ANHANG.

Über involutorische Cremona-Transformationen der 14ten u. 11ten Ordnung und hyperelliptische Curven $3n+1$ter und $3n+2$ter Ordnung.

Vom Privatdocenten **Karl Bobek.**

(Vorgetragen in der Sitzung am 30. Januar 1885.)

Die Untersuchungen des Herrn Professor Küpper über die involutorischen Verwandtschaften 8ter und 17ter Ordnung*) führten zu einer Reihe sehr interessanter Resultate, von denen besonders die auftretenden hyperelliptischen Curven C^{3n} und die mit grosser Einfachheit sich ergebenden Sätze über dieselben bemerkenswert sind. Es entstand bald in mir die Vermuthung, dass man dieselben in gewissem Sinne verallgemeinen könne, indem die sich ergebende Ordnung ($3n$) derselben zufällig der Art der Transformation anhafte. In der That gelang es mir nun auf sehr einfache Weise durch Curvenbüschel dritter Ordnung involutorische eindeutige Transformationen beliebig hoher Ordnung herzustellen und auf diese Art auf hyperelliptische Curven zu erzeugen, die von jeder beliebigen Ordnung sind.

Im Folgenden benutzte ich speziell die involutorischen Transformationen der 14ten und 11ten Ordnung, wodurch sich Curven $3n+1$ und $3n+2$ Ordnung ergaben als Ergänzung der Ordnung $3n$ des Herrn Professor Küpper.**)

Zum Schlusse wurden die Charakteristiken einer Curve angegeben, die nothwendig und hinreichend sind, damit sich die Curve in der Verwandtschaft selbst entspricht.

I. Die involutorische Verwandtschaft 14ter Ordnung.

1. Nimmt man in der Ebene 8 Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 willkürlich an, so bilden die Curven 4ter Ordnung C^4, welche durch dieselben gehen und in 7, 8 Doppelpunkte besitzen, ein Netz. Denn von einer C^4 können noch

$$14 - 6 - 2 . 3 = 2$$

*) K. Küpper Über hyperelliptische Curven C^{3n} die vorstehende Abhandlung.

**) Des Weitern vgl. die Wiener Berichte vom 22. Jäner, 12. Feber und 5. März 1885.

Punkte willkürlich angenommen werden. Durch einen Punkt a der Ebene geht daher ein Büschel solcher C^4, die sich ausser in den Punkten 1—8 noch in

$$16 - 6 - 2 . 4 - 1 = 1$$

ferneren Punkte α schneiden.

Die Beziehung zwischen den Punkten a, α ist eine eindeutige und involutorische, wie man ohne weiters ersieht.

Jeder Büschel von Curven C^4, welcher die Punkte a, α bestimmt, enthält eine zerfallende C^4 nämlich diejenige, welche aus der Curve dritter Ordnung C^3 besteht, die durch 1—8 und a geht und aus der Geraden $\overline{78}$. Es liegt also ein Punktepaar a, α stets auf einer und derselben Curve C^3 durch 1—8. Alle diese Curven C^3 gehen noch durch einen festen Punkt, der 9 heissen soll, hindurch.

Jede C^3 durch 1—8 trifft eine beliebige C^4 in einem Punktepaare a, α; denn sie bildet mit $\overline{78}$ zusammen eine $C_1{}^4$, welche mit C^4 den Büschel, also auch das Punktepaar a, α, bestimmt. Es enthalten also sowol die C^4 als die C^3 jede unendlich viele Punktepaare der Verwandtschaft und entsprechen sich selbst in derselben.

Eine feste $C_1{}^3$ wird von allen C^4 nur je in 2 Punkten geschnitten, deren Verbindungslinie nach dem Restsatze durch einen festen Punkt γ von C^3 geht. Die Curven C^4 bilden zwar eine ∞^2 Manigfaltigkeit, aber durch jedes Punktepaar a, α gehen ∞^1 Curven, so dass nur ∞^1 Punktepaare auf C^3 ausgeschnitten werden.

Es frägt sich, was ist der Ort des Punktes γ. Haben wir diesen gefunden, so können wir die Verwandtschaft noch auf eine andere Art definiren, wie sich gleich zeigen wird. Der Punkt γ liegt nun auf einer Curve Γ der dritten Ordnung, welche durch 1—6 hindurchgeht und in 9 einen Doppelpunkt besitzt. Denn sei $C_1{}^3$ eine feste Curve dritter Ordnung durch 1—9, und $a\alpha$ ein Punktepaar auf derselben, so dass $\overline{a\alpha}$ in γ noch schneidet, dann bildet eine beliebige C^3 mit $\overline{78}$ zusammen eine C^4, welche auch ein Punktepaar ausschneidet, dessen Verbindungslinie durch γ geht. Dieses letztere Punktepaar besteht aber aus dem Punkte 9 und dem Punkte 9′, in welchem $C_1{}^3$ die Gerade $\overline{78}$ noch schneidet; also bestimmt $\overline{99'}$ auf $C_1{}^3$ den Punkt γ. Durchläuft nun $C_1{}^3$ den Büschel (C^3) durch (1—9), so wird 9′ die Gerade $\overline{78}$ beschreiben und der Stralenbüschel, der aus 9 die Punkte 9′ projicirt, ist zum Curvenbüschel projektivisch. Ihr Erzeugnis ist eine Curve 4ter Ordnung, welche in 9 einen Doppelpunkt hat und durch die Punkte 1—8 hindurchgeht. Diese Curve zerfällt aber wie man sieht in die Gerade $\overline{78}$ und eine Curve dritter Ordnung Γ, welche in 9 einen Doppelpunkt hat und durch 1—6 einfach hindurchgeht. Hiedurch ist Γ auch vollständig bestimmt.

Jede C^3 durch 1—9 trifft nun Γ ausserhalb der Punkte 1—9 nur noch in einem Punkte γ und die Stralen durch γ bestimmen die Punktepaare unserer Verwandtschaft auf C^3. Um also zu einem Punkte a der Ebene den entsprechenden α zu bestimmen, lege man durch a die $C_a{}^3$, welche durch 1—9 geht, dieselbe trifft Γ in einem Punkte γ, dann schneidet $\overline{a\gamma}$ die $C_a{}^3$ in dem zu bestimmenden Punkte α.

2. Die Punkte 1—9 sind Fundamentalpunkte unserer Verwandtschaft, ihnen entsprechen Curven. Was zunächst die Punkte 1—6 anbelangt, so entsprechen denselben Curven vierter Ordnung, welche in dem betrachteten Punkte und in 7, 8 Doppelpunkte haben. Denn

die Curve 4ter Ordnung Δ_i^4, welche in i ($i = 1, 2 \dots 6$) einen Doppelpunkt hat und durch die übrigen 5 Punkte geht (wodurch sie bestimmt ist), wird von jeder Curve C^4 nur noch in einem Punkte geschnitten, welcher dem Punkte i in unserer Verwandtschaft entspricht.

Dem Punkte 9 entspricht die Gerade $\overline{78}$, denn die Verbindungslinie der Punkte γ mit 9 schneidet die durch γ gehende C^3, wie wir früher sahen, stets auf $\overline{78}$, also liegt auf dieser der entsprechende Punkt. Oder auch alle C^4, welche $\overline{78}$ noch in einem Punkte schneiden müssen in $\overline{78}$ und eine C^3 zerfallen, da nun letztere alle durch 9 gehen, so entspricht dieser jedem Punkte von $\overline{78}$.

Dem Punkt 7 oder 8 entspricht eine Curve 7ter Ordnung Δ_h^7 ($h = 7, 8$), welche in h einen 4fachen, in dem anderen Punkte einen 3fachen Punkt besitzt, die Punkte 1—6 zu Doppelpunkten hat und durch 9 einfach hindurchgeht. Ein Stral t durch den Punkt 7 z. B. trifft Γ in 3 Punkten γ_1, γ_2, γ_3, durch welche drei Curven dritter Ordnung C_1^3, C_2^3, C_3^3, hindurchgehen, die t noch in drei Punkten treffen, welche dem Punkte 7 entsprechen. Eine C^3 hingegen trifft Γ nur in einem Punkte γ, dessen Verbindungslinie mit 7 die C^3 in einem Punkte schneidet, der 7 entspricht. Durch Vermittlung von Γ sind also der Stralenbüschel (7) und der Curvenbüschel (C^3) so aufeinander bezogen, dass einem Stral von (7) drei Curven von (C^3) und einer Curve von (C^3) ein Stral von 7 entspricht. Das Erzeugnis beider ist also von der $1 + 3 \,.\, 3 = 10$ten Ordnung, wovon die Γ in Abzug zu bringen ist. Die dem Punkte 7 entsprechende Curve ist also von der 7ten Ordnung Δ_7^7.

Das Erzeugnis 10ter Ordnung hat nun in dem Punkte 7, der beiden Büscheln gemeinschaftlich ist, einen 4-fachen, in den übrigen Punkten 1—9 dreifache Punkte. Da nun Γ durch die Punkte 1—6 einfach geht und in 9 einen Doppelpunkt hat, so hat Δ_7^7 in 8 einen 3-fachen, in 1—6 Doppelpunkte und in 9 einen einfachen Punkt.

Analoges gilt von Δ_8^7.

Wir haben also zusammenfassend:

Den Punkten 1-6 entsprechen Curven 4ter Ordnung Δ_i^4 mit drei Doppelpunkten, von denen zwei in 7 und 8 liegen, während der dritte derjenige ist, welchem die Curve entspricht. Dem Punkte 9 entspricht die Gerade $\overline{78}$. Den Punkten 7 od. 8 entsprechen Curven 7ter Ordnung Δ_h^7, welche in dem betreffenden Punkte einen vierfachen, im anderen Punkte einen dreifachen Punkt besitzen, und welche in 1—6 Doppelpunkte haben, durch 9 einfach hindurchgehen.

Alle diese Curven sind natürlich rational, und schneiden einander ausserhalb der Fundamentalpunkte nicht mehr.

3. Einer Geraden g wird nun eine Curve G^x entsprechen, der $x$ten Ordnung, welche in 1—6 je 4-fache, in 7 und 8 je 7-fache und in 9 einen einfachen Punkt hat, denn g trifft Δ_i^4 in 4 Punkten, deren entsprechende in i ($i = 1 \dots 6$) liegen. Ebenso wird Δ_h^7 in 7 Punkten getroffen, deren entsprechende in h (h $= 7, 8$) liegen und $\overline{78}$ trifft g in einem Punkte, dessen entsprechende in g liegt.

Es seien g und g' zwei Gerade, denen die Curven G^x G'^x entsprechen, dann können einander diese ausserhalb der Fundamentalpunkte nur noch in einem Punkte treffen, welcher dem Schnittpunkte von g mit g' entspricht d. h. es muss

$$x^2 - 1 = 2 . 49 + 6 . 16 + 1 = 195$$

sein, woraus $x = 14$ folgt. Unsere Verwandtschaft ist also von der 14^{ten} Ordnung.

Einer Curve n^{ter} Ordnung C^n, welche die Punkte 1—9 zu $\delta_1 \ldots \delta_9$fachen Punkten hat, wird daher eine Curve von der Ordnung

$$n' = 14n - 7(\delta_7 + \delta_8) - 4(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6) - \delta_9$$

entsprechen, indem dem δ-fachen Fundamentalpunkt die Fundamentalcurve δ mal entspricht und ebensovielmal in Abzug gebracht werden muss von der Gesammtordnung des C^n entsprechenden Gebildes.

So z. B. wird für $n = 3$ $\delta_1 = \delta_2 \ldots = \delta_9 = 1$ $n' = 3$

„ „ „ $n = 4$ $\delta_1 = \delta_2 \ldots = \delta_6 = 1$; $\delta_7 = 2$ $\delta_8 = 2$; $\delta_9 = 0$ $n' = 4$ wie es sein muss, da dieses selbst entsprechendt Curven sind.

4. In der Verwandtschaft treten Punkte auf, welche mit ihren entsprechenden zusammenfallen und zwar ist der Ort derselben eine Curve H^8 der 8^{ten} Ordnung, welche in 1—6 Doppelpunkte, in 7 und 8 je 4-fache Punkte besitzt und durch 9 **nicht** hindurchgeht.

Vor allem erkennen wir, dass auf jeder Geraden g der Ebene drei und nur drei Paare entsprechender Punkte liegen. Denn g trifft Γ in drei Punkten γ_1, γ_2, γ_3 und die durch diese gehenden $C_1{}^3$, $C_2{}^3$, $C_3{}^3$ bestimmen auf g die drei Paare $a_1\alpha_1$, $a_2\alpha_2$, $a_3\alpha_3$ entsprechender Punkte der Verwandtschaft. Nun schneidet die der Geraden g entsprechende Curve G^{14} diese in 14 Punkten, wovon 6 die obigen drei Paare sind. Die übrigen 8 Punkte müssen also solche sein, welche mit ihren entsprechenden zusammenfallen, da sie sowohl auf g als auf G^{14} liegen. Der Ort dieser Punkte ist also eine Curve 8^{ter} Ordnung H^8.

Legt man g durch i, einen der Punkte 1—6, so wird ihr nur mehr eine Curve 10^{ter} Ordnung entsprechen, welche in i einen Doppelpunkt hat. Es schneidet nämlich g die Γ ausserhalb i in zwei Punkten γ_1, γ_2, deren zugeordnete Paare je einen Punkt in i haben. Die C^3, welche Γ in i berührt, trifft g in einem weiteren Paare a, α. Es schneidet g die Curve 10^{ter} Ordnung ausserhalb i in 8 Punkten, von denen 2 das Paar $a\alpha$ bilden, so dass die 6 übrigbleibenden auf H^8 liegen müssen, diese hat mithin in i $(i = 1 \ldots 6)$ je einen Doppelpunkt.

Legt man g durch 7 od. 8, so wird derselben nur eine Curve 7^{ter} Ordnung entsprechen, die in dem betrachteten Punkte h einen 3-fachen Punkt hat, in dem g die Γ in 3 Punkten schneidet, deren Paare einen Punkt in i haben. Es trifft also g die ihr entsprechende Curve 7^{ter} Ordnung nur mehr in 4 Punkten und diese liegen auf H^8, so dass H^8 in 7 und 8 je einen 4-fachen Punkt hat.

Die Geraden g durch 9 treffen H^8 in 8 Punkten ausserhalb 9, denn einer solchen Geraden entspricht eine Curve 13^{ter} Ordnung, welche einfach durch 9 geht, indem dieser Punkt dem Schnittpunkt $9'$ von g mit $\overline{78}$ entspricht. Überdiess liegen auf g noch zwei Paare der Verwandtschaft, nämlich die Schnittpunkte der Curven C^3, welche in 9 die Doppelpunktstangenten von Γ berühren. Es schneidet also die Curve 13^{ter} Ordnung die g in 2 Paaren und dem Punkte 9 also noch in 8 Punkten von H^8. Die H^8 berührt offenbar die Zweige der früher betrachteten Fundamentalcurven Δ in dem betreffenden Fundamentalpunkte, da auf jedem der Zweige sich ein Punkt befindet, der mit seinem entsprechenden zusammenfällt. Da aber $\overline{78}$ durch den entsprechenden Punkt 9 nicht geht, so kann H^8 auch durch 9 nicht hindurchgehen. Hieraus ersieht man dann auch, dass H^8 durch 1, 2 . . 6 je doppelt durch 7 und 8 vierfach hindurchgeht.

5. Die Coïncidenzcurve H^8 bildet mit der Geraden $\overline{78}$ zusammen die Hesse-sche Curve unseres Netzes von Curven 4ter Ordnung C^4, von welchem aus wir unsere Verwandtschaft bestimmten. Ist a ein Punkt von H^8, so werden die Curven C^4 des Büschels, welcher durch a bestimmt ist, sich daselbst berühren, also auch die $C_a{}^3$, welche durch a geht, d. h. die Tangente aller $C_a{}^4$ ist auch Tangente von $C_a{}^3$ und geht auf dieser durch den Punkt γ, in welchem $C_a{}^3$ die Γ trifft. Auf jeder C^3 liegen also blos 4 Punkte von H^8 nämlich die Berührungspunkte der von γ an die C^3 gehenden Tangenten. In der That schneidet C^3 die H^8 ausserhalb der Fundamentalpunkte nur noch in

$$3 \,.\, 8 - 2 \,.\, 4 - 6 \,.\, 2 = 4$$

Punkten.

6. Auf jeder Geraden g der Ebene liegen, wie wir sahen, 3 Paare $a_1 \alpha_1$, $a_2 \alpha_2$, $a_3 \alpha_3$, die den drei Schnittpunkten γ_1, γ_2, γ_3 von g mit Γ so entsprechen, dass jedes Paar $a_i\, \alpha_i$ von der C^3 ausgeschnitten wird, welche durch den Punkt γ_i geht. Lässt man den Stral g um einen festen Punkt k der Ebene sich drehen, so durchlaufen die 3 Paare eine Curve k^7 der 7ten Ordnung, indem k selbst auf ihr einfach liegt, da die $C_k{}^3$, welche durch k geht, die Γ in einem Punkte γ schneidet und $\overline{k\gamma}$ bestimmt auf $C_k{}^3$ den Punkt $\varkappa$, welcher k zugehört und mit ihm also auf k^7 liegt.

Diese Curven k^7 haben vielfache Punkte im Allgemeinen nur in den Fundamentalpunkten und sind auch solche, die sich in der Verwandtschaft selbst entsprechen. Die Punkte 1—6 sind Doppelpunkte von k^7, denn die Gerade $\overline{ki}$ $(i = 1 \,.\, 2 \ldots 6)$ schneidet die $\Delta_i{}^4$ noch in zwei Punkten, deren gepaarte je in i liegen. Die 5 übrigen Schnittpunkte von k^7 mit $\overline{ki}$ sind der Punkt k die zwei Punkte auf $\Delta_i{}^4$ und das Paar, welches die C^3 ausschneidet, die in i die Γ berührt.

Die Punkte 7 und 8 sind 3-fache Punkte von k^7, denn $\overline{k7}$ od. $\overline{k8}$ trifft $\Delta_7{}^7$ res. $\Delta_8{}^7$ in drei Punkten, deren entsprechende in 7 res. 8 liegen. Der Punkt 9 ist einfacher Punkt von k^7, da $\overline{k9}$ die Gerade $\overline{78}$ nur in einem Punkte trifft.

Jede C^3 trifft daher eine k^7 ausserhalb der Fundamentalpunkte nur mehr in

$$3 \,.\, 7 - 2 \,.\, 3 - 6 \,.\, 2 - 1 = 2$$

Punkten, die auf dem Stral liegen, der k mit dem Schnittpunkt von Γ mit C^3 verbindet.

Besässe nun k^7 noch in a einen Doppelpunkt, so müsste sie, da sie sich in der Verwandtschaft selbst entspricht, auch in α einen Doppelpunkt haben, dann würde aber die $C_a{}^3$, welche durch a geht, auch durch α gehen, und mit k^7 um 2 Schnittpunkte mehr gemein haben als die Anzahl Schnittpunkte beider Curven betragen kann, es müsste dann k^7 in die $C_a{}^3$ und eine C^4 vierter Ordnung zerfallen. Wir werden sehen, dass dieses auch wirklich eintritt. Der Schluss wird illusorisch, sobald a auf H^8 liegt, weil dann α mit a zusammenfällt. Dann kann k^7 ohne zu zerfallen einen Doppelpunkt besitzen.

Die Curven k^7 bilden ein Netz, durch jeden Punkt der Ebene geht ein Büschel derselben, durch zwei Punkte ist die Curve bestimmt. Denn ist a ein beliebiger Punkt der Ebene und schneidet $C_a{}^3$ die Γ in γ, so wird für jeden Punkt k auf $\overline{\gamma a}$ die zugehörige k^7 durch a und α gehen. Überdiess aber schneidet $\overline{\gamma a}$ die Γ in γ_1 und γ_2, durch welche Punkte Curven 3ter Ordnung C^3 gehen, die $\overline{a\gamma}$ in $a_1\alpha_1$ und $a_2\alpha_2$ schneiden und durch diese Punktepaare gehen auch alle k^7, welche den Punkten von $\overline{a\gamma}$ entsprechen. Jede k^7 schneidet $\overline{a\gamma}$ nur noch in einem variablen Punkte k, dem sie zugehört. Diese 3 Punktepaare $a\alpha$, $a_1\alpha_1$, $a_2\alpha_2$ auf $\overline{a\gamma}$ bilden mit den vielfachen Punkten in den Basispunkten die Grundpunkte des Büschels der k^7, denn ihre Anzahl ist

$$2.9+6.4+1+6=49$$

Durch zwei Punkte a und b ist die k^7 bestimmt, denn die Curven dritter Ordnung $C_a{}^3$ und $C_b{}^3$, welche durch a res. b gehen, treffen Γ je noch in einem Punkte γ und γ'; so zwar dass $\overline{a\gamma}$ und $\overline{b\gamma'}$ sich in dem Punkte k schneiden, welchem die Curve k^7 zugehört, die durch a und b geht.

7. Den Punkten γ von Γ entsprechen zerfallende Curven 7ter Ordnung. Denn ist $C_\gamma{}^3$ die Curve dritter Ordnung, welche durch γ geht, so enthält dieselbe unendlich viele Paare, die auf Stralen durch γ liegen und ist ein Theil der Curve 7ter Ordnung, welche dem Punkte γ entspricht. Der übrige Theil ist eine Curve 4ter Ordnung C^4, welche in 7 und 8 Doppelpunkte hat, durch 1—6 einfach geht und 9 nicht enthält. Diese C^4 enthält die beiden Paare, welche den zwei weiteren Schnittpunkten der Stralen durch γ mit Γ entsprechen. Die Tangente t von Γ in γ enthält nur zwei Paare $a\alpha$ und $a'\alpha'$, von denen das erste dem Punkt γ entspricht und sowol auf $C_\gamma{}^3$ als auf C^4 liegt, während das zweite dem Tangentialpunkt γ' von γ auf Γ zugeordnet ist, und nur auf C^4 liegt. Die C^4 und $C_\gamma{}^3$ schneiden einander daher in einem Punktepaar $a\alpha$, dessen Verbindungslinie Tangente von Γ in γ ist.

Diese C^4 und $C_\gamma{}^3$ bilden die früher erwähnten zerfallenden k^7.

Betrachten wir nur den Büschel von Curven k^7, dessen Punkte k auf einer Tangente t von Γ liegen. Die Curven derselben müssen t in dem Punktepaar a, α, welches dem Berührungspunkte von t auf Γ entspricht, berühren und in einem zweiten Punktepaare a', α' schneiden, welch letzteres dem Schnittpunkt von t mit Γ entspricht. Die Gerade t ist also Doppeltangente aller k^7, welche ihre entsprechenden Punkte auf t haben.

Wählen wir den Punkt a auf der Coïncidenzcurve H^8, so werden alle Curven k^7, welche durch a gehen, daselbst die Gerade berühren, auf welcher der Punkt α dem a unendlich nahe liegt, welche Gerade wir als Tangente der $C_a{}^3$ erkannten. Unter den Curven dieses Büschels gibt es also eine, welche in a einen Doppelpunkt hat.

Hieraus ist ersichtlich, dass H^8 ein Theil der Hesseschen Curve des Netzes der k^7 ist. Der übrige Theil muss von 10ter Ordnung sein. In der That ergibt sich die Ordnung leicht aus der Betrachtung, dass er der Ort der Doppelpunkte der zerfallenden k^7 ist, also der Ort der Schnittpunkte der Tangenten von Γ mit den Curven C^3 ist, welche durch ihren Berührungspunkt gehen. Ist nämlich x ein Punkt einer beliebigen Geraden g, so gehen von diesem

4 Tangenten an Γ und durch ihre Berührungspunkte 4 Curven C^3, welche g in 12 Punkten x' treffen. Umgekehrt geht durch einen Punkt x' eine $C_x{}^3$, welche Γ in einem Punkte schneidet, dessen Tangente g in x trifft. Es sind also auf g $1 + 12 = 13$ Coincidenzen $x = x'$, wovon 3 in Abzug zu bringen sind, als Schnittpunkte von g mit Γ. Die 10 übrigen gehören einer Curve K^{10} an, die die Doppelpunkte der zerfallenden k^7 paarweise enthält.

Die Punkte 1—6 sind dreifache Punkte von K^{10}; denn von i ($i = 1 . 7 \ldots 6$) gehen an die Γ zwei Tangenten, welche in anderen Punkten berühren, und denen Paare von K^{10} zugehören, deren ein Punkt in i fällt. Die Tangente in i an Γ berührt daselbst auch die C^3, welche i entspricht und folglich fällt einer von dem Punktepaar auf dieser in i. Die Punkte 7 und 8 sind vierfache Punkte, indem von diesen 4 Tangenten an Γ gehen und die Curven C^3, welche durch diese Berührungspunkte gehen, in 7 od. 8 die entsprechende Tangente schneiden.

Der Punkt 9 ist Doppelpunkt von K^{10}, denn die beiden Paare, welche auf den Doppelpunktstangenten von Γ liegen haben, einen Punkt in 9 liegen, denn die sie ausschneidende C^3 berührt die Doppelpunktstangente in 9.

8. Durch den Punkt k, welchem die k^7 entspricht, gehen 4 Doppeltangenten derselben, nämlich die vier Tangenten von Γ, welche durch k gehen, sind Doppeltangenten von k^7 und ihre Berührungspunkte liegen auf K^{10}. In der That schneidet K^{10} eine k^7 ausserhalb der Fundamentalpunkte nur mehr in

$$7 . 10 - 2 . 12 - 6 . 6 - 2 = 8$$

Punkten, welche paarweise auf Stralen durch k liegen.

Die Geraden, welche die Schnittpunkte von k^7 mit H^8 verbinden, berühren die k^7 in ihnen. Da ihre Anzahl

$$7 . 8 - 2 . 12 - 6 . 4 = 8$$

ist, so gehen durch den Punkt k noch 8 einfache Tangenten von k^7 mehr Tangenten gehen von k an k^7 nicht, denn k^7 ist von der $7 . 6 - 2 . 6 - 6 . 2 = 18$ Klasse.

Hieraus ersieht man auch: die Enveloppe E^8 der Richtungen, in denen entsprechende Punkte $a\alpha$ auf H^8 zusammenfallen, ist von der 8ten Klasse.

9. Die Enveloppe E der Stralen, welche die Punkte a einer Geraden g mit den Punkten α der entsprechenden G^{14} verbinden, ist von der 7ten Klasse, denn durch einen beliebigen Punkt k der Ebene, gehen 7 solcher Strahlen, diejenigen nämlich, welche k mit den 7 Schnittpunkten von k^7 mit g verbinden. Die Gerade g ist 6-fache Tangente der Enveloppe, da sie 3 Punktepaare $a\alpha$ enthält.

Auf den Tangenten einer Curve μ^{ter} Klasse $\mathfrak{K}$ liegen je drei Paare unserer Verwandtschaft und man kann nach der Ordnung der Curve K fragen, welche der Ort dieser Punkte ist. Liegt ein Punkt a derselben auf einer Geraden g, so liegt α auf G^{14} und $\overline{a\alpha}$ ist Tangente unserer Enveloppe E_7 7ter Klasse und Tangente der Curve μ^{ter} Klasse. Die Ordnung der Curve K, auf welcher die 3 Paare auf den Tangenten von $\mathfrak{K}$ der μ^{ten} Klasse liegen, ist daher 7μ.

Der E^8 entspricht nur mehr eine Curve K der 40ten Ordnung, indem die H^8 Doppelt im dem Orte 56ter Ordnung enthalten ist. Der Ort G der übrigen Punktepaare, welche auf der Enveloppe E der 7ten Klasse liegen, deren Tangenten die Punkte von g mit den entsprechenden von G^{14} verbindet, ist von der Ordnung $7 . 7 - 14 - 1 = 34$, indem die G^{14} und g zu dem Gesammtort 49ten Ordnung gehören. Diess ergibt sich auch so: Der Geraden g und g' entsprechen zwei Enveloppen 7ter Klasse, die 49 Tangenten gemeinschaftlich haben, hievon geht eine durch den Schnittpunkte von gg' und 14 bestehen aus den Verbindungslinien der Schnittpunkte von G^{14} mit g' und ihren eptsprechenden auf g. Der Rest gemeinschaftlicher Tangenten, welcher 34 beträgt, gibt die Ordnung der Curve G^{34} an, welche der Ort der übrigen zwei Paare ist, die auf den Tangenten der Enveloppe 7ter Klasse liegen.

Die Curve $K^{7\mu}$, welche der Ort der Punktepaare auf den Tangenten von $\mathfrak{K}$ ist, hat in den Fundamentalpunkten vielfache Punkte. Und zwar ergibt sich die Vielfachheit folgendermassen. Von dem Punkte i $(i = 1 . 2 \ldots 6)$ gehen an K μ Tangenten, welche Γ je in zwei Punkten γ treffen. Die C^3, welche durch γ geht, bestimmt nun auf der Tangente $\overline{i\gamma}$ von $\mathfrak{K}$ ein Paar, dessen ein Punkt in i liegt. Jeder der Punkte i $(i = 1 . 2 \ldots 6)$ ist also $2\,\mu$-facher Punkt von $K^{7\mu}$. Analog ergibt sich, dass die Punkte 7 und 8 je 3μ-fache und der Punkt 9 ein μ-fachen Punkt von $K^{7\mu}$ ist.

So hat G^{34} in den Punkten 1—6 je 10-fache, in 7 und 8 je 14-fache, in 9 einen 6-fachen Punkt, da G^{14} daselbst 4-fache, 7-fache res. einen einfachen Punkt hat und g durch keinen dieser Punkte geht, während K^{49} aus g, G^{14} und G^{34} besteht.

II. Hyperelliptische Curven von der Ordnung $3n+1$.

10. Bezieht man einen Büschel unserer ursprünglich betrachteten C^4, welcher durch a, α geht, projektivisch auf den Büschel der C^3, so erzeugen beide eine Curve C^7, welche in den Punkten 1—6 Doppelpunkte, in 7 und 8 dreifache Punkte besitzt und durch 9 einfach hindurchgeht. Diese C^7 entspricht sich, wie man sieht in der Verwandtschaft selbst. Ihr Geschlecht ist $15 - 2 . 3 - 6 = 3$ und sie ist hyperelliptisch; denn der Büschel C^4 ist ein adjungirter und schneidet eine einfach lineare Schaar von zwei Punkten auf ihr aus. Jede Curve 4ter Ordnung, welche zu C^7 adjungirt ist und durch einen Punkt a auf C^7 geht, geht auch durch den Punkt α, welcher dem a in der Verwandtschaft entspricht und hieraus folgt wieder der hyperelliptische Charakter der C^7.

Eine C^7, welche durch 9 geht, in 7 und 8 dreifache Punkte, in 1—6 Doppelpunkte hat, ist noch durch

$$35 - 1 - 2 . 6 - 6 . 3 = 4$$

Punkte bestimmt. Seien nun a, b, c, d irgend vier Punkte der Ebene, welche die C_7 bestimmen, so kann man durch a einen Büschel C^4 legen, der noch durch α geht, sodann die drei Curven $C_b{}^4$, $C_c{}^4$, $C_d{}^4$ des Büschels projektivisch zuordnen den Curven $C_b{}^3$, $C_c{}^3$, $C_d{}^3$. Hiedurch erzeugen die projektivischen Büschel $(C^4)_a$ und (C^3) eine C^7, welche die durch die vier Punkte a, b, c, d bestimmte ist. Diese ist nun hyperelliptisch und wir ersehen daraus, dass alle Curven 7ter Ordnung, welche in zwei Punkten dreifache, in 6 Punkten Doppelpunkte besitzen und durch den 9ten Punkt gehen, welcher auf allen C^3 liegt, die die 8 ersteren Punkte enthalten, **hyperelliptisch** sind. Die früher betrachteten k^7 bilden eine spezielle Manigfaltigkeit ∞^2, welche in der Manigfaltigkeit ∞^4 der Curven C^7 enthalten ist.

Durch drei Punkte a, b, c ist ein Büschel von Curven C^7 bestimmt, welcher auch die Punkte α, β, γ enthält. Bezieht man nun einen solchen Büschel projektivisch auf den Büschel der C^3, so erzeugen dieselben eine Curve C^{10} der 10^{ter} Ordnung, welche in 9 einen Doppelpunkt, in 7 und 8 je 4-fache in 1—6 je 3-fache Punkte besitzt. Von einer so erzeugten C^{10} sind mithin 6 Punkte beliebig anzunehmen, drei bestimmen den Büschel der C^7 und die drei anderen setzen die Projektivität fest. Umgekehrt sind von jeder Curve 10^{ter} Ordnung, welche den Punkt 9 zum Doppelpunkt, die Punkte 7 und 8 zu vierfachen, 1—6 zu dreifachen Punkten hat noch

$$65 - 3 - 2 \cdot 10 - 6 \cdot 6 = 6$$

Punkte willkürlich und wir ersehen wieder daraus, dass alle derartigen Curven 10^{ter} Ordnung **hyperelliptisch** sind, denn sie lassen sich durch einen Büschel (C^7) und (C^3) erzeugen und ersterer ist ein adjungirter Büschel, welcher eine einfach lineare Schaar von 2 Punkten ausschneidet.

Die Curven C^{10} entsprechen sich selbst in der Verwandtschaft.

11. Es gilt nun folgender allgemeine Satz: Jede Curve C^m der $m = (3n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche in 9 einen $(n-1)$-fachen, in 7 und 8 je einen $(n+1)$-fachen, in 1—6 je n-fache Punkte besitzt, ist **hyperelliptisch** und entspricht sich in der Verwandtschaft selbst.

In der That eine der Curven C^4, welche in 7 und 8 Doppelpunkte hat und durch 1—6 einfach hindurch geht, bildet mit $n-2$ Curven C^3 zusammen genommen eine adjungirte Curve der $4 + 3(n-2) = (m-3)^{\text{ten}}$ Ordnung. Hält man von den $C^3 \ldots n-3$ fest und lässt eine den Büschel (C^3) beschreiben, so schneidet dieselbe auf C^m eine lineare einfach unendliche Schaar von 2 Punkten aus, denn jede C^3 schneidet die C^m ausserhalb der festen Punkte nur in

$$3(3n+1) - (n-1) - 2(n+1) - 6n = 2$$

Punkten. Seien diese a, a' auf einer festen Curve $C_a{}^3$. Dann werden alle C^m, welche in 9 einen $(n-1)$-fachen in 7 und 8 je $(n+1)$-fache und in 1—6 je n-fache Punkte haben, die $C_a{}^3$ in je zwei Punkten b, b' schneiden, so dass $\overline{bb'}$ durch einen festen Punkt τ auf $C_a{}^3$ läuft, durch den auch $\overline{aa'}$ geht. Nun bilden n Curven C^3 und die Gerade $\overline{78}$ zusammengenommen auch eine C^m der angegebenen Art, nur dass ein Schnittpunkt mit $C_a{}^3$ nach 9 fällt, der andere liegt auf $\overline{78}$ in $9'$, durch welchen Punkt $C_a{}^3$ geht, so dass $\overline{99'}$ auf $C_a{}^3$ den Punkt τ bestimmt. Dieser liegt daher auf Γ und ist der Schnittpunkt von $C_a{}^3$ mit Γ, so dass also $a' = \alpha$ ist, und mithin, das Punktepaar auf C^m, in welchem C^3 schneidet, ein Paar unserer Verwandtschaft ist.

Hieraus ersieht man nun, dass auch die Curven C^{m-3} der $m - 3 = 3(n-1) + 1^{\text{ten}}$ Ordnung, welche nicht zerfallen und in 9 einen $(n-2)$-fachen, in 7 und 8 je n-fache, in 1—6 je $(n-1)$-fache Punkte haben und mithin den Curven C^m adjungirt sind, sobald sie durch einen Punkt a der C^m gelegt werden, sets auch durch den Punkt α gehen, welcher ihm entspricht und der auch auf C^m liegt.

Eine Curve C^m ist bestimmt durch

$$\tfrac{1}{2} m(m+3) - \tfrac{1}{2}(n-1)n - (n+1)\ (n+2) - 3n(n+1) = 2n$$

Punkte also eine C^{m-3} durch $2n-2$ und ein Büschel von C^{m-3} durch $2n-3$ Punkte. Nimmt man also von den $2n$ gegeben Punkten der C^m $2n-3$ zu Basispunkten eines Büschels $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, so kann man die drei letzten Punkte zur Bestimmung der Projektivität dieses Büschels und des Büschels der C^3 verwenden und beide erzeugen dann die C^m. Es sind mithin alle C^m projektivisch erzeugbar durch Büschel der C^{m-3} und C^3, welche alle vielfachen Punkte der C^m zu Basispunkten haben.

Das Geschlecht p einer solchen C^m ist

$$\tfrac{1}{2}(m-1)\ (m-2) - \tfrac{1}{2}(n-1)\ (n-2) - (n+1)\, n - 3\, n(n-1) = 2n-1$$

und ein Büschel adjungirter Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ist in der That, wie wir sehen, durch $p-2 = 2n-3$ Punkte festgelegt. Von seinen Basispunkten fallen noch $p-2$ auf C^m und er schneidet daher die C^m nur je in einem Punktepaar.

12. Die Enveloppe der Verbindungslinien der Punktepaare auf der Curve C^{3n+1} ist eine Curve $(n+1)^{\text{ter}}$ Klasse; dem Punkte k entspricht nämlich, nach 6 eine Curve k^7 der 7^{ten} Ordnung, welche die Punktpaare auf den Stralen durch k enthält. Nun schneidet k^7 die C^{3n+1} ausserhalb der Fundamentalpunkte noch in

$$7\,.\,(3n+1) - (n-1) - 2\,.\,3\,.\,(n+1) - 6\,.\,2\,.\,n = 2n+2$$

Punkten, die zu Paaren auf $n+1$ Strahlen durch k liegen.

Die Envoloppe E der $(n+1)^{\text{ten}}$ Klasse ist rational. Wir werden zeigen, dass dieselbe $\frac{1}{2}n(n-1)$ Doppeltangenten hat. Der Ort der Punktepaare auf den Tangenten von E ist nach 9 von der $7(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung, und da C^{3n+1} ein Theil davon ist, so liegen die übrigen Punktepaare auf den Tangenten von E auf einer Curve K^{4n+6} der $(4n+6)^{\text{ten}}$ Ordnung.

Dieselbe hat in den Punkten 1—6 noch $2(n+1) - n = (n+2)$-fache Punkte in 7 und 8 je $3(n+1) - (n+1) = 2(n+1)$-fache Punkte und in 9 einen Doppelpunkt, da C^{3n+1} daselbst einen $(n-1)$-fachen Punkt hat.

Ist nun a ein Punkt von K^{10}, der auf C^{3n+1} liegt, so liegt auch der Punkt α auf K^{10} und C^{3n+1} uud $a\alpha$ ist Tangente von Γ in γ. Da nun in γ zwei Schnittpunkte von $\overline{a\alpha}$ mit Γ zusammenfallen, so fallen in $a\alpha$ zwei Paare übereinander und K^{4n+6} muss daher auch durch dieses Paar gehen. D. h. die Schnittpunkte von C^{3n+1} mit K^{10} sind auch Punkte von K^{4n+6}. Nun schneidet K^{10} die C^{3n+1} ausser den Fundamentalpunkten noch in

$$10\,.\,(3n+1) - 2(n-1) - 2\,.\,4(n+1) - 6\,.\,3\,.\,n = 2n+4$$

Punkten die paarweise so auftreten, dass ihre $n+2$ Verbindungslinien Tangenten von Γ sind. Ist nun b ein Schnittpunkt von C^{3n+1} und K^{4n+6}, der nicht auf K^{10} liegt, so gehen beide Curven auch durch den zugeordneten Punkt β und es ist $\overline{b\beta}$ die Verbindungslinie eines Paares $a\alpha$ von C^{3n+1} d. h. auf dieser Geraden liegen zwei Paare von Punkten der C^{3n+1}, dann muss aber K^{4n+6} auch durch a, α gehen. Die Schnittpunkfe von K^{4n+6} und C^{3n+1}, die also noch übrig bleiben, treten zu vier so gruppirt auf, dass sie auf einer Geraden liegen, die Doppeltangente von E ist. Da K^{4n+6} die C^{3n+1} in

$$(3n+1)\ (4n+6) - 2(n-1) - 4(n+1)^2 - 6n(n+2) - (2n+4) = 2n^2 - 2n$$

Punkten schneidet, so hat E in Ganzen $\frac{1}{2}n(n-1)$ Doppeltangenten. In speziellen Fällen können diese auch theilweise durch Wendetangenten vertreten sein, wie diess bei der Curve 3ter Ordnung Γ die unserer Verwandtschaft zu Grunde liegt, der Fall ist, die ja die Enveloppe E der hyperelliptischen Curve H^{10} ist.

Die Ordnung der Enveloppe E ergibt sich, da sie rational und von der $(n+1)^{\text{ten}}$ Klasse ist, gleich $2n$. Man kann dieselbe übrigens direkt bestimmen. Offenbar ist ein Punkt von E derjenigen Curve k^7 zugeordnet, welche C^{3n+1} doppelt berührt. Durchlauft nun der Punkt k eine Gerade g, so werden die entsprechenden k^7 einen Büschel beschreiben und jede derselben trifft C^{3n+1} in $2n+2$ Punkten, die auf $(n+1)$ Curven C^3 des Büschels liegen. Die Curven C^3 welche diese Gruppen von $(n+1)$ Punkten ausschneiden bilden, eine Involution $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche $2n$ Doppelelemente aufweisst. Diese $2n$ Curven schneiden also jede in einem Punktepaar, durch welches eine k^7 hindurchgeht, die C^{3n+1} in diesem Punktepaar berührt. Auf g liegen daher $2n$ Punkte k, deren k^7 die C^{3n+1} doppelt berühren und daher ist die Ordnung von E wie oben angegeben $2n$.

13. Die Enveloppe E berührt die Curve Γ in $n+2$ Punkten. Es schneidet nämlich K^{10} die C^{3n+1} in $2n+4$ Punkten (nach 12), die paarweise genommen $n+2$ Tangenten von Γ liefern. Sei nun γ der Berührungspunkt einer derselben auf γ, so muss die k^7, welche in dem Paar a, α, welches zu γ gehört, die C^{3n+1} berührt, nothwendig zerfallen, da alle k^7, deren Punkte auf $\overline{a\alpha}$ liegen, die Gerade $\overline{a\alpha}$ in a und α berühren, also wenn sie auch C^{3n+1} berühren solle, hat die k^7 in a und α einen Doppelpunkt. Die k^7 gehört also dem Punkte γ zu, oder γ ist ein Punkt von E, da $\overline{a\alpha}$ Tangente in demselben an E ist, so berührt E die Γ in den $n+2$ Punkten.

III. Selbst entsprechende Curven der Verwandtschaft 14ter Ordnung.

14. Wir haben in (3) gesehen, dass einer Curve $C^n_{n_i}$ der n^{ten} Ordnung, welche in den Fundamentalpunkten $i=1, 2, \ldots 9$ je einen n_i-fachen Punkt hat, eine Curve $C^{n'}_{n'_i}$ entspricht für die

$$n' = 14n - n_9 - 7(n_8 + n_7) - 4\sum_1^6 {}_i n_i$$

sich ergibt. Hat $C^n_{n_i}$ noch ausserhalb der Fundamentalpunkte in a einen vielfachen Punkt, so wird $C^{n'}_{n'_i}$ in α einen genau so vielfachen Punkt besitzen.

Wir setzen

$$3n - \sum_1^9 {}_i n_i = \nu \tag{1}$$

dann ist ν die Anzahl Schnittpunkte eine Curve C^3 des Büschels durch 1—9 mit $C^n_{n_i}$ die nicht in die Fundamentalpunkte fallen. Führen wir noch

$$d = 3n - \sum_1^6 {}_i n_i - 2n_9 \tag{2}$$

ein, wobei also d die Anzahl Schnittpunkte von $C^m_{n_i}$ mit Γ ist, die nicht in die Doppelpunkte fallen, so wird

$$n' = 2n + 7\nu - 3d \tag{3}$$

Die Vielfachheit n'_i des Punktes i für $C^{n'}_{n'_i}$ ergibt sich aus der Anzahl Schnittpunkte von $C^n_{n_i}$ mit der dem Punkte i entsprechenden Fundamentalcurve. Also ist

$$\left.\begin{aligned} n'_9 &= n - n_8 - n_7 &&= n + \nu - d - n_9 \\ n'_8 &= 7n - 4n_8 - 3n_7 - 2\sum_1^6 {}_i n_i - n_9 &&= n + 3\nu - d - n_8 \\ n'_7 &= 7n - 3n_8 - 4n_7 - 2\sum_1^6 {}_i n_i - n_9 &&= n + 3\nu - d - n_7 \\ n'_\varkappa &= 4n - 2n_8 - 2n_7 - \sum_1^6 {}_i n_i - n_\varkappa &&= n + 2\nu - d - n_\varkappa \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$\varkappa = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

und wie es sein muss

$$\Sigma n'_i = 3n' - \nu$$

da $C^{n'}_{n'_i}$ jede C^3 auch in ν Punkten schneiden muss, welche den ν Schnittpunkten von $C^n_{n_i}$ entsprechen. Die Klasse k der Enveloppe der Geraden, welche die Punkte a von $C^n_{n_i}$ mit den Punkten α von $C^{n'}_{n'_i}$ verbindet, ergibt einfach als Zahl der Schnittpunkte von k^7 (I, 6) mit $C^n_{n_i}$, also ist

$$k = 7n - n_9 - 3(n_7 + n_8) - 2\sum_1^6 {}_i n_i = n + 3\nu - d. \quad (5)$$

$C^{n'}_{n'_i}$ und $C^n_{n_i}$ schneiden einander ausserhalb der Fundamentalpunkte in Punkten der Coïncidenzcurve H^8 und in der That folgt, dass die Anzahl der Schnittpunkte ven $C^n_{n_i}$ mit H^8 gleich $2n + 4\nu - 2d$ ist, also sich für $C^{n'}_{n'_i}$ gleich $2n' + 4\nu - 2d'$ stellt, wenn

$$d' = 3n' - \sum_1^6 n'_i - 2n_9'$$

gesetzt wird. Da nun

$$d' = n + 7\nu - 2d$$

folgt, so ergibt sich aus (1)

$$2n' + 4\nu - 2d' = 2n + 4\nu - 2d.$$

Ausserdem schneiden einander $C^n_{n_i}$ und $C^{n'}_{n'_i}$ noch in einer Anzahl Paaren a, α, die sich gleich $\frac{1}{2}(\nu - 1)\ (2n - 2d + 3\nu) - \nu - p + 1$ ergibt, wenn p das Geschlecht der Curve $C^n_{n_i}$ oder $C^{n'}_{n'_i}$ bedeutet, also $2p - 2 + \nu = n^2 - \sum_1^9 n_i^2$ ist.

15. Soll nun $C^{n'}_{n'_i}$ von derselben Ordnung sein, wie $C^n_{n_i}$ und dieselbe Vielfachheit der Punkte i besitzen, so ergibt (3)

$$3d = n + 7\nu \quad (6)$$

und (4)

$$\begin{aligned} 2n_9 &= n + \nu - d \\ 2n_8 &= n + 3\nu - d \\ 2n_7 &= n + 3\nu - d \\ 2n_i &= n + 2\nu - d \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6). \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf (6) erhält man dann

$$\left.\begin{aligned} n_9 &= d - 3\nu \\ n_8 &= d - 2\nu \\ n_7 &= d - 2\nu \\ n_i &= d - 5\frac{\nu}{2} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \end{aligned}\right\} (7)$$

so dass ν eine gerade Zahl sein muss.

Soll aber die Curve $C^n_{n_i}$ sich selbst entsprechen, so muss vor Allem ν eine gerade Zahl sein, da die Schnittpunkte von $C^n_{n_i}$ mit C^3 sich paarweise entsprechen müssen. Wir setzen also 2ν an Stelle von ν und haben

$$\left.\begin{gathered} 3d = n + 14\nu \\ n_9 = d - 6\nu, \quad n_8 = d - 4\nu, \quad n_7 = d - 4\nu, \quad n_i = d - 5\nu \, (i = 1, \; 2 \ldots 6) \end{gathered}\right\} (8)$$

aus ihnen folgt:

$$\sum_1^9 n_i = 3n - 2\nu$$

$$\sum_1^6 n_i + 2n_9 = 3n - d \, .$$

Nun muss sich aber die Klasse k der Enveloppe der Geraden, welche entsprechende Punkte verbinden, sobald $\nu > 1$, auf die Hälfte reduciren, wie sie sich aus 5) ergibt, da $C^n_{n_i}$ mit $C^{n'}_{n'_i}$ zusammenfällt d. h. es ist für die Enveloppe

$$k = \frac{n-d}{2} + 3\nu = d - 4\nu. \qquad (9)$$

Es folgt nun auch umgekehrt, wenn für eine $C^n_{n_i}$ die Gleichungen (8) und (9) stattfinden, so entspricht sie sich in der Verwandtschaft 14ter Ordnung selbst.

Denn die Gleichungen (8) sagen aus, dass die der $C^n_{n_i}$ entsprechende Curve $C'^n_{n_i}$ von der Ordnung n ist, und in dem Punkte i ebenfalls einen n_i-fachen Punkt besitzt. Würde nun $C^n_{n_i}$ mit der ihr entsprechenden Curve nicht zusammenfallen, so würde sich die Klasse k aus Formel (5) doppelt so gross ergeben, wie wir sie zu Folge (9) voraussetzen, also muss, wenn (9) stattfindet, die $C^n_{n_i}$ mit ihrer entsprechenden zusammenfallen.

Aus $3d = n + 14\nu$ ist ersichtlich, dass d nicht Null sein kann, also muss

$$n \equiv \nu \pmod 3$$

sein. Setzen wir daher

$$\left.\begin{gathered} n = 3m + \varepsilon \quad \nu = 3\mu + \varepsilon, \quad \varepsilon = 0, \; 1, \; -1, \quad \text{so wird} \\ n_9 = m - 4\mu - \varepsilon \quad n_7 = n_8 = m + 2\mu + \varepsilon \quad n_i = m - \mu \quad (i = 1, \; 2, \; 3, \; 4, \; 5, \; 6) \\ k = m + 2\mu + \varepsilon \end{gathered}\right\} (10)$$

woraus dann $d = m + 14\mu + 5\varepsilon$ folgt.

Das Geschlecht einer solchen $C^n_{n_i}$ ergibt sich

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\frac{1}{2}(m-4\mu-\varepsilon)(m-4\mu-\varepsilon-1)-(m+2\mu+\varepsilon)(m+2\mu+\varepsilon-1)-$$
$$-3(m-\mu)(m-\mu-1)=p=\nu(2m-5\mu-1-\varepsilon)+1$$

und soll dieselbe nicht zerfallen, so muss $p > 0$ sein.

Für den Fall $\nu = 1$ also $\mu = 0$ $\varepsilon = 1$, haben wir die hyperelliptischen Curven; die wir in II. betrachtet haben, es ergibt sich wie dort

$$n = 3m + 1; \quad n_9 = m - 1 \quad n_7 = n_8 = m + 1 \quad n_i = m \quad (i = 1, 2 \ldots 6)$$
$$k = m + 1; \quad p = 2m - 1.$$

16. Eine $C^n_{n_i}$, für die die Gleichungen (10) gelten, ist bestimmt durch

$$\frac{1}{2}n(n+3)-\frac{1}{2}(m-4\mu-\varepsilon)(m-4\mu-\varepsilon+1)-(m+2\mu+\varepsilon)(m+2\mu+\varepsilon+1)-3(m-\mu)$$
$$(m-\mu+1)=p-1+2\nu$$

Punkte, was sich einfach ergibt, wenn man von obiger Gleichung für p den eben hingeschriebenen Ausdruck subtrahirt und die erste Gleichung (8) berücksichtigt.

Nimmt man daher $p - 2 + 2\nu$ Punkte willkürlich an, so werden die $C^n_{n_i}$, für welche die Gleichungen (10) mit Ausnahme der letzten gelten, und die durch die festen Punkte gehen, einen Büchsel bilden, der zu dem Büchsel der entsprechenden Curven $C'^n_{n_i}$ projektivisch sein wird. Ist $\nu > 1$, so werden im Allgemeinen die Büschel nicht identisch sein und erzeugen eine Curve, die aus der Coïncidenzcurve H^8 und aus einer zweiten sich selbst entsprechenden Curve $C^{n'}_{n'_i}$ besteht. Letztere ist der Ort der $(2\nu - 1)(m - d + 3\nu) - 2\nu - p + 1$ Paare a, α, die auf jeder Curve $C^n_{n_i}$ liegen. Beachtet man, dass H^8 in 8 und 7 je 4-fache, im $1, 2, \ldots 6$ je Doppelpunkte besitzt und durch 9 nicht hindurch geht, so wird für $C^{n'}_{n'_i}$ folgen:

$$n' = 2n - 8 = 3(2m - 3 + \varepsilon) + 1 - \varepsilon = 3m' + \varepsilon'$$
$$n'_9 = 2m - 8\mu - 2\varepsilon \quad n'_7 = n'_8 = 2m + 4\mu + 2\varepsilon - 4$$
$$n'_i = 2m - 2\mu - 2 \quad (i = 1, 2, \ldots 6)$$

da nun
$$2\nu' = 3n' - \sum_1^9{}_i\, n'_i = 4(\nu - 1)$$
folgt, so ist
$$\nu' = 2(\nu - 1) = 3(2\mu - 1 + \varepsilon) + 1 - \varepsilon = 3\mu' + \varepsilon'$$
also wenn
$$n' = 3m' + \varepsilon' \quad \nu' = 3\mu' + \varepsilon'$$
gesetzt wird, wobei
$$m' = 2m - 3 + \varepsilon \quad \mu' = 2\mu - 1 + \varepsilon \quad \varepsilon' = 1 - \varepsilon$$
ist, folgt:
$$n'_9 = m' - 4\mu' - \varepsilon'; \quad n'_7 = n'_8 = m' + 2\mu' + \varepsilon'; \quad n'_i = m' - \mu' \; (i = 1, 2 \ldots 6)$$

wie es sein muss, da die Gleichungen (10) für die sich selbst entsprechende Curve $C^{n'}_{n'_i}$ stattfinden müssen.

Auf diese Art kann man sich Curven, die in der Verwandtschaft sich selbst entsprechen, beliebig hoher Ordnung verschaffen, ohne dass man erst nöthig hätte auf die Erfüllung der

Gleichung $k = m + 2\mu + \varepsilon$ (die letzte der Gleichungen 10) Rücksicht zu nehmen; denn sie ist für eine derartig projektivisch erzeugte Curve $C^{n'}_{n'_i}$ per se erfüllt.

Man kann übrigens auch durch einen Büschel von beliebigen Curven $C^n_{n_i}$ und den dazu projektivischen Büschel der $C^{n'}_{n'_i}$ Curven erzeugen, die sich selbst entsprechen und die der Ort der Paare sind, welche auf den Curven des Büschels der $C^n_{n_i}$ liegen. Man überzeugt sich leicht, dass für die erzeugten Curven, die Gleichungen 10 stattfinden.

Von dem Gesammterzeugniss der beiden Büschel ist natürlich die Coïncidenzcurve H^8 in Abzug zu bringen.

IV. Die involutorische Verwandtschaft 11ter Ordnung.

17. Wir sind in I. von einem Curvennetze 4ter Ordnung ausgehend, zu einer Verwandtschaft 14ter Ordnung gelangt, die wir auch in bestimmter Weise durch einen Curvenbüschel 3ter Ordnung definiren konnten, durch Zuhilfenahme einer rationalen Curve 3ter Ordnung Γ. Wie ersetzen nun im Folgenden die Curve Γ durch einen Kegelschnitt und zwar auf folgende Art.

Es seien 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 neun Schnittpunkte zweier Curven 3ter Ordnung. Wir legen durch 1, 2, 3, 4, 5 einen Kegelschnitt Γ, welcher von jeder Curve C^3_γ des Büschels durch 1—9 in einem Punkte γ getroffen wird. Die Stralen durch γ bestimmen auf C^3_γ eine lineare Schaar von zwei Punkten a, α, die wir einander zuordnen. Hiedurch wird jedem Punkte a der Ebene in eindeutiger Weise ein Punkt α zugeordnet, so dass dem Punkt α als b aufgefasst der Punkt a als β entspricht. Die C^3_a, welche durch a, geht schneidet nämlich Γ in *einem* Punkte, der mit a verbunden auf C^3_a den Punkt α als Schnitt der Geraden mit C^3_a bestimmt. *Die Verwandtschaft ist mithin eindeutig involutorisch und die Punkte 1—9 sind ihre Fundamentalpunkte.*

Nach einem bekannten Satze ist γ für die Curve C^3_γ, welche durch γ auf Γ geht der Gegenpunkt von 6, 7, 8, 9, so dass die Kegelschnitte C^2 des Büschels durch 6, 7, 8, 9 dieselben Punktepaare auf C^2_γ ausschneiden, wie der Stralenbüschel durch γ. Ein fester Kegelschnitt C^2_a des Büschels wird nun von allen C^3 in Punktepaaren einer quadratischen Involution geschritten, deren Centrum auf Γ liegt. Denn es möge C^3_γ den Kegelschnitt C^2_a in a und α schneiden, dann trifft $\overline{a\alpha\gamma}$ den Γ noch in c, welcher Punkt das Involutionscentrum ist, da die C^3_c den C^2_a auch in einem Punktepaare b, β schneidet, so dass b, β durch c geht. Die Punktreihe c auf Γ ist zum Kegelschnittsbüschel (C^2) projektivisch; denn die Kegelschnitte C^2, welche auf einer festen C^3_γ die Punktepaare $a\alpha$ ausschneiden, sind projektivisch zu dem Stralenbüschel, welcher diese Paare aus γ projicirt, und letzterer schneidet Γ in der Punktreihe c der Involutionscentren. Hieraus ergibt sich eine neue Definition der Verwandtschaft: *Ordnet man den Kegelschnitten C^2 eines Büschels die Punkte c eines festen Kegelschnittes Γ projektivisch zu, und lässt einem Punkte a den Punkt α entsprechen, in dem sich C^2_a und $\overline{ca}$ noch schneiden, so ist* diese Verwandtschaft identisch mit der oben definirten bei passender Wahl der Bestimmungsstücke. Projicirt man nämlich die Punkte c aus einem beliebigen Punkte γ von Γ, so ist der Stralenbüschel projektivisch dem Kegelschnittsbüschel (C^2) und beide erzeugen eine sich selbst entsprechende Curve 3^{ter} Ordnung, welche durch die Basis des Büschels (C^2) und γ geht, sowie durch 5 feste Punkte auf Γ. Diese sind nämlich diejenigen c, welche auf den ihnen entsprechenden C^2 liegen. Die C^3 bilden daher einen Büschel und entsprechen sich in der Verwandtschaft selbst, so zwar dass entsprechende Punkte auf Stralen durch γ liegen, wenn γ der 6^{te} Schnittpunkt von C^3 mit Γ ist.

Dem Punkte i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ entspricht als Fundamentalcurve der Kegelschnitt $\varDelta_i^2$ durch 6, 7, 8, 9 und i; denn durchlauft γ den Kegelschnitt Γ, so wird die C_γ^3 einen zur Punktreihe γ projektivischen Büschel beschreiben und $\overline{i\gamma}$ bestimmt auf C_γ^3 den i entsprechenden Punkt. Da nun $i\,(\gamma) \;\overline{\wedge}\; (C_\gamma^3)$ ist, so erzeugen dieselben eine Curve 4^{ter} Ordnung, welche in i einen Doppelpunkt hat und durch die übrigen 8 Punkte einfach hindurchgeht. Ein Theil des Erzeugnisses ist Γ, also ist der andere Theil auch ein Kegelschnitt, der durch i geht und durch 6, 7, 8, 9, wodurch er bestimmt ist.

Dem Punkte h $(h = 6, 7, 8, 9)$ entspricht eine Curve 5^{ter} Ordnung $\varDelta_h^5$, welche in h einen 3-fachen, in den übrigen 3 Punkten je Doppelpunkte und in den Punkten 1—5 einfache Punkte hat. Denn die Stralen durch h treffen Γ in zwei Punkten, durch welche zwei C^3 gehen, die die beiden auf dem Stral liegenden und h zugeordneten Punkte ausschneiden. Der Stralenbüschel durch h ist also durch Γ auf den Curvenbüschel (C^3) so bezogen, dass einem Strale von (h) zwei Curven von (C^3) hingegen einer Curve von (C^3) ein Stral von (h) entspricht. Das Erzeugniss ist also von der $1 + 2 \,.\, 3 = 7^{\text{ter}}$ Ordnung und da Γ dazu gehört, so bleibt eine Curve 5^{ter} Ordnung übrig, die in h einen 3-fachen, in den drei übrigen Punkten h Doppelpunkte besitzt. Da Γ durch die Punkte 1– 5 geht, so hat $\varDelta_h^5$ daselbst nur mehr einfache Punkte.

Ist nun x die Ordnung einer Curve, welche einer Geraden entspricht, so hat dieselbe in den Punkten 1—5 Doppelpunkte, in 6—9 aber 5-fache Punkte. Zwei Curven, welche den Geraden g und g' entsprechen, können sich ausserhalb der Fundamentalpunkte nur mehr in einem Punkte schneiden, welcher den Schnittpunkt von gg' entspricht, also muss

$$x^2 - 1 = 5 \,.\, 4 + 4 \,.\, 25 = 120$$

sein, woraus $x = 11$ folgt d. h. die Verwandtschaft ist 11^{ter} Ordnung. Einer Curve n^{ter} Ordnung, welche in den Punkten i $(i = 1, 2, \ldots, 9)$ je δ_i-fache Punkte hat, wird daher eine Curve N^{ter} Ordnung entsprechen, wobei

$$N = 11n - 2\,(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5) - 5\,(\delta_6 + \delta_7 + \delta_8 + \delta_9)$$

ist.

18. Man findet nun wieder, dass der Ort der zusammenfallenden Punkte a, α eine Curve 7^{ter} Ordnung H^7 ist, indem auf jeder Geraden g der Ebene nur zwei Paare a, α liegen und G^{11} also, welche der Geraden g entspricht, diese noch in 7 Punkten trifft, die mit ihren entsprechenden zusammenfallen müssen. Die Punkte 1—5 sind einfache Punkte von H^7, die Punkte 6—9 aber 3-fache.

Die Curve k^5, welche der Ort der Paare ist, die auf Stralen durch einen Punkt k der Ebene liegen, ist 5^ter Ordnung und hat in 1—5 einfache, in 6—9 Doppelpunkte. Durch einen Punkt a geht ein Büschel der k^5, welcher auch durch α und das zweite auf $\overline{a\alpha}$ liegende Paar a_1, α_1 geht. Durch zwei Punkte ist k^5 und auch der ihr zugehörige Punkt k unzweideutig bestimmt.

Der Ort der Doppelpunkte von k^5 ist einestheils die Coïncidenzcurve H^7, in jedem Punkte dieser berühren alle k^5 eine feste Gerade und eine hat daselbst einen Doppelpunkt, anderntheils eine Curve 5^ter Ordnung K^5, auf welcher aber die Doppelpunkte der k^5 stets gepaart in a und α auftreten und in Folge dessen zerfallen die k^5; denn die C^3_a, welche durch den Doppelpunkt a geht, geht auch durch den Doppelpunkt α und muss daher ein Theil von k^5 sein. Der andere Theil ist der Kegelschnitt durch 6, 7, 8, 9 und a, α. Die Curve K^5 ist der Ort der Schnittpunkte der Tangenten von Γ mit den Curven C^3, welche durch ihre Berührungspunkte auf Γ hindurchgehen. Hieraus erkennt man, dass K^5 in 1—5 einfache, in 6—9 Doppelpunkte hat. Die aus der Curve C^3, welche durch γ geht, und dem Kegelschnitt k^2 des Büschels (6, 7, 8, 9), der durch das Paar $a\alpha$ auf der Tangente t in γ geht, welches C^3 ausschneidet, bestehende Curve 5^ter Ordnung ist die k^5, welche γ zugehört.

Da nun die k^5, welche ihren Punkt k auf t hat, durch das einzige auf t liegende Paar a, α hindurch geht, so berührt sie t in a und α oder t ist Doppeltangente aller k^5, deren k auf t liegt. Hieraus folgt: Durch den Punkt k gehen zwei Doppeltangenten an k^5, nämlich die Tangenten von Γ. Es kann auch K^5 jede k^5 nur in 4 Punkten schneiden, die paarweise auf Stralen durch k liegen. Diess ergibt sich durch Abzählen ohne weiters.

Die H^7 trifft eine k^5 noch in

$$5.7 - 5.1 - 4.6 = 6$$

Punkten d. h. durch k gehen 6 einfache Tangenten von k^5. Hieraus folgt, die Klasse von k^5 ist $2.2 + 6 + 2 = 12$, was auch die Plückersche Formel gibt.

Ferner folgt: Die Enveloppe der Richtungen, in denen a, α auf H^7 zusammenfallen, ist eine Curve der 6^ten Klasse E^6.

Die Ordnung der Curve, die aus den Paaren besteht, welche auf den Tangenten einer Curve der μ-Klasse liegen, ergibt sich als 5μ. Denn die Klasse der Curve, welche die Punkte a einer Geraden, mit den Punkten α, der ihr entsprechenden G^{11} verbindet, ist fünf, indem durch jeden Punkt k die 5 Strahlen gehen, welche k mit den Schnittpunkten der k^5 mit g verbinden. Diese Enveloppe hat mit der Enveloppe μ^{ter} Klasse 5μ Tangenten gemeinschaftlich, auf denen Punktepaare liegen, von denen ein Punkt auf g fällt.

Die Curve $K^{5\mu}$ $5\mu^{ter}$ Ordnung hat in 1—5 je μ-fache, in 6—9 je 2μ-fache Punkte.

So ist der Curve G^{11} noch eine K^{13} zugeordnet, welche das ander Punktepaar enthält, das auf der Verbindungslinie des Punktes a von G und α von G^{11} liegt. K^{13} hat in 1—5 je 3-fache, in 6—9 je 5-fache Punkte.

V. Hyperelliptische Curven der Ordnung $3n+2$.

19. Jede Curve C^{3n+2} der Ordnung $m=3n+2$, welche in den Punkten 1—5 je n-fache Punkte, in 6—9 je $(n+1)$-fache Punkte besitzt, entspricht sich in der Verwandtschaft 11ter Ordnung selbst, und ist eine **hyperelliptische** Curve.

Vor Allem ersieht man, dass jede C^3 des Büschels durch 1 – 9 eine solche C^{3n+2} ausserhalb der Fundamentalpunkte nur mehr in

$$3(3n+2)-5n-4(n+1)=2$$

Punkten schneidet. Umgekehrt wird eine feste C^3_a, welche durch den Punkt a geht, von allen C^{3n+2} der oben bezeichneten Art nur in je zwei Punkten geschnitten, deren Verbindungsgerade mithin durch einen festen Punkt γ von C^3_a gehen muss. Nun bilden aber n Curven C^3 mit einem Kegelschnitt durch 6, 7, 8, 9 zusammen eine C^{3n+2}, von welcher der letztere die C^3_a in 2 Punkten schneidet, deren Verbindungslinie durch den Gegenpunkt γ der vier Punkte 6, 7, 8, 9 für C^3_a gehen muss, d. h. γ liegt auf dem Kegelschnitte Γ durch 1—5 und die Punktepaare, in denen alle Curven C^{3n+2} die C^3_a schneiden, werden auch vom Kegelschnittsbüschel durch 6, 7, 8, 9 ausgeschnitten, und sind entsprechende Punkte unserer Verwandtschaft. Trifft mithin die C^3_a eine beliebige C^{3n+2} der oben angegebenen Art in a, so geht sie auch durch α und dieser Punkt liegt auch auf C^{3n+2}. Hieraus folgt: Jede C^{3n+2}, welche in 1—5 je n-fache, in 6—9 je $(n+1)$-fache Punkte hat, entspricht sich in der Verwandtschaft 11ter Ordnung selbst.

Da dasselbe für alle Curven $(m-3)^{\text{ter}}=3(n-1)+2^{\text{ter}}$ Ordnung gilt, welche in 1—5 je $(n-1)$-fache, in 6—9 je n-fache Punkte haben, so ersieht man, dass jede adjungirte Curve $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung der C^m, welche durch einen Punkt a derselben geht auch durch den Punkt α gehen muss, woraus der hyperelliptische Charakter der Curven C^{3n+2} ersichtlich.

20. Eine C^{3n+2} ist bestimmt durch

$$\tfrac{1}{2}(3n+2)(3n+5)-5\,.\,\tfrac{1}{2}n(n+1)-4\,.\,\tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)=2n+1$$

Punkte, mithin ist eine Curve $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, die zu C^m adjungirt ist, bestimmt durch $2n-1$ Punkte und ein Büschel solcher Curven durch $2n-2$ Punkte. Man kann daher jede C^{3n+2} durch einen Büschel von Curven C^3 und $C^{3(n-1)+2}$ projectivisch erzeugen. Denn nimmt man $2n-2$ von den $2n+1$ gegebenen Punkten zu Basispunkten eines Büschels $[3(n-1)+2]^{\text{ter}}$ Ordnung an, so kann man die letzten drei dazu benützen, die Projektivität zwischen diesem Büschel und dem Büschel C^3 festzulegen, wodurch dann beide die C^{3n+1} erzeugen.

So z. B. sind von einer C^5, welche in 1—5 je einfache, in 6—9 je Doppelpunkte besitzt, noch 3 Punkte willkürlich. Sind dieselben beliebig gegeben, so kann durch sie die Projektivität des Curvenbüschels (C^3) und des Kegelschnittsbüschels durch 6, 7, 8, 9 festgelegt werden und beide erzeugen die C^5. Man erkennt, dass unsere früheren k^5, welche schon durch 2 Punkte bestimmt waren, eine spezielle Mannigfaltigkeit der C^5 bilden.

21. Verbindet man die Punktepaare auf einer C^{3n+2}, so ist die Enveloppe E der Geraden eine Curve der $(n+1)^{\text{ten}}$ Klasse, denn durch einen Punkt k gehen $(n+1)$ Tan-

genten derselben, da die k^5 eine C^{3n+2} in

$$5(3n+2) - 5.n - 4.2.(n+1) = 2n+2$$

Punkten schneidet, die paarweise auf Stralen durch k liegen.

Die Enveloppe E ist eine rationale Curve, indem sie $\frac{1}{2}n(n-1)$ Doppeltangenten besitzt. Denn die zugeordnete Curve K, welche die anderen Paare enthält; die auf den Tangenten von E liegen, ist von der $5(n+1)-(3n+2)=(2n+3)^{\text{ten}}$ Ordnung, und hat in 1—5 je $(n+1)-n=1$-fache, in 6—9 je $2(n+1)-(n+1)=(n+1)$-fache Punkte. Nun schneidet aber K^{2n+3} die C^{3n+2} überall dort, wo C^{3n+2} von K^5 getroffen wird, d. h. in

$$5(3n+2) - 5.n - 4.2(n+1) = 2n+2$$

Punkten, in denen je zwei Paare sich decken. Es bleiben daher noch

$$3(n+2)(2n+3) - 5n + 4(n+1)^2 - (2n+2) = 2n^2 - 2n$$

Schnittpunkte von C^{3n+2} mit K^{2n+3} übrig, welche zu 4 auf Geraden liegen, die also $\frac{1}{2}n(n-1)$ Doppeltangenten von E sind.

Man kann auch hier die Ordnung der Enveloppe E direkt bestimmen, wie es in II, 12 geschah und findet für dieselbe $2n$.

Ebenso ergibt sich, dass der Kegelschnitt Γ von der Enveloppe E in $n+2$ Punkten berührt wird.

22. Die Curven 5^{ter} Ordnung C^5, welche in 1—5 je einfache, in 6—9 Doppelpunkte haben, kann man dazu benutzen die Verwandtschaft 11^{tes} Grades durch ein Netz von Curven 5^{ter} Ordnung analog zu definiren, wie es Eingang in I. durch die Curven 4^{ter} Ordnung für die Verwandtschaft 14^{ter} Ordnung geschah.

Die C^5, welche nämlich durch den festen Punkt b, also auch den entsprechenden β gehen, bilden ein Netz und je zwei Curven schneiden einander ausser in den Fundamentalpunkten und in b, β nur noch in zwei Punkten, die offenbar ein Paar $\alpha\alpha$ bilden. Man ersieht, dass die Wahl des Punktepaares b, β beliebig ist, und dass den Fundamentalpunkten b, β keine Fundamentalcurven entsprechen. Die Jacobische Curve des Netzes der C^5, welche durch b, β gehen, besteht aus der Coïncidencurve H^7, aus der Curve dritter Ordnung C^3_b und dem Kegelschnitte durch 6—9, welcher das Punktepaar b, β enthält.

VI. Selbstentsprechende Curven der Verwandtschaft 11^{ter} Ordnung.

23. Die Ordnung n' der Curve $C^{n'}_{n'_i}$, welche der Curve $C^n_{n_i}$ in der Verwandtschaft 11^{ter} Ordnung entspricht, die in den Fundamentalpunkten i je einen n_i-fachen Punkt hat, ergibt sich nach IV, 17:

$$n' = 11n - 2\sum_1^5{}_i n_i - 5\sum_6^9{}_\varkappa n_\varkappa.$$

Setzen wir nun wieder wie in (III, 14)

$$3n - \sum_1^9 n_i = \nu \tag{1}$$

wobei also ν die Anzahl Schnittpunkte einer Curve C^3 des Büschels mit der $C^n_{n_i}$ bedeutet

und
$$d = 2n - \sum_1^5{}_i n_i \tag{2}$$
die Anzahl Schnittpunkte des Kegelschnittes Γ mit $C^n_{n_i}$ ist, die nicht in die Fundamentalpunkte fallen, so ergibt sich
$$n' = 2n + 5\nu - 3d. \tag{3}$$

Die Vielfachheit n'_i des Punktes i folgt wieder aus der Anzahl Schnittpunkte von $C^n_{n_i}$ mit der Fundamentalcurve des Punktes i, und ergibt sich, da den Punkten 1—5 Kegelschnitte, den Punkten 6—9 Curven 5ter Ordnung als Fundamentalcurven zugehören (IV, 18)
$$\left.\begin{aligned} n'_i &= n + \nu - d - n_i \qquad & i &= 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \\ n'_\varkappa &= n + 2\nu - d - n_\varkappa \qquad & \varkappa &= 6,\ 7,\ 8,\ 9. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die Klasse k der Enveloppe der Geraden, welche die Punkte a von $C^n_{n_i}$ mit ihren entsprechenden α von $C^n_{n'_i}$ verbindet, ergibt sich aus der Anzahl Schnittpunkte der k^5 mit $C^n_{n_i}$
$$k = 5n - \sum_1^5{}_i n_i - 2\sum_6^9{}_\varkappa n_\varkappa = n - d + 2\nu. \tag{5}$$

$C^n_{n_i}$ und $C^{n'}_{n'_i}$ schneiden einander auf der Coïncidenzcurve H^5 in $2n - 2d + 3\nu$ und überdiess noch in $(\nu - 1)(2n - 2d + 2\nu) - 2\nu - 2p + 2$ Punkten, die $(\nu - 1)(n - d + \nu) - \nu - p + 1$ Paare a, α bilden, die auf $C^n_{n_i}$ liegen. Hiebei ist p das Geschlecht der $C^n_{n_i}$ gegeben durch
$$p = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - \tfrac{1}{2}\Sigma n_i(n_i - 1)$$
also ist
$$\left.2p - 2 + \nu = n^2 - \Sigma n_i^2 = n'^2 - \Sigma n'^2_i\right\} \tag{6}$$

24. Soll nun $C^n_{n_i}$ mit ihrer entsprechenden $C^{n'}_{n'_i}$ zusammenfallen, so mus ν offenbar gerade sein, und wenn es grösser als 2 ist, muss noch die Klasse k der Enveloppe sich auf die Hälfte reduziren. Setzen wir daher 2ν an Stelle von ν und $2k$ an Stelle von k, so ergibt sich, da
$$3n - \sum_1^9 n_i = 2\nu \qquad d = 2n - \sum_1^5 n_i \tag{7}$$
ist, aus 3) 4) und 5) für $n' = n$,
$$\left.\begin{gathered} 3d = n + 10\nu \\ n_i = d - 4\nu\,, \quad n_\varkappa = d - 3\nu \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (\varkappa = 6, 7, 8, 9) \\ k = d - 3\nu\,. \end{gathered}\right\} \tag{8}$$

Es folgt aber auch umgekehrt, dass jede $C^n_{n_i}$, für welche die Gleichungen 8) alle stattfinden, sich selbst entsprechen muss, genau sowie in III, (15). Setzen wir
$$n = 3m + \varepsilon, \qquad \nu = 3\mu - \varepsilon \qquad (\varepsilon = 0, 1, -1)$$
und
$$\left.\begin{aligned} n_i &= m - 2\mu + \varepsilon \qquad & i &= 1, 2, 3, 4, 5 \\ n_\varkappa &= m + \mu & \varkappa &= 6, 7, 8, 9 \\ k &= m + \mu \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

so wird

$$d = m + 10\mu - 3\varepsilon \quad \text{und also} \quad 3d = n + 10\nu$$

erfüllt sein.

Die Curven $C^n_{n_i}$, deren Zahlen für die vielfachen Punkte die Gleichungen 10) erfüllen und für die auch k den angegebenen Werth hat, entsprechen sich in der Verwandtschaft selbst. Für $\nu = 1$ erhalten wir die hyperelliptischen Curven.

Für das Geschlecht p ergibt sich

$$p = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - \tfrac{1}{2}\sum_1^9 n_i(n_i+1) = 2\nu(m - 2\mu + \varepsilon) - \nu + 1.$$

25. Eine $C^n_{n_i}$, für welche die Gleichungen 10) gelten, ohne dass die letzte $k = m + \mu$ erfüllt wäre, ist durch $p + 2\nu - 1$ Punkte bestimmt. Durch $p + 2\nu - 2$ feste Punkte geht also ein Büschel von solchen Curven, deren entsprechende $C^n_{n_i}$ sobald $\nu > 1$ ist nicht nothwendig mit ihnen selbst zusammenfallen, sondern einen zu ihnen projektivischen Büschel $C^n_{n_i}$ bilden und beide erzeugen ausser der Coïncidenzcurve $H^{\cdot}$, noch eine Curve $C'^{n'}_{n'_i}$, welche der Ort der Paare a, α ist, die auf einer $C^n_{n_i}$ liegen. Es ergibt sich für diese

$$\begin{aligned} n' &= 2n - 7 & & \\ n'_i &= 2m - 4\mu + 2\varepsilon - 1 & \qquad i &= 1, 2, 3, 4, 5 \\ n'_\varkappa &= 2m + 2\mu - 3 & \qquad \varkappa &= 6, 7, 8, 9 \end{aligned}$$

und man überzeugt sich leicht, dass n', n'_i, $n'_\varkappa$ die Gleichungen 10) befriedigen, wenn man beachtet, dass

$$2\nu' = 3\nu' - \sum_1^9{}_i n'_i = 4(\nu - 1)$$

und

$$d' = 2n' - \sum_1^5{}_i n_i = 2d - 9$$

wird.

Die auf diese Art erhaltene $C^{n'}_{n'_i}$ entspricht sich selbst in der Verwandtschaft und folglich muss die Klasse k der Enveloppe der Punktepaare auf ihr gleich $m' + \mu'$ sein, wobei sich m' und μ' aus den Gleichungen $n' = 3m' + \varepsilon'$ $\nu' = 3\mu' + \varepsilon'$ berechnen, also

$$n' = 3(2m - 2 + \varepsilon) - \varepsilon' \quad \nu' = 3(2\mu - 1 - \varepsilon) + \varepsilon', \quad \varepsilon' = 1 + \varepsilon$$

wird daher

$$m' = 2m - 2 + \varepsilon, \qquad \mu' = 2\mu - 1 - \varepsilon$$

ist und

$$k = 2m + 2\mu - 3\,.$$

Es gilt auch hier, was am Schlusse von III, 16) gesagt wurde.

Prag, 20. Januar 1885.

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der königl.- böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften

Jahr/Year: 1886

Band/Volume: 7_1

Autor(en)/Author(s): Bobek Karl

Artikel/Article: Anhang. Über involutorische Cremona-Transformationen der 14ten und 11ten Ordnung und hyperelliptische Kurven 3n + 1ter und 3n + 2ter Ordnung. 27-47