_0} = F_{k_0}$	keine Bedingungen

Diese Gruppe der Polarisatoren ist eine Diedergruppe achter Ordnung. Sie läßt sich darstellen durch alle die räumlichen Drehungen einer zweiseitigen Quadratfläche, die das Quadrat mit seiner Ausgangslage wieder zur Deckung bringen. Hierbei sind koaxiale Drehungen, die sich um den Drehwinkel 2π unterscheiden, als gleich anzusehen.

Diese Diedergruppe kann man leicht verifizieren, indem man ein auf transparentes Papier gezeichnetes Kennschema in der Lage des Ausgangsschemas S_0 auf die Zahlenschemas S_1 bis S_8 auflegt und seine Kennzahlen jeweils durch eine ebene oder räumliche Drehung des transparenten Quadrates mit den darunterstehenden Kennzahlen zur Deckung bringt. Die Drehung des transparenten Kennschemas erfolgt hierbei jeweils nach Vorschrift des betreffenden Operatorsymbols um eine Achse, die durch den Mittelpunkt der aufeinanderliegenden Zahlenschemas verläuft.

Man erkennt hierbei, daß sich die Diedergruppe der Polarisatoren aus folgenden Untergruppen zusammensetzt:

1 Drehgruppe der Ordnung 4, deren Drehachse auf der Quadratfläche senkrecht steht, bestehend aus dem Quadrupel von Polarisatoren $\bigcirc$, $\bigcirc$, $\odot$ und $\bigcirc$, die sich als Drehungen um die Winkel $n \frac{\pi}{2}$ ($n = 0, 1, 2$ bzw. 3) darstellen.

4 Drehgruppen der Ordnung 2, deren Drehachsen „diagonal“ oder „achsial“ in der Ebene der Quadratfläche liegen. Sie bestehen aus den Polarisatorpaaren $\bigcirc$ und $\diagdown$, $\bigcirc$ und $\ominus$, $\bigcirc$ und $\diagup$ sowie $\bigcirc$ und $\updownarrow$, die sich jeweils als Drehungen um die Winkel $n\pi$ ($n = 0$ bzw. 1) darstellen.

Jede dieser zyklischen Untergruppen enthält als „Einselement“ den Polarisator $\bigcirc$.

Mit Ausnahme der beiden zueinander inversen Polarisatoren $\bigcirc$ und $\bigcirc$, die sich als Links- und Rechtsdrehung des Quadrates darstellen, sind alle Polarisatoren selbstinvers.

Gruppentafel der Polarisatoren

	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\odot$	$\bigcirc$	$\diagdown$	$\ominus$	$\diagup$	$\updownarrow$
$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\odot$	$\bigcirc$	$\diagdown$	$\ominus$	$\diagup$	$\updownarrow$
$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\odot$	$\ominus$	$\diagup$	$\updownarrow$	$\diagdown$
$\odot$	$\odot$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\diagup$	$\updownarrow$	$\diagdown$	$\ominus$
$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\odot$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\updownarrow$	$\diagdown$	$\ominus$	$\diagup$
$\diagdown$	$\diagdown$	$\ominus$	$\diagup$	$\updownarrow$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\odot$
$\ominus$	$\ominus$	$\diagup$	$\updownarrow$	$\diagdown$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\odot$
$\diagup$	$\diagup$	$\updownarrow$	$\diagdown$	$\ominus$	$\odot$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\bigcirc$
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\diagdown$	$\ominus$	$\diagup$	$\bigcirc$	$\odot$	$\bigcirc$	$\bigcirc$

Die möglichen Darstellungen des „Einselementes“ durch Potenzdarstellungen der einzelnen Polarisatoren sind:

$$\bigcirc = \curvearrowleft^4 = \odot^2 = \curvearrowright^4 = \diagdown^2 = \ominus^2 = \diagup^2 = \updownarrow^2$$

Mnemotechnisch leicht einzuprägen sind die Produktdarstellungen des „linksdrehenden“, des „zentralspiegelnden“ und des „rechtsdrehenden“ Polarisators:

$$\begin{aligned} \curvearrowleft &= \odot \curvearrowleft = \curvearrowleft \odot = \updownarrow \diagdown = \diagdown \ominus = \ominus \diagup = \diagup \updownarrow \\ \odot &= \curvearrowleft \curvearrowleft = \curvearrowleft \curvearrowright = \updownarrow \ominus = \ominus \updownarrow = \diagdown \diagup = \diagup \diagdown \\ \curvearrowright &= \odot \curvearrowright = \curvearrowright \odot = \updownarrow \diagup = \diagup \ominus = \ominus \diagdown = \diagdown \updownarrow \end{aligned}$$

Man erkennt hieraus, daß die Polarisatorgruppe nur auf folgende beiden Arten durch zwei Polarisatoren erzeugt werden kann:

- A. durch einen der beiden „drehenden“ Polarisatoren $\curvearrowleft$, $\curvearrowright$ und einen der vier „diagonal-“ oder „achsialspiegelnden“ Polarisatoren $\diagdown$, $\diagup$, $\ominus$, $\updownarrow$.
 B. durch einen der beiden „diagonalspiegelnden“ Polarisatoren $\diagdown$, $\diagup$ und einen der beiden „achsialspiegelnden“ Polarisatoren $\ominus$, $\updownarrow$.

Im Falle A ergeben sich sämtliche Gruppenelemente beispielsweise durch die erzeugenden Polarisatoren $\curvearrowleft$ und $\diagdown$:

$$\begin{aligned} \bigcirc &= \diagdown^2 & \curvearrowleft &= \curvearrowleft^1 & \odot &= \curvearrowleft^2 & \curvearrowright &= \curvearrowleft^3 \\ \diagdown &= \diagdown^1 & \ominus &= \diagdown^1 \curvearrowleft^1 & \diagup &= \curvearrowleft^2 \diagdown^1 & \updownarrow &= \curvearrowleft^1 \diagdown^1 \end{aligned}$$

Im Falle B ergeben sich sämtliche Gruppenelemente beispielsweise durch die erzeugenden Polarisatoren $\diagdown$ und $\ominus$:

$$\begin{aligned} \bigcirc &= \diagdown^2 & \curvearrowleft &= \diagdown^1 \ominus^1 & \odot &= [\diagdown^1 \ominus^1]^2 & \curvearrowright &= \ominus^1 \diagdown^1 \\ \diagdown &= \diagdown^1 & \ominus &= \ominus^1 & \diagup &= \ominus^1 \diagdown^1 \ominus^1 & \updownarrow &= \diagdown^1 \ominus^1 \diagdown^1 \end{aligned}$$

6. EXISTENZ HOMOGENER POLYTOPE UND KENNZAHLEN- BERECHNUNG

In den vorangegangenen Kapiteln wurden zunächst die benötigten Begriffe eingeführt und die Grundgleichungen festgelegt. Sodann wurden hieraus weitere Gesetzmäßigkeiten gefolgert, Kennzahlen und Grundgleichungen in einem Kennschema dargestellt und die Gruppe der Polarisatoren eingeführt.

In diesem Kapitel werden die Existenzvoraussetzungen für homogene Polytope untersucht und ein Schema für die Berechnung der Kennzahlen entwickelt.

6.1 EXISTENZVORAUSSETZUNGEN

Es soll nun festgestellt werden, welche Bedeutung die im 2. Kapitel geforderten Grundgleichungen für die Bestimmung eines Kennschemas und die Existenz eines homogenen Polytopes besitzen.

Die Grundgleichungen lauten

(2.1 F)	$F_r = 2$
(2.1 K)	$K_p = 2$
(2.2 F)	$F_p = F_k$
(2.2 K)	$K_r = K_f$
(2.3 R)	$R_p + R_f = R_k + 2$
(2.3 P)	$P_r + P_k = P_f + 2$
(2.4 PK)	$p \cdot P_k = k \cdot K_p$
(2.4 KF)	$k \cdot K_f = f \cdot F_k$
(2.4 FR)	$f \cdot F_r = r \cdot R_f$
(2.4 RP)	$r \cdot R_p = p \cdot P_r$
(2.4 PF)	$p \cdot P_f = f \cdot F_p$
(2.4 KR)	$k \cdot K_r = r \cdot R_k$

Dies sind zwölf linear unabhängige Gleichungen für ein System von sechzehn Kennzahlen. Das gesamte Kennzahlssystem ist also vierfach unbestimmt.

Die Bestimmung eines Kennschemas, d. h. die Berechnung seiner Kennzahlen, erfolgt nun in der Weise, daß vier bezüglich der Grundgleichungen voneinander unabhängige Kennzahlen gesucht werden. Die restlichen zwölf Kennzahlen werden dann mit Hilfe der Grundgleichungen oder mit Hilfe gefolgelter Gleichungen des 4. Kapitels berechnet.

Da sämtliche Kennzahlen Anzahlen sind, kommen bei der Berechnung der Kennzahlen nur natürliche Zahlen als Lösungen der Gleichungen in Frage. Der Wertebereich der vier

voneinander unabhängig anzusetzenden Kennzahlen wird durch diese Bedingung wesentlich eingeschränkt.

Ein Kennschema ist demnach bestimmt, wenn vier bezüglich der Grundgleichungen voneinander unabhängige Kennzahlen gefunden sind und nach Berechnung der restlichen alle sechzehn Kennzahlen natürliche Zahlen sind.

Da isomorphe Polytope nicht voneinander unterschieden werden, ist jedes homogene Polytop durch seine Kennzahlen eindeutig bestimmt. Wenn ein Kennschema also ein homogenes Polytop liefert, so ist ihre Zuordnung eineindeutig.

Einem Kennschema ist ein homogenes Polytop zugeordnet, wenn es möglich ist, Elemente der vier Sorten entsprechend den im Kennschema festgelegten Kennzahlen zu einem homogenen Polytop zusammenzuschließen. Hierbei ist jegliche Berührung, Verschneidung und Durchdringung, d. h. jegliche Koinzidenz von Elementen gleicher Elementesorte unzulässig (vgl. 1.2). Da dieses Verbot in den diophantischen Grundgleichungen nicht zum Ausdruck kommt, kann man mit ihrer Hilfe allein nichts über die Realisierbarkeit des Polytopes aussagen.

Zusammengefaßt ergibt sich: Die zwölf diophantischen Grundgleichungen bilden die notwendigen und hinreichenden Voraussetzungen für den Aufbau eines Kennschemas; für die Existenz eines homogenen Polytopes sind diese Voraussetzungen nur notwendig. Die Frage nach der Existenz eines Polytopes läßt sich nur von Fall zu Fall entscheiden. Dies geschieht im allgemeinen unmittelbar aus der Anschauung, gegebenenfalls systematisch unter Zuhilfenahme von Inzidenztafeln, in denen die wechselseitigen Anschlüsse der Elemente erfaßt werden.

Es sei hier festgestellt, daß einem Kennschema, das mit Hilfe eines Polarisators aus einem gegebenen Kennschema gewonnen werden kann, dann und nur dann ein Polytop zugeordnet ist, wenn bereits das Ausgangsschema Kennschema eines realisierbaren Polytopes ist. Der Nachweis dieses Satzes läßt sich für jeden einzelnen Polarisator unter Beachtung der für ihn geltenden einschränkenden Bedingungen (vgl. 5.3) führen. Als Beispiel für eine unmittelbar anschauliche Einsicht dieses Satzes sei der Polarisator $\textcircled{1}$ angeführt, der keinen einschränkenden Bedingungen unterworfen ist:

Man wähle innerhalb eines jeden Raumes des gegebenen homogenen Polytopes je einen beliebigen Punkt (hier genannt: polarer Punkt des gegebenen Raumes) und verbinde alle Paare polarer Punkte, die nur durch eine Fläche des gegebenen Polytopes getrennt sind, durch je eine, die Trennfläche durchstoßende beliebige Kurve (polare Kurve der gegebenen Fläche). Wegen (2.2) ist jetzt jede gegebene Kurve von einer polaren Punkt-Kurvenfolge umschlossen. Verschneidet man nun jede gegebene Kurve mit einer von der zugeordneten Punkt-Kurvenfolge berandeten beliebigen Fläche (polare Fläche der gegebenen Kurve), so ist jeder gegebene Punkt von den Anschlußelementen eines Raumes eingeschlossen (polarer Raum des gegebenen Punktes).

Damit ist zu einem beliebig angenommenen Polytop das $\textcircled{1}$ -polare Polytop realisiert.

6.2 GLEICHUNGEN DES HALBEN KENNSCHEMAS

Untersucht man die Grundgleichungen im Hinblick auf symmetrische Zuordnungen, so zeigt sich eine gegenseitige Entsprechung in folgenden Elementepaaren:

Punkt – Raum

Kurve – Fläche

Diese Symmetrieanordnung wurde bereits beim Kennschemaaufbau verwendet (vgl. 3.2). Der Polarisator ① bewirkt eine dieser Elementegegenüberstellung entsprechende Kennzahlvertauschung. Er ist keinen einschränkenden Bedingungen durch die Grundgleichungen (2.1) und (2.2) unterworfen (vgl. 5.3).

Demzufolge können die linke und die rechte Kennsemahälfte, welche die Elementesorten Punkte und Kurven bzw. Räume und Flächen beschreiben, als völlig gleichwertig behandelt werden.

Es sollen nun die Grundgleichungen zusammengestellt werden, die den beiden Kennsemahälften zugeordnet sind. Durch eine „Spiegelung“ gemäß dem Polarisator ① müssen sie sich ineinander transformieren lassen. Bei der späteren Zusammensetzung zweier Kennsemahälften sind zusätzliche Kopplungsgleichungen zu beachten.

In jeder Kennsemahälfte gibt es für die darin enthaltenen acht Kennzahlen genau fünf unabhängige Gleichungen, so daß jedes halbe Kennzahlensystem eine dreifache Unbestimmtheit aufweist.

p	P _r	(2.1 K)	K _p = 2	(2.1 F)	F _r = 2	R _p	r
P _k	P _f	(2.2 K)	K _r = K _f	(2.2 F)	F _p = F _k	R _k	R _f
K _p	K _r	(4.2 PK)	P _k · K _r = K _p · P _f	(4.2 FR)	F _r · R _k = R _f · F _p	F _p	F _r
k	K _f	(2.3 P)	P _r + P _k = P _f + 2	(2.3 R)	R _p + R _f = R _k + 2	F _k	f
		(2.4 PK)	p · P _k = k · K _p	(2.4 FR)	f · F _r = r · R _f		

Die sich außerdem anbietenden Gleichungen

$$(4.1 \text{ PK}) \quad p \cdot P_f = k \cdot K_r \quad \text{und} \quad (4.1 \text{ FR}) \quad f \cdot F_p = r \cdot R_k$$

sind von den voranstehenden Gleichungen (4.2 PK) und (2.4 PK) bzw. (4.2 FR) und (2.4 FR) abhängig.

Da die beiden Kennsemahälften zusammen eine sechsfache Unbestimmtheit besitzen, das gesamte Kennschema aber nur vierfach unbestimmt ist, müssen bei der Kopplung beider Kennsemahälften zwei weitere Kopplungsgleichungen befriedigt werden. Diese können aus den Gleichungen (2.4 KF), (2.4 RP), (2.4 PF), (2.4 KR), (4.1 KF), (4.1 RP), (4.2 KF), (4.2 RP), (4.3) und (4.4) ausgewählt werden; sie müssen aber zusammen mit den obigen zehn Gleichungen ein unabhängiges Gleichungssystem bilden.

Für die späteren Berechnungen erweisen sich beispielsweise die beiden folgenden Kopplungsgleichungen als günstig:

$$\begin{aligned} (2.4 \text{ KF}) \quad & k \cdot K_f = f \cdot F_k \\ (4.2 \text{ RP}) \quad & R_p \cdot P_f = P_r \cdot R_k \end{aligned}$$

6.3 UNGERADE UND GERADE KENNZAHLEN

Bei getrennter Untersuchung beider Kennsemahälften lassen sich ausschließende Bedingungen für das Auftreten ungerader Kennzahlen herleiten.

Nachfolgend sind die Ergebnisse aus beiden Kennsemahälften in einer Tabelle zusammengestellt. Trotz gleicher Bezeichnungen (x, y, z; u, v, w) muß die Tabelle für beide Hälften getrennt abgelesen werden.

Entsprechend der im nachfolgenden Abschnitt 6.4 begründeten Auswahl der Ausgangszahlen wird in der linken Kennsemahälfte von den Kennzahlen $K_r = K$, P_k und p ausgegangen, in der rechten Kennsemahälfte von den entsprechenden $F_p = F$, R_f und r . Die Berechnung der weiteren Kennzahlen beider Hälften erfolgt jeweils in der Reihenfolge der oben aufgeführten Gleichungen.

Setzt man für die linke Kennsemahälfte $K = 2^x \cdot u$, $P_k = 2^y \cdot v$, $p = 2^z \cdot w$ und unabhängig davon für die rechte Kennsemahälfte $F = 2^x \cdot u$, $R_f = 2^y \cdot v$, $r = 2^z \cdot w$, wobei u , v , w beliebige ungerade natürliche Zahlen sind, so liefern die Exponenten der Zweierpotenzen eine durchgehende dreistellige Numerierung „x, y, z“ der Tabelle. Dabei laufen die ganzen Zahlen x , y , z jeweils von Null bis zu dem Wert, der eben noch eine Veränderung bei der Abzählung der ungeraden und geraden Kennzahlen erbringt.

Diejenige Kennzahl, die gegebenenfalls eine Zahlenkombination x, y, z ausschließt, weil ihr Wert keine ganze Zahl ergibt, ist durch das Zeichen $\cdot/$ kenntlich gemacht. Bei der Abzählung der ungeraden bzw. geraden Kennzahlen werden K und F wegen (2.2) doppelt gezählt. Die Anzahl der geraden Kennzahlen muß sich jeweils wegen (2.1) um die Zahl 1 erhöhen.

Da in jeder Kennsemahälfte von drei, insgesamt also von sechs Kennzahlen ausgegangen wird, ist die Kopplung einer beliebigen Tabellenzeile der linken mit einer beliebigen Tabellenzeile der rechten Kennsemahälfte nur dann möglich, wenn zusätzlich zwei Kopplungsgleichungen erfüllt sind (vgl. 6.2). Da diese in bezug auf ungerade und gerade Kennzahlen zu gleichen Ergebnissen führen, sind in der letzten Spalte nur die betreffenden Werte von H aufgeführt.

Angenommene Zahlen:				Berechnete Zahlen:					
x, y, z	$K; F$ $\parallel$ $2^x \cdot u$	$P_k; R_f$ $\parallel$ $2^y \cdot v$	$p; r$ $\parallel$ $2^z \cdot w$	$P_f; R_k$ $\parallel$ $\frac{KP_k}{2}; \frac{FR_f}{2}$	$P_r; R_p$ $\parallel$ $\frac{P_f - P_k}{+2}; \frac{R_k - R_f}{+2}$	$k; f$ $\parallel$ $\frac{pP_k}{2}; \frac{rR_f}{2}$	Anzahl der unge- raden ge- raden Kennzahlen		$pP_f; rR_k$ $\parallel$ $\frac{kK}{2}; \frac{fF}{2}$ H
0, 0, —	u	v	—	$\cdot/$	—	—	—	—	—
0, 1, 0	u	2v	w	uv	$(u-2)v+2$	vw	6	2	uvw
0, 1, 1	u	2v	2w	uv	$(u-2)v+2$	2vw	4	4	2uvw
0, 2, 0	u	4v	w	2uv	$2(u-2)v+2$	2vw	3	5	2uvw
0, 2, 1	u	4v	2w	2uv	$2(u-2)v+2$	4vw	2	6	4uvw
1, 0, 0	2u	v	w	—	—	$\cdot/$	—	—	—
1, 0, 1	2u	v	2w	uv	$(u-1)v+2$	vw	3	5	2uvw
1, 0, 2	2u	v	4w	uv	$(u-1)v+2$	2vw	2	6	4uvw
1, 1, 0	2u	2v	w	2uv	$2(u-1)v+2$	vw	2	6	2uvw
1, 1, 1	2u	2v	2w	2uv	$2(u-1)v+2$	2vw	0	8	4uvw
2, 0, 0	4u	v	w	—	—	$\cdot/$	—	—	—
2, 0, 1	4u	v	2w	2uv	$(2u-1)v+2$	vw	3	5	4uvw
2, 0, 2	4u	v	4w	2uv	$(2u-1)v+2$	2vw	2	6	8uvw
2, 1, 0	4u	2v	w	4uv	$2(2u-1)v+2$	vw	2	6	4uvw
2, 1, 1	4u	2v	2w	4uv	$2(2u-1)v+2$	2vw	0	8	8uvw
2, 2, 0	4u	4v	w	8uv	$4(2u-1)v+2$	2vw	1	7	8uvw
2, 2, 1	4u	4v	2w	8uv	$4(2u-1)v+2$	4vw	0	8	16uvw

Eine Tabellenzeile der linken ist nur mit einer solchen der rechten Kennzahlenhälfte zu koppeln, deren H-Wert gleiche Zweierpotenz aufweist. Es zeigt sich, daß außer in der Zeile 0, 1, 0 die Hauptzahl H in keiner Zeile ungerade ist; diese Zeile kann also nur mit sich selbst gekoppelt werden.

Insgesamt lassen sich der Tabelle als Folgerungen aus den Grundgleichungen folgende Gesetzmäßigkeiten für ungerade und gerade Kennzahlen entnehmen:

Von den beiden Anschlußzahlen K und P_k bzw. F und R_f können jeweils nicht beide ungerade sein (vgl. (2.1) und (4.2)).

Von den drei Anschlußzahlen der Punkte bzw. Räume kann jeweils nicht eine einzige und es können nicht alle drei ungerade sein (vgl. (2.3)).

In keiner Kennschemasälfte können genau fünf, sieben oder acht Kennzahlen ungerade sein.

Sind im gesamten Kennschema mehr als acht Kennzahlen ungerade, dann sind genau zwölf ungerade.

6.4 BESTIMMUNG DER KENNSCHEMAS UND BENENNUNG DER POLYTOPE

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wurde gezeigt, daß die sechzehn Kennzahlen bei zwölf Grundgleichungen einer vierfachen Unbestimmtheit unterliegen. Bei Vorgabe von vier geeigneten unabhängigen Kennzahlen lassen sich also die restlichen zwölf zwangsläufig errechnen.

Es muß nun unter den möglichen Quadrupeln solcher Kennzahlen eine zwar willkürliche, aber doch möglichst günstige Auswahl getroffen werden. Um bereits mit drei angenommenen Kennzahlen ein halbes Kennschema berechnen zu können (vgl. 6.2), empfiehlt es sich, drei der vier Kennzahlen aus einer Kennschemasälfte auszuwählen, die vierte aus der anderen Hälfte.

Da es im allgemeinen leichter fällt, sich die Anschlußelemente von Räumen und Flächen vorzustellen als die von Punkten und Kurven, soll zunächst die rechte Kennschemasälfte bestimmt werden. Die Auswahl der drei Kennzahlen erfolge in teilweiser Analogie zur Beschreibung der homogenen Polyeder (z. B. Pentagon-Dodekaeder) durch folgende Kennzahlen: Kurven-Punktanschlußzahl, Flächen-Kurvenanschlußzahl, Raum-Flächenanschlußzahl, Raumzahl des Polytopes. Da die Kurven-Punktanschlußzahl K_p den festen Wert 2 besitzt, bleiben als freie Kennzahlen übrig: $F_k (= F)$, R_f und r .

Diese drei Kennzahlen sollen auch zur Benennung der im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Polytope dienen, da jedes Polytop durch die Benennung „ $(F-R_f-r)$ -Polytop“ eindeutig beschrieben ist. Beispielsweise ergibt sich das aus 120 Pentagon-Dodekaedern aufgebaute Polytop als $(5-12-120)$ -Polytop. Man kann bei dieser Darstellung direkt ablesen: 5 Punkte und Kurven begrenzen eine Fläche, 12 solcher Flächen einen Raum des aus insgesamt 120 Räumen bestehenden Polytopes.

Als vierte Kennzahl wird K in der linken Kennschemasälfte ausgewählt, da man über K die restlichen Kennzahlen sehr einfach berechnen kann.

Bei freier Wahl der Kennzahlen F , R_f , r und K errechnen sich die restlichen acht Kennzahlen, die nicht bereits durch (2.1) und (2.2) festliegen, auf folgende Weise:

$$\boxed{1} \quad R_k = \frac{F \cdot R_f}{2} \quad (4.2 \text{ FR})$$

$$\boxed{2} \quad R_p = R_k - R_f + 2 \quad (2.3 \text{ R})$$

$$\boxed{3} \quad f = \frac{r \cdot R_f}{2} \quad (2.4 \text{ FR})$$

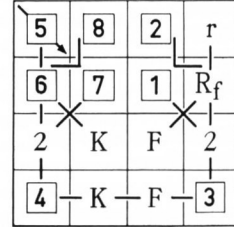
$$\boxed{4} \quad k = \frac{f \cdot F}{K} \quad (2.4 \text{ KF})$$

$$\boxed{5} \quad p = k + r - f \quad (4.4)$$

$$\boxed{6} \quad P_k = \frac{2 \cdot k}{p} \quad (2.4 \text{ PK})$$

$$\boxed{7} \quad P_f = \frac{K \cdot P_k}{2} \quad (4.2 \text{ PK})$$

$$\boxed{8} \quad P_r = P_f - P_k + 2 \quad (2.3 \text{ P})$$



Als Kopplungsgleichungen der beiden Kennschemahälften dienen hier (2.4 KF) und (4.4). Als Kontrollgleichungen können beispielsweise (2.4 RP) und (4.2 RP) verwendet werden.

7. BESTIMMUNG ALLER KENNSCHEMAS FINITER HOMOGENER POLYTOPE

Nach Abschluß der grundsätzlichen Betrachtungen und Angabe eines einfachen Berechnungsschemas für die Kennzahlen homogener Polytope sollen im folgenden Kapitel alle Kennschemas finiter homogener Polytope bestimmt werden. Als „finit“ wird ein Polytop dann bezeichnet, wenn es außer dem Umgebungsraum kein ins Unendliche reichendes Element besitzt. Dieser eine, das Unendliche enthaltende Umgebungsraum des Polytopes wird „Amplexum“ genannt.

7.1 HOMOGENE POLYTOPELEMENTE

Ein Polytop heißt homogen in bezug auf seine Elementesorten, wenn jede der vier Sorten die ihr entsprechende Bedingung der Punkt-, Kurven-, Flächen- bzw. Raumhomogenität erfüllt (vgl. 1.4). Entsprechend soll ein einzelnes Polytopelement in bezug auf seine Anschlußelemente homogen genannt werden, wenn jede Sorte seiner Anschlußelemente Homogenität aufweist gegenüber denjenigen Elementen der beiden anderen Sorten, die ebenfalls dem Ausgangselement angeschlossen sind.

Die Anschlußzahlen einer Anschlußelementesorte gegenüber den Anschlußelementen der beiden anderen Sorten sind im allgemeinen nicht die gleichen wie ihre gewöhnlichen Anschlußzahlen. Dies sei an einem Beispiel gezeigt:

Bei dem bereits erwähnten (5-12-120)-Polytop schließt jede Kurve an $K = 3$ Polytopflächen an. Die Anschlußzahl aller Anschlußkurven eines Polytopraumes gegenüber den Anschlußflächen des gleichen Polytopraumes beträgt jedoch nur $\bar{K} = 2$.

Aus der Homogenität eines Polytopes folgt ohne weiteres die Homogenität aller seiner Elemente im obengenannten Sinne.

Es sollen nun vorerst alle möglichen Typen homogener Räume bestimmt werden, sodann durch Polarisation die entsprechend möglichen Typen homogener Punkte. Bei den Kurven und Flächen sind alle möglichen homogenen Typen bereits durch die Anschlußzahlen K bzw. F erfaßt und eindeutig beschrieben.

Die Ursache dafür, daß sich die Kurven- und Flächentypen einfacher erfassen lassen als die Punkt- und Raumtypen, ist in den durch die Grundgleichungen festgelegten Eigenschaften zu suchen. Die Anschlußzahlen-Tripel der Kurven und Flächen müssen den Grundgleichungen (2.1) und (2.2) der festen bzw. der gleichen Anschlußzahlen genügen; die Anschlußzahlen der Punkte und Räume sind demgegenüber nur den Grundgleichungen (2.3) der kombinierten Anschlußzahlen unterworfen.

Ist für ein homogenes Polytop der Typ seiner homogenen Räume festgelegt, so ist damit auch gleichzeitig der Typ seiner homogenen Flächen bestimmt; denn wegen (4.2 FR) und (2.1 F) ergibt sich aus R_k und R_f bereits der Flächentyp F . Entsprechend ergibt sich mit der Festlegung eines homogenen Punkttyps wegen (4.2 PK) und (2.1 K) bereits der zugehörige Kurventyp K . Mit Rücksicht auf diese eindeutige, aber nicht umkehrbare Zuordnung eines Flächentyps zu einem Raumtyp und eines Kurventyps zu einem Punkttyp

wird im folgenden zusammenfassend von „Raum-Flächen-Typen“ und „Punkt-Kurven-Typen“ gesprochen.

Nach der Bestimmung aller durch rechte Halbschemas zu beschreibenden Raum-Flächen-Typen und der Bestimmung aller entsprechenden, durch linke Halbschemas zu beschreibenden Punkt-Kurven-Typen wird die Aufgabe, alle Kennschemas finiter homogener Polytope zu ermitteln, dadurch gelöst, daß die Typen des rechten Halbschemas mit denen des linken gekoppelt werden, soweit dies gemäß den Kopplungsgleichungen (vgl. 6.2 und 6.4) möglich ist.

7.2 BESTIMMUNG ALLER FINITEN RAUM-FLÄCHEN-TYPEN

Ein Raum-Flächen-Typ sei „finit“ genannt, wenn er sich so realisieren läßt, daß alle seine Anschlußelemente im Endlichen gelegen sind.

Ein finites homogenes Polytop wird nun als „2-Raum-Polytop“ bezeichnet, wenn es sich aus einem homogenen „Innenraum“ eines finiten Raum-Flächen-Typs, dessen sämtlichen Anschlußelementen und dem homogenen „Außenraum“ (Amplexum) vom gleichen Raum-Flächen-Typ zusammensetzt. Beide Räume schließen hierbei von verschiedenen Seiten einfach an ihre gemeinsamen Anschlußelemente an. Damit sind folgende Kennzahlen der 2-Raum-Polytope festgelegt: $P_r = K_r = r = 2$.

Aus (2.2 K), (2.2 F) und (2.3 P) folgt $K = 2$, $F_p = F_k \Rightarrow F$ bzw. $P_k = P_f \Rightarrow P$. Die Verknüpfungsgleichungen (2.4) liefern ferner als Anschlußzahlen der Räume die betreffenden Elementezahlen selbst.

Daraus ergibt sich das Kennschema der 2-Raum-Polytope:

p	2	p	2
P	P	k	f
2	2	F	2
k	2	F	f

Das Kennschema eines jeden homogenen 2-Raum-Polytopes läßt sich durch folgende Polarisatoren in polare Kennschemas transformieren:

○	○	⊙	⊙																																																																
<table> <tr><td>p_o</td><td>2</td><td>p_o</td><td>2</td></tr> <tr><td>P_o</td><td>P_o</td><td>k_o</td><td>f_o</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>F_o</td><td>2</td></tr> <tr><td>k_o</td><td>2</td><td>F_o</td><td>f_o</td></tr> </table>	p _o	2	p _o	2	P _o	P _o	k _o	f _o	2	2	F _o	2	k _o	2	F _o	f _o	<table> <tr><td>2</td><td>f_o</td><td>2</td><td>f_o</td></tr> <tr><td>p_o</td><td>k_o</td><td>F_o</td><td>F_o</td></tr> <tr><td>2</td><td>P_o</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>p_o</td><td>P_o</td><td>2</td><td>k_o</td></tr> </table>	2	f _o	2	f _o	p _o	k _o	F _o	F _o	2	P _o	2	2	p _o	P _o	2	k _o	<table> <tr><td>f_o</td><td>2</td><td>f_o</td><td>2</td></tr> <tr><td>F_o</td><td>F_o</td><td>k_o</td><td>p_o</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>P_o</td><td>2</td></tr> <tr><td>k_o</td><td>2</td><td>P_o</td><td>p_o</td></tr> </table>	f _o	2	f _o	2	F _o	F _o	k _o	p _o	2	2	P _o	2	k _o	2	P _o	p _o	<table> <tr><td>2</td><td>p_o</td><td>2</td><td>p_o</td></tr> <tr><td>f_o</td><td>k_o</td><td>P_o</td><td>P_o</td></tr> <tr><td>2</td><td>F_o</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>f_o</td><td>F_o</td><td>2</td><td>k_o</td></tr> </table>	2	p _o	2	p _o	f _o	k _o	P _o	P _o	2	F _o	2	2	f _o	F _o	2	k _o
p _o	2	p _o	2																																																																
P _o	P _o	k _o	f _o																																																																
2	2	F _o	2																																																																
k _o	2	F _o	f _o																																																																
2	f _o	2	f _o																																																																
p _o	k _o	F _o	F _o																																																																
2	P _o	2	2																																																																
p _o	P _o	2	k _o																																																																
f _o	2	f _o	2																																																																
F _o	F _o	k _o	p _o																																																																
2	2	P _o	2																																																																
k _o	2	P _o	p _o																																																																
2	p _o	2	p _o																																																																
f _o	k _o	P _o	P _o																																																																
2	F _o	2	2																																																																
f _o	F _o	2	k _o																																																																

Der Polarisator ⊙ ist hier der gewöhnliche Dualitätskorrelator im dreidimensionalen Raum.

Es soll nun gezeigt werden, daß sich jeder finite Raum-Flächen-Typ eineindeutig durch ein spezielles 2-Raum-Polytop kennzeichnen läßt. Zum Nachweis dieser Zuordnung müssen die Fälle $r = 1$, $r = 2$, $r > 2$ unterschieden und diskutiert werden.

Im Falle $r = 2$ erfolgt die eindeutige Kennzeichnung des betreffenden Raum-Flächen-Typs bereits durch das gegebene 2-Raum-Polytop.

In den Fällen $r = 1$ und $r > 2$ werden ein homogener Raum und seine Anschlußflächen in ihren Anschlußzahlen nicht verändert, wenn die Anschlußzahlen der anschließenden Punkte und Kurven durch die betreffenden Anschlußzahlen des 2-Raum-Polytopes ersetzt werden.

Dies bedeutet für den Raum-Flächen-Typ im Falle $r = 1$ lediglich, daß das als einziger Raum vorhandene Amplexum anstelle des zweifachen Anschlusses an eine Fläche zwei einfache Anschlüsse an zwei Flächen erhält, so daß jeder zweite Raumanschluß einer Fläche zum Anschluß an einen zweiten „inneren“ Raum frei wird.

Im Falle $r > 2$ werden alle inneren Polytopelemente, die sich an die Anschlußelemente des Amplexums unmittelbar und mittelbar anschließen, durch einen einzigen inneren Raum ersetzt.

In allen Fällen ist also eine umkehrbar eindeutige Zuordnung der finiten homogenen 2-Raum-Polytope zu den finiten Raum-Flächen-Typen möglich.

Bei der Untersuchung der finiten 1-Raum-Polytope zeigt sich übrigens, daß nur ein einziger Raum-Flächen-Typ auftreten kann.

Dies läßt sich aus dem Kennschema der 1-Raum-Polytope ablesen:

n	1	n	1
2	1	n	2
2	1	n	2
n	1	n	1

Sämtliche Kennzahlen sind durch die dem Begriff des 1-Raum-Polytopes entsprechenden Festsetzungen $P_r = K_r = r = 1$ und die Grundgleichungen bis auf einen freien Parameter n bestimmt. Aus (2.2 K) folgt $K = 1$; (2.3 P) und (4.2 PK) liefern mit $P_k = P_f + 1$ und $P_k = 2 P_f$ die Anschlußzahlen $P_k = 2$ und $P_f = 1$. Wegen (2.2 F), (4.3), (4.2 RP) und (2.3 R) folgt hieraus: $F = R_k = R_p$ und $R_f = 2$. Mit (2.4) ergibt sich nun $f = 1$, $p = k = F$. Setzt man $F = n$, so erhält man mit dem obenstehenden Kennschema der 1-Raum-Polytope die Serie der gewöhnlichen Polygone, die jeweils im Amplexum eine Fläche aufspannen.

Die Bestimmung aller finiten Raum-Flächen-Typen erfolgt nun durch die Bestimmung aller finiten homogenen 2-Raum-Polytope. Hierzu wird eine Hauptnormtafel aufgestellt, die für die laufenden Werte von F und P die jeweilige Hauptnorm angibt.

Berechnung der Hauptnorm H aus den Anschlußzahlen:

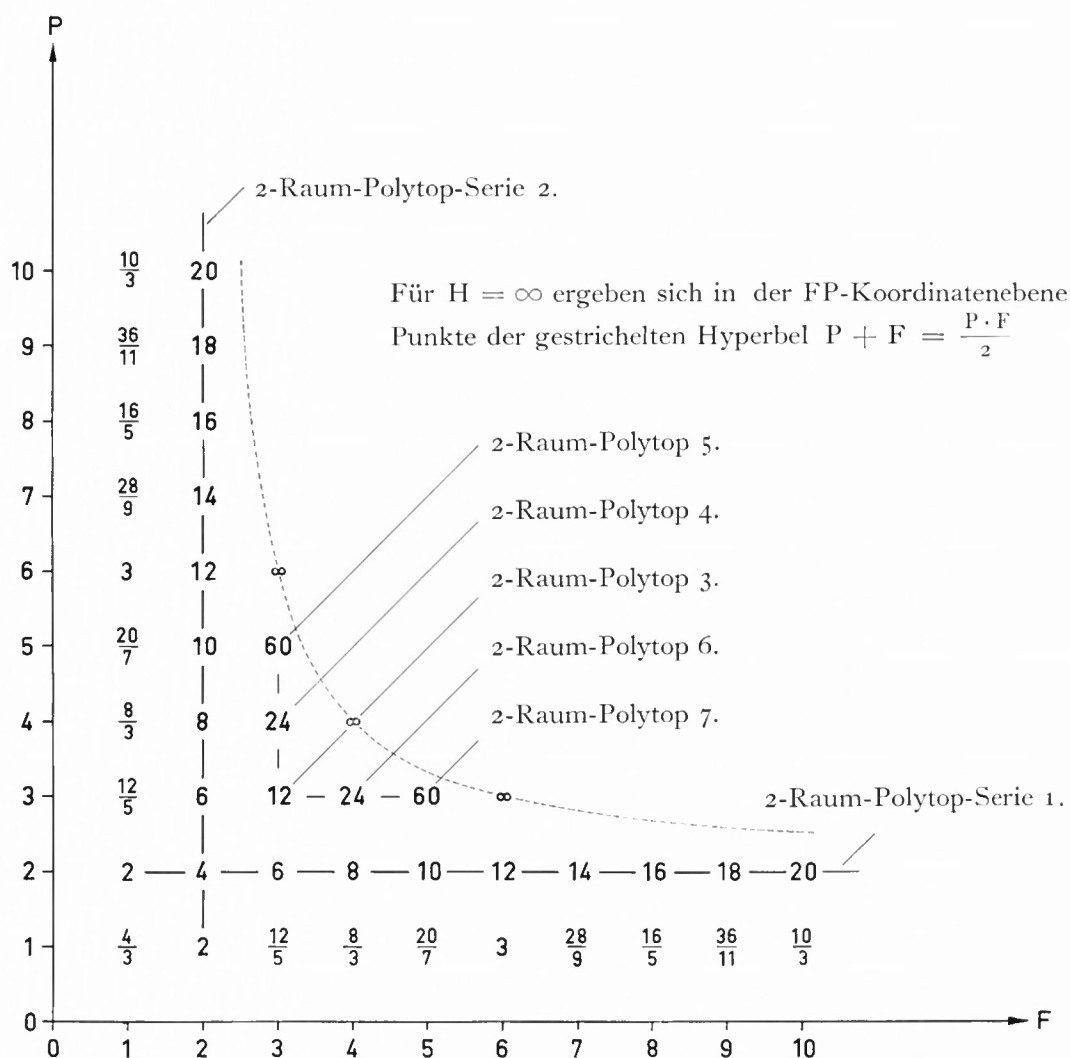
$$\begin{array}{c}
 (4.4) \\
 \downarrow \\
 (4.1) \rightarrow \begin{array}{cc} p + f & = & k + r \\ \parallel & & \parallel \\ \frac{H}{P} & & \frac{H}{K} \end{array} \leftarrow \text{für 2-Raum-Polytope}
 \end{array}$$

$$H \cdot \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{K} + \frac{1}{F} \right) = 2$$

Mit $K = 2$ erhält man hieraus:

$$H = \frac{4 PF}{2P - PF + 2F}$$

Hauptnorm-Tafel der 2-Raum-Polytope: H als Funktion von F und P



Da alle Kennzahlen als natürliche Zahlen vorausgesetzt wurden (vgl. 1.5), muß die Hauptnorm homogener 2-Raum-Polytope eine ganze Zahl $H \geq P$ und $\geq F$ sein.

Aus der Hauptnorm-Tafel ergeben sich nachfolgende 2-Raum-Polytope mit ihren Kennschemas:

1. Polygon-Dieder-Serie
($n-2-2$)-Polytope

n	2	n	2
2	2	n	2
2	2	n	2
n	2	n	2

2. Digon-Polyeder-Serie
($2-n-2$)-Polytope

2	2	2	2
n	n	n	n
2	2	2	2
n	2	2	n

3. Trigon-Tetraeder
($3-4-2$)-Polytop

4	2	4	2
3	3	6	4
2	2	3	2
6	2	3	4

4. Trigon-Oktaeder
($3-8-2$)-Polytop

6	2	6	2
4	4	12	8
2	2	3	2
12	2	3	8

6. Tetragon-Hexaeder
($4-6-2$)-Polytop

8	2	8	2
3	3	12	6
2	2	4	2
12	2	4	6

5. Trigon-Ikosaeder
($3-20-2$)-Polytop

12	2	12	2
5	5	30	20
2	2	3	2
30	2	3	20

7. Pentagon-Dodekaeder
($5-12-2$)-Polytop

20	2	20	2
3	3	30	12
2	2	5	2
30	2	5	12

Diese 2-Raum-Polytope charakterisieren die sieben möglichen Raum-Flächen-Typen.

7.3 DARSTELLUNG ALLER KENNSCHEMA-TYPEN

Zur Bestimmung aller Kennschemas finiter homogener Polytope muß jedes der Raum-Flächen-Halbschemas der vorstehenden homogenen 2-Raum-Polytope mit jedem der zu ihnen polaren Punkt-Kurven-Halbschemas gekoppelt werden, soweit dies die Kopplungsgleichung (4.2 RP) zuläßt. Die Elementezahlen werden mit (2.4) als Funktion der Raumzahl eingesetzt. Die Einteilung der Kennschemas soll nach der Art ihrer Raum-Flächen-Typen erfolgen.

Raum-Flächen-Halbschemas homogener Polytope ($F-R_f-r$)

Typ 1·) (n-2-r)	Typ 2·) (2-n-r)	Typ 3·) (3-4-r)	Typ 4·) (3-8-r)	Typ 5·) (3-20-r)	Typ 6·) (4-6-r)	Typ 7·) (5-12-r)																																																								
<table><tr><td>n</td><td>r</td></tr><tr><td>n</td><td>2</td></tr><tr><td>n</td><td>2</td></tr><tr><td>n</td><td>r</td></tr></table>	n	r	n	2	n	2	n	r	<table><tr><td>2</td><td>r</td></tr><tr><td>n</td><td>n</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>$\frac{nr}{2}$</td></tr></table>	2	r	n	n	2	2	2	$\frac{nr}{2}$	<table><tr><td>4</td><td>r</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>2r</td></tr></table>	4	r	6	4	3	2	3	2r	<table><tr><td>6</td><td>r</td></tr><tr><td>12</td><td>8</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>4r</td></tr></table>	6	r	12	8	3	2	3	4r	<table><tr><td>12</td><td>r</td></tr><tr><td>30</td><td>20</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>10r</td></tr></table>	12	r	30	20	3	2	3	10r	<table><tr><td>8</td><td>r</td></tr><tr><td>12</td><td>6</td></tr><tr><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>3r</td></tr></table>	8	r	12	6	4	2	4	3r	<table><tr><td>20</td><td>r</td></tr><tr><td>30</td><td>12</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>6r</td></tr></table>	20	r	30	12	5	2	5	6r
n	r																																																													
n	2																																																													
n	2																																																													
n	r																																																													
2	r																																																													
n	n																																																													
2	2																																																													
2	$\frac{nr}{2}$																																																													
4	r																																																													
6	4																																																													
3	2																																																													
3	2r																																																													
6	r																																																													
12	8																																																													
3	2																																																													
3	4r																																																													
12	r																																																													
30	20																																																													
3	2																																																													
3	10r																																																													
8	r																																																													
12	6																																																													
4	2																																																													
4	3r																																																													
20	r																																																													
30	12																																																													
5	2																																																													
5	6r																																																													

Punkt-Kurven-Halbschemas homogener Polytope

Typ ·1) K = m	Typ ·2) K = 2	Typ ·3) K = 3	Typ ·4) K = 3	Typ ·5) K = 3	Typ ·6) K = 4	Typ ·7) K = 5																																																								
<table><tr><td>p</td><td>m</td></tr><tr><td>2</td><td>m</td></tr><tr><td>2</td><td>m</td></tr><tr><td>p</td><td>m</td></tr></table>	p	m	2	m	2	m	p	m	<table><tr><td>p</td><td>2</td></tr><tr><td>m</td><td>m</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>$\frac{mp}{2}$</td><td>2</td></tr></table>	p	2	m	m	2	2	$\frac{mp}{2}$	2	<table><tr><td>p</td><td>4</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>2p</td><td>3</td></tr></table>	p	4	4	6	2	3	2p	3	<table><tr><td>p</td><td>6</td></tr><tr><td>8</td><td>12</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>4p</td><td>3</td></tr></table>	p	6	8	12	2	3	4p	3	<table><tr><td>p</td><td>12</td></tr><tr><td>20</td><td>30</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>10p</td><td>3</td></tr></table>	p	12	20	30	2	3	10p	3	<table><tr><td>p</td><td>8</td></tr><tr><td>6</td><td>12</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3p</td><td>4</td></tr></table>	p	8	6	12	2	4	3p	4	<table><tr><td>p</td><td>20</td></tr><tr><td>12</td><td>30</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>6p</td><td>5</td></tr></table>	p	20	12	30	2	5	6p	5
p	m																																																													
2	m																																																													
2	m																																																													
p	m																																																													
p	2																																																													
m	m																																																													
2	2																																																													
$\frac{mp}{2}$	2																																																													
p	4																																																													
4	6																																																													
2	3																																																													
2p	3																																																													
p	6																																																													
8	12																																																													
2	3																																																													
4p	3																																																													
p	12																																																													
20	30																																																													
2	3																																																													
10p	3																																																													
p	8																																																													
6	12																																																													
2	4																																																													
3p	4																																																													
p	20																																																													
12	30																																																													
2	5																																																													
6p	5																																																													

Bei Betrachtung dieser Halbschemas erkennt man, daß bei finiten homogenen Polytopen für die Anschlußzahlen F und K im allgemeinen nur die Werte 2, 3, 4, 5 in Frage kommen. Eine Ausnahme bilden die Polytope mit dem rechten Halbschema (n-2-r) vom Typ 1 $\cdot$) und die zu ihnen polaren mit $K = m$ vom Typ $\cdot$ 1). Es erweist sich jedoch, daß diese beiden Halbschemas nur untereinander oder mit denen der Typen $\cdot$ 2) bzw. 2 $\cdot$) gekoppelt werden können. Geht man von einem bestimmten Raum-Flächen-Halbschema mit den Anschlußzahlen F und R_f aus und gibt ferner K vor, so sind durch diese drei Anschlußzahlen bereits alle zwölf Anschlußzahlen festgelegt (vgl. 6.4). Besitzen mehrere Punkt-Kurven-Halbschemas die gleiche Anschlußzahl K , so kann jeweils nur eines von ihnen mit dem betreffenden Raum-Flächen-Halbschema gekoppelt werden.

Bei Vorgabe der Anschlußzahlen F , R_f und K sind auch bereits alle Elementezahlen bis auf den gemeinsamen Faktor r bestimmt. Die Raumzahl r ist also nur der Bedingung unterworfen, daß alle Elementezahlen positive ganze Zahlen sein müssen. Es erweist sich

jedoch, daß es unter den unendlichvielen Kennschemas mit gleicher Kombination der Anschlußzahlen F , R_f und K jeweils nur höchstens eines (mit bestimmter Raumzahl r) gibt, dem ein realisierbares finites Polytop zugeordnet ist.

Bei Beachtung der Kopplungsgleichung (4.2 RP) ergeben sich aus der Gesamtzahl von 49 möglichen Kombinationen der sieben rechten und der sieben linken Halbschemas nur die nachfolgenden 25 Kennschema-Typen. Ihre zweistellige Numerierung bezeichnet mit der ersten Stelle den Raum-Flächen-Typ, mit der zweiten den Punkt-Kurven-Typ.

Die unter den Kennschemas beigefügten Numerierungen und Kennschemabezeichnungen weisen auf die entsprechenden im 8. Kapitel dargestellten finiten homogenen Polytope hin.

Kennschemas vom Raum-Flächen-Typ 1·) (n-2-r)

11)	$\begin{matrix} (n-2-r) \\ K = m \end{matrix}$	12)	$\begin{matrix} (n-2-r) \\ K = 2 \end{matrix}$
$\begin{array}{ c c c c } \hline \frac{nr}{m} & m & n & r \\ \hline 2 & m & n & 2 \\ \hline 2 & m & n & 2 \\ \hline \frac{nr}{m} & m & n & r \\ \hline \end{array}$		$\begin{array}{ c c c c } \hline \frac{nr}{2} & 2 & n & r \\ \hline 2 & 2 & n & 2 \\ \hline 2 & 2 & n & 2 \\ \hline \frac{nr}{2} & 2 & n & r \\ \hline \end{array}$	

8.11 mm (n-2-m)

8.12 n (n-2-2)

Kennschemas vom Raum-Flächen-Typ 2·) (2-n-r)

21)	$\begin{matrix} (2-2-r) \\ K = m \end{matrix}$	22)	$\begin{matrix} (2-n-r) \\ K = 2 \end{matrix}$	23)	$\begin{matrix} (2-3-r) \\ K = 3 \end{matrix}$	24)	$\begin{matrix} (2-4-r) \\ K = 3 \end{matrix}$
$\begin{array}{ c c c c } \hline \frac{2r}{m} & m & 2 & r \\ \hline 2 & m & 2 & 2 \\ \hline 2 & m & 2 & 2 \\ \hline \frac{2r}{m} & m & 2 & r \\ \hline \end{array}$		$\begin{array}{ c c c c } \hline r & 2 & 2 & r \\ \hline n & n & n & n \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline \frac{nr}{2} & 2 & 2 & \frac{nr}{2} \\ \hline \end{array}$		$\begin{array}{ c c c c } \hline \frac{r}{2} & 4 & 2 & r \\ \hline 4 & 6 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 2 & 2 \\ \hline r & 3 & 2 & \frac{3r}{2} \\ \hline \end{array}$		$\begin{array}{ c c c c } \hline \frac{r}{3} & 6 & 2 & r \\ \hline 8 & 12 & 4 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 2 & 2 \\ \hline \frac{4r}{3} & 3 & 2 & 2r \\ \hline \end{array}$	

8.21 m (2-2-m)

8.22 n (2-n-2)

8.23 (2-3-4)

8.24 (2-4-6)

25)	$\begin{matrix} (2-5-r) \\ K = 3 \end{matrix}$	26)	$\begin{matrix} (2-3-r) \\ K = 4 \end{matrix}$	27)	$\begin{matrix} (2-3-r) \\ K = 5 \end{matrix}$
$\begin{array}{ c c c c } \hline \frac{r}{6} & 12 & 2 & r \\ \hline 20 & 30 & 5 & 5 \\ \hline 2 & 3 & 2 & 2 \\ \hline \frac{5r}{3} & 3 & 2 & \frac{5r}{2} \\ \hline \end{array}$		$\begin{array}{ c c c c } \hline \frac{r}{4} & 8 & 2 & r \\ \hline 6 & 12 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 4 & 2 & 2 \\ \hline \frac{3r}{4} & 4 & 2 & \frac{3r}{2} \\ \hline \end{array}$		$\begin{array}{ c c c c } \hline \frac{r}{10} & 20 & 2 & r \\ \hline 12 & 30 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 5 & 2 & 2 \\ \hline \frac{3r}{5} & 5 & 2 & \frac{3r}{2} \\ \hline \end{array}$	

8.25 (2-5-12)

8.26 (2-3-8)

8.27 (2-3-20)

Kennschemas vom Raum-Flächen-Typ 3) (3-4-r)

32) $\begin{matrix} (3-4-r) \\ K = 2 \end{matrix}$

2r	2	4	r
3	3	6	4
2	2	3	2
3r	2	3	2r

8.32 (3-4-2)

33) $\begin{matrix} (3-4-r) \\ K = 3 \end{matrix}$

r	4	4	r
4	6	6	4
2	3	3	2
2r	3	3	2r

8.33 (3-4-5)

36) $\begin{matrix} (3-4-r) \\ K = 4 \end{matrix}$

$\frac{r}{2}$	8	4	r
6	12	6	4
2	4	3	2
$\frac{3r}{2}$	4	3	2r

8.36 (3-4-16)

37) $\begin{matrix} (3-4-r) \\ K = 5 \end{matrix}$

$\frac{r}{5}$	20	4	r
12	30	6	4
2	5	3	2
$\frac{6r}{5}$	5	3	2r

8.37 (3-4-600)

Kennschemas vom Raum-Flächen-Typ 4) (3-8-r)

42) $\begin{matrix} (3-8-r) \\ K = 2 \end{matrix}$

3r	2	6	r
4	4	12	8
2	2	3	2
6r	2	3	4r

8.42 (3-8-2)

44) $\begin{matrix} (3-8-r) \\ K = 3 \end{matrix}$

r	6	6	r
8	12	12	8
2	3	3	2
4r	3	3	4r

8.44 (3-8-24)

Kennschemas vom Raum-Flächen-Typ 5) (3-20-r)

52) $\begin{matrix} (3-20-r) \\ K = 2 \end{matrix}$

6r	2	12	r
5	5	30	20
2	2	3	3
15r	2	3	10r

8.52 (3-20-2)

55) $\begin{matrix} (3-20-r) \\ K = 3 \end{matrix}$

r	12	12	r
20	30	30	20
2	3	3	2
10r	3	3	10r

Kennschemas vom Raum-Flächen-Typ 6) (4-6-r)

62) $\begin{matrix} (4-6-r) \\ K = 2 \end{matrix}$

4r	2	8	r
3	3	12	6
2	2	4	2
6r	2	4	3r

8.62 (4-6-2)

63) $\begin{matrix} (4-6-r) \\ K = 3 \end{matrix}$

2r	4	8	r
4	6	12	6
2	3	4	2
4r	3	4	3r

8.63 (4-6-8)

66) $\begin{matrix} (4-6-r) \\ K = 4 \end{matrix}$

r	8	8	r
6	12	12	6
2	4	4	2
3r	4	4	3r

67) $\begin{matrix} (4-6-r) \\ K = 5 \end{matrix}$

$\frac{2}{5}r$	20	8	r
12	30	12	6
2	5	4	2
$\frac{12}{3}r$	5	4	3r

Kennschemas vom Raum-Flächen-Typ 7) (5-12-r)

72) $\begin{matrix} (5-12-r) \\ K = 2 \end{matrix}$

10r	2	20	r
3	3	30	12
2	2	5	2
15r	2	5	6r

8.72 (5-12-2)

73) $\begin{matrix} (5-12-r) \\ K = 3 \end{matrix}$

5r	4	20	r
4	6	30	12
2	3	5	2
10r	3	5	6r

8.73 (5-12-120)

76) $\begin{matrix} (5-12-r) \\ K = 4 \end{matrix}$

$\frac{5}{2}r$	8	20	r
6	12	30	12
2	4	5	2
$\frac{15}{2}r$	4	5	6r

77) $\begin{matrix} (5-12-r) \\ K = 5 \end{matrix}$

r	20	20	r
12	30	30	12
2	5	5	2
6r	5	5	6r

Dem Kennschema-Typ 11) mit den zwei freien Parametern m und n ist eine Serie mit zweifach unendlichvielen, den Typen 12), 21) und 22) mit je einem freien Parameter n bzw. m jeweils eine Serie mit einfach unendlichvielen finiten homogenen Polytopen zugeordnet. Die Typen 12) und 21) sind gleichzeitig Sonderfälle des Typs 11) für $m = 2$ bzw. $n = 2$.

Die übrigen Kennschema-Typen kennzeichnen jeweils genau ein finites homogenes Polytop mit Ausnahme der Typen 55), 66), 67), 76) und 77). Zu diesen fünf Typen läßt sich kein den Anschlußzahlen entsprechendes finites homogenes Polytop realisieren. Versucht man, ausgehend vom Amplexum des betreffenden Raum-Flächen-Typs, das Gesamtpolytop aufzubauen, so zeigt sich, daß die Anzahl der unmittelbar und mittelbar nach innen anschließenden Elemente von Punktschicht zu Punktschicht unbegrenzt zunimmt, so daß sich kein Polytop mit endlichen Elementezahlen ergeben kann.

8. REALISIERUNG ALLER FINITEN HOMOGENEN POLYTOPE

In den folgenden Abschnitten werden sämtliche finiten homogenen Polytope zusammengestellt und ihre polaren Verwandtschaften aufgezeigt. Hierzu werden die Kennschemas, die anwendbaren Polarisatoren und die polaren Kennschemas angegeben, die Polytope selbst benannt, kurz beschrieben und bildlich dargestellt.

Bei allen Typen finiter homogener Polytope läßt sich jeweils ein Prototyp so aufbauen, daß seine Kurven und Flächen aus Teilen von Kreiskurven bzw. Kugelflächen bestehen. Dies ist ohne weiteres bei den Polytopen des Raum-Flächen-Typs 1·) im Abschnitt 8.1 zu erkennen. Bei den Polytopen der Raum-Flächen-Typen 3·) bis 7·) in den Abschnitten 8.3 bis 8.7 werden die Kurven und Flächen durch Geraden und Ebenen als Teile spezieller Kreiskurven bzw. Kugelflächen gebildet. Bei den Polytopen des Raum-Flächen-Typs 2·) im Abschnitt 8.2 sind zur Darstellung der Flächen auch Ebenen und zylindrische Flächen verwendet.

Die Polytope werden durch Schrägrisse, Grund- und Aufrisse oder stereoskopische Bilder wiedergegeben.

Bei Grund- und Aufrißzeichnungen ist im Aufriß ein Vertikalschnitt V-V, im Grundriß ein Horizontalschnitt H-H dargestellt. Hierbei sind jeweils nur die in diesen Schnittebenen gelegenen Punkte, Kurven- und Flächenschnitte gezeichnet. Es bedeuten:

Punkte und Linien, dünn gezeichnet: Schnitte durch solche Kurven und Flächen, die nicht in der Schnittebene liegen;

Punkte und Linien, dick gezeichnet, sowie getönte Gebiete: Schnitte durch Punkte, Kurven und Flächen, die in der Schnittebene liegen;

weiße Gebiete: geschnittene Räume.

Die stereoskopischen Bilder sind Modell-Fotografien, die nach dem zur Zeit gültigen DIN-Entwurf für Stereobilder angefertigt wurden. Die darauf abgebildeten Polytope können mit Hilfe eines gewöhnlichen Stereoskopes oder, nach etwas Übung, freiaugig (bei parallel gestellten Augachsen) plastisch gesehen werden.

8.1 HOMOGENE POLYTOPE MIT POLYGON-DIEDRALEN RÄUMEN

Halbschema 1·)
des Raum-Flächen-Typs (n-2-r)

n	r
n	2
n	2
n	r

8.11 mn Kennschema $(n-2-m)$

Polarisatoren

Polare Kennschemas

n	m	n	m
2	m	n	2
2	m	n	2
n	m	n	m



→

 $(n-2-m)$ 8.11 mn 

→

 $(m-2-n)$ 8.11 nm 

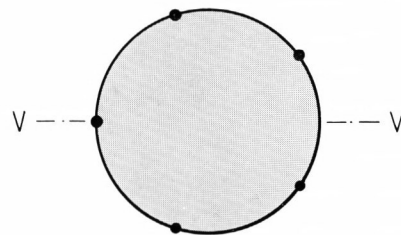
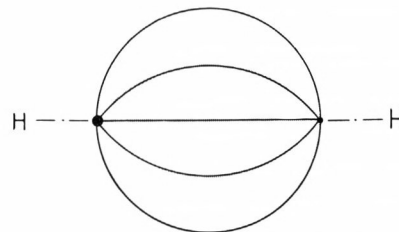
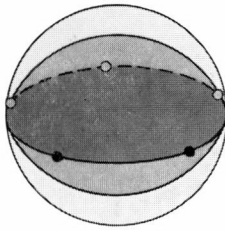
→

 $(n-2-m)$ 8.11 mn 

→

 $(m-2-n)$ 8.11 nm

$(n-2-m)$ -Polytop: n -geteilter Kreis mit m eingefügten Flächen (Kugelhauben und gegebenenfalls ebene Scheibe), $m-1$ Innenräumen und Amplexum



8.11 nm $(m-2-n)$ -Kennschema und -Polytop ergeben sich aus $(n-2-m)$ -Kennschema und -Polytop durch Vertauschung von m und n ; siehe 8.11 mn .

Sonderfälle bei spezieller Wahl von m

8.111 n Kennschema $(n-2-1)$

Polarisatoren

Polare Kennschemas

n	1	n	1
2	1	n	2
2	1	n	2
n	1	n	1



→

 $(n-2-1)$ 8.111 n 

→

 $(1-2-n)$ 8.11 $n1$ 

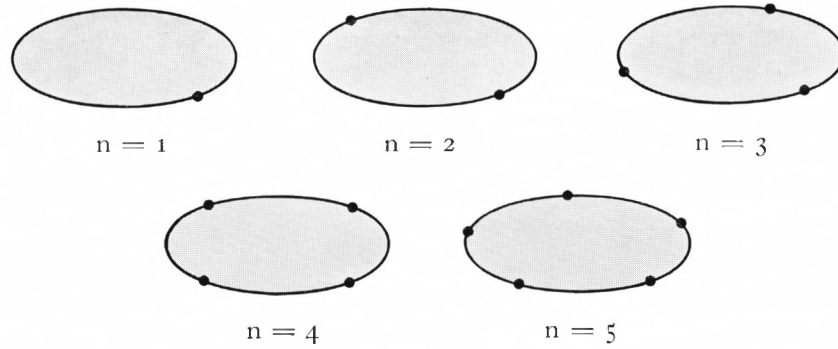
→

 $(n-2-1)$ 8.111 n 

→

 $(1-2-n)$ 8.11 $n1$

($n-2-1$)-Polytop: n -geteilter Kreis mit eingefügter Scheibe und Amplexum



8.112n Kennschema ($n-2-2$)
(= 8.12n)

n	2	n	2
n	2	n	2
n	2	n	2
n	2	n	2

Polarisatoren



→



→



→



→



→



→

Polare Kennschemas

($n-2-2$) 8.112n

($2-n-2$) 8.22n

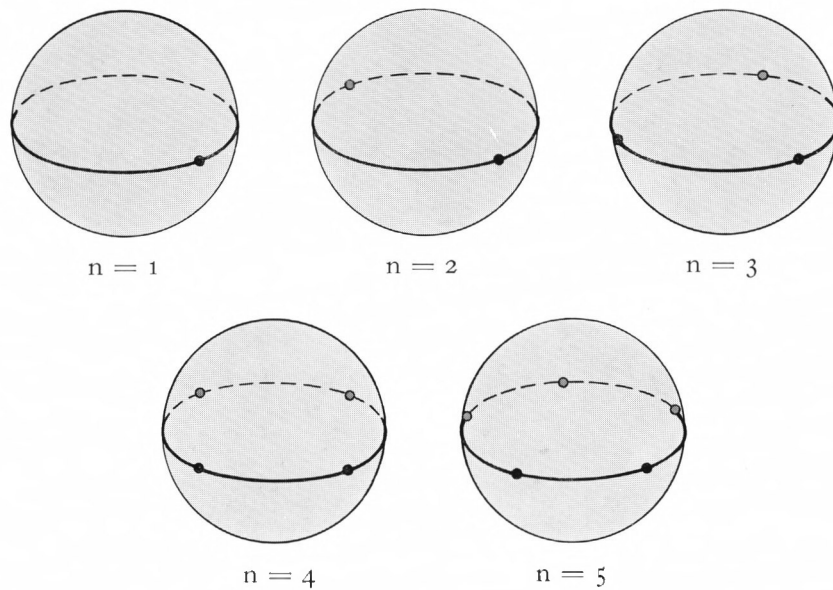
($2-2-n$) 8.11n2

($n-2-2$) 8.112n

($2-n-2$) 8.22n

($2-2-n$) 8.11n2

($n-2-2$)-Polytop: n -geteilter Kreis mit zwei Halbkugelflächen, Innenraum und Amplexum



Sonderfälle bei spezieller Wahl von n

8.11 m 1 Kennschema (1-2-m) Polarisatoren Polare Kennschemas

1	m	1	m
2	m	1	2
2	m	1	2
1	m	1	m



→

(1-2-m) 8.11 m 1



→

(m-2-1) 8.111 m



→

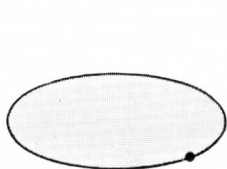
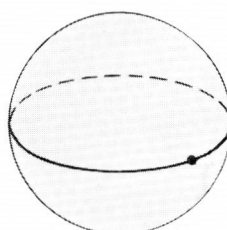
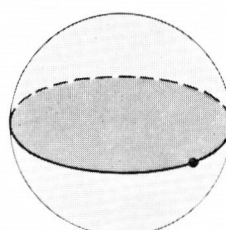
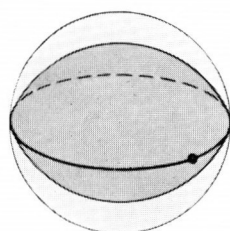
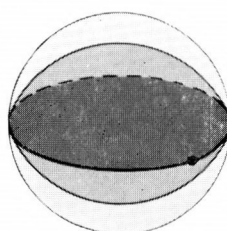
(1-2-m) 8.11 m 1



→

(m-2-1) 8.111 m

(1-2-m)-Polytop: Kreis mit Punkt, m eingefügten Flächen (Kugelhauben und gegebenenfalls ebene Scheibe), m-1 Innenräumen und Amplexum

 $m = 1$  $m = 2$  $m = 3$  $m = 4$  $m = 5$ 8.11 m 2 Kennschema (2-2-m) Polarisatoren Polare Kennschemas
(= 8.21 m)

2	m	2	m
2	m	2	2
2	m	2	2
2	m	2	m



→

(2-2-m) 8.11 m 2



→

(m-2-2) 8.112 m



→

(2-m-2) 8.22 m



→

(2-m-2) 8.22 m



→

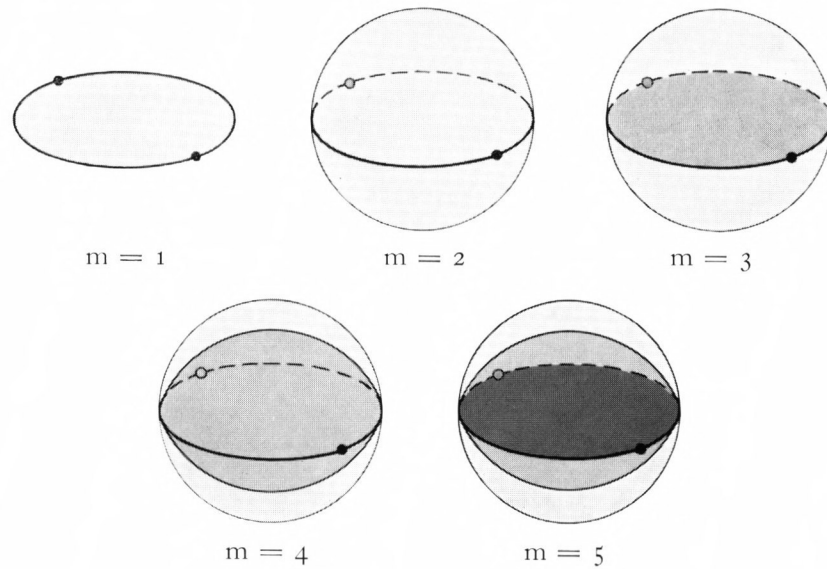
(2-2-m) 8.11 m 2



→

(m-2-2) 8.112 m

(2-2-m)-Polytop: 2-geteilter Kreis mit m eingefügten Flächen (Kugelhauben und gegebenenfalls ebene Scheibe), $m-1$ Innenräumen und Amplexum



Sonderfall $n = m = 2$

8.1122
(= 8.122)
(= 8.212)
(= 8.222)

Kennschema (2-2-2)

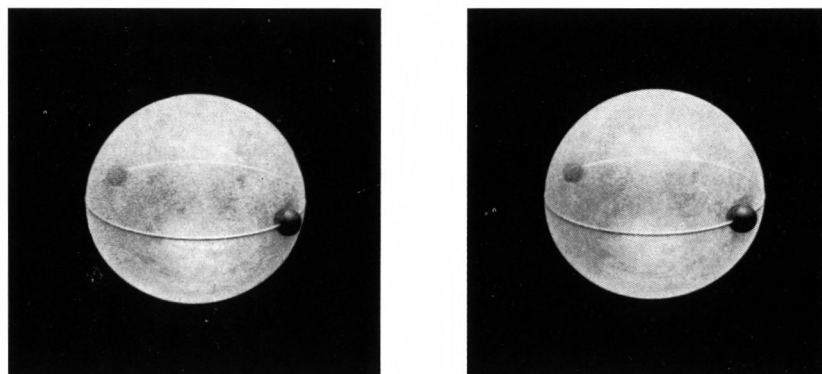
2	2	2	2
2	2	2	2
2	2	2	2
2	2	2	2

Polarisatoren

Polare Kennschemas

Alle Polarisatoren sind anwendbar und führen auf das Ausgangskennschema (2-2-2) zurück.

(2-2-2)-Polytop: Elementarpolytop (vgl. 1.1)



8.12 n

(n-2-2)-Kennschema und -Polytop ergeben sich aus (n-2-m)-Kennschema und -Polytop mit $m = 2$; siehe 8.112 n.

8.2 HOMOGENE POLYTOPE MIT DIGON-POLYEDRALEN RÄUMEN

Halbschema 2·)

des Raum-Flächen-Typs $(2-n-r)$

2	r
n	n
2	2
2	r

8.21m $(2-2-m)$ -Kennschema und -Polytop ergeben sich aus $(n-2-m)$ -Kennschema und -Polytop mit $n = 2$; siehe 8.11m2.

8.22n Kennschema $(2-n-2)$ Polarisatoren Polare Kennschemas

2	2	2	2
n	n	n	n
2	2	2	2
n	2	2	n



→

 $(2-n-2)$ 8.22n

→

 $(2-2-n)$ 8.11n2

→

 $(n-2-2)$ 8.112n

→

 $(2-2-n)$ 8.11n2

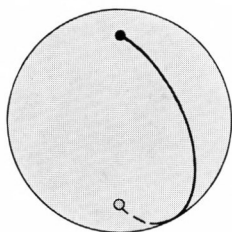
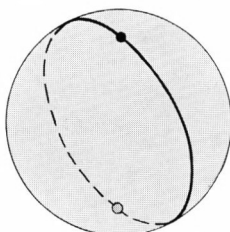
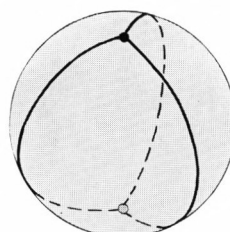
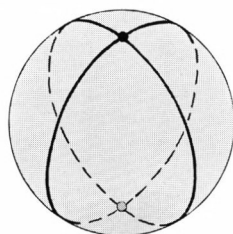
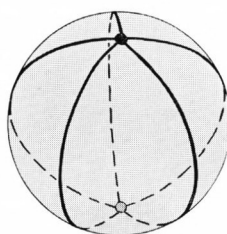
→

 $(n-2-2)$ 8.112n

→

 $(2-n-2)$ 8.22n

$(2-n-2)$ -Polytop: 2-polige Kugel mit n Meridianhalbkreisen, Innenraum und Amplexum

 $n = 1$  $n = 2$  $n = 3$  $n = 4$  $n = 5$

Sonderfall $n = 2$

8.222 (2-2-2)-Kennschema und -Polytop siehe 8.1122 (Elementarpolytop).

8.23 Kennschema (2-3-4) Polarisatoren Polare Kennschemas

2	4	2	4
4	6	3	3
2	3	2	2
4	3	2	6



→

(2-3-4) 8.23



→

(3-4-2) 8.32



→

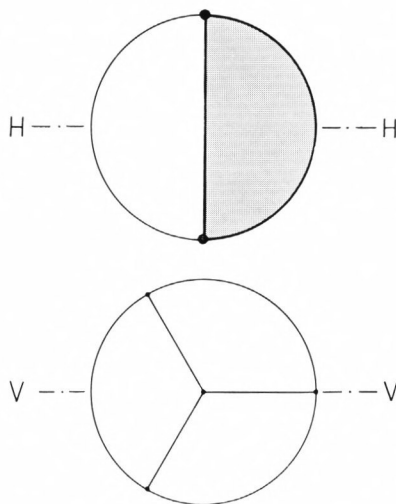
(2-3-4) 8.23



→

(3-4-2) 8.32

(2-3-4)-Polytop: 2-polige Kugel mit drei 3-flächigen Innenzellen („dreischnitzige Apfelsine“) und Amplexum



8.24 Kennschema (2-4-6) Polarisatoren Polare Kennschemas

2	6	2	6
8	12	4	4
2	3	2	2
8	3	2	12



→

(2-4-6) 8.24



→

(4-6-2) 8.62



→

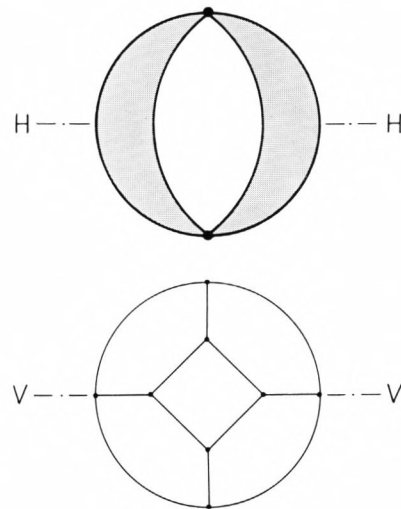
(2-3-8) 8.26



→

(3-8-2) 8.42

(2-4-6)-Polytop: 2-polige Kugel mit fünf 4-flächigen Innenzellen und Amplexum



8.25

Kennschema (2-5-12)

Polarisatoren

Polare Kennschemas

2	12	2	12
20	30	5	5
2	3	2	2
20	3	2	30



(2-5-12)

8.25



(5-12-2)

8.72



(2-3-20)

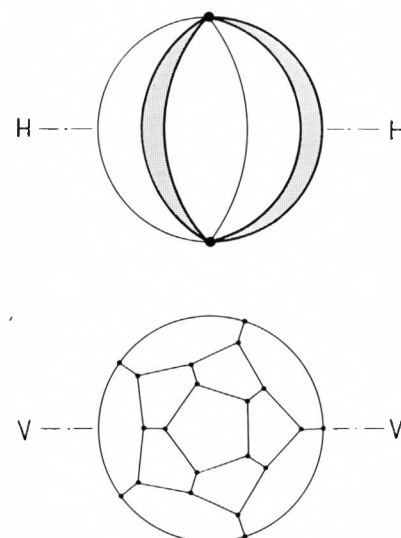
8.27



(3-20-2)

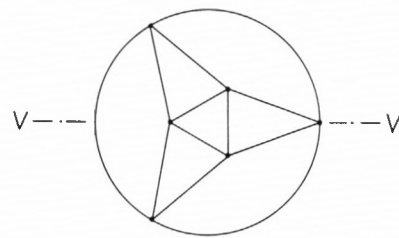
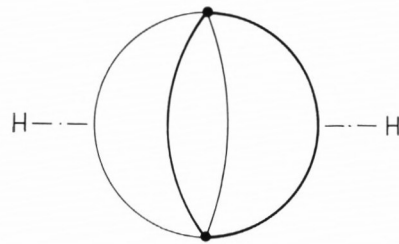
8.52

(2-5-12)-Polytop: 2-polige Kugel mit elf 5-flächigen Innenzellen und Amplexum



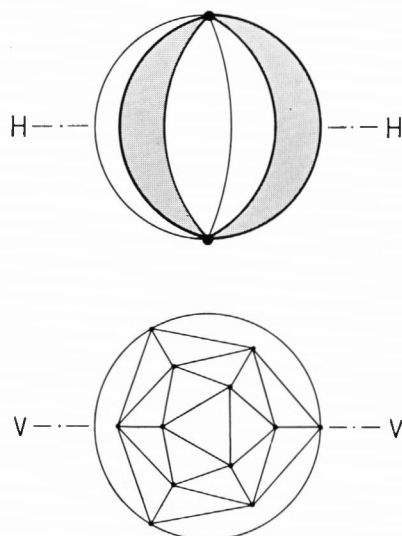
8.26	Kennschema (2-3-8)	Polari satoren	Polare Kennschemas																		
	<table><tr><td>2</td><td>8</td><td>2</td><td>8</td></tr><tr><td>6</td><td>12</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>2</td><td>12</td></tr></table>	2	8	2	8	6	12	3	3	2	4	2	2	6	4	2	12		→	(2-3-8)	8.26
2	8	2	8																		
6	12	3	3																		
2	4	2	2																		
6	4	2	12																		
			→	(3-8-2)	8.42																
			→	(2-4-6)	8.24																
			→	(4-6-2)	8.62																

(2-3-8)-Polytop: 2-polige Kugeln mit sieben 3-flächigen Innenzellen und Amplexum



8.27	Kennschema (2-3-20)	Polarisatoren	Polare Kennschemas																
	<table><tr><td>2</td><td>20</td><td>2</td><td>20</td></tr><tr><td>12</td><td>30</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>12</td><td>5</td><td>2</td><td>30</td></tr></table>	2	20	2	20	12	30	3	3	2	5	2	2	12	5	2	30		→ (2-3-20) 8.27
2	20	2	20																
12	30	3	3																
2	5	2	2																
12	5	2	30																
			→ (3-20-2) 8.52																
			→ (2-5-12) 8.25																
			→ (5-12-2) 8.72																

(2-3-20)-Polytop: 2-polige Kugel mit neunzehn 3-flächigen Innenzellen und Amplexum



8.3 HOMOGENE POLYTOPE MIT TRIGON-TETRAEDRALEN RÄUMEN

Halbschema 3·)
des Raum-Flächen-Typs (3-4-r)

4	r
6	4
3	2
3	r

8.32

Kennschema (3-4-2)

Polarisatoren

Polare Kennschemas

4	2	4	2
3	3	6	4
2	2	3	2
6	2	3	4



(3-4-2) 8.32



(2-3-4) 8.23

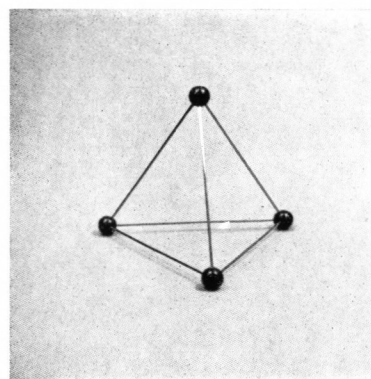
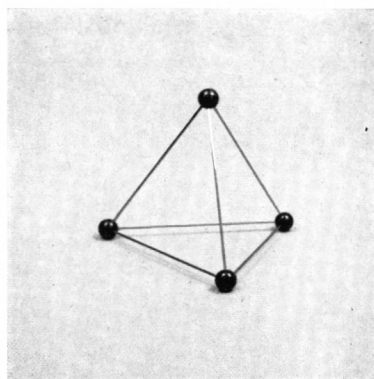


(3-4-2) 8.32



(2-3-4) 8.23

(3-4-2)-Polytop: Trigon-Tetraeder mit Innenraum und Amplexum



8.33

Kennschema (3-4-5)

Polarisatoren

Polare Kennschemas

5	4	4	5
4	6	6	4
2	3	3	2
10	3	3	10



→

(3-4-5)

8.33

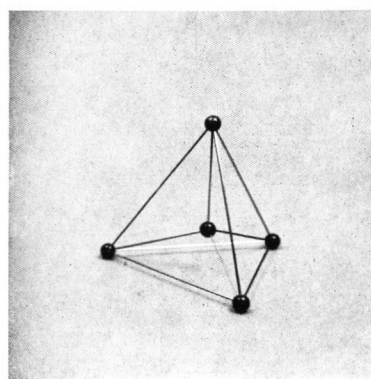
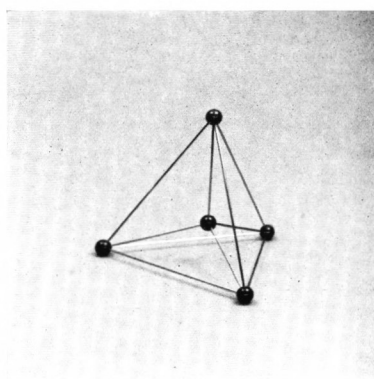


→

(3-4-5)

8.33

(3-4-5)-Polytop: bekannt als „dreidimensionale Projektion des regulären Fünf-Zells im R_4 “



8.36

Kennschema (3-4-16)

Polarisatoren

Polare Kennschemas

8	8	4	16
6	12	6	4
2	4	3	2
24	4	3	32

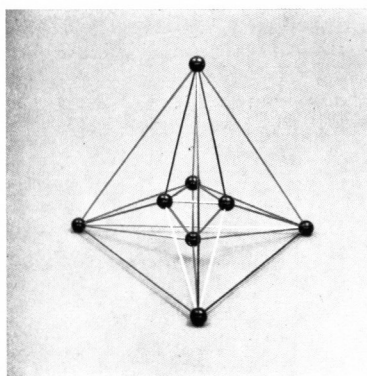
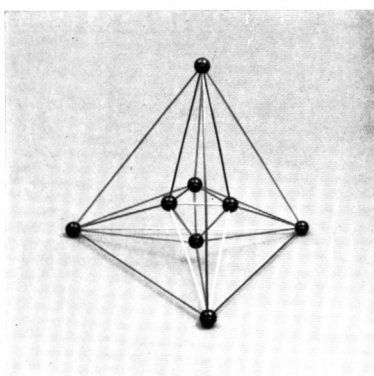


(3-4-16) 8.36



(4-6-8) 8.63

(3-4-16)-Polytop: bekannt als „dreidimensionale Projektion des regulären Sechzehn-Zells im R_4 “



8.37

Kennschema (3-4-600)

Polarisatoren

Polare Kennschemas

120	20	4	600
12	30	6	4
2	5	3	2
720	5	3	1200

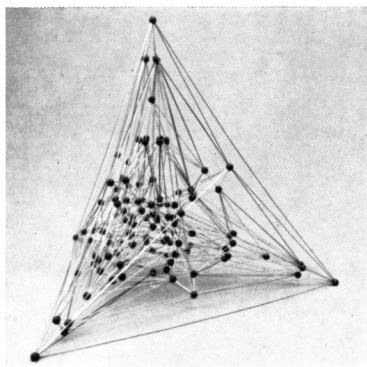
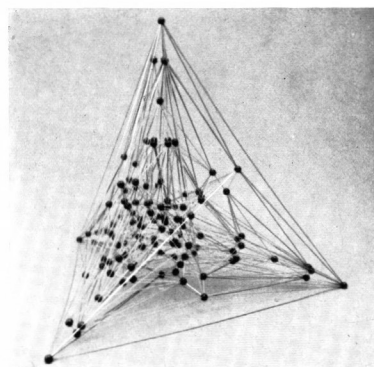


(3-4-600) 8.37



(5-12-120) 8.73

(3-4-600)-Polytop: bekannt als „dreidimensionale Projektion des regulären Sechshundert-Zells im R_4 “



8.4 HOMOGENE POLYTOPE MIT TRIGON-OKTAEDRALEN RÄUMEN

Halbschema 4.)

des Raum-Flächen-Typs (3-8-r)

6	r
12	8
3	2
3	4r

8.42

Kennschema (3-8-2)

Polarisatoren

Polare Kennschemas

6	2	6	2
4	4	12	8
2	2	3	2
12	2	3	8



→

(3-8-2) 8.42



→

(2-3-8) 8.26



→

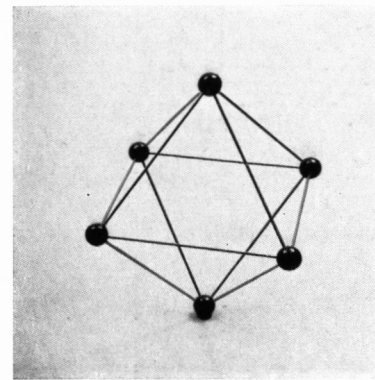
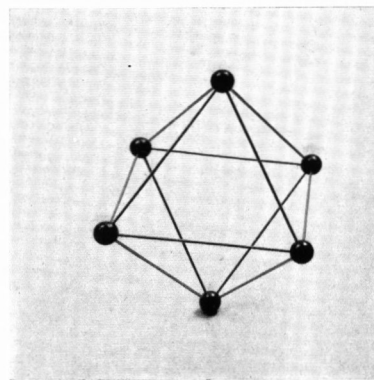
(4-6-2) 8.62



→

(2-4-6) 8.24

(3-8-2)-Polytop: Trigon-Oktaeder mit Innenraum und Amplexum



8.44

Kennschema (3-8-24)

Polarisatoren

Polare Kennschemas

24	6	6	24
8	12	12	8
2	3	3	2
96	3	3	96



→

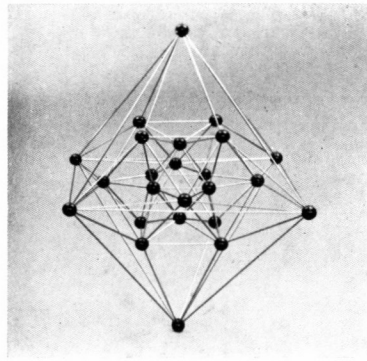
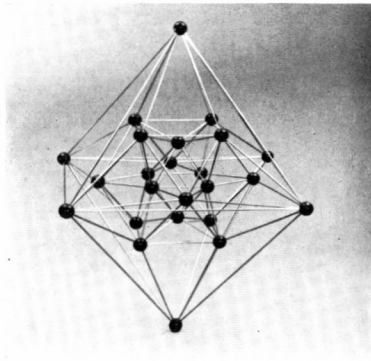
(3-8-24) 8.44



→

(3-8-24) 8.44

(3-8-24)-Polytop: bekannt als „dreidimensionale Projektion des regulären Vierundzwanzig-Zells im R_4 “



8.5 HOMOGENE POLYTOPE MIT TRIGON-IKOSAEDRALEN RÄUMEN

Halbschema 5.)

des Raum-Flächen-Typs (3-20-r)

12	r
30	20
3	2
3	10r

8.52

Kennschema (3-20-2)

Polarisatoren

Polare Kennschemas

12	2	12	2
5	5	30	20
2	2	3	2
30	2	3	20



→

(3-20-2) 8.52



→

(2-3-20) 8.27



→

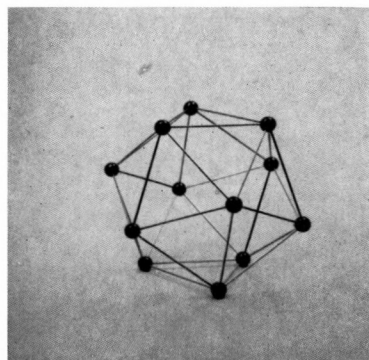
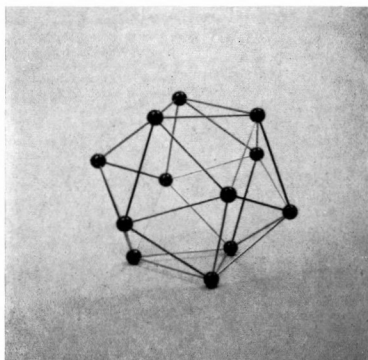
(5-12-2) 8.72



→

(2-5-12) 8.25

(3-20-2)-Polytop: Trigon-Ikosaeder mit Innenraum und Amplexum



8.6 HOMOGENE POLYTOPE MIT TETRAGON-HEXAEDRALEN RÄUMEN

Halbschema 6.)

des Raum-Flächen-Typs $(4-6-r)$

8	r
12	6
4	2
4	3r

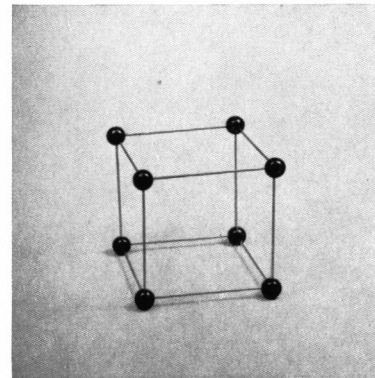
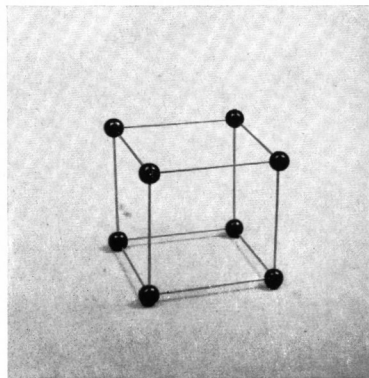
8.62

Kennschema $(4-6-2)$

Polarisatoren

Polare Kennschemas

8	2	8	2
3	3	12	6
2	2	4	2
12	2	4	6

 $(4-6-2)$ 8.62 $(2-4-6)$ 8.24 $(3-8-2)$ 8.42 $(2-3-8)$ 8.26 $(4-6-2)$ -Polytop: Tetragon-Hexaeder mit Innenraum und Amplexum

8.63

Kennschema $(4-6-8)$

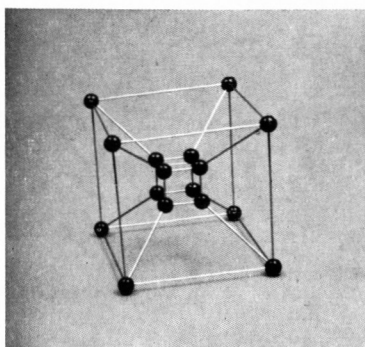
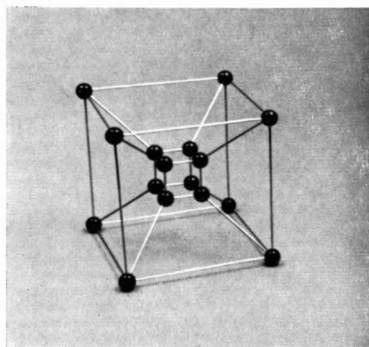
Polarisatoren

Polare Kennschemas

16	4	8	8
4	6	12	6
2	3	4	2
32	3	4	24

 $(4-6-8)$ 8.63 $(3-4-16)$ 8.36

(4-6-8)-Polytop: bekannt als „dreidimensionale Projektion des regulären Acht-Zells im R_4 “



8.7 HOMOGENE POLYTOPE MIT PENTAGON-DODEKAEDRALEN RÄUMEN

Halbschema 7.)

des Raum-Flächen-Typs $(5-12-r)$

20	r
30	12
5	2
5	6r

8.72

Kennschema $(5-12-2)$

Polarisatoren

Polare Kennschemas

20	2	20	2
3	3	30	12
2	2	5	2
30	2	5	12



→

$(5-12-2)$ 8.72



→

$(2-5-12)$ 8.25



→

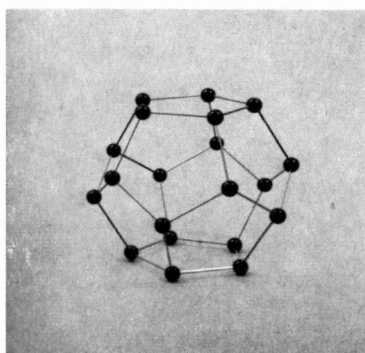
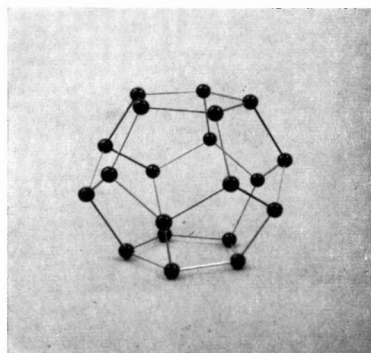
$(3-20-2)$ 8.52



→

$(2-3-20)$ 8.27

$(5-12-2)$ -Polytop: Pentagon-Dodekaeder mit Innenraum und Amplexum



8.73

Kennschema (5-12-120) Polarisatoren

Polare Kennschemas

600	4	20	120
4	6	30	12
2	3	5	2
1200	3	5	720



→

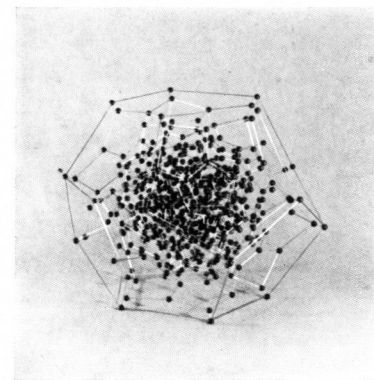
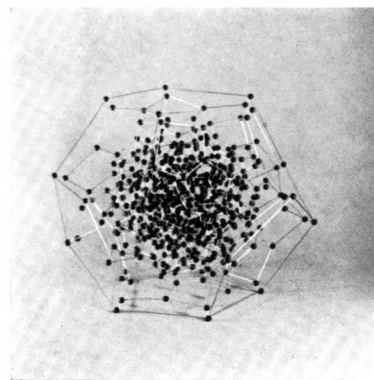
(5-12-120) 8.73



→

(3-4-600) 8.37

(5-12-120)-Polytop: bekannt als „dreidimensionale Projektion des regulären Einhundertzwanzig-Zells im R_4 “



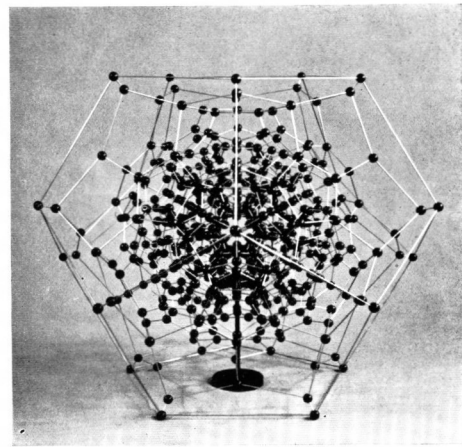
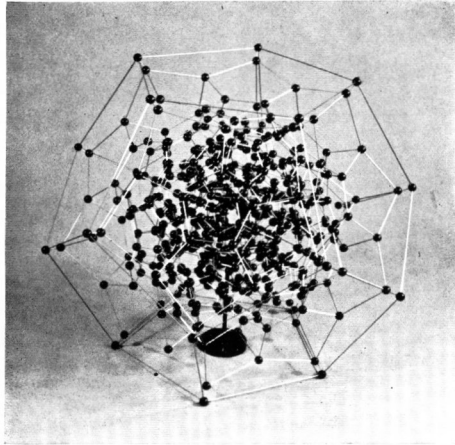
Abschließend soll der zentralsymmetrische Aufbau des zuletzt abgebildeten Prototyps beschrieben und dargestellt werden:

Im Zentrum des (5-12-120)-Polytopes befindet sich ein reguläres Dodekaeder, das von mehreren zentralsymmetrischen Dodekaederschichten umschlossen wird. Ebenso umschließt der Außenraum ein reguläres Dodekaeder. Der Gesamtaufbau des (5-12-120)-Polytopes und die Anzahlen der Dodekaeder in den einzelnen Schichten gehen aus folgender Zusammenstellung hervor.

Schicht	Benennung	Anzahl der Dodekaeder	Zentrierung
0	peripherisches Dodekaeder	1	—
1	1. äußere Schicht	12	flächenzentriert
2	2. äußere Schicht	20	eckenzentriert
3	3. äußere Schicht	12	flächenzentriert
4	symmetrale Schicht	30	kantenzentriert
5	3. innere Schicht	12	flächenzentriert
6	2. innere Schicht	20	eckenzentriert
7	1. innere Schicht	12	flächenzentriert
8	zentrisches Dodekaeder	1	—

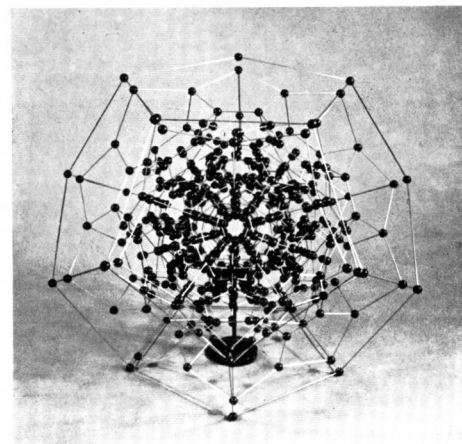
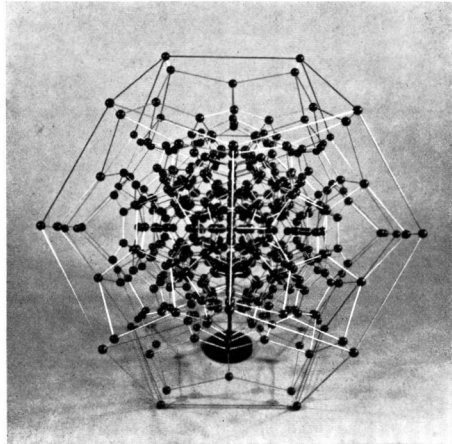
Zur Demonstration seiner symmetrischen Struktur ist der Polytop-Prototyp nachstehend nochmals in vier nicht-stereoskopischen Bildern wiedergegeben.

Blickrichtung nicht parallel zu den Symmetrieachsen des peripherischen Dodekaeders



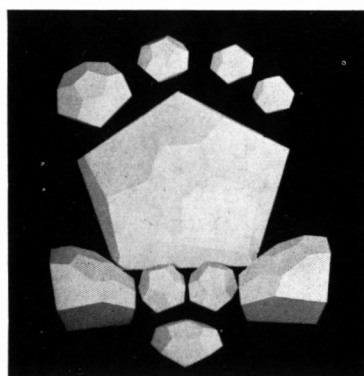
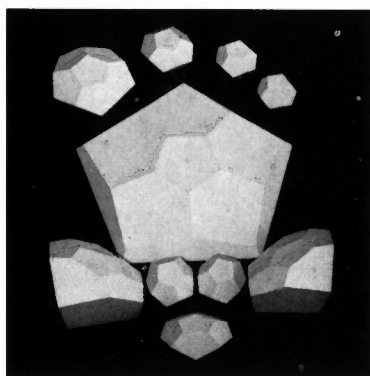
Blickrichtung durch zwei Gegenecken des peripherischen Dodekaeders

Blickrichtung durch die Mitten zweier Gegenkanten des peripherischen Dodekaeders

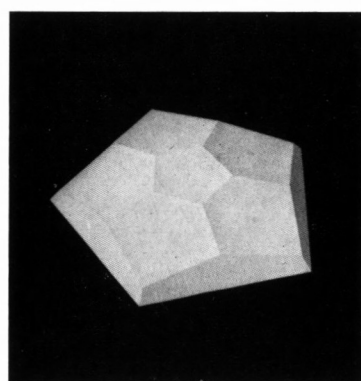
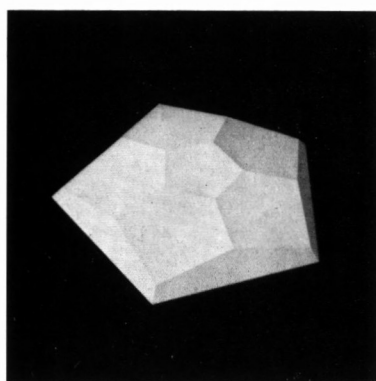


Blickrichtung durch die Mitten zweier Gegenflächen des peripherischen Dodekaeders

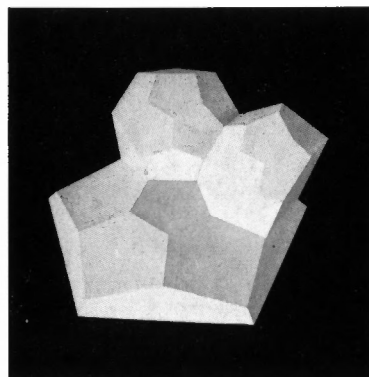
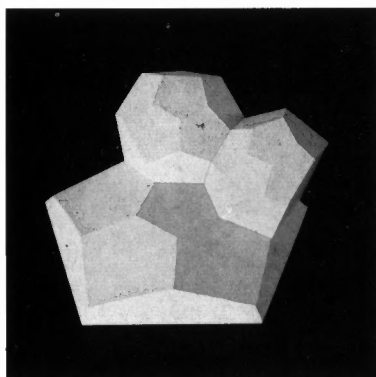
Die folgenden stereoskopischen Aufnahmen zeigen im einzelnen den Zusammenbau der Pentagon-Dodekaeder-Räume zum $(5-12-120)$ -Polytop. Beginnend mit einem auf der Basisfläche des peripherischen Dodekaeders nach innen anschließenden Dodekaeder werden aus jeder der zentralsymmetrischen Dodekaederschichten ein oder zwei Dodekaeder ausgewählt und zu einer Säule zusammengesetzt, die von der Basisfläche des peripherischen Dodekaeders bis zum zentralen Dodekaeder reicht.



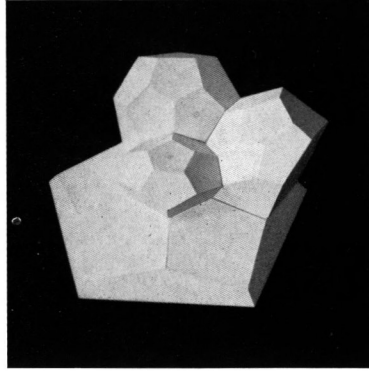
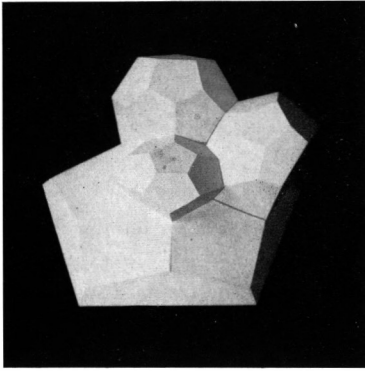
Zusammenstellung der ausgewählten Dodekaeder



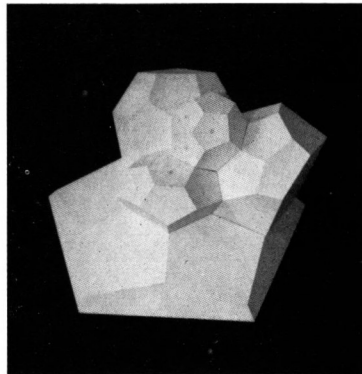
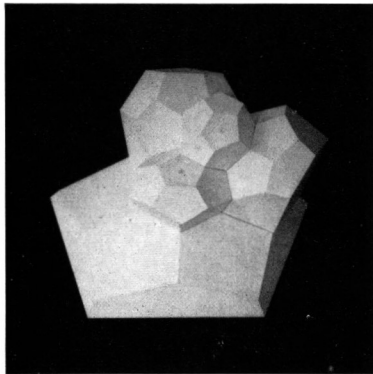
Ein Dodekaeder der 1. äußeren Schicht



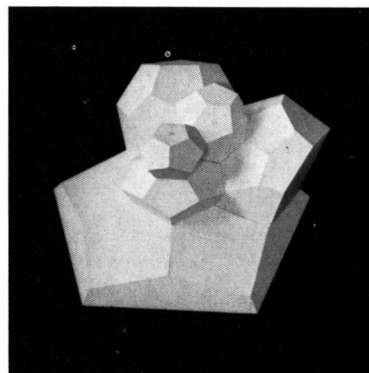
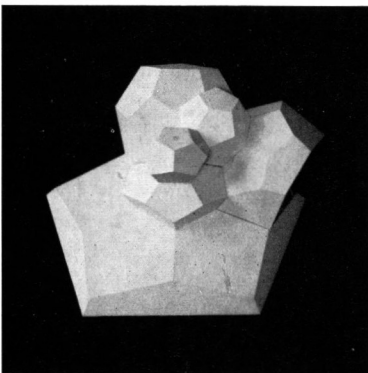
Hinzunahme von zwei Dodekaedern der 2. äußeren Schicht



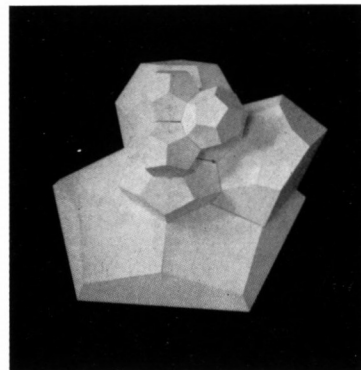
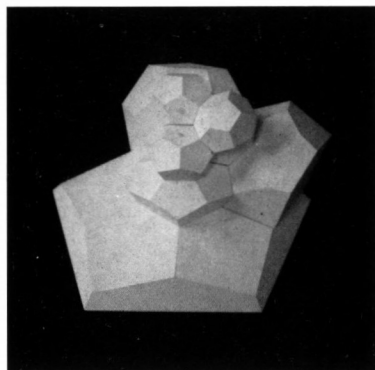
Hinzunahme von einem Dodekaeder der 3. äußeren Schicht



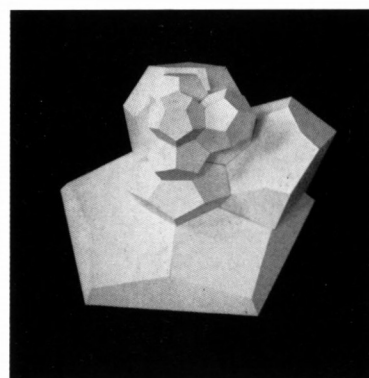
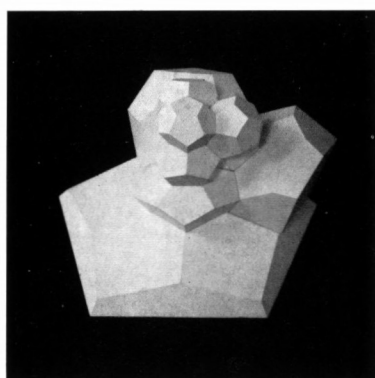
Hinzunahme von einem Dodekaeder der symmetralen Schicht



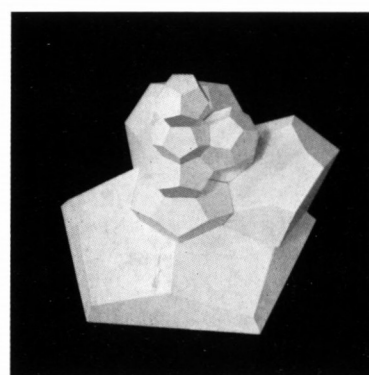
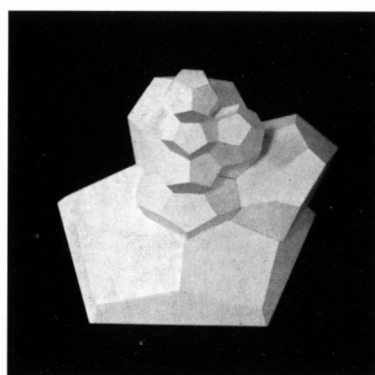
Hinzunahme von einem Dodekaeder der 3. inneren Schicht



Hinzunahme von zwei Dodekaedern der 2. inneren Schicht



Hinzunahme von einem Dodekaeder der 1. inneren Schicht



Hinzunahme des zentralen Dodekaeders

Abkürzungs-, Gleichungs- und Symbolverzeichnis

(seitlich herausklappbar) 

ABKÜRZUNGS-, GLEICHUNGS- UND SYMBOLVERZEICHNIS

Kennzahlen (vgl. 1.4)

Anschlußzahlen

P_k = Punkt-Kurvenanschlußzahl
 P_f = Punkt-Flächenanschlußzahl
 P_r = Punkt-Raumanschlußzahl
 K_p = Kurven-Punktanschlußzahl
 K_f = Kurven-Flächenanschlußzahl
 K_r = Kurven-Raumanschlußzahl
 F_p = Flächen-Punktanschlußzahl
 F_k = Flächen-Kurvenanschlußzahl
 F_r = Flächen-Raumanschlußzahl
 R_p = Raum-Punktanschlußzahl
 R_k = Raum-Kurvenanschlußzahl
 R_f = Raum-Flächenanschlußzahl

Elementezahlen

p = Punktzahl
 k = Kurvenzahl
 f = Flächenzahl
 r = Raumzahl

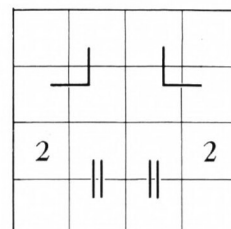
Kennschema
(vgl. 3.2)

p	P_r	R_p	r
P_k	P_f	R_k	R_f
K_p	K_r	F_p	F_r
k	K_f	F_k	f

Anschlußgleichungen (vgl. 2.1; 2.2; 2.3)

(2.1 F) $F_r = 2$
 (2.1 K) $K_p = 2$
 (2.2 F) $F_p = F_k$
 (2.2 K) $K_r = K_f$
 (2.3 R) $R_p + R_f = R_k + 2$
 (2.3 P) $P_r + P_k = P_f + 2$

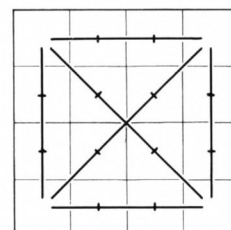
Symbolschema
(2.1), (2.2), (2.3)



Verknüpfungsgleichungen (vgl. 2.4)

(2.4 PK) $p \cdot P_k = k \cdot K_p$
 (2.4 KF) $k \cdot K_f = f \cdot F_k$
 (2.4 FR) $f \cdot F_r = r \cdot R_f$
 (2.4 RP) $r \cdot R_p = p \cdot P_r$
 (2.4 PF) $p \cdot P_f = f \cdot F_p$
 (2.4 KR) $k \cdot K_r = r \cdot R_k$

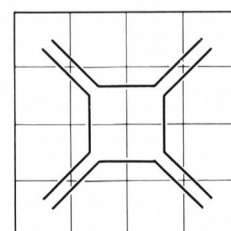
Symbolschema
(2.4)



Gefolgte Gleichungen (vgl. 4)

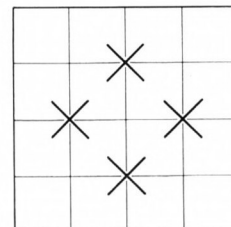
(4.1 PK) $p \cdot P_f = k \cdot K_r$
 (4.1 KF) $k \cdot K_r = f \cdot F_p$
 (4.1 FR) $f \cdot F_p = r \cdot R_k$
 (4.1 RP) $r \cdot R_k = p \cdot P_f$

Symbolschema
(4.1)



(4.2 PK) $P_k \cdot K_r = K_p \cdot P_f$
 (4.2 KF) $K_f \cdot F_p = F_k \cdot K_r$
 (4.2 FR) $F_r \cdot R_k = R_f \cdot F_p$
 (4.2 RP) $R_p \cdot P_f = P_r \cdot R_k$

Symbolschema
(4.2)

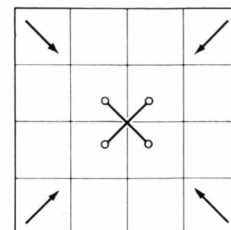


(4.3) $\frac{1}{P_f} + \frac{1}{F_p} = \frac{1}{K_r} + \frac{1}{R_k}$

(4.4) $p + f = k + r$

(4.5) $H = \frac{E}{A}$ H = Hauptnorm $\equiv$ (4.1)
 A = Anschlußnorm $\equiv$ (4.3)
 E = Elementenorm $\equiv$ (4.4)

Symbolschema
(4.3), (4.4)



ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften - Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1958

Band/Volume: [NF_89](#)

Autor(en)/Author(s): Emde Helmut

Artikel/Article: [Homogene Polytope 2-67](#)