HYPERELLIPTISCHE C^{3n}.

Von

PROF. **CARL JOS. KÜPPER.**

Hiezu ein Anhang

vom

Privatdocenten **Carl Bobek.**

(Abhandlungen der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. — VII. Folge, **1.** Band.)

(Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe Nr. **1.**)

PRAG.

Verlag der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. — Druck von Dr. Ed. Grégr.

1885.

I.

Ueber hyperelliptische Curven von der Ordnung $3n$ und beliebig hohem Geschlechte.

Acht beliebige feste Punkte g_1, g_2 — g_8 der Ebene werden angenommen, und als die Punkte g bezeichnet. Die C^3, welche durch die g gehen, haben noch einen Punkt γ gemein; ist eine solche C^3 durch C_i^3 bezeichnet, so soll γ_i der Tangentalpunkt von γ auf ihr heissen.

1. Die Punkte γ_i liegen auf einer Curve 4ter Ordnung Γ, welche die g enthält und in γ einen 3fachen Punkt hat.

Diese Γ ist nämlich das Erzeugniss des Curvenbüschel's (C^3) und des zu ihm projectivischen Büschel's der Tangenten in γ; sie hat in γ 3 Tangenten, welche für je eine der C^3 Wendetangenten sind.

2. Unter C^6 werde irgend eine Curve 6ter Ordnung verstanden, welche die g zu Doppelpunkten hat, also vom Geschlechte 2 ist.

Alle C^6, welche durch einen Punkt a der Ebene gehen, enthalten noch einen Punkt α, der mit a ein Paar bildet.

Denn die durch a gehende C^3 wird von allen diesen C^6 nach in einem festen Punkte (α) geschnitten; weil die g und a zusammen 17 Schnittpunkte der C^3 mit jeder solchen C^6 darstellen. Hiernach besteht in der Ebene eine involutorische Verwandtschaft zwischen den Punkten a, α.

3. Betrachtet man die Paare a, α, welche auf einer bestimmten C_i^3 liegen, so ergiebt der Restsatz, dass sie sich auf Geraden befinden, die durch einen festen Punkt x der C_i^3 gehen. Weil ferner irgend zwei andere C^3 eine C^6 bilden, die C_i^3 in 2 in γ zusammenfallenden Punkten schneidet, so folgt, dass jener Punkt x mit γ_i einerlei ist.

4. Eine C^6 kann noch durch drei willkürliche Punkte der Ebene gehen, durch 2 Punkte ist ein Büschel (C^6) bestimmt. Ist aber γ einer der drei Punkte, so zerfällt die C^6 in zwei C^3. Denn irgend eine C_i^3 wird von zwei anderen, die zusammen eine C^6 ausmachen, in 2 in γ vereinigten Punkten geschnitten, somit von jeder C^6, die durch γ geht. Da nun für C_i^3 jede des Büschel's (C^3) angenommen werden kann, so muss die C^6 in γ einen Doppelpunkt

haben. Dann aber muss sie auch zerfallen, denn ist a irgend einer ihrer Punkte, so hat die durch a gehende C^3 19 Schnittpunkte mit ihr gemein, ist demnach ein Bestandtheil derselben.

5. Eine Curve 9ter Ordnung C^9, welche die g zu 3fachen Punkten hat, und den Punkt γ enthält, ist hyperelliptisch, und kann durch den Büschel (C^3) mit einem projectivischen Büschel (C^6) erzeugt werden.

Hier ist zu zeigen, dass eine durch a gehende C^9 auch α enthalten muss.

Die durch a gehende C_i^3 werde von C^9 noch in x geschnitten, dann wird x mit α einerlei sein, wenn erwiesen wird, dass C_i^3 von einer durch a gelegten C_a^6 in x geschnitten wird:

In den acht g, γ, a, x liegen 27 Schnittpunkte von C^9 mit C_i^3 vor. C_a^6 bildet mit rgend einer von C_i^3 verschiedenen C^3 eine C^9, welche von diesen Schnittpunkten 26 enthält, somit muss der 27., d. h. x auf C_a^6 liegen.

6. Indem man die sich selbst entsprechenden C^9 ebenso benutzt, wie in vorigem die C^6, findet man, dass eine C^{12}, die zu 4fachen Punkten die g, zum Doppelpunkt γ hat, in der Verwandtschaft $(a\alpha)$ eine sich selbst entsprechende Curve ist, und sodann durch eine auf der Hand liegende Induktion den Satz:

7. Eine C^{3n}, welche die g zu $n$fachen Punkten, γ als $n-2$fachen Punkt hat, entspricht sich selbst in $(a\alpha)$. Sie ist hyperelliptisch und kann (wofern $n > 2$) durch den Büschel (C^3) in Verbindung mit irgend einem projectivischen adjungirter C^{3n-3} erzeugt werden.

Was den zweiten Theil der Behauptung betrifft, so genügt es zu bemerken, dass von einer C^{3n-3} die ohnehin der C^{3n} adjungirt ist, noch $2n-3$ einfache Punkte, von denen keine zwei in $(a\,\alpha)$ sich entsprechen, willkürlich sind. Nimmt man daher $2n-4$ derselben $a_1, a_2 \ldots$ auf C^{3n} an, so haben die C^{3n-3} noch ebensoviele $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ mit C^{3n} gemein. Die durch die $4n-8$ Punkte gehenden C^{3n-3} haben ausserdem keinen gemeinschaftlichen Punkt: $8(n-1)^2 + (n-3)^2 + 4n - 8 = 9(n-1)^2$; sie bilden mithin einen Büschel, von welchem jede Curve noch ein variables Punktpaar a, α aus C^{3n} schneidet, durch welches auch eine C^3 geht.

Das Geschlecht der C^{3n} ist:

$$p = \frac{(3n-1)\,(3n-2)}{2} - \frac{8n\,(n-1)}{2} - \frac{(n-2)\,(n-3)}{2} = 2n-2,$$

und die Anzahl willkürlicher Punkte einer C^{3n}:

$$\frac{9n\,(n+1)}{2} - \frac{8n\,(n+1)}{2} - \frac{(n-1)\,(n-2)}{2} = n-1\,.$$

8. Um zu einem Punkte a den ihm entsprechenden α zu finden, verfahre man stets so: Auf der durch a gehenden C_i^3 ermittele man den Tangentialpunkt γ_i von γ und schneide die C_i^3 mit der Geraden $\gamma_i\,a$ in α. Hieraus folgt sofort, dass auf jeder Geraden G der Ebene 4 Paare a, α liegen; denn G schneidet die Γ in 4 Punkten $\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4$; die zugehörigen $C_1^3\ C_2^3\ C_3^3\ C_4^3$ schneiden G in diesen Punktepaaren. Wenn nun die Gerade G einen Strahlenbüschel (o) beschreibt, was ist der Ort der 4 Punktepaare, die in jeder Lage auf ihr sind?

A sei eine beliebige, nicht durch o gehende Gerade. Damit irgend ein Punkt a von A seinen entsprechenden α auf den Strahl oa habe, ist nöthig und hinreichend, dass für die durch a gehende C_i^3 der Punkt γ_i auf $o\,a$ fällt. Nun liegen auf jedem Strahl $o\,a$ 4 Punkte γ_i, und die zugehörigen C_i^3 schneiden A noch in 12 Punkten b, von denen im Allgemeinen keiner mit a coincidirt. Einem solchen b entspricht nur ein einziger a, somit existiren 13 Coincidenzen, unter welchen sich auch die 4 auf A liegenden γ_i befinden; bleiben übrig 9, und das ist die Ordnung des gesuchten Ortes.

Geht A durch einen der Punkte g, so ergeben sich nur 6 Coincidenzen, mithin ist jeder g ein 3facher Punkt der C^9. Wenn A durch γ gelegt wird, so treten 8 Coincidenzen auf, und C^9 enthält γ als einfachen Punkt. Sie berührt ferner die Gerade $o\gamma$ in γ; denn die 4 auf $o\gamma$ liegenden Paare werden ausgeschnitten von der in γ die $o\gamma$ berührenden C^3, und von den drei C^3, welche in γ einen Wendepunkt haben. Endlich geht die C^9 auch durch o, und berührt hier die Gerade, auf welcher sich der mit o gepaarte Punkt befindet.

Sei a ein variabler Punkt einer Geraden A, alsdann umhüllt $a\alpha$ eine Curve 9. Klasse A^9: Denn die zu irgend einem Punkte o gehörige C^9 schneidet A in den 9 Punkten a, für welche die Geraden $a\alpha$ durch o gehen.

Diese Enveloppe ist 6. Klasse A^6 für eine A durch g, 8. Klasse A^8 für eine durch γ gehende A. A^9 berührt A in den 8 auf A liegenden gepaarten Punkten, hat also A zur 8fachen Tangente.

Auf einer einfachen Tangente $a\alpha$ kommen ausser a, α noch 3 Punktepaare vor: Der Gesammtort dieser 7 Punkte bei variablem a ist von der 80. Ordnung.

Denn einer Geraden B entspricht eine B^9, die mit A^9 81 gemeinschaftliche Tangenten hat, wovon eine, die dem Schnittpunkte AB angehört, nicht zu rechnen ist. Demnach hat B mit dem fraglichen Orte 80 Punkte gemein. Geht aber B durch g, so ergeben sich nur $6.9-1$ Schnittpunkte, daher ist jeder g ein $80-53=27$facher Punkt der Ortes; geht B durch γ, so ergeben sich $8\cdot 9-1=71$ Schnittpunkte, also ist γ ein 9facher Punkt. Wir werden später (10 c) sehen, dass dieser Ort zerfällt in eine Curve 17. und eine 63. Ordnung.

9. Die zu allen Punkten o der Ebene gehörigen C^9 sind hyperelliptisch und constituiren ein Netz.

Diese C^9 haben, wie wir sahen, die g zu 3fachen, γ zum einfachen Punkt, sind folglich hyperelliptisch und nur specielle Curven dieser Art.

Geht eine C^9 durch einen Punkt a, so muss sie auch α enthalten, und es muss der Punkt o, zu welchem sie gehört, auf der Geraden $a\alpha$ sein. Umgekehrt aber gehört auch zu jedem o auf $a\alpha$ eine C^9, welche a, α und die 3 andern auf $a\alpha$ befindlichen Paare ausschneidet, und diese sämmtlichen C^9 haben ausser den 8 Punkten jener Paare keinen gemeinschaftlichen Punkt, weil auf die g und γ $8.9+1=73$ gemeinsame Punkte kommen. Die durch a gehenden C^9 bilden somit einen Büschel, und zu den Punkten o einer Geraden gehören die C^9 eines Büschels, dessen einfache Grundpunkte in den 4 auf dieser Geraden liegenden Paaren gegeben sind. Durch zwei Punkte a, b ist eine dieser C^9 bestimmt. Liegt b auf $a\alpha$, so ist es die zu b als o genommen gehörige C^9. Liegt b nicht auf $a\alpha$ und ist mit β gepaart, so ist es die zum Schnittpunkte o von $a\alpha$, $b\beta$ gehörige C^9.

Es ist zu beachten, dass zwei C^9, die sich in a schneiden, ihre übrigen Schnittpunkte auf $a\alpha$ haben. Also können sie sich in a nur so berühren, dass $a\alpha$ ihre gemeinschaftliche

Tangente wird. In a, α sind dann zwei der auf $a\alpha$ befindlichen Paare vereinigt, d. h. $a\alpha$ berührt die beiden Curven auch in α. Wenn also a, α nicht zusammenfallen, so wird $a\alpha$ Doppeltangente jeder dieser C^9, folglich muss $a\alpha$ die Curve Γ tangiren.

Zerfallende C^9. Wird o auf der Curve 4. Ordnung Γ angenommen, etwa in γ_1, so fällt von den 4 Paaren, die auf jeden Strahl von γ_1 sind, eins auf die zu γ_1 gehörige $C_1{}^3$, als Ort für die anderen 3 Paare bleibt somit eine $C_1{}^6$ mit Doppelpunkten in den g.

Wenn z. B. ein Strahl von γ_1 die Γ noch in γ_2, γ_3, γ_4 trifft, so hat die Curve $C_2{}^6$, welche zu γ_2 gehört, mit $C_1{}^6$ auf $\gamma_1\,\gamma_2$ die beiden Paare gemein, die von $C_3{}^3$, $C_4{}^3$ ausgeschnitten werden, und ausserdem keine gemeinschaftlichen Punkte. Wenn daher γ_2 unendlich nahe bei γ_1 angenommen wird, d. h. unter $\gamma_3\,\gamma_4$ die Schnittpunkte einer Tangente der Γ in γ_1, mit der Curve verstanden werden, so ist der Ort der Paare, die von $C_3{}^3$, $C_4{}^3$ auf dieser Tangente ausgeschnitten werden, zugleich die Enveloppe der zu den Punkten von Γ gehörigen C^6. Wir werden unten (10 c) finden, dass diese Enveloppe eine Curve 24. Ordnung mit 8fachen Punkten in den g ist ($C_8{}^{24}$).

Auf einer Tangente T der Γ (in γ_1) ist aber das Paar hervorzuheben, welches auf $C_1{}^3$ liegt. Dasselbe vertritt auf T zwei vereinigte Paare, und liegt demnach auch auf $C_1{}^6$. Der Ort dieses Doppelpaares ist ein Theil der Jacobischen Curve des Netzes C^9, und zwar eine hyperelliptische C^{15}, welche die g zu 5fachen, γ zum 3fachen Punkte hat.

Beweis. Zunächst ist klar, dass die C^9, welche den Punkten von T entsprechen, diese Gerade in den Punkten des von $C_1{}^3$ ausgeschnittenen Doppelpaares berühren d. h. T zur Doppeltangente haben. Eine dieser C^9 hat in diesem Paare zwei Doppelpunkte, nämlich die dem Berührungspunkte γ_1 von T, Γ zugehörige in $C_1{}^3$, $C_1{}^6$ zerfallende C^9. Wenn umgekehrt zwei C^9 sich in a berühren, so müssen sie dies auch in α, und in beiden Punkten die Gerade $a\alpha$, es wird dann $a\alpha$ auch Tangente der Γ sein, und das Paar a, α wird ausgeschnitten von der dem Berührungspunkte auf Γ entsprechenden C^3. Diese Schlüsse gelten jedoch nur, wenn a nicht mit α coincidirt; der Fall der Coincidenz a, α wird besonders erörtert werden.

Um nun noch die Ordnung des Ortes der Doppelpaare zu finden, sei A eine willkührliche Gerade. Von einem Punkte a derselben lassen sich an Γ 6 Tangenten legen, die in $\gamma_1 \ldots \gamma_6$ berühren mögen. Zu diesen Punkten gehören $C_1{}^3, \ldots C_6{}^3$, welche A in 18 Punkten b schneiden, jedem b ist ein a zugeordnet. Mithin sind 19 Coincidenzen vorhanden, von welchen 4, die Schnittpunkte der A mit Γ, auszuscheiden wären; bleiben 15. Zieht man A durch g_i, so liefert die analoge Betrachtung nur noch 10 Coincidenzen, und wenn A durch γ geht, ergeben sich deren 12; so dass g_i für 5, γ für 3 Schnittpunkte der Geraden mit dem Orte C^{15} zählt.

Es ist leicht einzusehen, dass die Punkte der Γ die einzigen sind, deren C^9 in eine C^3 und C^6 zerfallen; man kann weiter gehen und sagen, dass wenn eine C^9 einen Punkt a der Ebene, der nicht mit seinem homologen zusammenfällt, zum Doppelpunkt haben soll, sie nothwendig in dieser Weise zerfällt. Weil nämlich die C^9, insofern sie a enthält, durch α gehen muss, so hat die durch a, α gehende $C_i{}^3$ mindestens 28 Schnittpunkte auf ihr und ist deshalb ein Bestandtheil der C^9. Die jetzt noch erforderliche C^6 muss durch a, also auch durch α gehen, und von den auf $a\ \alpha$ liegenden Paaren sind in der That zwei in a, α vereinigt, daher berührt $a\alpha$ die Γ, in γ_i, zu welchem Punkte die $C_i{}^3$ gehört.

Speciell: *a*) Die zum Punkte γ gehörige C^9 besteht aus den drei C^3, welche γ zum Wendepunkt haben. In der Verwandtschaft $(a\alpha)$ entspricht γ sich selbst, indem, wie schon erwähnt wurde, auf jeder Geraden durch γ dieser Punkt mit dem ihm benachbarten gepaart ist.

b) Die zu einem der g, etwa g_1 gehörige C^9 besteht aus $C_1{}^3$, für welche g_1 Tangentialpunkt von γ ist, und einer C^6, welche die andern g zu Doppelpunkten g_1 selbst zum 3-fachen Punkt hat. Zieht man durch g_1 eine Gerade A, die Γ noch in γ_2 γ_3 γ_4 schneidet, so wird A von $C_1{}^3$ in einem Paare, von $C_2{}^3$, $C_3{}^3$, $C_4{}^3$ in 3 anderen Paaren geschnitten, welche letztere alle g_1 enthalten.

Mithin hat A mit der dem g_1 entsprechenden C^6 ausser g_1 nur 3 Punkte gemein. Hiernach kommt es auf einer um g_1 sich drehenden A dreimal vor, dass einer der 3 dem g_1 entsprechenden Punkte mit g_1 coincidirt, die Lagen von A, wo dies geschieht, sind die Tangenten der C^6 in g. Direkt kann man dies durch eine Correspondenz zwischen A und den Tangenten der $C_2{}^3$, $C_3{}^3$, $C_4{}^3$ in g_1 nachweisen.

Die Correspondenz ergibt vier Coincidenzen, von denen eine aus nahe liegenden Gründen nicht zu rechnen ist, die nämlich, welche in der Tangente von $C_1{}^3$ in g_1 stattfindet.

Indem man sich auf das eben Vorgebrachte stützt, beweist man den Satz: Wenn eine Curve m^{ter} Ordnung C^m in der Verwandtschaft sich selbst entspricht, so ist stets m ein Vielfaches von 3, z. B. $= 3x$, und jeder g ist ein $x$facher Punkt der C^m: Gesetzt ein g_i sei x_i fach auf C^m. Dem g_1 entspricht eine C^6, welche mit C^m x_1 einfache Punkte gemein haben muss; d. h.

$$x_1 = 6m - 3x_1 - 2x_2 - \ldots - 2x_8\,,$$

ebenso ist

$$x_2 = 6m - 3x_2 - 2x_1 - \ldots - 2x_8\,;$$

folglich

$$x_1 = x_2.$$

Nun muss jede $C_0{}^{17}$ (cf. 10), welche die g zu 6fachen Punkten hat, und irgend einer Geraden A in $(a\alpha)$ entspricht, mit C^m genau m einfache Punkte gemein haben, nämlich die mit den Schnittpunkten von A, C^m gepaarten Punkte, d. h.

$$17m = 48x + m\,;\; m = 3x.$$

Hiebei ist ein Zerfallen der C^{3x} in Bestandtheile, die einzeln sich selbst entsprechen, nicht ausgeschlossen.

10. Wenn eine Gerade A der Ebene von a beschrieben wird, so durchlauft α eine rationale Curve 17. Ordnung $C_0{}^{17}$. Da es sich für 6 Lagen des a ereignet, dass α auf g_i fällt (9 *b*), so erhält diese Curve g_i zum 6fachen Punkt. Wie viele Punkte α liegen auf einer Geraden B?

Sei y ein auf B variabler Punkt, (C^9) der Büschel, welcher zu den a gehört. Eine durch y gehende C^9 desselben schneidet A in a; dann findet sich α, indem man C^9 mit der durch a gehenden C^3 schneidet, diese habe mit B die 3 Punkte z gemein. Jeder Punkt z entspricht, wie man sieht, 27 Punkten y, was zu 30 Coincidenzen führt. Wird hiebei a in einem der 4 Punkte γ_i angenommen, die auf Γ liegen, so besteht die C^9 aus der C_i^3 und einer C^6; die C^3 aber, mit welcher diese C^9 zu schneiden ist, wird identisch mit C_i^3. Mithin zählen die 3 Schnittpunkte von C_i^3 und B auch als Coincidenzen, ohne dem Punkte γ_i in $(a\alpha)$ zu entsprechen. Ferner zählt ebenfalls der Schnittpunkt AB als eine nicht in Betracht kommende

Coincidenz, und es bleiben

$$30 - 4.3 - 1 = 17.$$

Dass diese sämmtlich zu rechnen sind, folgt daraus, dass der zu bestimmende Ort mit irgend einer C^3 die 3 Punkte gemein hat, welche den Schnitpunkten von A, C^3 entsprechen die g aber als 6-fache Punkte besitzt, folglich mit C^3 im Ganzen $8.6 + 3 = 3.17$ Schnittpunkte hat. Die C_0^{17} mit 6-fachen Punkten in den g constituiren ein Netz, weil eine solche Curve durch 2 einfache Punkte α_1 α_2 bestimmt ist, ihnen entsprechen in $(a\alpha)$ die Geraden der Ebene.

a) Da γ sich selbst entspricht, so geht die zu A gehörige C_0^{17} nicht durch γ, wenn A den γ nicht enthält. Sie schneidet A in 17 Punkten, wovon 8 zu den 4 auf A liegenden Paaren gehören, die 9 andern solche Punkte δ sind, deren entsprechende ihnen unendlich nahe liegen, Da auf einer beliebigen A nur dies 9 Punkte δ sind, so liegen alle δ der Ebene auf einer Curve 9. Ordnung J^9, welche mit der oben gefundenen C^{15} die Jacobische Curve des Netzes der C^9 zusammensetzt. Jeder Punkt δ von J^9 tritt als Doppelpunkt einer im Allgemeinen einfachen C^9 auf. Wenn aber eine C^9 einen nicht auf J^9 befindlichen Punkt a als Doppelpunkt besitzt, so zerfällt sie, wie wir gesehen haben, und a liegt auf C^{15}. Die C^9 endlich, welche zum Doppelpunkt einen gemeinsamen Punkt von J^9, C^{15} hat — δ^2 bedeute einen solchen Punkt — zerfällt auch in eine C^3 und eine C^6, die in δ^2 eine gewisse Tangente der Γ berühren (c. f. 11).

Die J^9 lässt folgende prejectivische Erzeugung zu: Man lege A durch γ, alsdann wird sie von der entsprechenden C_0^{17} in γ berührt, und ferner in 15 Punkten geschnitten, von denen 6 auf die drei C^3 fallen, welche γ zum Wendepunkt haben, während die 9 übrigen der J^9 angehörige δ sind. Dreht sich A um γ, so beschreibt C_0^{17} einen dem Büschel (A) prejectivischen Büschel (C_0^{17}) und das Erzeugniss wird eine Curve 18. Ordnung sein, die g_i zum 6fachen, γ zum 3fachen Punkt hat. Ein Theil dieses Erzeugnisses besteht aber aus den drei genannten C^3, mithin hat der andere Theil, d. i. J^9 in den g dreifache Punkte, und enthält γ nicht. Die Tangenten der J^9 in einem dreifachen Punkt g_1 sind einerlei mit den Tangenten der C^6, welche dem g_1 entspricht (9 *b*).

b) Die Bestimmung der Enveloppe E^9 der Geraden, auf welchen sich ein Paar a, α zu einem Punkte δ vereinigt, gestaltet sich sehr einfach: Die C^9, welche zu einem beliebigen Punkte o gehört, hat mit J^9 ausser den vielfachen Punkten noch 9 Punkte gemein; deshalb ist 9 die Klasse der Enveloppe. Man kann diese E^9 auch durch ihre Punkte bestimmen. δo sei eine Tangente derselben, dann werden alle zu den Punkten o dieser Tangente gehörige C^9 in δ die Gerade δo berühren. In diesem Büschel (C^9) ist eine Curve die δ zum Doppelpunkte hat, sie gehöre zu o_1; dann lassen sich gemäss unserer Construction von o_1 ausser $o\delta$ nur noch 7 Tangenten an C^9 ziehen, also muss o_1 der Berührungspunkt der Tangente sein. Somit ist die Enveloppe der Ort derjenigen Punkte o, zu welchen die C^9 gehören, denen noch ein Doppelpunkt auf J^9 zukommt. Wie wir oben sahen, ist jede Gerade A 8fache Tangente einer A^9; diese Curve berührt die C^9 in neun Punkten.

Um dies einzusehen, bestimmen wir auf einer einfachen Tangente $a\alpha$ der A^9 den Berührungspunkt:

Ist a' ein zweiter Punkt von A, α' sein homologer, und schneiden sich die Tangenten

$a\alpha$, $a'\alpha'$ in o, so enthält die zu o gehörige C^9 die beiden Paare $a\alpha$, $a'\alpha'$. Wenn hiebei a' unendlich nahe bei a liegt, so berührt die C^9 in a die A, und der Punkt o wird Berührungspunkt von $a\alpha$ mit A^9. Kommt nun a in eine der 9 Lagen, wo α mit ihm sich vereinigt, so muss die C^9 hier sowohl A als $a\alpha$ tangiren, d. i. einen Doppelpunkt haben. Gehört sie dann zum Punkte o_1, so ist dieser sowohl Berührungspunkt der betreffenden Tangente $a\alpha$ mit E^9 als auch mit A^9.

Gestützt auf diese Betrachtung findet man sofort die Ordnung der A^9:

Weil jedem Punkte o auf A^9 eine C^9 angehört, die A tangirt, und umgekehrt, den auf einer Geraden liegenden o aber ein Büschel C^9 entspricht, so fragt es sich, wie viele Curven eines Büschels (C^9) die A berühren?

Deren gibt es bekanntlich 2.8, mithin ist 16 die Ordnung der A^9. Mittels einer naheliegenden Correspondenz auf A findet man, dass im Netz der C^9 21 Curven sind, die A osculiren, ferner 84, die A doppelt berühren, die zugehörigen o sind beziehlich Spitzen, Doppelpunkte der A^9.

c) Sondert man von den Paaren, die auf einer Tangente $a\alpha$ der A^9 liegen, das eine a, α ab, so bleibt als Ort für die 3 anderen eine Curve 63. Ordnung übrig (8), welche jeden g zum 21-fachen, γ zum 9-fachen Punkte hat. Kommt es nun vor, dass auf einer Tangente $a\alpha$ eines dieser Paare in einem Punkte δ vereinigt ist, so wird $a\alpha$ die E^9 berühren. Die Ortscurve 63. Ordnung hat aber mit J^9 genau 63 Punkte gemein; daher berühren sich die A^9 u. E^9 in 9 Punkten, und haben noch 63 gemeinschaftliche Tangenten.

Die einer beliebigen Gerade A entprechende A^9 kann stets benutzt werden, um den Ort der Paare zu bestimmen, welche auf den Tangenten einer Curve von gegebener Klasse sind. Die Γ ist z. B. 6. Klasse, folglich ist der fragliche Ort $9.6 = 54$. Ordnung, einer durch g gehenden A gehört eine A^6, also ist jeder Punkt g 18-fach, γ dagegen 6-fach. Da aber in diesem Ort die oben gefundene C^{15} als Ort der Doppelpaare vorkommt, so bleibt als Ordnung für den Ort der beiden anderen getrennten Paare $54 - 2.15 = 24$, und jeder g ist ein 8-facher Punkt, γ liegt nicht auf diesem Orte.

11. Die Curve E^9 besitzt 24 Doppeltangenten: Eine Tangente T der E^9 enthält im Allgemeinen einen Punkt δ, eines der 4 auf T liegenden Paare repräsentirend. Kommt es vor, dass auf T zwei verschiedene δ sind, so ist T Doppeltangente der E^9; nur dann nicht, wenn auf T zwei δ sich zu einem Punkte δ^2 vereinigen. Mit Hülfe der A^9 ergibt sich als Ort der auf T liegenden Paare, eine Curve von $9.9 = 81$. Ordnung, wobei die J^9 doppelt mit gerählt ist. Folglich sind die Paare der T, welche von diesen δ der J^9 verschieden sind auf einer Curve von der Ordnung 63, mit 21-fachen Punkten in den g.

Diese Curve geht durch alle mit δ^2 bezeichneten Punkte, welche nichts anderes sind als die einfachen Schnittpunkte von J^9 mit C^{15} (10 *a*).

Aber die Curve 63. Ordnung hat mit $J^9: 9.63 - 8.63 = 63$ einfache Punkte; C^{15} hat mit J^9 15 einfache Punkte δ^2 gemein, bleiben $63 - 15 = 48$ Schnittpunkte von J^9 mit jener Curve 63. Ordnung, und diese liegen paarweise auf Doppeltangenten der E^9, deren es somit 24 gibt.

Betrachtet man ferner eine T, die einen der Punkte δ^2 trägt, so berührt diese die Γ, etwa in γ_i: Nach Früherem gehört dann zu γ_i eine in C_i^3 und C_i^6 zerfallende C^9, und beide Curven berühren in δ_2 die T. Demnach liegt γ_i auch auf E^9 und T berührt sie hier; also berührt E^9 die Γ in 15 Punkten. E^9 und Γ haben ausserdem noch 24 gemeinschaftliche Tangenten, welche den Punkten δ entsprechen, die auf C_8^{24} fallen; in der That haben J^9 und C_8^{24} $9.24 - 8.24 = 24$ einfache Punkte gemein.

Weil E^9 24 Doppeltangenten hat, so ist ihre Ordnung 24, und weil jedem ihrer Punkte o_1 eine C^9 mit einem Doppelpunkte δ auf J^9 zukommt, so folgt:

In einem Büschel der C^9 sind 24 Curven, welche auf J^9 je einen Doppelpunkt besitzen, überdies noch 4 in eine C_i^3 und C_i^6 zerfallende Curven, welche also zwei gepaarte Doppelpunkte auf der C^{15} haben.

12. Einer hyperelliptischen Curve C von der Ordnung m und dem Geschlechte p ist eine rationale Curve H, deren Klasse $m - p - 1$ ist, associirt: Die Geraden nämlich, welche die auf C befindlichen Punktpaare tragen, umhüllen die H. Zieht man durch einen beliebigen Punkt o einen Strahl, der die C in m Punkten a schneidet, und verbindet o mit den m Punkten α, die mit a auf C gepaart sind, so erhält man in o eine Correspondenz m, m von Strahlen, daher $2m$ Coincidenzen, von welchen die auszuscheiden sind, die von coincidirenden $a\alpha$ auf C herrühren, bleiben übrig $2m - 2p - 2$. Wenn aber auf einem Strahl von o ein Paar $a\alpha$ liegt, so zählt dieser Strahl für 2 Coincidenzen, also gibt es $m - p - 1$ solcher Strahlen. Für unsere C^{3n} ist $p = 2n - 2$, die associirte H^{n+1} von der Klasse $n + 1$. Direkt ergibt sich diese Zahl, wenn man C^{3n} mit der zu o gehörigen C^9 schneidet: C^{3n}, C^9 haben ausser den in den vielfachen Punkten liegenden Schnittpunkten nach $2n + 2$ Punkte gemein, welche paarweise auf Strahlen von o liegen müssen.

Denkt man die auf C liegenden Paare a, α durch einen Büschel adjungirter Curven von $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeschnitten, so erkennt man, dass die Tangenten der H eindeutig den Elementen des Büschels entsprechen, woraus dann zu schliessen ist, dass H das Geschlecht Null hat.

In unserem Falle wollen wir die Doppeltangenten der H^{n+1} ermitteln: Wenn auf irgend einer Tangente der H^{n+1} zwei getrennte Paare a, α vorkommen, so hat man eine Doppeltangente. Nun haben die 4 Paare einer variablen Tangente der H^{n+1} einen Gesammtort von der Ordnung $9(n+1)$, auf welchem jeder g $3(n+1)$fach, γ $n+1$fach vorkommt. Für den Ort der drei Paare, von denen im Allgemeinen keines auf C^{3n} liegt; bleibt also eine Curve C^{6n+9} mit $2n+3$fachen Punkten in g und einem dreifachen Punkt in γ. C^{6n+9} und C^{3n} schneiden sich in:

$$3n(6n+9) - 8n(2n+3) - 3(n-2) = 2n^2 + 6$$

einfachen Punkten, welche gepaart sind. Zum Theil gehören diese Paare den Doppeltangenten der H^{n+1} an, zum andern Theil sind es die vereinigten Paare, welche auf C^{3n} sind, d. h. diejenigen, welche C^{3n} mit C^{15} gemein hat. C^{3n}, C^{15} schneiden sich in:

$$45n - 8.5n - 3(n-2) = 2n + 6$$

Punkten, also liegen:

$$2n^2 + 6 - 2n - 6 = 2n^2 - 2n$$

Schnittpunkte der C^{3n}, C^{6n+9} auf Doppeltangenten der H^{n+1}. Weil endlich jede Doppeltangente 4 dieser Punkte aufnimmt, so sind $\frac{n(n-1)}{2}$ Doppeltangenten vorhanden, und H^{n+1} ist vom Geschlechte Null. Vorausgesetzt, dass keine dieser Doppeltangenten eine Wendetangente ist, wäre $2n$ die Ordnung der H^{n+1}. Die Ordnung lässt sich auch auf folgende Art finden. Die zu einem Punkte o der H^{n+1} gehörige C^9 berührt die C^{3n} doppelt in zwei gepaarten Punkten, und umgekehrt, gehört eine solche C^9 zu einem Punkte der H^{n+1}. Die Frage ist also, wie viele C^9 sind in einem Büschel dieser Curven, welche die C^{3n} in Punktepaaren berühren? Wegen der Rationalität von H^{n+1} besteht eine gewöhnliche Correspondenz 1, n zwischen den $n+1$ Paaren, welche die Curven eines Büschels C^8 auf C^{3n} ausschneiden und diese ergibt $2n$ Coincidenzen.

Eben so leicht findet sich, dass im Netze der C^9 $3(n-1)$ Curven sind, welche die C^{3n} in je einem Punktenpaar osculiren, die betreffenden Punkte o sind so viele Spitzen der H^{n+1}; ferner gibt es $2(n-1)(n-2)$ Curven, welche die C^{3n} in 2 Punktepaaren berühren, die Punkte o sind die Doppelpunkte der H^{n+1}.

Wir heben noch die Stellen auf C^{3n} hervor, wo ein Punkt a mit seinem entsprechenden α zusammenfällt. Erstens tritt dies ein in γ, und zwar n—2mal, auf jeder Tangente der C^{3n} in γ; weshalb auch diese n—2 Tangenten die H^{n+1} berühren, zweitens in den $27n - 8.3n$ Schnittpunkten des J^9 mit C^{3n}, also überhaupt an $4n - 2 = 2p + 2$ Stellen.

II.

Hyperelliptische C^{3n} vom Geschlechte $2n-1$.

13. Wir haben unter I stillschweigend vorausgesetzt, dass der 9. Punkt γ des Büschels (C^3) mit keinem der 8 Punkte g zusammenfällt. Wenn dies geschieht, wenn etwa γ auf g_8 fällt, so reducirt sich die Verwandtschaft (a, α), und ist durch die 7 andern Punkte $g_1 \ldots g_7$ allein bestimmt: Statt der Curve Γ hat man jetzt eine durch g_8 gehende Gerade, welche in g_8 von jeder C_i^3 berührt wird; der noch auf Γ liegende Punkt der C_i^3 ist dann γ_i, und jede durch γ_i gehende Gerade schneidet aus C_i^3 ein Paar a, α aus. Auf einer beliebigen Geraden der Ebene liegt demnach nur ein Paar, weil die Gerade mit Γ nur einen Punkt gemein hat.

Fasst man irgend ein Paar a, α auf, welches durch die C_i^3 bestimmt wurde, so gewahrt man, dass die 9 Punkte $g_1 \ldots g_7$, a, α Grundpunkte eines Büschels von C^3 sind: Denn nach dem Restsatze schneidet jede C^3, welche die $g_1 \ldots g_7$ enthält, die C_i^3 in zwei Punkten, deren Verbindungslinie einen auf C_i^3 festen Punkt enthält. Da es nun solche C^3 gibt, welche C_i^3 in g_8 berühren, so ist γ_i dieser feste Punkt, und jede durch $g_1 \ldots g_7$, a gehende C^3 muss durch α gehen.

Die uns jetzt vorliegende Verwandtschaft $(a\alpha)$ besteht also zwischen je zwei Punkten a, α, welche mit $g_1 \ldots g_7$ die Grundpunkte eines Büschels C^3 formiren. Wir werden daher g_8 nicht weiter berücksichtigen, unter g_i einen der 7 Punkte g, unter C^3 eine Curve des

Netzes verstehen, das die g_i zu Grundpunkten hat. Die Paare a, α, welche auf einer C^3 sind, liegen sonach auf den Strahlen eines Büschels, dessen Centrum p auf C^3 ist; so dass jeder C^3 ein bestimmter Punkt p auf ihr zugewiesen ist. Wenn π mtt p gepaart ist, so berührt $p\pi$ die C^3 in p. Also gehört auch zu jedem beliebigen Punkte p der Ebene eine durch ihn gehende C^3 als Ort für die Paare, welche auf den Strahlen von p liegen, diejenige C^3 nämlich, welche $p\pi$ in p berührt. Einem Punkt g_i entspricht die Curve des Netzes, welche g_i zum Doppelpunkt hat.

14. Jede Gerade A der Ebene ist Doppeltangente einer Curve 3ter Klasse A^3, deren Tangenten die Paare tragen, von welchen ein Punkt auf A liegt:

Sollen nämlich solche Paare auf den Strahlen eines Büschels p liegen, so müssen sie auch der C^3 angehören, die dem Punkte p zugewiesen ist; und diese schneidet A in 3 Punkten.

Die einer durch g_i gehenden Geraden entsprechende Curve A^2 ist ein Kegelschnitt.

Sind A, B irgend zwei Geraden, so gibt es 8 Paare, von denen jedes einen Punkt auf A, den andern auf B hat:

Denn A^3, B^3 haben ausser der Tangente, die durch den Schnittpunkt AB geht, noch 8 gemeinschaftliche Tangenten, auf welchen diese Paare sind.

Wenn aber eine der Geraden, etwa B durch g_i geht, so sind nur 5 solcher Paare vorhanden. Also entsprechen den Punkten a einer Geraden A die Punkte α einer Curve 8. Ordnung, welche, da sie auf einer durch g_i gehenden B nur 5 Punkte hat, g_i als 3fachen Punkt besitzt.*)

Geht aber A durch g_i, so zerfällt die Curve 8. Ordnung in die Curve C^3, welche g_i zum Doppelpunkte hat, und eine Curve 5. Ordnung, welche einfach durch g_i geht, in den 6 andern g Doppelpunkte hat.

Da ferner auf einer solchen A nur ein Paar liegt, und zwar eines, dessen einer Punkt g_i selbst ist, so sind die 4 Schnittpunkte von A und der Curve 5. Ordnung, die auf A liegenden sich selbst entsprechenden Punkte δ, d. h. Punkte, in welchen sich je ein Paar vereinigt hat (coincidirende Paare). Auf jeder andern Geraden liegen 6 von diesen Punkten δ, in denen A von der Curve 8. Ordnung, welche auch das auf A fallende Paar enthält, noch weiter geschnitten wird. Der Ort der coincidirenden Paare δ ist daher 6. Or-

*) Anmerkung. Die Transformation 8. Grades $(a\alpha)$ oder $\mathfrak{T}$ erscheint hier als Specialität der unter I ebenso bezeichneten vom Grade 17. Dennoch ist letztere nur das Resultat von einigen nach einander vorgenommenen $\mathfrak{T}$ der ersten Art: Man nehme z. B. $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$ mit je 7 Fundamentalpunkten, beziehlich in $g_1, g_2, g_4 \ldots g_8$; $\gamma, g_2, g_4 \ldots g_8$; $g_3, g_2, g_4 \ldots g_8$ an. Eine C_i^3 des Büschels (g, γ), welche die Geraden γg_3, $g_1 g_3$, γg_1 resp. in c_1, c_2, c_3 schneiden möge, wird durch die $\mathfrak{T}$ in sich verwandelt. Sei o beliebig auf C_i^3, und es schneide C_i^3 die oc_1 in 1, $1c_2$ in 2, $2c_3$ in 3; alsdann führt $\mathfrak{T}_1$ o in 1 über, $\mathfrak{T}_2$ demnächst 1 in 2, $\mathfrak{T}_3$ endlich 2 in 3, also $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}_3$ o in 3. Aber $o3$ trifft C_i^3 in einem von der Lage des o unabhängigen festen Punkte c_4. (v. Steiners Polygone, 1. Satz. im 6. Bd. dieser Abh.) Verlegt man o nach γ, so fällt anch 3 auf γ, weshalb c_4 nichts anderes als der Tangentialpunkt γ_i ist und man erkennt so die Aequivalenz der Operation $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}_3$ mit der Transformation 17. Grades

dnung, und besitzt die g_i als Doppelpunkte. Es ist die Jacobische Curve J^6 für das Netz der C^3.

15. Durchläuft ein Punkt p eine Gerade P, so beschreibt die zugehörige C^3 einen Büschel, dessen Grundpunkte ausser den g das auf P befindliche Paar sind. Denn der Punkt, zu welchem eine C^3 gehört liegt stets auf der Verbindungslinie irgend eines Paares der C^3.

Je zwei Paare a, α; b, β werden durch eine C^3 verbunden, nämlich durch diejenige, welche dem Schnittpunkte $a\alpha$, $b\beta$ angehört. Mittels dieser Bemerkung ist es leicht, die Curve A^3 punktweise zu bestimmen. Der Punkt a von A sei mit α, ein benachbarter a_1 mit α_1 gepaart, dann gehört zum Schnittpunkte von $a\alpha$, $a_1\alpha_1$ eine C^3, wechle durch a, a_1 geht. Um daher auf $a\alpha$ ihren Berührungspunkt mit A^3 zufinden, hat man $a\alpha$ nur mit der C^3 zu schneiden, welche in a die A berührt, oder den Punkt zu bestimmen, zu welchen diese C^3 gehört.

Nun gibt es im einem Büschel von C^3 4 Curven, welche A berühren; daher liegen auf jeder Geraden der Ebene 4 Punkte der A^3, oder die Ordnung der A^3 ist 4. Fernen gibt es 3 C^3 des Netzes, welche A zur Wendetangente haben, die diesen C^3 zugehörigen Punkte p sind die Spitzen der A^3. Bemerkenswerth sind die 6 Tangenten der A^3, welche von den Punkten δ ausgehen, in welchen A und J^6 sich schneiden. Ist δp eine derselben, p ihr Berührungspunkt auf A^3, so gehört zu p nach dem Vorigen eine C^3, die in δ sowohl von A, als von δp berührt wird, d. h. die δ zum Doppelpunkt hat; in dem Büschel von C^3, die in δ die δp berühren, existirt aber bekanntlich nur eine C^3 mit einem Doppelpunkt in δ.

16. Die Enveloppe der Geraden, welche die Paare tragen, die in einem Punkte δ vereinigt ercheinen, oder aus zwei unendlich nahen Punkten bestehen, ist von der 4. Klasse und 12. Ordnung E^4. Durch einen Punkt p gehen 4 und nicht mehr solcher Geraden, nämlich die Tangenten aus p an die zu p gehörige C^3. Und da es keine Gerade gibt, auf welcher mehr als ein Paar liegt, so kannn man schliessen, dass die E^4 keine Doppeltangenten besitzt, also von 12. Ordnung ist. Dies erhellt auch so:

δ sei ein Punkt von J^6, δp die durch ihn gehende Tangente der E^4, p_1 ihr Berührungspunkt auf E^4. Zu jedem Punkte p derselben gehört eine C^3, die δp in δ berührt, mit J^6 ausser δ noch 3 Punkte s gemein hat. Die ps sind mit $p\delta$ die 4 an E^4 gehenden Tangenten Unter den C^3 ist eine, für welche δ Doppelpunkt ist, und die zum Punkte p_1 gehören möge. Dann ist p_1 der einzige Punkt auf δp, von welchem sich ausser $p_1\delta$ nur noch 2 Tangenten. an E^4 ziehen lassen, folglich ist er der Berührungspunkt von δp mit E^4. Man sieht, dass den Punkten δ auf J^6 eindeutig die p_1 der E^4 entsprechen, und dass letzteren Punkten sämmtliche C^3 entsprechen, die einen Doppelpunkt haben. Es ist nun klar, dass von diesen Punkten 12 auf irgend einer Geraden P sind; denn zu den Punkten von P gehört ein Büschel C^3, in welchem es 12 Curven mit Doppelpunkt gibt. Gehen wir auf das zurück, was in der vorigen Nummer über die 6 Tangenten δp einer A^3 gesagt wurde, so folgt:

Sämmtliche A^3 sind der E^4 einbeschrieben, und berühren sie in 6 Punkten die den 6 auf A liegenden δ entsprechen.

Die hyperelliptischen C^6 vom Geschlechte 3.

Jede Curve 6. Ordnung C^6, welche die sieben g zu Doppelpunkten hat und ein Paar $a\alpha$ enthält, ist hyperelliptisch und entspricht sich selbst in der Verwandtschaft $(a\alpha)$. Sie ist projectivisch erzeugbar auf unendlich vielfache Weise durch den Büschel $(C^3)_1$ mit den Grundpunkten g, a, α, in Verbindung mit einem anderen Büschel zu dessen Grundpunkten die g ebenfalls gehören.

Von einer C^6 mit dem 7 Doppelpunkten g sind noch 6 Punkte, von denen keine zwei zu $(a\alpha)$ gehören, willkürlich sie ist durch diese bestimmt. Sind a, b, c, d, e 5 solche Punkte, so geht durch sie ein Büschel von C^6, eine davon C_1 also durch α. Wenn β mit b gepaart ist, so gibt es einen Büschel $(C^3)_2$ mit den Grundpunkten g, b, β. Bezieht man diesen auf $(C^3)_1$ derart projectivisch, dass die 3 Curvenpaare beider Büschel, die respective durch c, d, e gehen einander entsprechen, so erzeugt diese die C^6. Die Punktepaare, welche auf ihr auftreten, sind in der Verwandtschaft $(a\alpha)$ und jede adjungirte 3. Ordnung, welche durch einen Punkt eines Paares geht, enthält auch den andern.

Da aber auch jede hyperelliptische C^6 vom Geschlechte 3 auf diese Weise erzeugt werden kann, so entspricht sie sich selbst in $(a\alpha)$. Von einer solchen C^6 sind nach dem Gesagten 5 und nur 5 Punkte willkürlich, mithin existirt in jedem Büschel von Curven 6. Ordnung mit den 7 Doppelpunkten g eine hyperelliptische C^6 vom Geschlechte 3, die anderen Curven mögen mit $\mathfrak{C}^6$ bezeichnet werden.

Wir machen hier auf einen Irrthum aufmerksam, der bei den besseren mathematischen Autoren, wie Cremona, Clebsch-Lindemann sich findet. Es heisst, das man auf eine Curve C^{2n} die n^2 Grundpunkte eines Büschels von C^n bringen könne, indem man von diesen n^2 Punkten $3n-2$ auf C^{2n} willkürlich annimmt. Hiernach könnte man glauben, dass, wenn die C^{2n} $3n-2$ oder mehr Doppelpunkte hat, man die willkürlichen Punkte in diesen annehmen dürfe. Dies ist nicht richtig, wie schon das Beispiel der C^6 zeigt. Es läst sich aber beweisen, dass man $3n-2-v$ Doppelpunkte (wo v nothwendig $> O$) als willkürliche Grundpunkte des Büschel's von C^n annehmen kann.

Unter den $\mathfrak{C}^6$ ist auch die Jacobische $J_1{}^6$ und es kommen unter ihnen auch Curven vom Geschlechte 2 vor, diejenigen, welche ausser den g noch einen 8. Doppelpunkt g_8 haben: Liegt dieser nicht auf J^6 und ist mit γ gepaart in $(a\alpha)$, so kann die Curve kein Paar $a\alpha$ enthalten, wenn sie sich nicht durchweg selbst entsprechen soll; alsdann müsste sie durch γ gehen und (nach 4) in zwei C^3 zerfallen. Ist dagegen g_8 ein Punkt δ der J^6; so ist die Curve, wie wir sehen werden (18b) eine sich selbst entsprechende C^6.

18. a. Einer C^6 ist ein Kegelschnitt H^2 associirt, und umgekehrt, jeder Kegelschnitt der Ebene ist einer bestimmten C^6 als associirte Curven zugewiesen.

Beweis. Die zu einem Punkte p gehörige C^3 schneidet C^6 in 4 Punkte, welche paarweise auf Strahlen von p liegen und zwei Paare in $(a\alpha)$ sind. Auf C^6 existirt kein anderes Paar, das auch auf einem Strahl von p läge. Sei H^2 ein beliebiger Kegelschnitt, A, B, C, D, E 5 seine Tangenten, auf denen die Paare $a\alpha$, $b\beta$, $c\delta$, $d\delta$, sind. Dann geht durch diese Paare eine einzige C^5, welcher H^2 associirt ist.

b) Einer C^6, die auf J^6 in δ einen Dopelpunkt hat, entspricht eine H^2, welcher die E^4 in dem Punkte p_1 berührt, der dem δ auf E^4 entspricht und umgekehrt: berührt H^2 die E^4 in p_1, so ist H^2 einer C^6 associirt, die in δ einen Doppelpunkt hat.

Die Construction der Tangenten an H^2 für irgend einen Punkt p auf δp_1 liefert ausser $p\delta$ nur eine Tangente, da die zu p gehörende C^3 die C^3 ausser in δ noch in 2 Punkten schneidet, die auf eine Gerade durch p fallen. Wird aber p_1 selbst angenommen, dem die C^3 entspricht, welche δ zum Doppelpunkt hat, so sieht man, dass von p_1 an H^2 keine Tangente ausser $p_1\delta$ geht, folglich muss H^2 die δp in p_1 berühren.

Die Mannigfaltigkeit der C^6, welche in δ einen Doppelpunkt haben, ist leicht anzugeben: Soll eine C^6 in δ die Gerade δp berühren, so sind von ihr noch 4 Punkte willkührlich, durch drei Punkte a, b, c geht also noch ein Büschel C^6, in welchem eine Curve ist mit dem Doppelpunkt δ. Wenn demnach ein Kegelschnitt H^2 vorliegt, der in p_1 die $p\delta$ berührt, A, B, C drei seiner Tangenten, $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, die auf ihnen liegenden Paare sind, so gibt es eine C^6 mit dem Doppelpunkt δ durch a, b, c. Dieser wird dem Kegelschnitt associirt sein, der zu Tangenten A, B, C, δp hat und δp in p_1 berührt, mithin identisch mit H^2 ist. Mit den ∞^3 C^6, die wir hier angeben, sind sämmtliche Curven 6. Ordnung erschöpft, welche die 8 Doppelpunkte g und δ haben können.

Es eröffnet sich hier ein bisher nicht betretener Weg, die 63 Systeme 4fach berührenden Kegelschnitte zu entdecken, welche eine allgemeine Curve 4. Klasse, demnach auch eine solche 4. Ordnung zulässt:

19. Die 63 Systeme von Kegelschnitten, welche der E^4 einbeschrieben sind (sie in 4 Punkten berühren).

Einer C^6, welche auf J^6 4 Doppelpunkte δ hat, ist ein Kegelschnitt H^2 associirt, der die E^4 in den 4 Punkten p, die jenen δ entsprechen, berührt, und umgekehrt ist jeder E^4 eingeschriebene Kegelschnitt einer C^6 mit 4 Doppelpunkten δ associirt. Die vier Punkte δ nennen wir ein Quadrupel von J^6, die 4 Tangenten δp ein Quadrupel der E^4. Weil eine C^6 dieser Art 11 Doppelpunkte besitzt, so muss sie zerfallen; und zwar entweder *a)* in eine Gerade L und eine Curve 5. Ordnung, oder *b)* in einen Kegelschnitt L^2 und eine Curve 4. Ordnung, oder *c)* in 2 Curven 3. Ordnung.

Beachtet man, dass die 4 Punkte δ und die g alle Punkte sind, welche C^6 und J^6 gemein haben, so zeigt eine einfache Ueberlegung, dass im Falle *a)* die Punkte δ und ein g auf L, im Falle *b)* die δ und 4 g auf L^2 liegen müssen, im Falle *c)* die beiden Curven 3. Ordnung durch die δ gehen und sich noch in 5 Punkten g schneiden müssen, während jeder der beiden übrig bleibenden g Doppelpunkt einer der Curven ist. Diese möglichen Fälle treten in der That auf:

Einer Geraden L durch g_1 entspricht in $(a\alpha)$ eine Curve 5. Ordnung λ^5, welche die $g_2 \ldots g_7$ zu Doppelpunkten hat, durch g_1 geht und L in 4 Punkten der J^6 schneidet. L und λ^5 machen also eine solche C^6 aus.

Einem Kegelschnitt K entspricht in $(a\alpha)$ eine Curve 16. Ordnung C^{16} mit 16fachen Punkten in den g; denn eine Gerade A hat mit C^{16} so viele Punkte gemein, wie die $C_0{}^8$

welche A entspricht mit K, und die C^{16} muss 6mal durch g_1 gehen, weil die C^3, die dem g_1 in $(a\alpha)$ entspricht, K in 6 Punkten schneidet. Wenn aber K durch g_1, g_2, g_3, g_4 geht, so sind in C^{16} die 4 C^3 eingerechnet, welche den 4 g entsprechen. Dem durch g_1, g_2, g_3, g_4 gehenden L^2 entspricht mithin eine Curve λ^4 vierter Ordnung, welche die genannten g einfach, die drei andern als Doppelpunkte hat.

Nun hat L^2 noch 4 Punkte δ mit J^6 gemein, durch welche auch λ^4 geht. L^2 und λ^4 constituiren eine zweite C^6.

Endlich entspricht einer Curve 3. Ordnung L^3, welche in g_1 einen Doppelpunkt hat und durch $g_2, g_3 \ldots g_6$ geht eine λ^3, für welche g_7 Doppelpunkt ist, und die auch die $g_2 \ldots g_6$ enthält, und L^3 noch in 4 Punkten δ auf J^6 schneidet. Im L^3 und λ^3 hat man wieder eine C^6 mit 4 Doppelpunkten δ. Ausser den hier aufgezählten gibt es keine.

Die in den drei Fällen auf C^6 sich ergebenden Quadrupel δ ordnen sich naturgemäss in 63 verschiedene Systeme, je nachdem sie ausgeschnitten werden:

a) von den Geraden L, die irgend einen g enthalten (7 Systeme);

b) von den L^2, welche irgend 4 g enthalten $\left(\frac{7.6.5}{1.2.3}\right) = 35$ Systeme;

c) von den L^3, welche 5 g als einfache Punkte und einen der beiden andern g einerlei welchen als Doppelpunkt besitzen $\left(\frac{7.6}{1.2}\right) = 21$ Systeme.

Diesen 63 Systemen von Quadrupeln δ entsprechen ebenso viele von Tangentenquadrupeln der E^4, und von dieser Curve einbeschriebenen Kegelschnitten.

Die Tangentenquadrupel in einem bestimmten Systeme sind derart mit einander verknüpft, dass je zwei derselben **einen** Kegelschnitt berühren:

Wir fassen z. B. die beiden Quadrupel δ, δ' auf, welche von 2 durch g_1 gehende Geraden L, L' ausgeschnitten werden. Die 4 δ liegen dann auch auf λ^5. Nun constituiren L', λ^5 eine $\mathfrak{C}^6$, die mit J^6 einen Büschel von $\mathfrak{C}^6$ bestimmt, der zu einfachen Grundpunkten die 8 Punkte δ, δ' hat. In diesem Büschel gibt es (nach 17) eine sich selbst entsprechende C^6, deren associirte H^5 somit die 8 Tangenten δp, $\delta' p$ besitzt. Genau derselbe Beweis gilt für jedes System.

20. Jede Curve $3n^{ter}$ Ordnung C^{3n}, welche die $7g$ zu n-fachen, und irgend zwei gepaarte Punkte $m\mu$ zu $n-1$-fachen Punkten hat, entspricht sich in $(a\alpha)$ selbst, ist hyperelliptisch vom Geschlecht $2n-1=p$, und lässt sich mittels des Büschels $(C^3)_1$ dessen Grundpunkte die g und m, μ sind, und einem Büschel von adjungirten $C^{3(n-1)}$ projectivisch erzeugen.

Sei $C_1{}^3$ die Curve, welche der Büschel durch einen Punkt a der Ebene sendet. Eine durch a gelegte C^{3n} schneidet C^3 noch in einem Punkte x, dessen Identität mit α man beweist, wenn man zeigt, dass eine $C_a{}^3$ des Netzes, welche durch a geht, die $C_1{}^3$ in x schneiden muss: In den g, m, μ, a hat C^{3n} mit $C_1{}^3$

$$7n + 2(n-1) + 1 = 9n - 1$$

gemeinschaftliche Punkte. Die $C_a{}^3$ bildet aber mit $n-1$ Curven von $(C)_1{}^3$, die von $C_1{}^3$ verschieden sind, eine C^{3n}, welche ebenfalls diese Punkte enthält, folglich auch den Punkt x.

Der hyperelliptische Charakter der C^{3n} erhellt jetzt daraus, dass eine $C^{3(n-1)}$ ihr adjungirt ist, und falls sie a enthält, auch α aufnehmen muss. Nimmt man ferner auf C^{3n} $p-2$ Punkte $a_1, a_2 \ldots$ an, so sind dadurch noch ebensoviele α auf C^{3n} mitbestimmt, welche als einfache Grundpunkte eines Büschels von $C^{3(n-1)}$ dienen können. Jede Curve schneidet dann C^{3n} noch in einem Punktepaar a, α, welches zugleich auf einer Curve von $(C^3)_1$ liegt, demnach ist die projectivische Erzeugung evident.

Den C^{3n} sind alle Curven H^n n^{ter} Klasse der Ebene associirt, welche in mp eine $n-1$fache Tangente besitzen.

Beweis. Zunächst ist leicht einzusehen, dass die associirte einer C^{3n} von der n^{ten} Klasse ist, und $m\mu$ nur $n-1$fache Tangente hat: Denn zu einem beliebigen Punkte p gehört eine C^3 des Netzes, welche C^{3n} in $9n-7n=2n$ einfachen Punkten schneidet, die paarweise auf Strahlen von p liegen. Wird aber p auf der Geraden $m\mu$ angenommen, so gehört zu ihm eine der $(C^3)_1$, und diese hat nur noch ein auf einem Strahl von p befindliches Punktepaar mit C^{3n} gemein.

Ferner ist eine H^n mit der n-1facher Tangente $m\mu$ durch $2n$ einfache Tangenten A_1, A_2, $A_3 \ldots$ bestimmt. Sind a_1, α_1; a_2, α_2; die auf denselben liegenden Paare, so lässt sich eine C^{3n} durch die $2n$ Punkte a_1, $a_2 \ldots.$ legen; diese aber enthält auch α_1, $\alpha_2 \ldots$ und hat die angenommene H^n zur associirten Curve.

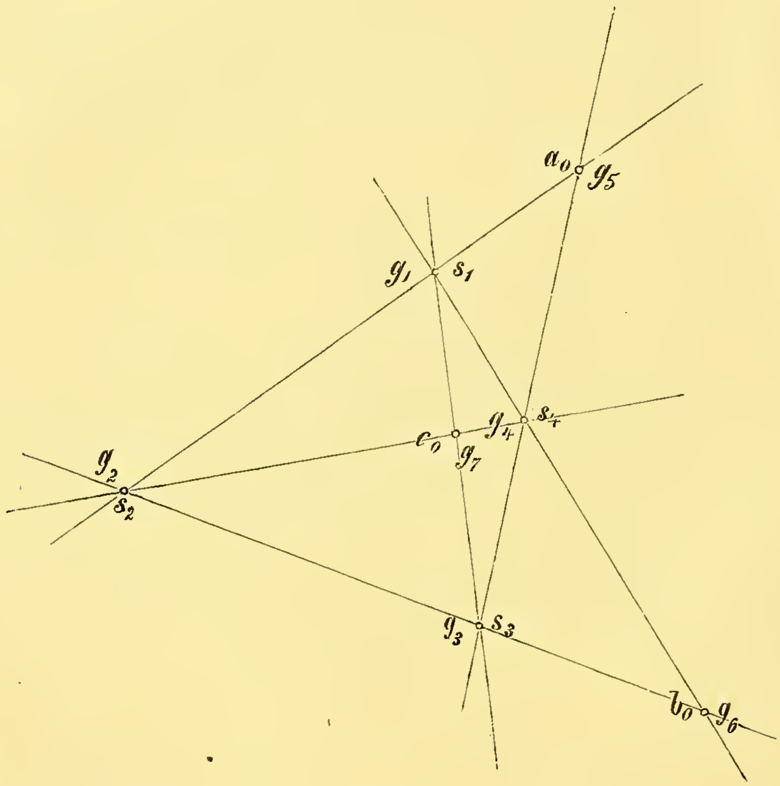
Will man die H^n durch ihre Punkte bestimmen, so ermittele man die C^3, welche die C^{3n} in den Punkten eines Paares berühren; die Punkte p, zu welchen diese C^3 gehören, sind Punkte der H^n. Jede C^3 eines Büschels schneidet aus C^{3n} n Paare, zwischen denen, da sie auf n Tangenten der rationalen H^n liegen, eine gewöhnliche Correspondenz 1, $n-1$ besteht. Folglich gibt es im Büschel $2(n-1)$ Curven, welche C^{3n} doppelt berühren, und weil die p, zu denen jene C^3 gehören, auf einer Geraden sind, so ist $2(n-1)$ die Ordnung der H^n. Durch eine ebenso einfache Correspondenz findet man, dass es im Netz der C^3 $3(n-2)$ Curven gibt, von denen jede die C^{3n} in 2 gepaarten Punkten osculirt, dass endlich $2(n-2)(n-3)$ Curven im Netze vorkommen, welche C^{3n} in je 2 Paaren berühren. Auf diese Weise erhält man die $3(n-2)$ Spitzen, die $2(n-2)(n-3)$ Doppelpunkte der H^n.

21. (Fig. 1.) Die vorstehenden Betrachtungen beruhen auf der Voraussetzung, dass unter den g keine speciellen Relationen der Lage obwalten. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so reducirt sich die Verwandtschaft $(a\alpha)$ auf einen niedrigern Grad, und es erleiden die Sätze Modifikationen. Eine für die Theorie gewisser rationaler Curven 4. Ordnung wichtige Specialität werde hier näher untersucht.

Als 4 der sieben g sollen die Ecken eines Vierecks $\delta_1\, \delta_2\, \delta_3\, \delta_4$ angenommen werden, als die 3 anderen die Schnittpunkte a_0, b_0, c_0 der drei Geradenpaare, von denen jedes die 4 δ enthält. Man beweist leicht, dass $(a\alpha)$ sich auf den 2. Grad reducirt, und nichts anderes ist als die Steinersche Verwandtschaft, für welche a_0, b_0, c_0 die Hauptpunkte, δ die 4 sich selbst entsprechenden Punkte darstellen. Die eben genannten Geradenpaare vertreten die J^6 des Netzes der C^3, die E^4 besteht aus den 4 Strahlenbüscheln (δ).

In unserem Falle lässt sich nun die Verwandtschaft (ad) auf eine neue Weise definiren und dadurch gelangt man zueinem neuen Netze von in $(a\alpha)$ sich selbst entsprechenden $\mathfrak{C}^3$. Seien

$a_1\,\alpha_1$, $b_1\,\beta_1$ 2 beliebige Paare; so ist durch sie ein 3. $c_1\,\gamma_1$ bestimmt — wo γ_1 der Schnittpunkt von $a_1\,b_1$, $\alpha_1\,\beta_1$, c_1 der von $a_1\,\beta_1$, $b_1\,\alpha_1$ sei. — Damit haben wir eine Gruppe I von 6 Punkten, die zu dreien auf einem Quadrupel von Gerader L liegen. Jeder dieser Geraden L, z. B. derjenigen, welche $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$ trägt, entspricht in $(a\alpha)$ ein Kegelschnitt λ^2 durch $a_0\,b_0\,c_0$ $a_1\,b_1\,c_1$ gehend. Mithin sind $a_0\,b_0\,c_0$ und die Gruppe I Grundpunkte eines Büschels (I) von $\mathfrak{C}^3$. Auf irgend einer $\mathfrak{C}^3$ von (I) haben bekanntlich $a_1\,\alpha_1$ denselben Tangentialpunkt, ebenso $b_1\,\beta_1$, $c_1\,\gamma_1$, und diese 3 Paare gehören zum nämlichen Hessischen System Σ auf $\mathfrak{C}^3$. Ferner wird eine $\mathfrak{C}^3$ in $a_1\,b_1\,c_1$ von einem Kegelschnitt berührt, somit auch in $a_0\,b_0\,c_0$, weil durch



Figur 1.

diese 6 Punkte ein Kegelschnitt gelegt werden kann; d. h. für die $\mathfrak{C}^3$ ist $a_0\,b_0\,c_0$ ein Hessisches Tripel des Systems Σ.

Weiss man andererseits, dass auf allen $\mathfrak{C}^3$ eines Büschels $a_0 b_0 c_0$ als Hessisches Tripel auftreten, so schliesst man daraus, dass die 6 übrigen Grundpunkte Ecken eines vollständigen Vierseits sein müssen, und demgemäss als Gruppe I figuriren können. Man braucht dazu nur zu beachten, dass die 3 variablen Punkte, in welchen die Seiten des Dreiecks $a_0\,b_0\,c_0$ von den $\mathfrak{C}^3$ geschnitten wird, jedesmal auf einer Geraden L sind, welche sodann aus projectivischen Gründen einen Kegelschnitt K zur Enveloppe haben wird. Ist jetzt a einer der fraglichen 6 Grundpunkte, L_1 eine Tangente von a an K, so muss diese zu einer Zerfallenden $\mathfrak{C}^3$

gehören, weil sie mit ihr a und noch 3 Punkte (auf den Seiten von $a_0\, b_0\, c_0$) gemein hat. Mithin liegen ausser a noch 2 Punkte 1, 2 der sechs fraglichen auf L_1, die 2. Tangente L_2 des K durch a enthalte noch 3, 4. Wenn b der nur allein noch fehlende 6. Punkt ist, so verbinden die Tangenten, die sich von b an K ziehen lassen, nothwendig in irgend einer Weise 1, 2 mit 3, 4; woraus die behauptete Disposition der 6 Grundpunkte erhellt.

Wenn p, π ein beliebiges Paar von Σ auf einer $\mathfrak{C}^3$ von (I) bedeutet, so wird es aus a_0 durch ein Strahlenpaar einer bestimmten Involution projicirt. Die Doppelstrahlen dieser Involution sind $a_0\,\delta_1$, $a_0\,\delta_2$, weil der Annahme nach diese durch dle Paare $a_0\,a_1$, $a_0\,\alpha_1$; $a_0\,b_1$, $a_0\,\beta_1$ harmonisch getrennt werden. Hiernach wird das Hessische Paar p, π aus a_0, b_0, c_0 durch je ein Strahlenpaar der Involutionen $\mathfrak{a}^2$, $\mathfrak{b}^2$, $\mathfrak{c}^2$ projicirt, welche die Paare von $(a\,\alpha)$ projiziren; d. h. p, π ist selbst ein Paar in $(a\,\alpha)$, und dies genügt, um einzusehen, wie man mit Hilfe der sich selbst entsprechenden $\mathfrak{C}^3$ die Verwandtschaft herstellen kann.

Der Büschel (I) enthält vier, in eine Gerade L und einen Kegelschnitt λ^2 zerfallende Curven, und es repräsentiren die beiden Doppelpunkte einer solchen ebenfalls ein Paar in $(a\,\alpha)$. Ueberdies gibt es in (I) noch vier $\mathfrak{C}^3$ mit je einem Doppelpunkt in δ_1, δ_2, δ_3, δ_4.

Denn je 2 Punkte der Geraden $a_0\,\delta_1$, welche durch δ_1, δ_2 harmonisch getrennt werden, gehören zu $(a\,\alpha)$ und zu einer bestimmten $\mathfrak{C}^3$ von (I); mithin wird diejenige $\mathfrak{C}^3$, welche δ_1 aufnimmt, auf $a_0\,\delta_1$ zwei unendlich nahe Punkte in δ_1 haben, und da Gleiches für $b_0\,\delta_1$, $c_0\,\delta_1$ gilt, so ist δ_1 ein Doppelpunkt dieser Curve.

Um sich ein Netz von $\mathfrak{C}^3$ zu verschaffen, kann man also verfahren: Auf einer beliebigen $\mathfrak{C}_1{}^3$ von (I) wähle man 2 Paare $a_2\,\alpha_2$, $b_2\,\beta_2$, durch welche wie oben ein drittes $c_2\,\gamma_2$ bestimmt ist. Diese 6 Punkte liefern eine Gruppe II, und einen Büschel (II), der in Verbindung mit (I) zur Construction des Netzes dient. Durch einen beliebigen Punkt a_3 der Ebene sendet (I) eine Curve, (II) eine andere, beide Curven müssen α_3 enthalten, der mit a_3 gepaart ist. Sei b_3 einer ihrer anderen gemeinsamen Punkte, dann wird auch der mit b_3 gepaarte β_3 auf beiden Curven sein; ebenso aber offenbar das mit bestimmte Paar $c_3\,\gamma_3$, und hiemit sind die gemeinschaftlichen Punkte erschöpft. So entsteht eine Gruppe III und ein neuer Büschel (III).

Durch jeden Punkt geht demnach ein bestimmter Büschel von $\mathfrak{C}^3$, für welchen Alles stattfindet, was oben von (I) ausgesagt wurde. Die Jacobische Curve des Netzes ist eine C^6, ihre Doppelpunkte sind $a_0\, b_0\, c_0$ und die vier δ; sie ist hyperelliptisch, weil sie ein Paar $a\alpha$ enthält, z. B., das, in welchem irgend eine L von ihrem λ^2 geschnitten wird.

Der Kegelschnitt H^2, welcher der C^6 oder dem Netze associirt ist, wird von den Geraden L sämmtlicher Quadrupel berührt.

Charakteristisch für H^2 ist, dass die Tangentenpaare, die sich von a_0, b_0, c_0 an ihn ziehen lassen, beziehlich in $\mathfrak{a}^2$, $\mathfrak{b}^2$, $\mathfrak{c}^2$ gepaart sind. Denn die gegenüberliegenden Ecken eines der dem H^2 umbeschriebenen Vierseits werden aus a_0 durch eine Strahleninvolution projicirt, in welcher auch das Tangentenpaar von a_0 an H^2 vorkommt; folglich ist diese Involution identisch mit $\mathfrak{a}^2$.

Zur Construction des Netzes kann man auch von einem Kegelschnitt H^2 ausgehen, wenn dieser nur zu Tangenten aus a_0, b_0 zwei respective in $\mathfrak{a}^2$, $\mathfrak{b}^2$ befindliche Strahlenpaare $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$; $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ hat. Wenn nämlich H^2 dieser Anforderung genügt, so sind die Schnittpunkte

$\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$; $\mathfrak{A}\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}$ zwei Paare von $(a\alpha)$; woraus folgt, dass die beiden Tangenten von c_0 an H^2 ein Paar von $\mathfrak{c}^2$ sind.

Legt man ferner durch irgend zwei homologe Punkte der Ebene Tangenten an H^2, so bemerkt man sofort, dass die gegenüberliegenden Ecken des von ihnen gebildeten vollständigen Vierseits wiederum gepaart sind; dass somit diese 6 Ecken als Gruppe I genommen werden können. Von der noch erforderlichen Gruppe II kann man nun auf einer $\mathfrak{C}^3$ des gefundenen Büschels (I) ein Paar $a_2\alpha_2$ willkührlich wählen. Alsdann lege man von a_2 an H^2 eine Tangente L, schneide mit ihr $\mathfrak{C}^3$ in b_2, c_2, und projicire aus α_2 diese Punkte nach γ_2, β_2 auf $\mathfrak{C}^3$. Auf diese Weise erhält man in Folge bekannter Eigenschaften der Curven dritter Ordnung zwei Paare $b_2\beta_2$, $c_2\gamma_2$; und es liegt in $a_2b_2c_2$ $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ die gesuchte Gruppe II vor. Die beiden Geradenquadrupel müssen nach obigem Satze einem Kegelschnitt umbeschrieben sein, und dieser ist H^2 selbst, weil H^2 gemäss der Construction 5 der 8 Geraden berührt. Nach dieser Auseinandersetzung bietet der Beweis des folgenden Satzes keine Schwierigkeit:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das Netz der $\mathfrak{C}^3$ ein Netz erster Polaren sei, besteht darin, dass der associirte Kegelschnitt H^2 in $a_0b_0c_0$ ein Tripel conjugirter Pole hat. Die Fundamentalcurve $C_1{}^4$ ist in diesem Falle die dem H^2 in der Steiner'schen Verwandtschaft entsprechende Curve.

Die hiernach an H^2 zu stellende Forderung wird durch einen einzigen Kegelschnitt realisirt, durch denjenigen nämlich, dessen in $\mathfrak{a}^2$, $\mathfrak{b}^2$, $\mathfrak{c}^2$ befindliche Tangentenpaare durch die Seiten des Dreiecks $a_0b_0c_0$ harmonisch getrennt sind. Wird andererseits ein Kegelschnitt angenommen, der das Tripel $a_0b_0c_0$ besitzt, so ist damit die zu Grunde zu legende Steiner'sche Verwandtschaft schon blos durch ihre Hauptpunkte $a_0b_0c_0$ völlig bestimmt. Diesem gemäss ist alsdann die $C_1{}^4$ dadurch charakterisirt, dass ihr Doppelpunktstangenten zugleich ihre Wendetangenten sind.

Ich habe im 6. Bande dieser Abhandlungen (VI. Folge) einige specifische Eigenschaften dieser $C_1{}^4$ entwickelt, von den Herren Em. Weyr und Schoute sind andere publicirt worden. Auch diese letztern kommen, wie wir sehen werden, ausschliesslich den $C_1{}^4$ zu — was bisher noch nirgendwo bewiesen wurde — und sie haben ihren wahren Grund in dem Umstande, dass auf einer jeden cubischen Polare $a_0b_0c_0$ als Hessisches Tripel auftritt:

a) Betrachtet man z. B. eine in L, λ^2 zerfallende cubische Polare, so berühre L die H^2 in l, λ^2 die $C_1{}^4$ in dem gepaarten Punkte λ. Die durch λ gehenden cubischen Polaren enthalten l und constituiren einen Büschel, in welchem nur eine existirt, die $C_1{}^4$ in λ berührt; diese ist somit L, λ^2, und λ ihr Pol; d. h. die zerfallenden Polaren haben ihre Pole λ auf $C_1{}^4$, oder die Berührungspunkte der Tangenten von λ an $C_1{}^4$ fallen auf eine Gerade L. (Weyr, zur Lemniscate.)

b) Ist $\mathfrak{C}^3$ eine Polare, p ihr Pol, so wird $\mathfrak{C}^3$ von einem Kegelschnitt in a_0, b_0, c_0 berührt, deshalb muss durch die 6 Schnittpunkte von $\mathfrak{C}^3$, $C_1{}^4$ ein Kegelschnitt gehen, oder die Berührungspunkte der 6 Tangenten von p an $C_1{}^4$ fallen auf einen Kegelschnitt (Schoute).

Und wenn umgekehrt eine C^4 mit den Doppelpunkten $a_0b_0c_0$, und der Eigenschaft vorausgesetzt wird, dass für jeden ihrer Punkte λ die cubische Polare zerfällt, so muss $a_0b_0c_0$

ein Hessisches Tripel für alle cubischen Polaren sein: Denn hat eine Gerade A mit C^4 vier Punkte λ gemein, so liefern die zerfallenden Polaren ein Quadrupel von Geraden L, auf welchen die 6 Pole der A zu 3 vertheilt erscheinen. Diese 6 Punkte geben somit eine Gruppe I, und die Polaren der Punkte von A einen Büschel (I), wie wir ihn construirt haben.

Noch direkter führt die Unterstellung dessen, was unter *b)* ausgesagt wurde, zu der charakteristischen Eigenschaft des Netzes.

Als Steiner'sche Curve erhält man die doppelt gezählte $C_1{}^4$, nebst ihren vier Doppeltangenten D. Die Punkte einer Doppeltangente D_1 sind die Pole eines Büschels von $\mathfrak{C}^3$, welche sämmtlich einen und denselben δ zum Doppelpunkt haben, und unter den Grundpunkten dieses Büschels befinden sich die Berührungspunkte von D_1, $C_1{}^4$.

22. Die sich selbstentsprechenden C^9.

Indem wir die Punkte g wieder in allgemeiner Lage annehmen, bezeichnen wir sie durch die Zahlen 1, 2 . . . 7. Sind μ, ν zwei derselben, so verstehen wir unter $s_{\mu\nu}$, $s_{\nu\mu}$ die beiden Punkte, welche die Gerade $\mu\nu$ ausser den Doppelpunkten μ, ν mit J^6 gemein hat, unter $K_{\mu\nu}$ den Kegelschnitt, welcher der Geraden $\mu\nu$ in $(a\alpha)$ entspricht, und der durch $s_{\mu\nu}$, $s_{\nu\mu}$ und die nicht auf $\mu\nu$ liegenden 5 Doppelpunkte der J^6 geht, unter μ', μ'', die dem μ auf beiden Zweigen der J^6 benachbarten Punkte.

Einer Curve 9. Ordnung $\mathfrak{C}^9$, welche die g zu 3fachen Punkten hat, entspricht in $(a\alpha)$ entweder eine andere $\mathfrak{C}_1{}^9$ derselben Art, oder die ihr entsprechende fällt mit ihr selbst zusammen. Mit C^9 ist stets eine Curve der letzteren Kategorie gemeint, welche auch die hyperelliptischen C^9 einschliesst.

Aus unsern Erörterungen erhellt, dass jeder C^9 eine Curve 3. Klasse H^3 associirt ist, welche, falls C^9 hyperelliptisch ist, eine Doppeltangente hat. Umgekehrt ist jede Curve dritter Klasse H^3 einer bestimmten C^9 associirt; denn die zu einer Geraden A gehörige A^3 hat mit H^3 9 Tangenten gemein u. s. w. (siehe oben). Besitzt die H^3 eine Doppeltangente A, die das Paar a, α trägt, so werden a, α Doppelpunkte für die associirte C^9.

Hiernach lässt sich durch 9 beliebige Paare von $(a\alpha)$ eine und im Allgemeinen nur eine C^9 legen. Nimmt man z. B. auf J^6 9 beliebige Punkte an, so geht durch diese eine C^9; sie hat mit J^6 noch 3 Punkte gemein, welche auf jeder $\mathfrak{C}^9$ liegen, die jene 9 Punkte enthält — das Geschlecht von J^6 ist 3 —. Mit andern Worten: Die 12 Schnittpunkte δ einer $\mathfrak{C}^6$ mit J^6 gehören **einer** C^9 an, oder die 12 Geraden, welche die in den δ coincidirenden Paare tragen (Tangenten der E^4), berühren eine Curve 3. Klasse.

Hervorzuheben ist, dass eine C^9, welche die J^6 in einem Punkte δ berührt, hier einen Doppelpunkt haben muss, weil sie in δ auch von der Geraden berührt wird, die das in δ coincidirende Paar trägt und die J^6 in δ schneidet.

Wenn $\mathfrak{C}^9$, $\mathfrak{C}_1{}^9$ sich entsprechen, so schneiden sie sich in 12 Punkten auf J^6, und haben überdiess 6 Punkte gemein, welche zu je zwei in $(a\alpha)$ gepaart sein werden; also: Auf jeder $\mathfrak{C}^9$ sind 3 Paare a, α; b, β; c, γ, und zwar liegen sie auf einer durch 1, 2 . . . 7 gehenden $C_0{}^3$: Nämlich $\mathfrak{C}^9$ hat mit der durch a, α, b, β gelegten $C_0{}^3$ noch 2 Punkte x, y gemein; wenn diese ein Paar bilden, so müssen sie c, γ selbst sein. Man lege durch 1, 2 . . . 7 drei C^3, wovon die eine a, α, die zweite b, β die dritte $C_1{}^3$ den Punkt x enthält, betrachte sie zusammen als eine C^9, dann muss $C_1{}^3$ die $C_0{}^3$ in y schneiden, daher liegt in xy ein Paar von $(a\alpha)$ vor. Man kann auch sagen: die 3 Paare, die auf einer $\mathfrak{C}^9$ sind, werden von 3 Geraden getragen, die sich in einem Punkte (der $C_1{}^3$) schneiden. Wenn demnach auf einer $\mathfrak{C}_1{}^9$ mehr als 3 Paare vorkommen, oder 3, die nicht die angegeben specielle Disposition haben, so ist sie eine C^9.

Auch folgt, dass nur eine C^9 vier Doppelpunkte auf der J^6 haben kann. In der That, hätte $\mathfrak{C}^9$, welcher $\mathfrak{C}_1{}^9$ entspricht 4 Doppelpunkte δ auf J^6, so müssten diese δ auch Doppelpunkte von $\mathfrak{C}_1{}^9$ sein, und beide Curven würden ausserdem J^6 noch in denselben 4 andern Punkten treffen, was mehr Schnittpunkte von $\mathfrak{C}^9$ $\mathfrak{C}_1{}^9$ ergibt, als deren auftreten können.

Nach dieser Vorbereitung stellen wir uns die Aufgabe, diejenigen C^9 zu finden, welche die Maximalzahl von 6 Doppelpunkten auf J^6 besitzen, oder was auf dasselbe hinausläuft, die Gruppen G von 6 Punkten auf J^6 zu ermitteln, welche als Doppelpunkte von C^4 auftreten.

Wir kennen bereits eine ∞^2 Schaar solcher Gruppen, die nämlich auf J^6 von den Geraden A der Ebene ausgeschnitten werden. Eine Gerade A bildet mit der ihr in $(a\alpha)$ entsprechenden Curve 8. Ordnung eine der verlangten C^9. Die ihr associirte A^3 ist, wie wir sahen, der E^4 einbeschrieben, und mittels des von uns angewandten Raisonnements erkennt man, dass jeder der gesuchten C^9 eine der E^4 einbeschriebene Curve 3. Klasse associirt ist, wie auch, dass eine der E^4 einbeschriebene Curve 3. Klasse in ihrer associirten C^9 eine der verlangten liefert. Daraus geht der Zusammenhang hervor, der zwischen der vorgelegten Aufgabe und gewissen Problemen besteht, welche Clebsch in seiner für die Wissenschaft so folgenreichen Abhandlung „Ueber die Anwendung der Abelschen Functionen in der Geometrie" (Crelle-Borchardt B. 63) entwickelt hat.

Vor Allem beweisen wir den Hauptsatz, dass durch **eine** Gruppe G eine dreifach unendliche Schaar von Gruppen (oder Curven C^9) bestimmt ist.

$C_0{}^9$ habe die G zu Doppelpunkten; durch G lege man zwei beliebige $C_1{}^9$, $C_2{}^9$, die auf J^6 2 Gruppen G_1, G_2 von je 6 Punkten ausschneiden, von welchen je 3 Punkte willkührlich sind. Es zeigt sich, dass G_1, G_2 einer $C_3{}^9$ angehören; denn diese 12 Punkte bilden mit den doppeltgezählten G die sämmtlichen Schnittpunkte eines Ortes 18. Ordnung mit 7 6fachen Punkten auf J^6. Legt man somit $C_3{}^9$ durch 9 Punkte von G_1, G_2, so muss sie durch die 3 übrigbleibenden gehen, weil sie in Verbindung mit $C_0{}^9$ einen eben solchen Ort 18. Ordnung bildet. Lässt man jetzt $C_2{}^9$ mit $C_1{}^9$ zusammenfallen, so wird $C_3{}^9$ in jedem Punkte der G_1 die J^6 berühren, also diese Gruppe zu Doppelpunkten haben. Aus diesem Beweise ist zugleich ersichtlich, dass die ∞^3 Schaar von G_1, welche durch Variation von $C_1{}^9$ gewonnen wird, in gleicher Weise aus jeder beliebigen Gruppe G_2 der Schaar abgeleitet werden kann. Besteht beispielsweise G aus den 6 Punkten einer Geraden A, so enthält die hierdurch bestimmte ∞^3 Schaar je 6 Punkte G_2 der J^6, die in einer Geraden A_2 liegen, weil A mit der Curve 8. Ordnung durch G_2 eine $\mathfrak{C}^9$ constituirt.

Da nun mit einer einzigen Gruppe eine dreifach unendliche Schaar von C^9 gegeben ist, welche der an sie gestellten Anforderung Genüge leisten, so wird die obige Aufgabe eine bestimmte werden, wenn wir der aufzusuchenden Curve noch die Bedingung auferlegen, in einem willkührlichen Punkte a einen Doppelpunkt zu haben.*) Dann aber erhält sie in α ebenfalls einen Doppelpunkt, und muss, weil sie ausser 7 dreifachen 8 Doppelpunkte hat, zerfallen. Bei diesem Zerfallen muss nothwendig der eine Bestandtheil S zur entsprechenden Curve den andern Σ haben: Denn sich selbst entsprechende Curven von niederer als der 9. Ordnung müssen (v. p. 7.) entweder von der 3. oder 6. sein; aber eine durch 1, 2 ... 7 und a, α gehende C^3 wird von einer C^6 ausser in a, α nur noch in 2 Punkten geschnitten. Die sich überhaupt darbietenden Möglichkeiten sind wesentlich zweierlei Art: I. Der eine Theil S der zerfallenden C^9 geht einfach durch a, α, mithin Σ auch. II. S hat a zum Doppelpunkt und enthält α nicht, so dass Σ 2mal durch α, nicht durch a geht.

I *a)* Die Gerade $a\alpha$ ist S, Σ ist die ihr entsprechende Curve 8. Ordnung, und wir erhalten die schon erwähnte ∞^3 Schaar $\mathfrak{A}$.

b) Ein Kegelschnitt durch a, α wird S darstellen, falls die ihm entsprechende Σ von 7. Ordnung ist.

Verstehen wir vorläufig unter S irgend eine C^m, so wird Σ von der Ordnung $8m$ sein. Wenn aber C^m $n$mal durch einen der Punkte g etwa 1 geht, dem eine $C_1{}^3$ entspricht, so vermindert sich die Ordnung von Σ um $3n$ Einheiten. Geht demnach ein Kegelschnitt S durch a, α und 3 der Punkte g, so stellt er mit Σ eine C^9 dar, welche 6 Doppelpunkte auf J^6 hat, die Schnittpunkte von S, J^6. Dieser C^9 gibt es somit $\frac{7 \,.\, 6 \,.\, 5}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 35$ und ebensoviele ∞^3 Schaaren $\mathfrak{B}$.

Wenn z. B. der Kegelschnitt 123 $a\alpha \equiv S$ aus J^6 die Gruppe G schneidet, so ist dadurch die ∞^3 Schaar bestimmt (v. p. 22). G wird aber auch von Σ ausgeschnitten, die mit jedem durch 123 gelegten Kegelschnitt K eine $\mathfrak{C}^9$ bildet; folglich liefert jeder K des Netzes eine Gruppe dieser ∞^3 Schaar. Wir werden zeigen, dass diese 35 Schaaren $\mathfrak{B}$ unter sich und von $\mathfrak{A}$ verschieden sind. Unter [123] verstehen wir die Schaar, welche wir eben erzeugt haben.

Soll eine C^3 durch a, α die Rolle des Theiles S übernehmen, so muss Σ auf die Ordnung 6 herabgebracht werden. Dies könnte einmal dadurch erreicht werden, dass man S durch 6 Punkte g führt — da aber dann C^3 von selbst den siebenten g aufnimmt, und sich selbst entspricht, so ist diese Annahme unzulässig — sodann dadurch dass S einen g zweifach, vier andere g einfach enthält.

Wir erhalten unter der letzten Supposition $5 \,.\, \frac{7 \,.\, 6}{1 \,.\, 2} = 105$ Curven C^9, und dem entsprechend ebensoviele ∞^3 Schaaren $\mathfrak{C}$, die wir jedoch als in den $\mathfrak{B}$ enthalten erkennen werden.

d) Eine C^4 durch a, α kann als S figuriren vorausgesetzt, dass sie entweder:

d_1) durch einen der g dreimal, durch die andern einmal geht, oder

d_2) durch drei verschiedene g zweimal, durch drei andere einmal geht.

---

*) Anmerkung. Die Aufgabe ist aufs engste verwandt mit dieser: „Gegeben eine allgemeine Curve C^4 und ein Punkt d, diejenigen C^3 zu finden, welche C^4 in je 6 Punkten berühren, und in d einen Doppelpunkt haben. Die im Texte folgende Aufzählung der C^9, welche 6 Doppelpunkte auf J^6 und sonst zwei in einem Paare a, α besitzen, ergibt: $36 + 28 + 5 \,.\, 21 + 7 + 4 \,.\, 35 = 316$ Lösungen.

Die bei d_1) auftretenden 7 Curven führen zu Schaaren $\mathfrak{D}_1$, welche identisch mit $\mathfrak{A}$ sind.

Bei d_2) resultiren $4 \,.\, 35 = 140$ C^9, ebensoviele Schaaren $\mathfrak{D}_2$, welche sich jedoch sämmtlich der Abtheilung $\mathfrak{B}$ einreihen. Nachdem diese Punkte erledigt sein werden, bleiben im Ganzen 36 distincte Schaaren.

II. *e)* Soll S den Doppelpunkt a haben, so muss seine Ordnung wenigstens 3 sein, und eine C^3 mit dem Doppelpunkt α übernimmt die Rolle des S, falls sie 6 Punkte g enthält. Hier gibt es sieben Fälle von C^9 und sieben Schaaren $\mathfrak{E}$.

Sei G eine Gruppe, etwa ausgeschnitten von S durch 2, 3 . . . 7, so liegt G auch auf einer Curve Σ 6. Ordnung, welche 1 zum dreifachen Punkt, 2, 3 . . . 7 zu Doppelpunkten hat. Da diese Σ mit jeder C^3 die durch 2, 3 . . . 7, nicht aber durch 1 geht, eine $\mathfrak{E}^9$ ausmacht, so wird die durch G bestimmte Schaar einfach von diesen C^3 ausgeschnitten.

Insbesondere kann jede der Schaaren $\mathfrak{E}$ — z. B. die durch G individualisirte — durch ∞^3 Curven C^6 ausgeschnitten werden. Um dies einzusehen, ist zu beachten, dass die dem Punkte 1 in $(\alpha\alpha)$ entsprechende $C_1{}^3$, welche auf J^6 nur noch die Punkte 1′, 1″ besitzt, mit jeder durch 2, 3 . . . 7 gelegten C^3 eine $\mathfrak{E}^6$ ausmacht. Ist G_1 eine zweite Gruppe, so geht durch 1′, 1″ und 3 Punkte von G_1 stets eine C^6, und diese muss die drei fehlenden Punkte von G_1 aufnehmen. Also wird die Schaar durch diejenigen C^6 ausgeschnitten, welche in 1 dieselben Doppelpunktstangenten haben, wie J^6.

f) Endlich kann als S eine C^4 mit dem Doppelpunkte a genommen werden, sofern C^4 noch zwei Doppelpunkte unter den g, die andern 5 zu einfachen Punkten hat, denn so wird Σ von der 5. Ordnung. Es ergeben sich $\frac{7 \,.\, 6}{1 \,.\, 2} = 21$ C^9 und ebensoviele Schaaren $\mathfrak{F}$.

G sei die Gruppe, welche $C_1{}^4$ liefert, deren Doppelpunkte a, 1, 2 sind, und welche gleichfalls auf einer $\Sigma \equiv C^5$ liegt, die α, 3, 4 . . 7 als zweifache, 1, 2 als einfache Punkte enthält, so bildet diese C^5 mit jeder C^4, die einfach dar 3, . . . 7, doppelt durch 1, 2 geht eine $\mathfrak{E}^9$; folglich wird die ∞^3 Schaar von diesen C^4 ausgeschnitten. Ferner kann dieselbe auch durch ∞^3 C^6 ausgeschnitten werden. Der Kegelschnitt K_{12} bildet nämlich mit jeder der eben erwähnten C^4 eine $\mathfrak{E}^6$; also wird die Schaar durch diejenigen C^6 ausgeschnitten, welche sich durch die auf J^6 festen Punkte s_{12}, s_{21} legen lassen.

Versteht man daher unter G eine Gruppe irgend einer der 28 Schaaren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, so muss die durch 5 Punkte von G gehende C^6 auch den 6. Punkt enthalten, und J^6, je nachdem G zu den $\mathfrak{E}$ oder den $\mathfrak{F}$ gehört, entweder in einem der 7 Punktepaare μ', μ'', oder in einem der 21 Paare $s_{\mu\nu}$, $s_{\nu\mu}$ schneiden.

Nun folgt, dass keine Gruppe zweien Schaaren gemeinschaftlich ist, dass alle 28 unter sich verschieden sind. Die in Rede stehende Eigenschaft unterscheidet diese Schaaren wesentlich von den 36 $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$; da dieselbe keiner in letzteren enthaltenen Gruppe zukommen kann:

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass wenn eine Gruppe G von dieser Eigenschaft zur Ableitung einer Schaar benutzt wird, jede abgeleitete Gruppe G die nämliche Eigenschaft besitzen muss. Zu diesem Ende legen wir durch die g eine $C_0{}^3$, welche J^6 in 4 Punkten s

schneiden möge, durch G eine C^6, die noch 2 Punkte σ mit J^6 gemein hat. In den Punkten s, σ liegt nach dem obigen Hauptsatz eine Gruppe G_0 vor, die zusammen mit G_1 einer C^9 angehören wird. Weil aber $C_0{}^3$ mit einer $C_1{}^6$, die durch die σ und 3 Punkte von G_1 gelegt wird, eine $\mathfrak{C}^9$ bildet, so folgt, dass $C_1{}^6$ auch durch die drei andern Punkte von G_1 geht. Ueberdiess sieht man, dass jede C^6, welche 5 Punkte irgend einer Gruppe der Schaar enthält, durch den 6. und zwei feste Punkte σ der J^6 gehen muss.

Nach dem Gesagten wird es genügen, in der Schaar $\mathfrak{A}$ und in einer der $\mathfrak{B}$, etwa in [123] je eine Gruppe nachzuweisen, der die fragliche Eigenschaft abgeht;

Erstens. Durch 1 ziehen wir eine beliebige Gerade A; diese wird J^6 in 4 Punkten δ schneiden, welche mit $1'$, $1''$ eine Gruppe G von $\mathfrak{A}$ bilden. Die $C_1{}^3$, welche 1 entspricht, geht durch $1'$, $1''$, 2, 3 . . . 7. Käme nun der G die obige Eigenschaft zu, so müsste eine C^3 durch 2, 3 . . . 7 und drei der δ auch den 4. δ enthalten. Dies würde ein Zerfallen der C^3 bedingen, wie es bei allgemeiner Lage der g nicht möglich ist.

Zweitens. Die Gerade A in Verbindung mit der 23 schneiden eine Gruppe G' von [123] aus, bestehend aus den 4 δ und s_{23}, s_{32}. Der Kegeschnitt K_{23} bildet mit jeder C^4, die in 2, 3 Doppelpunkte hat und die übrigen g enthält, eine $\mathfrak{C}^6$. Da nun aus demselben Grunde wie vorhin eine solche C^4, durch drei δ gelegt, den vierten nicht aufnehmen kann, so geht durch die Gruppe G' keine C^6.

Was nun die unter *b*), *c*), *d*) aufgestellten Behauptungen die Verschiedenheit der Schaaren betreffend angeht, so bemerken wir, dass die Identität zweier Schaaren dadurch erkannt wird, dass man eine in Beiden befindliche Gruppe aufweist, die Verschiedenheit dadurch, dass in der einen eine Gruppe G existirt, die mit einer G' der andern Schaar 3 Punkte, nicht aber alle 6 gemein hat.

Zu *b*) Dass die Schaar $\mathfrak{A}$ von jeder $\mathfrak{B}$ verschieden ist, zeigen die im Vorigen gebrauchten Gruppen G, G', von denen jede die 4 δ, jene aber noch $1'$, $1''$, diese s_{23}, s_{32} enthält. Die Verschiedenheit von [1 2 3], [1 4 5] beweisen die 2 Gruppen, bestehend aus den 4 δ und resp. s_{23}, s_{32}; s_{45}, s_{54}. Handelt es sich um Schaaren [1 2 3], [4 5 6], so lege man durch 1 2 3 4 7 einen Kegelschnitt, dieser liefert eine G der ersten Schaar, deren Schnitte $4'$, $4''$, $7'$, $7''$, s_{56} s_{65} sind. Die Gerade 56 zusammen mit $4\,4'$ liefert G' in den Punkten $4'$, s_{56}, s_{65} und drei andern δ auf $4\,4'$ befindlich.

Zu *c*) Zur Bestimmung einer Schaar $\mathfrak{C}$ verwenden wir eine C^3 mit dem Deppelpunkte 1, und durch 2, 3, 4, 5 gehend. Die Gerade A durch 1 und der Kegelschnitt 1 2 3 4 5 schneidet die Gruppe G in den Punkten vier δ, s_{67}, s_{76} aus. G gehört aber auch zu [1 6 7], weil sie von A im Verein mit 6 7 ausgeschnitten wird.

Es wird hieraus ferner klar, dass die drei ∞^2 Schaaren, ausgeschnitten von C^3, welche 2, 3, 4, 5 einfach und einen der drei 1, 6, 7 doppelt enthalten, in [1 6 7] begriffen sind; oder dass die Schaaren $\mathfrak{C}$ zu dreien identisch mit einer $\mathfrak{B}$ sind.

Zu d_1) Die Gruppe G von $\mathfrak{A}$ bestehend aus $1'$, $1''$ und 4 δ auf A gehört einer der Schaaren $\mathfrak{D}_1$ an, weil A mit der $C_1{}^3$ eine C^4 bildet mit einem 3fachen Punkt in 1, und 6einfachen 2, 3 . . . 7. Die 7 Schaaren $\mathfrak{D}_1$ sind somit einerlei mit $\mathfrak{A}_1$.

d_2) Zur Bestimmung einer Schaar $\mathfrak{D}_2$ diene eine C^4 mit den Doppelpunkten 1, 2, 3, den einfachen 4 5 6, der Kegelschnitt 1 2 3 4 5 zusammen mit dem 1 2 3 6 7 schneidet G aus, ihre

Punkte sind $7'$, $7''$, s_{67}, s_{76}, s_{45}, s_{54}. G ist aber in [4 5 6], da sie von den Geraden 67 in Verbindung mit 45 ausgeschnitten wird. Zugleich leuchtet ein: Die vier ∞^2 Schaaren, ausgeschnitten von C^4, welche als einfache Punkte 4, 5, 6 als Doppelpunkte irgend 3 von 1, 2, 3, 7 haben, kommen in [4 5 6] vor; oder die Schaaren $\mathfrak{D}_2$ sind in gewissen Anordnungen zu je vier identisch mit einer der $\mathfrak{B}$.

Wenden wir uns jetzt wieder unserer Fundamentalaufgabe zu, so gruppiren sich deren Lösungen folgendermassen:

In jeder $\mathfrak{E}$ ist eine C^9, für welche der Theil S eine C^3 ist, die 2mal durch a, einmal durch jeden von sechs g geht. In jeder Schaar $\mathfrak{F}$ ist eine C^9, für die S eine C^4 ist, welche 2mal durch a, ebenso oft durch je zwei der G und einmal durch die andern g geht.

Dagegen kommen in jeder der 36 Schaaren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ acht verschiedene C^9 vor, und zwar liefert:

1. Die Schaar $\mathfrak{A}$ acht C^9, für welche S die Gerade $a\alpha$ ist, oder eine C^4, die a, α und je 6 g einfach, den 7. g dreifach enthält.

2. Die Schaar [1 2 3] — und so jede von $\mathfrak{B}$ — acht C^3, für welche S: erstens der Kegelschnitt $1\,2\,3\,a\alpha$ ist; zweitens je eine der drei C^3 ist, die einfach durch $a\alpha 4\,5\,6\,7$, doppelt durch 1, 2 oder 3 gehen; drittens eine der vier C^4 ist, welche $a\alpha 1\,2\,3$ zu einfachen Punkten und irgend drei der 4 5 6 7 zu Doppelpunkten hat.

Wir machen schliesslich darauf aufmerksam, dass aus der Identität zweier Schaaren unmittelbar gewisse Schnittpunktsätze für der J^6 nicht adjungirte Curven fliessen, unterlassen es aber, dieselben hier einzeln aufzuführen.*)

Prag 2. December 1884.

Küpper.

*) Anmerkung. Mit Hülfe der Cayley'chen Correspondenzformel beweist man: 1) dass in jeder der 64 Schaaren 64 Gruppen existiren, wo die 6 constituirenden Punkte in 3 verschiedenen Punkten paarweise vereinigt (unendlich nahe) auftreten. Diesen 4096 Gruppen entsprechen auf einer Curve 4. Ordnung C^4 ebenso viele Gruppen von 3 Punkten, in welchen C^4 von einer C^3 zugleich vierpunktig berührt werden kann; 2) dass es 729 Schaaren von C^9 gibt, welche J^6 in je 4 Punkten $\mathfrak{G}$ osculiren Eine dieser Schaaren besteht aus den ∞^2 C^3 des Netzes $(g_1 \ldots g_7)$, jede Curve 3mal genommen, die andern 728 Schaaren sind einfach unendliche g_4^1. Ist $\mathfrak{G}$ eine beliebige Gruppe, so wird die Schaar der $\mathfrak{G}$ angehört durch die C^9 ausgeschnitten, welche J^6 in den vier $\mathfrak{G}$ berühren; dagegen schneiden die C^6, welche durch die vier $\mathfrak{G}$ sich legen lassen, die Gruppen einer der 728 Schaaren aus, in welcher $\mathfrak{G}$ selbst nicht vorkommt, so dass sich alle Schaaren in 364 Paare anordnen. (Vergl. Clebsch a. a. O.)