UEBER

GEOMETRISCHE NETZE.

VON

C. KÜPPER.

(Abhandlungen der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. — VII. Folge, I. Band.)

(Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe Nr. 7.)

PRAG.

Verlag der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. — Druck von Dr. Ed. Grégr.

1886.

Ueber geometrische Netze und Punctquadrupel.

I.

1. Die Curven 4ter Ordnung, welche durch 12 feste Puncte $g_1 \dots g_{12}$, gehen, von denen keine zehn auf einer C^3, keine 6 auf einer C^2, etc. liegen, constituiren das Netz der C^4 mit den Grundpuncten g.

Zwei Curven des Netzes haben ausser der g noch ein Quadrupel Q von Puncten gemein, die zusammen mit den g die Grundpuncte eines Büschels (C^4) sind; je zwei Quadrupel werden durch eine Curve des Netzes verbunden.

Es ist nöthig, den Fall ins Auge zu fassen, dass irgend ein Quadrupel Q_1 aus einem Puncte (g_{13}) und drei Puncten $u_1 v_1 w_1$ einer nicht durch g_{13} gehenden Geraden A_1 besteht denn dann erhält das Netz einen speciellen Charakter, indem ein jedes Quadrupel Q bestehen muss aus demselben Puncte g_{13} und drei andern in einer Geraden A liegenden Puncten $u\,v\,w$.

2. Nehmen wir u beliebig in der Ebene an, und nennen C^4_1 die Netzcurve, die durch Q_1 und u geht; sie werde von A_1 ausser in $u_1 v_1 w_1$ noch in x geschnitten. Zieht man $x\ u$, so fallen auf diese Gerade noch 2 Puncte v, w von C^4_1; alsdann geht nach dem Restsatze durch $g_1 \dots g_{12}$, g_{13} und $u\,v\,w$ noch eine von C^4_1 verschiedene C^4_2. Diese hat somit ausser den 13 Pcten $g_1 \dots g_{12}$, u noch die 3 nicht auf einer Geraden befindlichen Puncte mit C^4_1 v, w, g_{13} gemein. Und demnach enthalten alle durch u gehende C^4 auch g_{13}, v, w, und bilden einen Büschel zu dessen Grundpuncten g_{13}, u, v, w gehören, die folglich ein Quadrupel Q ausmachen.

In einem solchen speciellen Netze mit 13 Grundpuncten gehört demnach jeder Punct u der Ebene einem in gerader Linie liegenden Tripel uvw an. Auf jeder Geraden A befindet sich ein einziges Tripel, denn trifft A die Gerade A_1 in x, so schneidet die durch x gehende eben benützte C^4_1 dieses Tripel aus, ein zweites aber kann nicht auf A sein, weil je 2 Tripel durch eine C^4 sich verbinden lassen müssen.

3. Nach dem Gesagten hat es keine Schwierigkeit, sich Netze zu verschaffen, denen der specielle Charakter zukommt, und man kann hiebei 11 Grundpuncte $g_1 \dots g_{11}$ beliebig annehmen:

Es wird sich ergeben, dass ∞^1 solcher Netze existiren, und dass die Puncte g_{12}, g_{13} in diesen Netzen gepaart und auf einer bestimmten hyperelliptischen Curve 7ter Ordnung C^7 sind, welche die elf g zu Doppelpuncten hat.

Existirte nämlich eine hyperelliptische C^7 mit den Doppelpuncten $g_1 \ldots g_{11}$, und wäre $a\ \alpha$ ein Punctepaar derselben, so müssten alle durch $g_1 \ldots g_{11}$, a gehende C^4 auch α enthalten, und es wären $g_1 \ldots g_{11}$, a, α dreizehn Grundpuncte eines Netzes. Soll aber durch diese 13 Puncte mehr als ein Büschel von C^4 gehen, so ist nothwendig, dass die noch fehlenden 3 Schnittpuncte u, v, w irgend zweier hindurch gelegter C^4 in einer Geraden sind. Wäre ein solches Tripel bekannt, so wäre damit auch das Paar a, α bestimmt, denn zwei C^4 durch $g_1 \ldots g_{11}$ u, v, w werden sich in dem Punctepaare a, α schneiden:

Auf einer willkührlichen Geraden A nehme man 2 feste Puncte f_1, f_2 an und einen dritten Punct u_1; dann schneiden Büschel von C^4, welche bezielich $(g_1 \ldots g_{11}, f_1, u_1)$, $(g_1 \ldots g_{11}\ f_2, u_1)$ zu Grundpuncten haben, aus A zwei quadratische Involutionen, die e i n Paar $v_1\ w_1$ gemein haben; mithin liegt in $u_1\ v_1\ w_1$ ein Tripel vor, und die beiden dasselbe ausschneidende Curven haben noch 2 Puncte a_1, α, gemein, welche die Rollen von g_{12}, g_{13} übernehmen können. Dass $u_1\ v_1\ w_1$ allein duch u_1 bestimmt ist, erhellt daraus, dass, seine Existenz vorausgesetzt, offenbar f_1, f_2, zwei beliebige Puncte von A sein können.

Jeder andere Punct u_2 von A gehört daher einem Tripel $u_2\ v_2\ w_2$ an, und liefert ein Paar $a_2\ \alpha_2$. Die Curven durch f_1, welche diese beiden Tripel ausschneiden haben noch 4 Puncte $\mathfrak{Q}_1$ gemein; die durch f_2 und diese Tripel gehenden Curven noch 4 Puncte $\mathfrak{Q}_2$. Man erhält daher 2 Büschel mit den Grundpuncten $(g_1 \ldots g_{11}, f_1, \mathfrak{Q}_1)$, $(g_1 \ldots g_{11}, f_2, \mathfrak{Q}_2)$, welche auf A dieselbe cubische Involution uvw bestimmen. Bezieht man diese Büschel so auf einander, dass Curven, die das eämmliche Tripel ausschneiden, sich entsprechen, so erzeugen sie die Gerade A und eine C^7, welche $g_1 \ldots g_{11}$ zu Doppelpuncten hat. Sie ist der Ort der Paare a, α oder g_{12}, g_{13}, die mit $g_1 \ldots g_{11}$ als Grundpuncte zu speciellen Netzen dienen könnten. Sie ist auch die einzige hyperelliptische C^4 vom Geschlechte 4 mit den Doppelpuncten $g_1 \ldots g_{11}$.

4. Die hyperelliptische C^7 mit elf Doppelpuncten $g_1 \ldots g_{11}$. Auf C^7 sind $2 \cdot 4 + 2 = 10$ Cioncidenzen von sich entsprechenden Puncten a, α. Verbindet man einen irgendwo angenommenen Punct o mit a und α, so erhält man eine Correspondenz 1, 7 der Strahlen oa, $o\alpha$, worin 14 Cvincidenzen sind. Nach Abrechnung der 10 für die Coincidenzpuncte auf C^7 bleiben 4. Wenn aber auf einem Strahl von o ein getrenntes Paar $a\alpha$ liegt, so sind in ihm zwei dieser Coincidenzen vereinigt, so dass die Enveloppe $a\alpha$ eine Curve 2ter Classe E^2, die associirte Curve der C^7 ist.

Von einem Puucte g_{12}, ausserhalb C^7 ziehe man an E^2 die Tangenten, und nenne $a_1\ \alpha_1$, $a_2\ \alpha_2$ die Paare auf denselben. Man hat jetzt 2 specielle Netze I, II respective mit den Grundpuncten $(g_1 \ldots g_{11}, a_1, \alpha_1)$, $(g_1 \ldots g_{12}, a_2, \alpha_2)$, und es ist der Büschel von C^4 in I, welcher a_2 als Grundpunct hat, identisch mit dem in II durch a_1 bestimmten Büschel. Das Tripel dieses Büschels, insofern er I angehört, besteht aus $a_2 \alpha_2$ und einem dritten auf $a_2 \alpha_2$ liegenden Puncte, dem 16ten Grundpuncte ausser $g_1 \ldots g_{11}$ a_1, α_1, a_2, α_2. Insofern dieser Büschel im Netze II ist, muss dieser 16te Punct auch mit $a_1\ \alpha_1$ in einer Geraden liegen, er ist also g_{12}. Oder: $a_1 \alpha_1$, $a_2 \alpha_2$ repräsentiren $2 = p - 2$ beliebige Paare der C^7; also geht durch sie ein Büschel B adjungirter C^4. Ist C_1^4 eine dieser Curven, so haben die 13 Puncte $g_1 \ldots g_{11}\ a_1 \alpha_1$ eine solche Lage, dass durch sie noch ∞^2 C^4 gehen, daher muss durch die fernern 3 Schnittpuncte einer dieser C^4 mit C_1^4 eine Curve 4—3ter Ordnung, d. i. eine Gerade gehen. Eine durch $a_2 \alpha_2$ gehende C_2^4 dieses ∞^2 C^4 schneidet mithin die C_1^4 in einem auf der

Geraden $a_2\alpha_2$ befindlichen Puncte. In gleicher Weise zeigt sich, indem man die C_1^4 als durch $g_1 \ldots g_{11}\ a_2\alpha_2$ gelegt ansieht, dass die gedachte C_2^4 die C_1^4 auf der Geraden $a_1\alpha_1$ schneiden muss; folglich ist der Schnittpunct von $a_1\alpha_1$, $a_2\alpha_2$ der 16te Grundpunct des B. Dieser Büschel sei mit $(C^4)_1$ bezeichnet.

Bildet man daher ein Netz mit den 12 Grundpuncten $g_1 \ldots g_{12}$, soliegt in den Paaren $a_1\alpha_1$, $a_2\alpha_2$ ein Quadrupel Q_1 desselben vor. Jedes Paar $a\alpha$ wird durch ein anderes $b\beta$ (das nicht auf C^7 liegt) zu einem Quadrupel Q ergänzt:

„Der Ort dieser ergänzenden Paare $b\beta$ ist eine C^5 mit 3fachem Punct in g_{12}, und es liegen die Paare $b\beta$ auf den Strahlen des Büschels g_{12}."

Beweis: $\mathfrak{g}$ sei ein beliebiger Punct; die durch ihn gehenden Tangenten der E^2 tragen zwei Paare π_1, π_2, welche im Verein $g_1 \ldots g_{11}$, $\mathfrak{g}$ die 16 Grundpuncte eines Büschels (C^4) sind. Mittels $(C^4)_1^7$ und (C^4) kann man gleichzeitig die Paare der C^7 ausschneiden und so die C^7 erzeugen. Je zwei Curven haben ausser einem Paar der C^7 noch 3 in einer unveränderlichen Geraden liegende Puncte gemein, weil das Erzeugniss 8ter Ordnung sein muss; und diese Gerade enthält die Grundpuncte g_{12}, $\mathfrak{g}$, wodurch sie bestimmt ist. Auf dieser Geraden $g_{12}\mathfrak{g}$ tritt demnach eine cubische Involution auf, durch deren Tripel je zwei sich im nämlichen Paar von C^7 schneidende Curven von $(C^4)_1$ und (C^4) gehen. Wenn nun die durch g_{12} gehende C^4 von (C^4) das Paar $a\alpha$ enthält, und $g_{12}\mathfrak{g}$ noch in b, β schneidet, so muss die zugehörige C^4 von $(C^4)_1$ ebenfalls durch $a\alpha$ und $b\beta$ gehen, zugleich aber in g_{12} die Gerade $g\mathfrak{g}$ berühren.

Weil durch $a\alpha$, $b\beta$ zwei Curven des Netzes $(g_1 \ldots g_{12})$ gehen, so bilden diese 4 Puncte ein Quadrupel Q. Es ist klar, dass hiebei $a\alpha$ als ein willkührliches Paar von C^7 vorausgesetzt werden kann, weil der Punct $\mathfrak{g}$ beliebig war oder unter π_1, π_2 irgend zwei Paare von C^7 genommen werden können. Da aber der Büschel $(C^4)_1$ unverändert beibehalten wird, so findet man die Puncte b, β, die irgend ein Paar $a\alpha$ von C^7 zu einem Quadrupel Q des Netzes $(g_1 \ldots g_{12})$ ergänzen, indem man hie durch a, α gehende Curve von $(C^4)_1$ mit ihrer Tangente für den Punct g_{12} schneidet, und folglich ist der Ort von $b\beta$ eine C^5, welche dreimal durch g_{12}, einmal durch jeden der 11 andern g geht.

5. Das allgemeine Netz $(g_1 \ldots g_{12})$.

Wegen der oben gemachten Annahme von g_{12} (ausserhalb C^7) kann in diesem Netze kein Quadrupel existiren, von welchem 3 Puncte einer Geraden angehörten. Unter einem Paar werden 2 Puncte eines Quadrupels Q verstanden, unter dem ergänzenden Paar die beiden andern Puncte von Q. Eine Curve, deren Puncte zu Quadrupeln gehören, welche die Curve erfüllen, heisst Quadrupelcurve, z. B. die C^4 des Netzes und solche. Wenn, während gewisse Puncte eines variablen Quadrupels Q auf einer Curve C bleiben, die andern Puncte von Q einen Ort Γ durchlaufen, so heisst Γ die Ergänzung von C und vice versa. Unter C_ν^n wird für $n > 4$ ein Ort n^{ter} Ordnung verstanden, auf welchem die Puncte g νfach sind; unter E^n oder $\mathfrak{E}^n$ eine Enveloppe n^{ter} Classe. Die einer Quadrupelcurve C associirte Enveloppe E wird umhüllt von den Geraden, welche de auf C befindlichen Paare tragen.

Die Quadrupel einer bestimmten C^4 werden durch jeden Büschel des Netzes ausgeschnitten: Dies gilt auch von der C_1^4, die g_1 zum Doppelpuncte hat; die Quadrupel bestehen dann aus einem dem g_1 benachbarten Punct und ∞^1 Tripel. Daher muss eine Quadrupelcurve C, welche g_1 νmal enthält, C_1^4 in ν Tripeln schneiden, und umgekehrt, hat C mit C_1^4 ν Tripel gemein, so geht sie νmal durch g_1.

a) Beschreibt ein Punct a eine Gerade A, so ist der Ort für die 3 Puncte α, welche mit a ein Quadrupel bilden, eine C_4^{15}.

Denn da A mit C_1^4 vier Puncte gemein hat, so enthält die C_4^{15} vier Tripel von C_1^4 und geht viermal durch g_1. Eine beliebige C^4 schneidet sie ausser den 4fachen Puncten g noch in 4 Tripeln α. Wenn demnach x die Ordnung der Curve ist, so hat man:

$$4x = 4 \,.\, 12 + 12\,;\; x = 15.$$

b) I s t C^m e i n e Q u a d r u p e l c u r v e, s o i s t m d u r c h 4 t h e i l b a r, u n d j e d e r g i s t $\frac{m}{4}$ f a c h e r P u n c t v o n C^m.

C_i^4 sei die Netzcurve, die g_i zum Doppelpuncte hat, und C^m gehe x_i mal durch g_i; dann hat man durch die gemeinsamen Puncte von C^m, $C_1^4 : x_1 = 4m - 2\,.\,3x_1 - x_2 - \ldots - x_{12}$ und indem C^m mit C_2^4 schneidet: $x_2 = 4m - 2\,.\,3x_2 - x_1 - \ldots - x_{12}$; also $x_1 = x_2$, d. h. C^m geht ebenso vielmal durch g_1 wie durch g_2, etc.; x bezeichne die Vielfachheit der g auf C^m:

Dann muss die C_4^{15}, welche mit einer Geraden A eine Quadrupelcurve bildet, mit C^m ausserhalb der g genau $3m$ Puncte gemein haben:

$$15m = 4\,.\,12\,.\,x + 3m\,;\; m = 4x.$$

Jede C_n^{4n} ist jedoch nicht Quadrupelcurve; damit sie es sei, wird, wie wir zeigen werden, genügen, dass auf ihr eine gewisse Minimalzahl unabhängiger Quadrupel sich befindet:

Man kann in einfacher Weise dem Netze der C^4 die Geraden einer Ebene E entsprechen lassen, so dass jedem Quadrupel Q e i n Punct q und vice versa einem Puncte q von E e i n Quadrupel zugewiesen ist. Zu diesem Zwecke hat man nur zwei Strahlenbüschel (1) (2) in E projectivisch auf zwei Büschel $(C^4)_1$, $(C^4)_2$ also zu beziehen, dass der Strahl 1 2 der gemeinschaftlichen Curve von $(C^4)_1$ $(C^4)_2$ zugewiesen ist. Einer beliebigen C^n in E entspricht dann eine Quadrupelcurve C_x^{4x}, und da diese von jeder C^4 in n Quadrupeln geschnitten wird, so hat man

$$16x = 12x + 4n,\; x = n.$$

Man sieht sofort, dass umgekehrt eine Quadrupelcurve C_n^{4n} einer C^n in E entspricht.

Demnach kann man durch $\frac{n\,(n+3)}{2}$ willkührliche Quadrupel e i n e Quadrupelcurve C_n^{4n} legen. Wenn nun eine C_n^{4n} Quadrupelcurve wird, wenn man sie durch z Quadrupel führt, zwischen welchen keine Relationen bestehen, während sie es noch nicht zu sein braucht, wenn sie durch $4z-1$ dieser Puncte geht, so unterwirft man dadurch, dass C_n^{4n} die z Quadrupel enthalten soll, die Curve genau $4z$ willkührlichen Bedingungen. Soll sie aber dann noch irgend ein Quadrupel Q aufnehmen, so genügt hiezu, dass sie durch irgend einen Punct von Q gelegt werde, *d. h.* sie hat nur noch eine Bedingung zu erfüllen; und man kann demnach C_n^{4n} noch durch

$$\frac{4n\,(4n+3)}{2} - 12\,\frac{n\,(n-1)}{2} - 4z = 2n^2 - 4z$$

im Ganzen durch $2n^2 - 3z$ Quadrupel legen. Folglich $2n^2 - 3z = \frac{n\,(n+3)}{2}$, woraus $z = \frac{n\,(n-1)}{2}$.

Ferner ist jede C_n^{4n}, die ein Quadrupel Q_1 zu $n-1$fachen Puncten hat, Quadrupelcurve. Denn eine C_1^4 durch Q_1 wird von C_n^{4n} noch in 4 Puncten p geschnitten, und jede C_n^{4n} welche die Q_1 zu $n-1$fachen Puncten hat und einen der Puncte p enthält, muss auch durch die übrigen gehen. Nimmt man daher $n-1$ der ∞^1 C^4 heraus, welche Q_1 enthalten, so machen diese mit einer nicht durch Q_1 aber durch einen der p gehenden C_2^4 eine solche C_n^{4n} aus, mithin sind die $4p$ den C_1^4, C_2^4 gemeinsam und bilden ein Quadrupel.

6. Zu einer beliebigen Geraden A gehören 3 Quadrupel, von welchen je ein Paar auf A liegt. Denn 2 Büschel des Netzes schneiden aus A zwei biquadratische Involutionen, welche 3 gemeinschaftliche Paare besitzen. Durch diese 2 . 3 Puncte geht die C_4^{15}, welche mit A eine Quadrupelcurve ausmacht; sie schneidet A noch in 9 andern Puncten s, wovon jeder zu einem Quadrupel gehört, das zwei in s vereinigte Puncte besitzt. Also ist die Coincidenzcurve 9$^{\text{ter}}$ Ordnung J^9. Geht A durch g_1, so zerfällt C_4^{15} in C_1^4 (mit dem Doppelpunct g_1) und einer C^{11}, die zweimal durch g_1, dreimal durch die andern g geht. Ausser den mit g_1 gepaarten und auf C_1^4 liegenden Puncten gibt es auf A noch e i n Paar, welches die C^{11} enthält, bleiben sonach $11-4$ Puncte s, Schnittpuncte von A und J^9. J^9 hat mithin die g zu Doppelpuncten und wird durch J_2^9 bezeichnet.

a) Die Enveloppe E^9 für eine Gerade A. Ein Punct a von A wird durch ein auf C_4^{15} liegendes Tripel von Puncten α zu einem Quadrupel ergänzt. Wie viele Verbindungslinien $a\alpha$ gehen durch einen Punct o der Ebene? Einem Strahl oa entsprechen drei $o\alpha$; da aber der Geraden $a\alpha$ eine C_4^{15} enstspricht, so ist $o\alpha$ fünfzehn verschiedenen Strahlen oa zugeordnet. Somit ergeben sich 18 Coincidenzen, von denen 9 auf die Strahlen os kommen, welche nach den Schnittpuncten von A, J_2^9 gehen. Demnach wäre die Enveloppe der $a\alpha$ höchstens 9$^{\text{ter}}$ Classe; sie ist aber auch nicht niedriger, denn A wird von ihr in den 3 Paaren, die auf A sind, berührt, und es gehen von jedem a ausser der 6fachen Tangente A noch 3 Tangenten $a\alpha$ an die Enveloppe.

b) Mit dem Gesagten ist auch dargethan, dass der Ort der auf den Strahlen von o befindlichen Paare eine C^9 ist, welche o zum 3fachen Punct hat, weil auf jedem Strahl nur 3 Paare sind. Geht ferner A durch g_1, so ergeben sich $3+11-7=7$ Coincidenzen, die zugehörige Enveloppe erhält die Classe 7, und C_2^9 hat mithin in g_1 einen Doppelpunct. Berührungspuncte von A mit dieser E^7 gibt es vier, nämlich das Paar auf A und die beiden mit g_1 gepaarten Puncte der C_1^4.

Man sieht, dass die Paare auf einem Strahle von g_1 zweierlei sind: Eines der Paare hat zum Ort die C^5, welche die hyperelliptische C^7 mit den Doppelpuncten $g_2 \dots g_{12}$ ergänzt, die beiden andern bestehen aus g_1 selbst und je einem der Puncte, welche A mit C_1^4 gemein hat.

c) Die associirte Enveloppe einer Quadrupelcurve C_n^{4n} ist eine E^{6n}. Denn die zu o gehörige C_2^9 schneidet C_n^{4n} in $36n-24n=12n$ Puncten, welche paarweise auf $6n$ Strahlen von o liegen. So ist für C_4^{16}, welche aus einer Geraden A und der entsprechenden C_4^{15} sich zusammensetzt, die associirte Enveloppe E^{24}. Sie besteht mithin aus E^9 und einer E^{15}, welch letztere umhüllt wird von der Geraden, die 2 Puncte α eines der ∞^1 Tripel der C_4^{15} verbinden. Und hieraus erhellt sogleich, dass das Complement einer C_2^9 mit einer Geraden A 15 Puncte gemein hat, oder dass C_2^9 Bestandtheil einer Quadrupelcurve C_6^{24} ist. Die associirte Enveloppe E^{36} dieser Curve lässt sich so ermitteln:

Zum Puncte o_1 gehöre $C_2^{9\prime}$, sie hat mit C_2^9 die drei Paare der Geraden oo_1 gemein, ausserdemnoch $81-48-6=27$ Puncte; d. h. die Enveloppe der Geraden, welche ein Paar von C_2^9 mit dem ergänzenden Paare verbinden, ist E^{27}. Die Enveloppe der Geraden, welche dies ergänzende Paar trägt, sei E^x: Die 36 Tangenten durch o_1 an E^{36} bestehen demnach aus der dreimal zu zählenden Geraden $o_1 o$, aus 27 Tangenten der E^{27} und der x den E^x, weshalb $x=36-27-3=6$.

7. Das Quadrupel, welches zu einem Puncte s auf J_2^9 gehört, besteht aus einem dem s benachbarten Puncte s' und aus zwei Puncten σ. Für wie viele Lagen von s fällt ein σ auf eine Gerade A. Wenn dies stattfindet, so gehört s der C_4^{15} an, welche A ergänzt, und umgekehrt: Nun schneiden sich C_4^{15}, J_2^9 in $135-96=39$ Puncten s, von welchen die auf A liegenden 9 auszuschneiden sind; also J_2^9 wird durch sich selbst und eine C^{30} zu einer Quadrupelcurve C_{12}^{48} ergänzt. Der Ort der Paare σ ist somit C_8^{30}. Hier sind drei Enveloppen zu bestimmen:

a) Die Enveloppe von ss', d. h. einer Geraden, die ein coincidirendes Paar trägt, ist eine E^{12}: $(C^4)_1$ sei ein Büschel im Netz, o ein beliebiger Punct. Durch o ziehe man an die Curven von $(C^4)_1$ Tangenten, so ist der Ort der Berührungspuncte eine C_1^7, auf welcher sich jede C^4 mit der cubischen Polare von o in Bezug auf diese schneidet. Diese C_1^7 hat nun mit J_2^9 gemein, erstens die 27 Puncte, welche für je eine der C^4 Doppelpuncte sind, zweitens noch 12 Puncte s, und in jedem dieser s hat die hindurch gehende C^4 des Büschels die Tangente so. Dann aber ist so auch Tangente der gesuchten Enveloppe, und es ist ihre Classe 12.

b) Die Enveloppe der Verbindungslinien $s\sigma$ ist E^{21}. Die zu o gehörige C_2^9 hat mit J_2^9 ausser den eben gefundenen 12 Puncten s und den g noch $9.9-12.4-12=21$ Puncte ſ gemein, wodurch die Classe der gesuchten Enveloppe bestimmt ist.

c) Die Enveloppe der Geraden, die ein Paar σ, σ von C_8^{30} tragen, ist E^{18}

Die 21 unter *b)* gefundenen Puncte ſ sind mit eben so vielen σ gepaart, welche der C_2^9 und C_8^{30} gemeinsam sind. Wie man leicht erkennt, berührt aber die C^4, welche ſ zum Doppelpuncte hat sowohl C_2^9 wie auch C_8^{30} in dem entsprechenden σ; somit rechnen diese σ für 42 Schnittpuncte von C_2^9, C_8^{30}. Die noch fehlenden Schnittpuncte $9.30-12.16-42=36$ sind gepaart auf C_8^{30} und C_2^9, ergeben mithin 18 Strahlen von o, die Tangenten der Enveloppe.

Mit Hülfe dieser E^{18} lässt sich finden, wie vielmal auf C_8^{30} eines der Paare σ, σ coincidirt. Nämlich ein Strahl von o trifft die Curve in 30 Puncten σ, so dass diesem Strahl 30 andere $o\sigma$ zugewiesen sind. Man hat also eine Correspondenz 1, 30, worin 60 Coincidenzen sind. Von diesen fallen 36 auf die 18 Tangenten der E^{18}, bleiben 24. Es bezeichne σ_0 eine dieser Coincidenzen, dann ist σ_0 ein Punct des J_2^9 und wenn s_0 der Punct ist, zu welchem das coincidirende Paar σ_0 gehört, so muss auch s_0 einer dieser 24 Puncte sein. Diese vertheilen sich somit auf 12 Paare $s_0\sigma_0$, und da das mit $s_0\sigma_0$ verbundene Paar diesem benachbart ist, so berühren sich die C^4 des durch s_0, σ_0 gehenden Büschels in s_5, σ_0. Es existiren hiernach im Netze 12 Büschel von sich doppelt berührenden Curven.

8) Die sich osculirenden C^4, und die C^4 mit einer Spitze.

Sollen zwei C^4 sich in einem Puncte s_1 osculiren, so müssen sie in s_1 die J_2^9 berühren, und umgekehrt; wenn C_1^4, C_2^4 in s_1 die J_2^9 berühren, und s_1 weder für C_1^4 noch C_2^7 Doppelpunct ist, so osculiren sich die Curven. Um letzteres einzusehen, betrachte man in dem durch

C_1^4, C_2^4 bestimmten Büschel die C_3^4, welche s_1 zum Doppelpuncte hat: Da ihre Doppelpunctstangenten durch die Tangente J_2^9 und die mit ihr zusammenfallende Tangente der E^{12} für den Punct s harmonisch getrennt sind, so muss eine der Doppelpunctstangenten von C_3^4 in s_1 die J_2^4 berühren. Wenn man nun den vorliegenden Büschel mittels C_3^4 u. C_1^4 construirt denkt, so ergibt sich die Behauptung.

Um jetzt die Puncte s_1 auf J_2^9 zu ermitteln, suche man in einem beliebigen Büschel (C^4) die Curven, welche J_2^9 berühren, ohne dass der Berührungspunct zugleich Doppelpunct der betreffenden C^4 ist. In der vom Büschel ausgeschnittenen Schaar G^1_{12} sind, da das Geschlecht von J_2^9 16 ist, $22 + 32 = 54$ Coincidenzen. Unter diesen rühren 27 von den C^4 her, die in (C^4) mit einem Doppelpuncte behaftet sind, bleiben 27 Puncte s_1. Weil nun jede C^4 des Netzes, die durch einen der s_1 geht, in diesem Puncte J_2^9 berühren wird, so erhält man stets dieselben 27 Puncte, welchen Büschel des Netzes man zu ihrer Bestimmung auch wählen möge.

Ferner findet man mit Hülfe des Correspondenzformel $99 C^4$, welche J_2^9 osculiren; 27 dieser Curven osculiren in den s_1 und verhalten sich wie die eben angeführte C_3^4; bleiben 72 Curven osculirend in andern Puncten s. Die in s osculirende C^4 hat nun nothwendig hier einen Doppelpunct und ihre Doppelpuncts-Tangente fällt mit der Tangente t von J_2^9 in s zusammen. Da aber die Tangente der E^{12} durch s verschieden ist von t, so muss auch die 2te Doppelpuncts-Tangente der C^4 mit t coincidiren; s ist sonach eine Spitze der C^4. Macht man anderseits die Voraussetzung, C^4 habe einen von den 27 s_1 verschiedenen Punct s zur Spitze, so muss hier die Spitzentangente die J_2^9 berühren; denn wenn sie, was nach dem Satze über die harmonische Trennung noch möglich wäre, mit der Tangente der E^{12} zusammenfiele, so würden sich die durch s gehenden C^4 osculiren, was nur für die s_1 stattfindet. Für ein Netz von C^n, die durch d feste Puncte gehen, liefert unsere Betrachtung $3(n-1)(4n-5) - 6d$ Büschel von einander osculirenden Curven, und $12(n-1)(n-2)$ C^n mit Spitzen. *)

9. Die Doppelpaare, die C_9^{39} und die ihr associirte Enveloppe $\mathfrak{E}^{12}$.

a) Wenn $a_1\alpha_1$, $a_2\alpha_2$, $a_3\alpha_3$ die drei auf A liegenden Paare sind, so sendet der Büschel $(C^4)_1$ zu dessen Grundpuncten $a_1\alpha_1$ und das ergänzende Paar $b_1\beta_1$ gehört, von welch letzterem kein Punct auf A sein kann, je eine Curve durch $a_2\alpha_2$ und $a_3\alpha_3$.

Wenn demnach einer der Puncte $a_2\alpha_2$ unendlich nahe bei a_3 oder α_3 liegt, so müssen diese Paare zusammenfallen und ein Doppelpaar d, δ bilden. Dann gibt es in dem durch d, δ gehenden Büschel $(C^4)_2$ eine C^4, welche in d und δ die Gerade A berührt; und umgekehrt: Denn jeder der Büschel $(C^4)_1$, $(C^4)_2$ schneidet aus A eine quadratische Involution, für welche bei unserer Annahme $d\delta$ das gemeinschaftliche Paar ist. Hiernach lässt sich die Classe der Enveloppe einer Geraden bestimmen, die ein Doppelpaar trägt: Die zu einem beliebigen Puncte o gehörige C_2^9 hat die Classe $9.8 - 2.3 - 2.12 = 42$; von o gehen also an diese $42 - 6 = 36$ Tangenten Zwölf derselben tragen ein coincidirendes Paar der C_2^9. Berührt nun eine der noch vorhandenen 24 Tangenten in d die C_2^9, so muss sie auch in dem mit d gepaarten Puncte δ berühren, und man hat in $d\delta$ ein Doppelpaar auf einer Doppeltangente der C_2^9. Mithin gehen

*) Hiernach ist eine von Cremona gegebene Formel (Curtze'sche Uebersetzung der „Einleitung“ etc. pag. 270) zu corrigiren! Die Unrichtigkeit des Cremona'schen Ausdrucks erkennt man sofort, wenn man in demselben $n = 4$. $\delta = o$, $x = o$, $k = o$ setzt; wo dann eine Curve (Σ) die Classe 12 und 75 Wendetangenten bekäme, was absurd ist.

durch o 12 Geraden, die je ein Doppelpaar tragen, und welche Doppeltangenten der C_9^2 sind. Die gesuchte Enveloppe ist somit $\mathfrak{E}^{12}$. Es kann vorkommen, dass C_2^9 ein Paar d, δ zu Doppelpuncten hat, wodurch ihre Classe um 4 Einheiten sich erniedrigt. Von o gehen dann an $\mathfrak{E}^{12}$ nur noch 10 Tangenten, woraus hervorgeht, dass o dann Berührungspunct der Enveloppe sein muss: Es seit $d\delta$ ein Doppelpaar auf t, C^4 eine Netzcurve durch $d\delta$, welche nicht in d die t berührt. Die ihr associirte E^6 berühre t im Puncte o_1; von jedem andern Puncte o von t gehen noch 5 Tangenten an die E^6; die Paare der C^4, welche auf diesen liegen, befinden sich auch auf der zu o gehörigen C_2^9, und es haben C_2^9, C^4 genau 6 Paare gemein. Da nun jede C_2^9 in d, δ die t berührt, so wird C^4 von C_2^9 in d, δ g e s c h n i t t e n, sofern o nicht in o_1 angenommen wird. Geschieht dies aber, so berühren sich beide Curven in d, δ; daher werden diese Doppelpuncte der C_2^9, und von o_1 gehen an $\mathfrak{E}^{12}$ nur noch 10 Tangenten. Zugleich folgt noch, dass a l l e z u d e n d u r c h d, δ g e h e n d e n C^4 a s s o c i i r t e n E^6 d i e t i m P u n c t e o_1 b e r ü h r e n m ü s s e n.

b) Ort der Doppelpaare $d\delta$. Wie viel Puncte einer Geraden A gehören zu Doppelpaaren? Haben $a_1\alpha_1$, $a_2\alpha_2$, $a_3\alpha_3$ dieselbe Bedeutung wie unter *a*), so werden diese 6 Puncte im Allgemeinen nicht zu Doppelpaaren gehören. Ist ein variabler Punct a von a mit α gepaart, oder ist $a\alpha$ Tangente der Enveloppe E^9, so bestimme man den Ort der beiden noch auf $a\alpha$ liegenden Paare: Ist A_1 eine zweite Gerade, E_1^9 die ihr zugewiesene Enveloppe, so haben $E^9 E_1^9$ 81 Tangenten gemein, unter denen 3 durch den Schnittpunct von AA_1 gehen; bleiben 78 und man sieht, dass der Gesammtort der auf den Tangenten von E^4 liegenden Paare besteht aus A und einem Orte 78. Ordnung. Ein Bestandtheil des letztern ist aber die Curve C_4^{15}, welche α beschreibt. Mithin bleibt für den verlangten Ort eine C^{63}. Legt man A_1 durch einen der g, wobei die entsprechende Enveloppe E_1^7 wird, so ergibt sich, dass die g auf dem Orte C_{14}^{63} 14fach sind.

Wenn nun die Curve C_{14}^{69} ausser $a_1\alpha_1$, $a_2\alpha_2$, $a_3\alpha_3$ noch Puncte d mit A gemein hat, so müssen diese zu Doppelpaaren gehören, und umgekehrt muss C_{44}^{69} durch jeden Punct von A gehen, der zu einem Doppelpaare gehört. Es ist aber klar, dass C_{11}^{69} durch die $a_1\alpha_1 a_2\alpha_2 a_3\alpha_3$ geht, und um zu bestimmen, wie vielmal dies stattfindet, hat man nur A_1 durch einen dieser 6 Puncte, etwa durch a_1 zu legen. Zu diesem Falle wird A selbst gemeinschaftliche Tangente der Enveloppen E_1^9, E^9 und rechnet für 6. Von den 81 gemeinschaftlichen Tangenten fallen jetzt noch 2 durch a_1 gehende aus, und weil die C_4^{15} auch durch a_1 geht, noch 14 andere; folglich wird A_1 von C_{14}^{63} noch in $81 - 8 - 14 = 59$ Puncten ausser a_1 geschnitten.

Die 3 Paare auf A sind hiernach je 4fach auf C_{14}^{63} und es bleiben $63 - 24 = 39$ Puncte d übrig; weshalb die Doppelpaare auf einer C^{39} liegen. Noch ist zu ermitteln, wie vielfach ein g auf C^{39} ist. Zu diesem Zwecke lege man A durch g_1, nenne α_1, α_2 die mit g_1 gepaarten Puncte (auf der C^4, welche den Doppelpunct g_1 hat), $a_3\alpha_3$ das dritte auf A befindliche Paar (auf der C^5 gelegen, die zu g_1 gehört). Durch eine der vorstehenden analoge Schlussweise findet man, dass an Stelle der C_{14}^{63} eine C^{49} tritt, welche g_1 neunfach, die andern g aber 14fach enthält, und indem man A_1 der Reihe nach durch α_1, α_2, a_3, α_3 zieht, so ergibt sich, dass C^{49} dreimal durch α_1 und α_2, zweimal durch a_3 u. α_3 geht. Ausser diesen vielfachen Puncten hat also C^{49} noch $49 - 9 - 10$ Puncte d auf A, die zu Doppelpaaren gehören; mithin ist g_1 ein 9facher Punct von C_9^{39}. Es ist auch leicht die neun Doppelpaare anzugeben, welche g_1 enthalten. Auf jeder Geraden A durch g_1 sind drei Paare $g_1\alpha_1$, $g_1\alpha_2$ $a_3\alpha_3$. Ein Doppelpaar kann auf A nur entweder durch Zusammenfallen von α_1, α_2 oder dadurch entstehen, dass das auf C^5 befindliche Paar $a_3\,\alpha_3$ mit einem $g_1\alpha$ coincidirt. Ersteres findet 6mal statt auf jeder der 6 von g_1 an C_1^4 möglichen Tangenten, letzteres auf den 3 Tangenten t der C^5 im 3fachen Puncte g_1.

10. Mit Hülfe der C_9^{39} ergibt sich, dass eine Quadrupelcurve

$$C_n^{4n}: \frac{1}{2}(156n - 108r) = 24n \text{ Doppelpaare trägt.}$$

Eine beliebige Gerade A ist nach Obigem Bestandtheil einer Quadrupelcurve C_4^{16}, besitzt somit 96 Doppelpaare; 39 derselben haben je einen Punct auf A selbst, somit liegt von jedem der 57 übrigen ein Punct des ergänzenden Paares auf A. Mit andern Worten: C_9^{39} wird durch eine C^{57} zu einer Quadrupelcurve C_{24}^{96} ergänzt, und es sind sonach die g auf der complementären Curve der C_9^{39} 15fach, und diese ist eine C_{15}^{57}.

Gemeinschaftliche Puncte von C_9^{39} und J_2^9:

Diese sind zweierlei Art: *a)* die Coincidenzen auf C_9^{39} d. i. solche Puncte s_2, in denen die beiden Puncte eines Doppelpaares coincidiren (auf einer Tangente der E^{12} benachbart sind); *b)* Puncte s_3, mit welchen die auf C_8^{30} gepaarten σ_3 je ein Doppelpaar ausmachen. Die s_2 lassen sich also finden: Man projizire aus einem beliebigen Puncte o die Paare der C_9^{39}, dann erhält man eine Correspondenz 1,39 der Strahlen von o, in welcher 78 Coincidenzen vorkommen. Von diesen entfallen 2 . 12 auf die 12 durch o gehenden Tangenten der $\mathfrak{E}^{12}$, bleiben 54, ebenso vielen Puncten s_2 entsprechend. Demnach ergeben sich noch

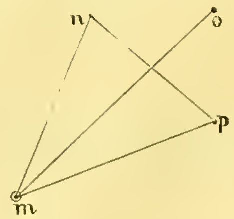
$$39 \,.\, 9 - 12 \,.\, 18 - 54 = 81 \text{ Puncte } s_3.$$

Gemeinschaftliche Puncte von C_9^{39} und C_{15}^{57}.

m sei ein Punct beider Curven, und $mnop$ das ihm entsprechende Quadrupel; ferner mn ein Doppelpaar; dann können folgende Fälle stattfinden:

Erstens, das ergänzende Paar von mn selbst enthält den Punct m; alsdann muss aber m auf J_2^9 liegen, d. h. in einen der 81 Puncte s_3 fallen, und diese sind auch C_9^{39} und C_{15}^{57} gemeinsam.

Zweitens, der mit m auf C_{15}^{57} gepaarte Punct gehört mit m nicht zu dem Doppelpaare mn, alsdann ist m nicht auf J_2^9 und umgekehrt, wenn zu m ein Quadrupel gehört, von welchem kein Punct unendlich nahe bei m liegt, so kann der mit m auf C_{15}^{57} gepaarte Punct nicht zu dem Doppelpaare $m\,n$ (als Ergänzung) gehören. Nun sei *a)* n selbst mit m auf C_{15}^{57} gepaart, mithin op das durch mn ergänzte Doppelpaar. Bei dieser Sachlage werden offenbar C_{15}^{57}, C_9^{39} durch das ganze Quadrupel $mnop$ gehen.



b) mo sei ein Paar von C_{15}^{57}, folglich np ein Doppelpaar. Weil hier in n zwei Doppelpaare zusammenstossen, so wird n ein Doppelpunct von C_9^{39} sein und die beiden Curven gehen durch die beiden Puncte $m \,.\, p$, da po das Doppelpaar mn ergänzt.

Wenn noch gleichzeitig mp ein Paar von C_{15}^{57} wäre, no also ein Doppelpaar und n ein 3facher Punct von C_9^{39}, so sieht man, dass m, o, p beiden Curven gemeinsam sind, und zwar, dass C_{15}^{57} durch jeden dieser Puncte zweimal geht, und mithin 6 Schnittpuncte vorliegen.

Wenn man umgekehrt annimmt, C_9^{39} habe in m einen Doppel- oder 3fachen Punct, so treten in dem zugehörigen Quadrupel 2 oder 6 Schnittpuncte von C_9^{39}, C_{15}^{57} auf.

Ist x die Anzahl Doppelpuncte der C_9^{39} (worunter die 3fachen Puncte als aequivalent 3 Doppelpuncten einbegriffen sind), y die Anzahl der auf C_9^{39} befindlichen Quadrupel, so erhält man durch diese $2x + 4y$ gemeinschaftliche Puncte der C_9^{39} und ihrer Ergänzung. Zu dieser Zahl sind auch alle möglichen gemeinsamen Puncte aufgenommen, die nicht auf J_2^9 sind oder solchen Puncten als benachbarte entsprechen. Die Gesammtzahl gemeinschaftlicher Puncte wäre hiernach

$$2x + 4y + 81, \text{ oder}$$
$$2x + 4y + 2.81,$$

wenn C_9^{39} C_{15}^{57} sich in den s_3 berühren, d. h. durch die benachbarten s_3^1 gehen. Da nun die Gesammtzahl

$$39 . 57 - 12 . 9 . 15 = 603$$

ist, so ist die Annahme der Berührung nicht zulässig, und man findet

$$I) \;\; 2x + 4y = 522.$$

Man kann diese Formel auch dadurch gewinnen, dass man auf verschiedene Weise die Anzahl der in einem Büschel (C^4) vorkommenden, die C_9^{39} berührenden C^4 bestimmt:

α) Zunächst sind in $(C^4)_1$ 54 Curven, durch die Coincidenzpuncte der C_4^{39} gehend, welche dieselbe hier einfach berühren, ausserdem gibt es noch C^4, die C_9^{39} in einem Punctepaar d, δ, also doppelt berühren. Diese aufzufinden, benütze man die in 5 *b)* gebrauchte Abbildung der Quadrupel auf die Puncte der Ebene E.

Fasst man die C_{24}^{96} auf, welche sich aus C_9^{39} und C_{15}^{57} zusammensetzt, so gewahrt man sofort, dass diese Quadrupelcurve zweimal durch jedes der y Quadrupel hindurchgeht.

Aber wenn n wie vorhin ein Doppelpunct von C_9^{39} — mit m und p gepaart — ist, so muss auch o Doppelpunct der C_{15}^{57} sein, so dass auch durch das Quadrupel $nmop$ die C_{24}^{96} zweimal geht; ebenso erhellt, dass die Quadrupelcurve dreimal durch ein Quadrupel gehen muss, in welchem ein dreifacher Punct der C_9^{39} vorkommt.

Hiernach ist klar, dass die C^{24} in E, welcher C_{24}^{96} entspricht, $x + y$ Doppelpuncte hat, wenn ein etwaiger dreifacher Punct als drei Doppelpuncten aequivalent gilt.

Wenn nun dem Puncte q in E das Grundpuncts-Quadrupel Q von $(C^4)_1$ zugewiesen ist, so wird jeder von q an C^{24} gehenden Tangente eine der gesuchten C_9^{39} doppelt berührenden C^4 durch Q entsprechen und vice versa.

Demnach hat man $24 . 23 - 2(x + y)$ solcher C^4 und im Ganzen $2[24 . 23 - 2(x + y)] + 54$ Berührungspuncte. Diese können aber auch β) als Coincidenzen erhalten werden in der Punctschaar, welche $(C^4)_1$ auf C_9^{39} ausschneidet. C_9^{39} hat das Geschlecht: $19 . 37 - 12 . 36 - x = 271 - x$; eine Gruppe jener Schaar enthält 24 Paare $= 48$ Puncte, daher besteht die Gleichung:

$$47 + 47 + 2(271 - x) = 54 + 2(24 . 23 - 2x - 2y)$$
$$\text{oder } 2x + 4y = 522.$$

11. Die associirte $\mathfrak{E}^{21}$ der C_{15}^{57}, die C_6^{30} und ihre Ergänzung C_{18}^{66}.

Wir haben gesehen, dass C_{15}^{57} durch 81 Puncte s_3 der Γ_2^{9} geht, die nicht Coincidenzen auf C_{15}^{57} sind; die noch fehlenden 72 Schnittpuncte müssen daher Coincidenzen der C_{15}^{57} sein, da sonst diese Puncte auch auf C_9^{39} liegen müssten, was nicht der Fall ist; mit andern Worten: Auf C_8^{30} sind 72 Doppelpaare. Mittels dieser Coincidenzen bestimmt sich die Klasse k der associirten Curve von C_{15}^{57}: Wir projiziren aus o die Paare der Curve und erhalten eine Correspondenz 1,57, somit 114 Coincidenzen. Jede Tangente der associirten Curve consumirt davon 2, so dass $2k + 72 = 114$, $k = 21$ folgt.

Auf einer Tangente T der $\mathfrak{E}^{12}$ befindet sich ein Doppelpaar $d\delta$ und ein einfaches $e\xi$. Berührt T die $\mathfrak{E}^{12}$ in o_1, so gehört zu diesem Puncte eine C_2^9, welche d, δ zu Doppelpuncten hat. Daraus folgt sogleich, dass jede durch $d\delta$ gehende Quadrupelcurve T zur Tangente ihrer associirten und zugleich o_1 zum Berührungspunct haben muss. Wir bestimmen den Ort von $e\xi$:

Die einer Geraden A entsprechende Enveloppe E^9 hat mit $\mathfrak{E}^{12}$ 108 Tangenten gemein, von denen 39 zweimal genommen auszuscheiden sind, bleiben 30, und ebenso viele Puncte e oder ξ befinden sich auf A. Zieht man A_1 durch g_1, so entspricht ihr E^7 und es ergeben sich auf A_1 nur $7 \cdot 12 - 2 \cdot 30 = 24$ Puncte e; der gesuchte Ort ist somit C_6^{30}.

Um die Ergänzung der C_6^{30} zu finden, betrachten wir die Gerade A und (siehe 6 c) die associirte E^{15} der Curve, welche A zur Quadrupelcurve ergänzt. E^{15} und $\mathfrak{E}^{12}$ haben gemein 180 Tangenten. Die ergänzende C_4^{15} von A hat $15 \cdot 39 - 12 \cdot 36 - 39 = 57$ Doppelpaare, die Geraden, welche sie tragen, berühren E^{15} und E^{12} in denselben Puncten o_1, mithin bleiben noch andere $180 - 114 = 66$ gemeinschaftliche Tangenten, welche Zahl die Ordnung der Ergänzung von C_6^{30} angibt. Da nun die gesammte Quadrupelcurve 96ter Ordnung ist, so sind die g auf ihr 24fach; mithin ist die Ergänzung: C_{18}^{66}.

Die Doppelpaare auf C_{18}^{66}.

Ein Paar $e\xi$ der C_6^{30} ist im Allgemeinen von dem auf $e\xi$ liegenden Doppelpaare verschieden, kann aber unter Umständen mit diesem sich zu einem 3fachen Paare vereinigen. Gesetzt, dies geschähe z mal. Alsdann sind diese z dreifachen Paare die auf C_6^{30} überhaupt möglichen Doppelpaare und repräsentiren $2z$ der 522 Schnittpuncte von C_6^{30} und C_9^{39}. Heisst d einer der $522 - 2z$ andern Puncte, so ist der gepaarte δ den Curven C_{18}^{66}, C_9^{39} gemeinsam; und es müssen die ausser den δ noch vorhandenen Schnittpuncte letzterer sich zu Doppelpaaren anordnen lassen. Folglich sind auf C_{18}^{66}: $\frac{1}{2}(630 - 522 + 2z) = 54 + z$ Doppelpaare.

Wenn man die 252 gemeinschaftlichen Tangenten von $\mathfrak{E}^{12}$ und $\mathfrak{E}^{21}$ auffasst, so kann man gestützt auf das eben hervorgehobene Resultat, eine Relation zwischen z und der Anzahl y der auf C_9^{39} existirenden Quadrupel ableiten.

Wird das Doppelpaar d, δ durch d', δ' ergänzt, so ist $d'\delta'$ Tangente der $\mathfrak{E}^{21}$; diese Gerade wird in zwei und nur in 2 Fällen Tangente von $\mathfrak{E}^{12}$ sein, nämlich entweder wenn $d'\delta'$ ein Doppelpaar ist, oder wenn die beiden noch auf $d'\delta'$ befindlichen Paare in einem Doppelpaar $d_1\delta_1$ vereinigt sind.

Im ersten Fall berührt $d'\delta'$ die $\mathfrak{E}^{21}$ und $\mathfrak{E}^{12}$ im nämlichen Punct, und gleichzeitig ist dann auch $d\delta$ eine gemeinschaftliche Tangente der Curven; d. h. jedes der y Quadrupel liefert 2 gemeinschaftliche Tangenten, die wegen der übereinstimmenden Berührungspuncte als 4 zählen. Im zweiten Fall erkennt man sofort, dass d, δ ein Doppelpaar der C^{66}_{18} ist, und dass auch jedes dieser Doppelpaare diesen Fall hervorbringt, hier aber berührt $d'\delta'$ die $\mathfrak{E}^{12}$ und $\mathfrak{E}^{21}$ in verschiedenen Puncten. Auf diese Weise erhält man:

$$11)\ 4y + z = 252 - 54 = 198.$$

12. Die Puncte der Enveloppen E^{12}, $\mathfrak{E}^{12}$.

s liege auf J^9_2, s' sei der unendlich nahe, mit s gepaarte Punct, daher ss' eine Tangente T der E^{12}. Zu jedem Puncte o von T gehört eine C^9_2 und (siehe 7 a)) eine C^7_1, welche beide Curven J^9_2 in den Berührungspuncten der 12 von o an E^{12} möglichen Tangenten schneiden, von welchen s einer ist. Unsere Construction der C^7_1 zeigt, dass wenn o die T durchläuft, die C^7_1 einen Büschel beschreibt, zu dessen Grundpuncten die 27 Doppelpuncte von $(C^4)_1$, sowie die 6 Puncte gehören, wo eine C^4 des Büschels die T berühren. Es ereignet sich daher für eine Lage o^1, dass die C^7_1 in s die J^9_2 berührt und ferner noch in 10 Puncten schneidet, folglich berührt T die E^{12} in o_1, und die betreffende C^9_2 muss, da sie in jeder Lage von o in s die T berührt, nun auch J^9_2 in s berühren, folglich s zum Doppelpunct haben.

Wenn umgekehrt angenommen wird, dass die zu o_1 gehörende C^9_2 in s einen Doppelpunct hat, so fallen von den 12 Schnittpuncten, welche C^9_2 und C^7_1 stets auf J^9_2 haben, zwei in s und es bleiben deren nur 10 andere; weshalb dann von o_1 an E^{12} ausser T nur 10 Tangenten möglich sind.

Wir benutzen diese Bemerkung zu dem Nachweise, dass die einer Geraden A zugewiesene Enveloppe E^9 die E^{12} in 9 verschiedenen Puncten berührt:

Ist nämlich s einer der 9 Schnittpuncte von $A_1 J^9_2$, so ist $ss' = T$ sowohl Tangente der E^{12} als der E^9; heisst o_1 der Berührungspunct für erstere Curve, so hat die C^9_2 des Punctes o_1 in s einen Doppelpunct; schneidet mithin A nur noch in 7 Puncten, so dass von o_1 an E^9 ausser T nur noch 7 Tangenten gehen.

Nach Abzug dieser 18 gemeinschaftlichen Tangenten T der E^{12}, E^9, bleiben deren noch 90 übrig, was besagt, dass der Ort der beiden von ss' unterschiedenen Paare auf den Tangenten der E^{12} eine C^{90} ist.

Diese C^{90} geht durch die 54 Puncte s_2, welche Coincidenzen auf ihr sein werden. Wäre $\mathfrak{f}$ eine von diesen verschiedene Coincidenz, etwa auf T gelegen, so würde auf T auch $s = s'$ eine solche sein, und man hätte in T eine Doppeltangente der E^{12}. Um diese $\mathfrak{f}$ zu ermitteln, projizire man aus irgend einem Puncte o die Paare der C^{90}; dadurch bekommt man eine Strahlen-Correspondenz 1, 90, worin 180 Coincidenzen sind. Von diesen sind 4 . 12 auf die 12 durch o an E^{12} möglichen Tangenten 54 auf die Strahlen $o s_2$ zu rechnen, bleiben noch 78 andere $o \mathfrak{f}$. Da aber diese sich paarweise auf Doppeltangenten der E^{12} vertheilen, so hat E^{12} 39 Doppeltangenten. Wegen der eindeutigen Beziehung zwischen jedem Pcte s von J^9_2 und einem o_1 von E^{12} ist 16 das Geschlecht der E^{12}, und diese Curve hat ausser den angegebenen Doppeltangenten keine Wendetangente.*)

*) Anmerkung. Die C^7_1, deren wir uns (No 7) bedienten, um die durch einen Punct o gehenden Tangenten der E^{12} zu finden, constituiren, wie man leicht sieht, ein Netz mit 16 + 27 = 43 festen Grundpuncten. Wenn o irgendwo auf einer Geraden A angenommen wird, so geht die zugehörige C^7_1 durch 6 unveränderliche Puncte von A, wo nämlich diese Gerade von je einer Curve des Büschels $(C^4)_1$ berührt wird, und wenn o die Gerade A durchläuft, so beschreibt C^7_1 einen Büschel. Dabei schneidet

b) Wie No 9 *a*) werde unter d, δ ein Doppelpaar, unter t die Gerade $d\delta$, unter e, ξ das auf ihr befindliche einfache Paar verstanden. In der angezogenen Nummer wurde mit Hülfe einer durch d, δ gehenden Netzcurve C^4 und ihrer associirten E^6 der Punct o_r von t ermittelt, für welchen die zugehörige C_2^9 d, δ zu Doppelpuncten hat; in o_1 berührt t die $\mathfrak{E}^{12}$ und sämmtliche E^6 der durch d, δ möglichen C^4. Eine dieser C^4, etwa C_1^4, enthält e, ξ und E_1^6 hat somit t zur Doppeltangente; von ihren beiden Berührungspuncten ist einer o_1, der zweite o_2 ergibt sich als der Punct o_2, dessen C_2^9 in e, ξ die C_1^4 berührt: Man ziehe in e die Tangente A der C_1^4, dann wird die ihr entsprechende Enveloppe E^9 die t zur Tangente haben, und der Berührungspunct der Gesuchte o_2 sein. Denn die zugehörige C_2^9 muss in e zwei benachbarte Puncte von A enthalten, und wird folglich auch in ξ von C_1^4 berührt. Von den 12 Schnittpuncten dieser C_2^9 mit C_1^4 fallen mithin nur noch drei Paare auf Strahlen durch o_2 oder durch o_2 gehen ausser t noch gerade 3 Tangenten an E_1^6.

So lange die auf t befindlichen Paare d, δ und e, ξ getrennt sind, wird t eine gewöhnliche Tangente von $\mathfrak{E}^{12}$ sein, und eine eigentliche Doppeltangente kann nicht auftreten, weil 2 Doppelpaare nicht auf der nämlichen Geraden sein können. Wenn aber d, δ und $e\xi$ sich zu einem dreifachen Paare $d_3\delta_3$ vereinigen, wird t zu einer Wendetangente der $\mathfrak{E}^{12}$.

Die zu den Puncten o auf t gehörigen C_2^9 haben dann in d_3 und in δ_3 je drei benachbarte Puncte mit t gemein oder die t zur doppelten Wendetangente. Dadurch wird die Zahl der Doppeltangenten, die von einem o an seine C_2^9 noch möglich sind, um 2 Einheiten vermindert, d. h. von jedem o gehen nur noch 10 Tangenten an $\mathfrak{E}^{12}$. Für eine Lage o_2 erhält ferner die C_2^9 d und δ zu Doppelpuncten, wodurch die Anzahl der von o_2 an seine C_2^9 möglichen Doppeltangenten 10 wird; eine derselben ist nun in diesem Falle t selbst, so dass von o_2 aus nur noch 9 Tangenten der $\mathfrak{E}^{12}$ möglich sind. Wir schliessen hieraus, dass $\mathfrak{E}^{12}$ z Wendetangenten besitzt, und somit das Geschlecht $\mathfrak{p} = 55 - z$ hat.

c) Bestimmung der Zahlen x, y, z.

---

sie aus J_2^9 eine Schaar $G_{12}^{(1)}$ aus, in welcher $11 + 11 + 2.16 = 54$ Coincidenzen vorkommen; diese Zahl gibt mithin die Ordnung von E^{12} an. Da ihr Geschlecht 16 ist, so ist $55 - 16 = 39$ die Summe ihrer Doppel- und Wendetangenten, und weil bei der Annahme, dass nur Doppeltangenten vorhanden sind, die Ordnung 54 würde, so kann es keine Wendetangente geben. Um die Spitzen der E^{12} zu finden, bestimme man wie viele C_1^7 die J_2^9 osculiren. Betrachtet man die Schaar $G_{12}^{(2)}$, welche die C_1^7 aus J_2^9 schneiden, so existirt eine Gruppe, die in einem beliebigen Puncte s von J_2^9 zwei vereinigte Puncte hat, es entsprechen ihm die 10 andern $\mathfrak{s}$ der Gruppe, es gibt aber bei festgehaltenem $\mathfrak{s}$ 52 Gruppen, in denen je eine Coincidenz s vorkommt, also hat man $10 + 52 + 2.2.16 = 126$ Coincidenzen $s\mathfrak{s}$ oder ebenso viele osculirende C_1^7. Zur Ermittelung der Doppelpuncte von E^{12} sind die J_2^9 doppelt berührenden C_1^7 zu bestimmen: Durch einen Pct $\mathfrak{s}_1$ sind 52 Gruppen gegeben, wovon jede einen s und $9\mathfrak{s}$ enthält. Dem $\mathfrak{s}_1$ entsprechen somit 2.52 Puncte s und $9.52\mathfrak{s}$, im Ganzen 572 Puncte. Ein s entspricht aber 10 Lagen von $\mathfrak{s}_1$, die doppelt zu nehmen sind, ein $\mathfrak{s}$ entspricht 9.52 Lagen von $\mathfrak{s}_1$. Werden nun die Coincidenzen $\mathfrak{s}_1 s$ mit P_2, die Anzahl der Coincidenzen $\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}$ mit P_1 bezeichnet, so hat man

$$P_1 + 2P_2 = 572 + 20 + 9.52 + 2.52.16$$

wo $P_2 = 126$; mithin folgt

$P_1 = 2472$. Eine doppeltberührende C_1^7 consumirt von dieser 2, folglich gibt es 1236 solcher Curven, und E^{12} hat eben so viele Doppelpuncte.

Im Vorstehenden wurden die Relationen

$$(I)\ x + 2y = 261$$

$$(II)\ 4y + z = 198$$

aufgestellt. Es gelingt nun mittels einer Correspondenz zwischen gewissen Tangenten der $\mathfrak{C}^{12}$ eine dritte Gleichung herzuleiten. Wir fanden in No 10 α) als die Anzahl der in einem Büschel $(C^4)_1$ befindlichen, die C_9^{39} doppelt berührenden Curven:

$$24 \,.\, 23 - 2\,(x + y).$$

Diese Zahl lässt sich ermitteln, wenn man statt der C^4 ihre associirten E^6, statt der C_9^{39} die $\mathfrak{C}^{12}$ anwendet.

Jede E^6 berührt $\mathfrak{C}^{12}$ in 24 Puncten o_1, und hat noch 24 Tangenten t_1 einfach mit ihr gemein:

Denn C^4, welcher E^6 associirt ist, schneidet aus C_9^{39} 24 Paare d, δ, aus C_6^{30} 24 Paare e, ξ, und es berühren die Geraden $d\,\delta$, die mit t_2 bezeichnet werden mögen, E^6 und $\mathfrak{C}^{12}$ in denselben Puncten o_1, während auf einer der Geraden $e\xi$ oder t_1 die Berührungspuncte für beide Curven verschieden sind.

Fassen wir irgend eine Tangente t der $\mathfrak{C}^{12}$ als t_2 auf, so ist damit die betreffende E^6 gegeben, indem sie derjenigen C^4 von $(C^4)_1$ associirt sein wird, welche das Doppelpaar auf t ausschneidet, und es entsprechen der t: $23t_2$ und $24t_1$. Berührt die C^4 in einem Paare C_9^{39}, z. B. in dem auf t liegenden, so hat man offenbar eine Coincidenz tt_2; und umgekehrt, tritt eine dieser Coincidenzen auf, so kann sie nur von einer die C_9^{39} doppelt berührenden C^4 herrühren; also hat man für die Anzahl P_2 dieser Coincidenzen:

$$1. \qquad P_2 = 24 \,.\, 23 - 2\,(x + y).$$

Was die vorliegende Correspondenz angeht, so ist sie eine mit mehrwerthigen Elementen (ein- und zweiwerthigen); ferner ist, weil E^6 die $\mathfrak{C}^{12}$ auf t berührt, der Multiplicator von $2\mathfrak{p}$ gleich 2 zu setzen.

Nennen wir P_1 die Zahl der Coincidenzen tt_1, so ist $P_1 + 2 \,.\, P_2$ die eine Seite der anzuwendenden Correspondenzformel. Um die andere herzustellen, ist zu berücksichtigen, dass einem t entsprechen $24t_1$ und $23t_2$, wobei letztere für 46 entsprechende t zu rechnen sind. Dann gibt es 23 Lagen von t, denen ein bestimmtes t_2 zugewiesen ist, für die jedoch wieder $2 \,.\, 23$ in Anrechnung gebracht werden muss, endlich 24 Lagen von t, denen ein angenommenes t_1 entspricht.

Demgemäss kommt:

$$P_1 + 2P_2 = 4 \,.\, 23 + 2 \,.\, 24 + 2 \,.\, 2\,(55 - z).$$

Es wird jetzt darauf ankommen, die P_1, unter welchen sich auch z von den Wendetangenten der $\mathfrak{C}^{12}$ herrührende Coincidenzen befinden, auszuscheiden.

Hiezu dient folgende Betrachtung:

Kommt eine Coincidenz tt_1 vor, so wird die durch das Doppelpaar von t gehende C^4 auch gleichzeitig das auf t liegende Paar $e\xi$ enthalten, und umgekehrt. Es ist klar, dass sich dies bei jedem dreifachen Paar $d_3\delta_3$, d. h. bei jeder der z Wendetangenten der $\mathfrak{C}^{12}$

ereignet; in den andern Fällen ist die Gerade t, für welche die Coincidenz tt_1 stattfindet, Doppeltangente der betreffenden E^6.

Die beliebige C^4 unseres Büschels $(C^4)_1$ enthält 24 Doppelpaare d, δ und 24 Paare ε, ζ; wir lassen ihr 24 andere $\mathfrak{C}^4$ von $(C^4)_1$ entsprechen, nämlich diejenigen $\mathfrak{C}^4$, welche jene Paare ε, ζ enthalten. Wenn dann C^4 mit irgend einer dieser 24 $\mathfrak{C}^4$ coincidirt, so tritt eine Coincidenz tt_1 ein, und vice versa; und man bemerke, dass bei dieser Rechnung die durch die Wendetangenten hervorgebrachten Coincidenzen mit aufgezählt sind, also für diese eine besondere Reduction nicht mehr anzubringen sein wird.

Nun liegen aber auf einer der $\mathfrak{C}^4$ ebenfalls 24 Doppelpaare, d. h. diese $\mathfrak{C}^4$ ist 24 verschiedenen C^4 als entsprechende zugewiesen. Auf diese Weise besteht zwischen den Curven des Büschels $(C^4)_1$ eine Correspondenz 1, 24, welche alle 48 Coincidenzen P_1 liefert.

Somit erhalten wir:

$$2. \qquad P_2 = 2 \,.\, 23 + 2\,(55 - z).$$

Aus 1. und 2. geht hervor: *(III)* $x + y = 198 + z$.

Diese Gleichungen führen zu den Werthen: $x = 171$, $y = 45$, $z = 18$.

II.

Wir untersuchen im Nachstehenden ein System von Quadrupeln, das zwar als specieller Fall des oben betrachteten angesehen werden kann, dessen direkte Behandlung aber von geometrischem Interesse ist. Man wird auf dieses System geführt, wenn man sich die Aufgabe stellt, die Doppeltangenten der E^6 zu bestimmen, die einer gegebenen C^4 associirt ist:

Auf einer Tangente T der E^6 liegen 3 Paare, von denen das eine der C^4 angehört: der Ort für die beiden andern ist eine C_9^{42}. Denn die zu einer Geraden A gehörige E^9 hat mit E^6 54 Tangenten gemein. Zieht man von diesen 3 . 4 ab, welche durch die Schnittpuncte von A, C^4 gehen, so ergibt sich 42 als die Ordnung des Ortes. Wenn A durch g_i gelegt wird, so ergeben sich noch $7 \,.\, 6 - 3 \,.\, 3 = 33$ Puncte, die der verlangte Ort auf A hat, so dass g_i 9fach auf demselben ist. Nun schneiden sich C^4, C_9^{42} in $4 \,.\, 42 - 12 \,.\, 9 = 60$ einfachen Puncten, welche entweder zu Doppelpaaren der C^4 gehören, oder auf solchen Geraden liegen, die C^4 in zwei Paaren schneiden, mithin Doppeltangenten der E^6 sein werden. Da C^4, C_9^{39} $4 \,.\, 39 - 12 \,.\, 9 = 48$ Puncte gemein haben, so befinden sich auf C^4 24 Doppelpaare, durch welche die C_9^{42} gehen muss; die übrig bleibenden 12 Puncte sind mithin auf 3 Doppeltangenten der E^6 zu 4 vertheilt. Wir werden diese Doppeltangenten, sowie ihre Berührungspuncte construiren. Zu diesem Zwecke schneiden wir die Quadrupel der C^4 auf folgende Art aus: Durch ein Quadrupel Q legen wir 2 Kegelschnitte K, $\mathfrak{K}$, welche C^4 in $g_1 g_2 g_3 g_4$ und $\mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2 \mathfrak{g}_3 \mathfrak{g}_4$ schneiden mögen. Die Kegelschnitte K, welche den Büschel B mit den Grundpuncten $g_1 g_2 g_3 g_4$ bilden, schneiden nach dem Restsatze die Quadrupel aus; eben so die Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ des Büschels $\mathfrak{B}$ mit den Grundpuncten $\mathfrak{g}$.

Wenn irgend zwei solche Büschel, wie B, $\mathfrak{B}$, in der Ebene angenommen werden, so ist damit ein Quadrupelsystem bestimmt, zu dessen Studium wir jetzt übergehen.

A) Die zu Grunde liegenden Büschel B, $\mathfrak{B}$ besitzen keinen gemeinschaftlichen Kegelschnitt.

13. Durch ein Quadrupel Q_1 und die $g, \mathfrak{g}$ lassen sich noch ∞^2 Quadrupelcurven C^4 legen, welche sämmtlich mittels projectivischer Beziehung der Büschel B, $\mathfrak{B}$ erhalten werden können; durch ein zweites Quadrupel Q_2 geht noch ein Büschel dieser C^4. Da aber je zwei Quadrupel mit den $g, \mathfrak{g}$ die 16 Schnittpuncte zweier C^4 sind, so liegen niemals zwei Quadrupel auf einem Kegelschnitte. (Vergl. 20 *a*).)

$\mathfrak{K}_i$ sei der durch g_i gehende Kegelschnitt von $\mathfrak{B}$, K_i der von B, welcher $\mathfrak{g}_i$ enthält. Der Punct g_i gehört zu ∞^1Quadrupeln, welche aus $\mathfrak{K}_i$ durch alle K ausgeschnitten werden. Die Tripel, welche g_i zu je einem Quadrupel ergänzen, bilden auf $\mathfrak{K}_i$ eine cubische Involution; daher ist die associirte Enveloppe der Quadrupelcurve $\mathfrak{K}_i$ ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}'_i$. Auf einer beliebigen Geraden A der Ebene befindet sich ein Paar $a\alpha$, denn die Involutionen J, $\mathfrak{J}$, welche die K und $\mathfrak{K}$ aus A schneidet, haben nur ein gemeinsames Paar, wenn sie nicht identisch sind, was nur für specielle Lagen von A eintreten kann.

Der Ort der Paare, die auf den Strahlen eines Büschels (o) fallen, ist eine C_1^5, welche o als dreifachen, die $g, \mathfrak{g}$ als einfache Puncte enthält.

Beweis. Projizirt man aus o die Paare der J auf die entsprechenden K, so erzeugt man eine C^3 mit o als Doppelpunct. Verfährt man eben so für die $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{K}$, so erhält man eine zweite $\mathfrak{C}^3$; C^3 und $\mathfrak{C}^3$ schneiden sich ausser o noch in 5 Puncten, die mit eben so vielen auf A gepaart sein werden. A hat demnach 5 Puncte mit dem verlangten Orte gemein. Auf jeder Geraden durch o liegen 2 gepaarte Puncte der C_1^5; geht aber diese Gerade durch einen der 3 mit o gepaarten Puncte p, q, r, so sind auf ihr 4 Puncte des Ortes in o vereinigt. Verbindet man o mit g_i, so trifft diese Gerade og_i den $\mathfrak{K}_i$ noch in dem mit g_i gepaarten Puncte; also ist g_i ein einfacher Punct der C_1^5.

Von o aus lassen sich an die C_1^5 acht Tangenten ziehen, daher ist die Enveloppe der Geraden, welche ein coincidirendes Paar tragen, E^8.

Beschreibt a die Gerade A, so durchlaufen die 3 Puncte b, c, d, welche a zu einem Quadrupel ergänzen, eine Curve 7ter Ordnung, die 2mal durch jeden $g, \mathfrak{g}$ geht.

Die Ordnung 7 folgt aus einer einfachen Correspondenz, dass g_i ein Doppelpunct wird, daraus, dass A den $\mathfrak{K}_i$ in 2 Puncten schneidet. Mit dieser Curve hat nun C_1^5 gemein

$$5 . 7 - 8 . 2 = 19 \text{ Puncte.}$$

Fünf von diesen sind mit je einem Puncte a gepaart, bleiben 14 unter sich gepaarte übrig. Diese 7 Paare gehören den eben mit $b\,c\,d$ bezeichneten Tripeln an, oder: die Dreiecke bcd sind einer Curve 7ter Klasse umschrieben. Betrachtet man aber diese 7 Paare als auf C_1^5 liegend, so folgt:

Der Ort der ergänzenden Paare der C_1^5 ist eine Curve 7ter Ordnung C_2^7. Letztere enthält g_i 2fach, weil von o aus 2 Tangenten an $\mathfrak{K}'_i$ gehen, man sieht aber auch, dass sie 2mal durch jeden der Puncte p, q, r geht. In der nächsten Nummer werden wir diese C_2^7 als hyperelliptisch vom Geschlechte 4 erkennen.

14. Die Coincidenzcurve J_1^5, ihre Ergänzung J_4^{14} und deren associirte Enveloppe E^{10}.

Die unter 13. angegebene Curve 7^{ter} Ordnung, welche eine Gerade A zu einer Quadrupelcurve ergänzt, trifft A ausser in dem auf A liegenden Paare noch in 5 Puncten, für welche nothwendig Coincidenz zweier Quadrupelpuncte eintritt, und andere solche Puncte können auf A nicht vorkommen:

Die Coincidenzcurve ist also 5^{ter} Ordnung; sie enthält g_i einfach, denn $\mathfrak{K}_i$ wird in g_i von einem K berührt, und ein beliebiger K wird von 6 andern $\mathfrak{K}$ berührt, so dass die 10 Schnittpuncte von J^5 und K durch jene 6 Berührungspuncte und die 4 Puncte g aufgebracht werden. Wie schon oben bemerkt, schneiden die K eine cubische Involution aus K_i, in welcher nur 4 Coincidenzen vorkommen; folglich muss J_1^5 den K_i in g_i berühren.

Die ergänzende Curve von A schneidet nun J_1^5 ausserhalb A in

$$7 \,.\, 5 - 2 \,.\, 8 - 5 = 14 \text{ Puncten,}$$

welche Coincidenzen innerhalb der Tripel $b\,c\,d$ sein werden, folglich sind auf A 14 Puncte des Ortes, der die Ergänzung der J_1^5 bildet. Dass dieser Ort J_4^{14} viermal durch g_i geht, erhellt daraus, dass unter den ∞^1 Quadrupeln, zu welchen g_i gehört, 4 sind mit je einer Coincidenz (auf $\mathfrak{K}_i$).

Die gemeinschaftlichen Puncte von C_1^5, C_2^7: C_1^5 hat auf J_1^5 17 Puncte, von welchen 8 Coincidenzen der hyperelliptischen C_1^5 sind; durch die übrigen g geht offenbar C_2^7. Ausser diesen haben C_1^5, C_2^7 noch $5 \,.\, 7 - 2 \,.\, 8 - 9 = 10$ Puncte gemein, unter welchen die 3 Doppelpuncte p, q, r der C_2^7 sind, bleiben 4 Puncte, die, wie man leicht gewahrt, ein beiden Curven angehöriges Quadrupel ausmachen.

D. h. jedem Puncte o der Ebene entspricht ein Quadrupel, welches auf einem Strahlenpaare von o liegt. Durch dies Quadrupel, durch o, p, q, r und die $g, \mathfrak{g}$ ist ein Büschel von C^4 bestimmt, dessen Curven die C_2^7 in einem variablen Punctepaare treffen; folglich ist C_2^7 hyperelliptisch, und ihre associirte Enveloppe hat die Klasse $7 - p - 1$; wo p das Geschlecht von C_2^7 bedeutet.

Die $2p + 2$ Coincidenzen der C_2^7 liegen auf J_1^5 und müssen diejenigen gemeinschaftlichen Puncte der J_1^5, C_2^7 sein, welche nicht der C_1^5 zukommen; deren gibt es mithin

$$5 \,.\, 7 - 2 \,.\, 8 - 9 = 10.$$

Somit folgt $p = 4$; die associirte Enveloppe der C_2^7 ist ein Kegelschnitt E^2.

Da ferner jede dieser 10 Coincidenzen durch ein Paar der C_1^5 und zugleich der J_4^{14} ergänzt wird, so hat man: Die associirte Enveloppe der J_4^{14} ist E^{10}. Indem man schliesst wie Nro. 7 c), findet man auf J_4^{14} acht Coincidenzen und demgemäss auf J_1^5 vier getrennte Paare $\varsigma_0\, \sigma_0$.

Es gibt hiernach in den Büscheln B, $\mathfrak{B}$ vier Paare von Kegelschnitten, die einander doppelt berühren.

Wir verstehen unter ς einen Punct der J_1^5, unter s' den mit ihm gepaarten benachbarten Punct, unter σ, σ das ergänzende Paar zu s, s'. Die J_4^{14}, auf welchen die Paare σ sind, geht durch die 8 Puncte s_0, die auch mit σ_0 bezeichnet sind; wenn nun J_4^{14} noch einen Punct ς_1 gemein hat mit J_1^5, so muss einer der zugehörigen σ mit diesem coincidiren, dann aber liegen 3 Puncte des Quadrupels unendlich nahe bei einander, und die durch ς_1 gelegten $K, \mathfrak{K}$ osculiren sich in s_1. Die Umkehrung versteht sich von selbst.

Diese Osculationspuncte s_1 kann man nach Nro. 8 also auffinden:

Durch ein Quadrupel Q_1, in welchem K_1 von $\mathfrak{K}_1$ geschnitten wird, und die g, $\mathfrak{g}$ ist ein Netz von C^4 bestimmt, dessen Jacobiana sich zusammensetzt aus J_1^5 und den $K_1, \mathfrak{K}_1$. Wir suchen in diesem Netz diejenigen Curven, welche J_1^5 berühren, ohne dass sie den Berührungspunct zum Doppelpuncte haben. Zu diesem Ende hat man nur in einem Büschel der C^4 derartige Curven aufzufinden:

In der aus J_1^5 ausgeschnittenen Punctschaar g^1_{12} sind, weil 6 das Geschlecht der J_1^5 ist,

$$22 + 2 \,.\, 6 = 34 \text{ Coincidenzen.}$$

Unter diesen rühren $27 - 8$*) $= 19$ von den C^4 des Büschels her, die mit einem Doppelpunct behaftet sind, bleiben 15 Puncte s_1, deren Lage auf J_1^5 von dem zu ihrer Auffindung benutzten Büschel unabhängig ist.

Dies sind gemäss 8. die gesuchten Osculationspuncte; sie gehören auch der J_4^{14} an, und ausser ihnen und den acht s_0 kann nach dem Gesagten kein den Curven J_1^5, J_4^{14} gemeinschaftlicher Punct existiren, von ihren $5 \,.\, 14 - 4 \,.\, 8 = 38$ einfachen Schnittpuncten liegen 8 in den s_0 vor, die 30 fehlenden müssen durch die 15 s_1 geliefert werden, woraus geschlossen werden kann, dass in diesen Berührung stattfindet.

Es gibt in den Büscheln $B, \mathfrak{B}$ 15 Paare $K, \mathfrak{K}$ von sich osculirenden Curven.

15. Die conjugirten Chordalen der Kegelschnittpaare $K, \mathfrak{K}$.

Eine Gerade A ist Chordale der beiden Kegelschnitte K, $\mathfrak{K}$, welche durch das auf A befindliche Paar gehen; die Gerade $\mathfrak{A}$, auf welcher das ergänzende Paar liegt, heisse die zu A conjugirte Chordale von $\mathfrak{K}, K$. Auf diese Weise wird zwischen den Geraden der Ebene eine involutorische und zwar quadratische Verwandtschaft hergestellt, weil den Strahlen eines Büschels (o) die Tangenten eines Kegelschnitts E^2 (s. vor. Nummer) zugeordnet sind.

Den durch einen zweiten Punct o_1 gehenden Geraden seien die Tangenten von E_1^2 conjugirt. Dann haben E^2, E_1^2 zu gemeinschaftlichen Tangenten 1tens die conjugirte Chordale von oo_1, 2tens drei Geraden A_1, A_2, A_3, von denen wenigstens eine reell sein wird; z. B. A_1, oa_1, o_1a_1 seien die Strahlen der Büschel (o), (o_1), welchen A_1 conjugirt ist; alsdann leuchtet sofort ein, dass die Büschel $B, \mathfrak{B}$ eine und dieselbe Involution i_1 aus A_1 schneiden, und dass folglich der A_1 unendlich viele Geraden conjugirt sind. Wenn man jetzt die Büschel $B, \mathfrak{B}$ so auf einander bezieht, dass die Curven homolog sind, die das nämliche Paar von i_1 enthalten, so erzeugen die jetzt projectivischen Büschel ausser A_1 noch eine Curve 3ter Ordnung C_1^3; und die unendlich vielen der A_1 conjugirten Chordalen müssen Strahlen eines auf C_1^3 liegenden Punctes sein; folglich ist a_1 dieser Punct. Durch a_1 gehen zwei homologe Kegelschnitte, etwa $K_0, \mathfrak{K}_0$, die entweder noch 3 reelle, oder nur einen reellen Punct gemein haben. Im ersten Falle liegen zwei der Schnittpuncte (a_2, a_3) auf A_1 und stellen ein Paar der i_1 dar, der dritte sei γ. Man sieht dann leicht, dass auf den Geraden $a_1\, a_2 = A_3$, $A_2 = a_1\, a_3$ identische Involutionen i_2, i_3 der Büschel $B, \mathfrak{B}$ auftreten: $\mathfrak{p}$ sei nämlich ein von $a_2\, a_3$ verschiedenes

*) Anmerkung. Von den 27 im Büschel vorkommenden Doppelpuncten kommen 2.4 nicht in Betracht, für 2 zerfallende C^4, bestehend aus K^1 und $\mathfrak{K}^2$; $\mathfrak{K}^1$ und K^2. wenn $K^2, \mathfrak{K}^2$ zur Bestimmung des 2ten Quadrupels Q_2 gedient haben.

Paar der i_1, $\mathfrak{q}$ das ergänzende auf einem gewissen Strahle $\mathfrak{A}$ durch a_1 gelegen. Die ausschneidenden. Curven $K, \mathfrak{K}$ liefern einen Büschel B_1 mit den Grundpuncten $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$, und K schneide A_3 im Paare $p', \mathfrak{K}$ dieselbe Gerade in $\mathfrak{p}'$: Die 3 Paare $a_1\, a_2$ (auf dem Geradenpaare $A_1, \mathfrak{A}$ des B_1) $p', \mathfrak{p}'$ sind nun in Involution, und diese Involution enthält mithin sowohl 2 Paare derjenigen, welche der Büschel B_1 als auch 2 derjenigen, die $\mathfrak{B}$ aus A_3 schneidet. Hieraus folgt die Identität der beiden letztgenannten. Ferner ist klar, dass, wenn auf irgend einer Geraden A die nämliche Involution von B und $\mathfrak{B}$ bestimmt wird, auch stets eine conjugirte Chordale von A durch o, eine zweite durch o_1 gehen muss; d. h. dass eine solche Gerade gemeinschaftliche Tangente von E^2, E_1^2 ist. In dem vorliegenden Falle hat man somit in A_1, A_2, A_3 die 3 einzig möglichen Geraden, auf welchen identische Involutionen sind. Wenn aber $K_0, \mathfrak{K}_0$ nur noch einen reellen Schnittpunct besitzen, so liegt dieser γ nothwendig ausserhalb A_1. Jetzt kann keine Gerade A_3 existiren, aus welcher $B, \mathfrak{B}$ dieselbe Involution i_3 ausschnitten: Durch die Kegelschnittpaare $K, \mathfrak{K}$, mittels welcher C_1^3 erzeugt wurde, wären nämlich die Paare der i_3 derart projectivisch einander zugewiesen, dass das Paar, zu welchem der Schnittpunct $A_1\, A_3$ gehört, sich selbst entspricht; folglich gäbe es auf A_3 noch ein zweites solches Paar, d. h. A_3 wäre eine der zu A_1 conjugirten Chordalen, müsste mithin durch a_1 gehen. Genau wie vorhin folgte weiter, dass in i_3 dem Puncte a_1 der Schnittpunct $A_1 A_3$ entsprechen müsste, und dass die durch a_1 gelegten $K_0, \mathfrak{K}_0$ auch durch letztern Punct gehen müssen. Schneiden aber $K_0, \mathfrak{K}_0$ die A_1 in einem Puncte, so gehen sie auch durch den mit ihm in i_1 gepaarten, und treffen sich überhaupt in 4 reellen Puncten.

Construction von $K_0, \mathfrak{K}_0$ oder des Quadrupels $a_1 a_2 a_3 \gamma$.

Beachtet man, dass die den Büschel a_1 constituirenden Chordalen projectivisch auf die sie zugehörigen Kegelschnitte $K, \mathfrak{K}$ der die C_1^3 erzeugenden Büschel bezogen sind; so hat man

$$a_1\,(g_1\, g_2\, g_3\, g_4)\, \pi\, \mathfrak{K}_1\, \mathfrak{K}_2\, \mathfrak{K}_3\, \mathfrak{K}_4.$$

Wenn aber unter x ein variabler Punct verstanden wird, welcher

$$x\,(g_1\, g_2\, g_3\, g_4)\, \pi\, \mathfrak{K}_1\, \mathfrak{K}_2\, \mathfrak{K}_3\, \mathfrak{K}_4$$

befriedigt, so ist dessen Ort ein in bekannter Weise zu construirender Kegelschnitt; er ist K_0, analog findet sich $\mathfrak{K}_0$. Da C_1^3 durch γ geht, so wird: $a_1\,(\gamma\, g_1\, g_2\, g_3\, g_4)\, \pi\, \mathfrak{K}_0\, \mathfrak{K}_1\, \mathfrak{K}_2\, \mathfrak{K}_3\, \mathfrak{K}_4$; und wenn x beliebig auf K_0 angenommen wird, muss:

$$x\,(\gamma\, g_1\, g_2\, g_3\, g_4)\, \pi\, a_1\,(\gamma\, g_1\, g_2\, g_3\, g_4)\, \pi\, \mathfrak{K}_0\, \mathfrak{K}_1 \ldots \mathfrak{K}_4$$

sein. Oder die ∞^1 Curven 3ter Ordnung, welche erzeugt werden gemäss der Relation $x\,(g_1 \ldots g_4)\, \pi\, (\mathfrak{K}_1 \ldots \mathfrak{K}_4)$, wenn x den K_0 durchläuft, enthalten sämmtlich den Punct γ. Der ausser a_1 noch stets reelle Punct γ des construirten Quadrupels ist mithin der gemeinschaftliche 9te Punct aller durch die $g, \mathfrak{g}$ gehenden C^3. Nachdem er vom Quadrupel abgesondert ist, sind die 3 Geraden $A_1\, A_2\, A_3$ bestimmt.

Betrachtet man irgend ein Quadrupel Q und die ∞^1 Kegelschnitte, die Q enthalten, so sind unter diesen ein Paar $K, \mathfrak{K}$ und 3 Paare conjugirter Chordalen, mithin schneiden diese ∞^1 Kegelschnitte $A_1\, A_2\, A_3$ beziehlich in i_1, i_2, i_3; und es wird jede dieser 3 Geraden von einem Paar conjugirter Chordalen in einem Paar der ihr zukommenden i geschnitten.

Demgemäss erhält man $\mathfrak{A}$, wenn A angenommen wird, indem man $A_1 A_2 A_3$ mit A zum Schnitt bringt, und die den Schnittpuncten in den i entsprechendem Puncte verbindet.

Eine weitere Consequenz hievon ist, dass die 6 Doppelpuncte der i sich zu 3 auf 4 Geraden $D_1 D_2 D_3 D_4$ vertheilen. Und damit ist auch dargethan, dass die Verwandtschaft $A, \mathfrak{A}$ nur das Reciproke der bekannten Steinerschen Verwandtschaft ist: Für die Schaar der $D_1 D_2 D_3 D_4$ berührenden Kegelschnitte sind $A, \mathfrak{A}$ conjugirte Polaren.*)

19. Construction der Doppeltangenten für die Enveloppen E^8, E^{10}, E^6.

Die C_1^5, die einem Puncte o zugewiesen ist (v. 13), zerfällt, sobald o auf A_1 angenommen wird, in diese Gerade und eine C^4 mit dem Doppelpunct o. Diese C^4 hat mit i_1 ein Paar gemeinschaftlich, welches leicht anzugeben ist: Den Geraden A durch o sind nämlich die Geraden $\mathfrak{A}$ conjugirt, welche A_1 in dem mit o in i_1 gepaarten o' treffen. Schneidet man jetzt die C_1^3 mit der Geraden $a_1 o'$, so erhält man 2 Puncte eines Quadrupels, die durch das aufzufindende Paar der C^4 ergänzt werden. Hieraus ist ersichtlich, dass durch jedes Paar $\mathfrak{p}$ der i_1 eine einzige solche C^4 bestimmt ist. Um ihren Doppelpunct o zu finden, schneide man A_1 mit dem Strahle von a_1, welcher das ergänzende Paar von $\mathfrak{p}$ trägt, in o'; der diesem in i_1 zugewiesene Punct o ist der gesuchte Doppelpunct.

Liegt nun eine Curve C vor, deren Puncte gepaart sind, und welche A_1 in ν Paaren (von i_1) schneidet, so bekommt die ihr associirte Enveloppe E die A_1 zur νfachen Tangente. Die Anzahl der Paare, welche die C mit der zu o gehörigen C^4 gemein hat, gibt an, wie viele Tangenten ausser A_1 an die E von o gehen. Wenn hiebei die C^4 durch eines der ν Paare gelegt wird, so wird ihr Doppelpunct ein Berührungspunct von E und A_1 sein, weil für diese Lage von o noch eine der eben gedachten Tangenten an E mit A_1 coincidirt.

Z. B.: Die Enveloppe E^8 der Geraden, welche die coincidirenden Paare tragen, hat in den Doppelpuncten der i_1 zwei Paare auf A_1, mithin berührt A_1 die E^8 in 2 nach der angegebenen Methode zu bestimmenden Puncten.

Die J_4^{14} enthält 4 Paare der i_1, da von a_1 sich 4 Tangenten an C_1^3 ziehen lassen, deren Berührungspuncte auf J_1^5 liegen, und deren ergänzende Paare auf A_1 fallen. Diese letzteren enthält J_4^{14} und keine andern der i_1. A_1 ist somit 4fache Tangente der J_4^{14}.

Eine Quadrupelcurve C^4 schneidet aus A_1 zwei Paare der i_1, mithin ist A_1 Doppeltangente der E^6 und ihre Berührungspuncte ergeben sich wie oben auseinandergesetzt wurde.

Die Enveloppen E^8, E^{10} haben noch 12 andere Doppeltangenten gemein, bestehend aus den 3 Geradenpaaren in den Büscheln $B, \mathfrak{B}$. Fasst man etwa die Geraden $g_1 g_2 = l$, $g_3 g_4 = l'$ auf, so schneidet ein $\mathfrak{K}$ die l in einem Paare, die l' in dem ergänzenden.

Es gibt aber zwei $\mathfrak{K}$, welche l berühren, demnach wird l Doppeltangente von E^8; diese beiden $\mathfrak{K}$ bestimmen zugleich 2 Paare der J_4^{14}, die auf l' liegen, somit ist l' Doppeltangente der E^{10}. Gleiches gilt von l.

Beide Enveloppen sind eindeutig auf die J_1^5 vom Geschlechte 6 bezogen, weshalb sie ausser den angegebenen vielfachen Tangenten keine andern besitzen können. Die 80 gemein-

*) Bezeichnet $s_0 \sigma_0$ das Paar, welches auf einer der 4 Geraden D etwa auf D_1 liegt, so berühren sich die beiden hindurch gehenden Kegelschnitte in s_0, σ_0, und umgekehrt berühren sich $K, \mathfrak{K}$ doppelt, so muss die Verbindungslinie der Berührungspuncte sich selbst conjugirt, also eine der D sein. Auf diese Weise bestimmt man die 4 Paare von sich doppelt berührenden Kegelschnitten.

schaftlichen Tangenten werden aufgebracht durch diese, sowie durch 8 Tangenten der J_1^5 in den oben (14) mit ς_0, σ_0 bezeichneten Puncten.

Wie die Eingangs II angestellte Betrachtung zeigt, hat eine E^6 ausser A_1, A_2, A_3 keine Doppeltangente. In derselben Weise, wie wir dort vorgingen, die auf einer Doppeltangente liegenden Paare der C^4 auszuschneiden, lässt sich dies für irgend eine Quadrupelcurve thun. So beweist man z. B., dass die associirte Enveloppe E^{18} der C_8^{30} (I) 120 Dopppeltangenten hat.

B) Die 8 Puncte $g, \mathfrak{g}$ liegen auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}_0$. Das Netz der Kegelschnitte.

20. Die folgende Entwicklung ist von dem bisher Vorgebrachten vollkommen unabhängig.

a) Die Chordalen A und ihre Enveloppe E^3.

Wenn A Chordale von $K, \mathfrak{K}$ ist, so bestimmt das Punctepaar $\mathfrak{p}$ von A, durch welches K und $\mathfrak{K}$ gehen, mit dem Paare, in welchem A dem $\mathfrak{K}_0$ begegnet, eine Involution i; und es ist klar, dass diese i von den Büscheln $B, \mathfrak{B}$ sowohl, wie von jedem Büschel ausgeschnitten wird, dem ein Quadrupel als Grundlage dient. Soll nun A einen gegebenen Punct o enthalten, so muss durch den mit o in i gepaarten Punct p ein K und ein $\mathfrak{K}$ gehen, d. h. A muss einen der Quadrupelpuncte p, q, r aufnehmen, welche o ergänzen. Umgekehrt sind auch op, oq, or Chordalen; folglich ist die Enveloppe der A eine Curve 3ter Klasse E^3.

Weil ferner der Büschel, der als Grundpuncte ein beliebiges Quadrupel $o_1 p_1 q_1 r_1$ hat auf op, oq, or dieselben Involutionen bestimmt wie $B, \mathfrak{B}$; so muss der durch $o_1\, p_1\, q_1\, r_1\, o$ gelegte Kegelschnitt auch $p\, q\, r$ enthalten, d. h. je zwei Quadrupel werden durch einen Kegelschnitt verbunden; die Gesammtheit dieser Curven bildet das Netz.

b) Conjugirte Chordalen A, A'.

Schneiden sich $K, \mathfrak{K}$ im Paare $\mathfrak{p}$ der i auf A, so fällt das ergänzende Paar $\mathfrak{p}'$ auf eine neue Chordale A', der conjugirten zu A; $\mathfrak{p}'$ gehört dann einer Involution i' an, die mit i so zusammenhängt, dass überhaupt ein Paar von i seine Ergänzung in i' hat: Denn die Kegelschnitte $K, \mathfrak{K}$, welche zugleich die Paare von i ausschneiden, sind dadurch projectivisch auf einander bezogen, mithin werden auch die Paare der i' projectivisch einander zugewiesen sein. Bei dieser Zuordnung treten aber 3 sich selbst homologe Paare auf, nämlich $\mathfrak{p}'$, das auf $\mathfrak{K}_0$ befindliche, und das Paar, zu welchem der Schnittpunct s der Geraden A, A' gehört. Daher sind alle Paare der i' sich selbst zugewiesen.

Man bemerke noch, dass die durch s gehenden Kegelschnitte von B und $\mathfrak{B}$ sich in diesem Puncte berühren müssen, und dass ihre gemeinschaftliche Tangente die ausser A, A' noch durch s gehende Tangente der E^3 sein wird. Auch ist klar, dass, wenn zwei Kegelschnitte $K_1, \mathfrak{K}_1$ beziehlich aus B und $\mathfrak{B}$ sich in einem Puncte s berühren und übrigens noch in σ, σ' schneiden, $s\sigma, s\sigma'$ zwei conjugirte Chordalen sind. Da ferner die Gerade $\sigma\sigma'$ selbst eine Chordale ist, σ, σ' ein Paar ihrer Involution, so fällt die conjugirte von $\sigma\sigma'$ mit der Geraden zusammen, auf welcher sich $K_1, \mathfrak{K}_1$ berühren. Beachtet man endlich, dass von den 3 aus σ an E^3 möglichen Tangenten zwei in σs coincidiren, so erkennt man σ, σ' als die Puncte, wo E^3 von σs, $\sigma' s$ berührt wird.

c) Der Ort des Schnittpuncts s zweier conjugirten Chordalen, oder was dasselbe ist, die Coincidenzcurve ist dritter Ordnung J^3; der Ort des Paares σ, σ', d. h. die J^3 ergänzende Curve ist E^3 selbst und von 6ter Ordnung.

Beweis. O sei eine willkührliche Gerade, jedoch nicht Chordale. o_1, o_2, o seien 3 Puncte auf O, von denen o_1, o_2 festgehalten werden, während o die O durchläuft. Das variable Quadrupel $opqr$ wird mit den festen $o_1p_1q_1r_1$, $o_2p_2q_2r_2$ stets durch zwei Kegelschnitte verbunden sein, die zwei projectivisch auf einander bezogene Büschel beschreiben. Ihr Erzengniss ist somit ausser O noch eine C^3, die Ergänzung zu O. Weil nun auf O nie zwei zum selben Quadrupel gehörige Puncte liegen können, so muss in den 3 Puncten, welche O mit C^3 gemein hat, o mit einem der Puncte p, q, r zusammenfallen. Auf O befinden sich also 3 Puncte s und nicht mehr.

Gleichzeitig bemerkt man, dass auf O 6 Puncte σ fallen, weil die Tripel $p\,q\,r$ eine cubische Involution auf C^3 bilden, die 6 Doppelpuncte (Coincidenzen) besitzt.

21. Conjugirte Pole des Netzes.

Ist A eine Chordale, und wird sie von der conjugirten A' in s geschnitten, so sind auf A ausser s noch 2 Puncte $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}'$ der J^3. Es sind dies die Doppelpuncte der zu A gehörigen Involution i, und sie sind mithin conjugirte Pole für alle Netzcurven. Wenn überhaupt 2 Puncte conjugirt sein sollen für alle Netzcurven, so müssen alle Büschel die Verbindungslinie in der nämlichen Involution schneiden, d. h. diese muss Chordale sein. Demgemäss kann J^3 definirt werden als Ort solcher Punctepaare $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}'$, die für die Netzcurven zwei conjugirte Pole sind; E^3 als Enveloppe der Geraden, welche ein solches Paar $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}'$ tragen. Durch einen dieser Puncte $\mathfrak{f}$ gehen ausser $\mathfrak{f}\mathfrak{f}' = A$ noch 2 Tangenten $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ an E^3, die conjugirt sind, und einen zerfallenden Kegelschnitt des Netzes darstellen. Ist daher $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}'_1$ irgend ein anderes Paar, so werden die Strahlen $\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}\mathfrak{f}'_1$ durch $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ harmonisch getrennt sein, d. h. Alle Paare werden aus jedem Puncte der J^3 durch eine quadratische Strahleninvolution projizirt. Die Tangente der J^3 im Puncte $\mathfrak{f}$ wird mithin durch $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ von $A = \mathfrak{f}\mathfrak{f}'$ harmonisch getrennt sein, und somit den zu s conjugirten Pol s' enthalten. Gleiches gilt für $\mathfrak{f}'$: Daher haben $\mathfrak{f}\mathfrak{f}'$ denselben Tangentialpunct s', den conjugirten von s; A, A' und $s\,s'$ sind die 3 durch s möglichen Tangenten der E^3, nach 20 *b)* ist der Berührungspunct o von A und E^3 von s durch $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}'$ harmonisch getrennt.

Die Wendepuncte der J^3 und die Spitzen der E^3.

Wir machen die ausdrückliche Voraussetzung, dass J^3 nicht zerfällt — die Statthaftigkeit derselben ist leicht zu begründen. — Alsdann können im Netze keine zwei sich doppelt berührende Kegelschnitte vorkommen, weil sonst die doppelt gezählte Verbindungslinie der Berührungspuncte eine Netzcurve wäre, und demzufolge auch einen Bestandtheil der J^3 ausmachen würde.

Bedeutet jetzt s_1 einen Punct, den J^3 mit E^3 gemein hat, so muss von den beiden Quadrupelpuncten σ_1, σ'_1 einer σ'_1 mit s_1 coincidiren, so dass 3 Quadrupelpuncte unendlich nahe liegen und die durch s_1 gehenden Netzcurven sich hier osculiren. Hieraus folgt weiter, dass dieselben J^3 in s_1 berühren, oder dass die Tangente A_1 der J^3 für den Punct s_1 auch Tangente der E^3 ist. Von den beiden übrigen Tangenten der E^3 durch s_1

nämlich $s_1\,\sigma_1$, $s_1\,\sigma'_1$ hat sich aber die letztere offenbar mit A_1 vereinigt. Also haben J^3, E^3 nicht nur den Punct s_1, sondern auch die Tangente in ihm gemein, und s_1 zählt für 2 gemeinschaftliche Puncte der J^3, E^3. Da die Curven überhaupt sich in 18 Puncten schneiden, so werden diese durch 9 Puncte s_1 aufgebracht, wo Berührung stattfindet.

Es existiren im Netze 9 Büschel von sich osculirenden Kegelschnitten.

Andere kann es auch nicht geben, da ein Osculationspunct zweier Kegelschnitte sowohl auf J^3 als E^3 liegen muss.

Es sei s'_1 der conjugirte Pol von s_1; er fällt auf A_1 und weil er mit s_1 denselben Tangentialpunct (auf J^3) hat, so ist s'_1 ein Wendepunct von J^3.

Ist umgekehrt $\mathfrak{s}$ ein Wendepunct von J^3, so liegt sein conjugirter $\mathfrak{s}'$ so, dass $\mathfrak{s}\,\mathfrak{s}'$ die J^3 in $\mathfrak{s}'$ berührt, dass also der Schnittpunct s von $\mathfrak{s}\,\mathfrak{s}'$ und J^3 in $\mathfrak{s}'$ fällt. Dann berührt $\mathfrak{s}\,\mathfrak{s}'$ die E^3 in dem von s durch das Paar $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}'$ harmonisch getrennten Puncte, d. i. in $\mathfrak{s}'$: J^3 hat mithin keinen andern Wendepunct, als die 9 angegebenen s'_1.

$s_1\,\sigma_1$ ist die conjugirte Chordale A'_1 von $s_1 s'_1 = A_1$; σ_1 ihr Berührungspunct (20 *b)*). Wegen der in s_1 statthabenden Osculation fallen die 3 von σ_1 an E^3 möglichen Tangenten in $\sigma_1\,s_1 = A'_1$ zusammen; und σ_1 ist eine Spitze der E^3, A'_1 die Rückkehrtangente.*)

Sind ferner $\mathfrak{s}_2$, $\mathfrak{s}'_2$ die beiden auf A'_1 befindlichen conjugirten Pole, so haben sie (21) zum Tangentialpunct den conjugirten Pol von s_1, also s'_1. Oder von s'_1 gehen noch 2 Tangenten an J^3, deren Berührungspuncte $\mathfrak{s}_2$, $\mathfrak{s}'_2$ auf A'_1 liegen; mithin ist A'_1 die harmonische Polare des Wendepunctes s'_1. Die Kegelschnitte, welche sich in s'_1 berühren, gehen durch 2 auf A'_1 feste Puncte σ, die durch das Paar $\mathfrak{s}_2, \mathfrak{s}'_2$ harmonisch getrennt werden; und es liegen sonach die 6 Schnittpuncte von E^3 und A'_1 vor in $s_1 \equiv 1$ Punct, $\sigma'_1 \equiv 3$ Puncten und den beiden σ.**)

---

*) Die Angabe Schröters über die Lage der Spitzen (c. f. dessen „Steiner's Vorlesungen," 2ter Theil, pag. 553) ist unrichtig.

**) Schlussanmerkung. Auf ein Quadrupelsystem, das sehr geeignet ist zu zeigen, wie die allgemeinen Sätze modificirt werden, falls zwischen den g specielle Relationen der Lage obwalten, führt die Betrachtung des syzygetischen Büschels von Curven 3ter Ordnung (C^3):

Auf der durch irgend einen Punct q der Ebene gehenden C^3 des Büschels kommen 4 Puncte vor, deren Tangentialpunct q ist; diese bilden das dem q entsprechende Quadrupel Q. Durchläuft q eine Gerade A, so beschreibt Q eine C^4, welche die 12 Ecken g der syzygetischen Dreiseite enthält. Dreht sich A um einen festen Punct q_1, dem das Quadrupel Q_1 zugewiesen ist, so beschreibt C^4 einen Büschel mit den Grundpuncten g, Q_1. Geht aber A durch einen der 9 allen C^3 gemeinsamen Wendepuncte w_1, so zerfällt C^4 in die harmonische Polare W_1 von w_1 und eine $\mathfrak{C}^3$, welche durch w_1 und die 8 Puncte g, die ausserhalb W_1 liegen, geht, und für welche $\mathfrak{C}^3$ jeder dieser 9 Puncte w_1, g ein Wendepunct ist. Dreht sich alsdann A um w_1, so beschreibt $\mathfrak{C}^3$ einen neuen syzygetischen Büschel. Mithin sind in dem hier vorliegenden Netze der C^4 9 Büschel zerfallender Curven enthalten, bestehend aus je einer harmonischen Polare W und einem syzygetischen Büschel. Diese W bilden die Jacobiana J^9, während die 12 Ecken g als Enveloppe E^{12} auftreten. Einer durch die neun w gelegten C^{n+3} entspricht eine Quadrupelcurve C_n^{4n+3}, auf der die g $n$fache, die w einfache Puncte sind. Die Quadrupelcurve, welche eine gegebene Gerade A zum Bestandtheil hat, ist nicht mehr C_4^{16}, sondern eine C_1^1, und ihre Quadrupel Q entsprechen den Puncten q einer rationalen, die 9 w enthaltenden C^4.