ÜBER FUNCTIONEN

MIT

BESCHRÄNKTEM EXISTENZBEREICHE.

VON

M. LERCH,

Privatdocent am böhmischen Polytechnikum.

(Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. — VII. Folge, 2. Band.)

(Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe Nr. 9.)

PRAG.

Verlag der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. — Druck von Dr. Ed. Grégr.

1888.

In den *Contributions à la théorie des fonctions*, welche in den Sitzungsberichten d. G. vom Jahre 1886 erschienen, habe ich über die Richtigkeit eines vom Herrn *E. Goursat* in den Comptes Rendus t. 94, p. 716 gegebenen Satzes mein Bedenken ausgesprochen. Ich habe dabei nur den unvollständigen Beweis, welcher den fast unmittelbar ersichtlichen ersten Theil des Satzes ausführlich behandelt, dagegen den gerade interessanten und besonders wichtigen zweiten Theil bei Seite lässt, im Sinne gehabt; wenn ich den Satz selbst für zweifelhaft erklärte, so geschah dies nur im Hinblick auf eine merkwürdige Thatsache — dass sich nämlich unter gewissen Umständen die Unendlichkeiten von Gliedern einer unendlichen Reihe gegenseitig aufheben können, selbst wenn sie nicht wiederholt vorkommen. Glücklicherweise wurde ich durch eine zweite Mittheilung*) des Herrn *Goursat* von der Richtigkeit des in Rede stehenden Satzes überzeugt und erkannte dabei, dass derselbe zuerst von Herrn *H. Poincaré***) gefunden und bewiesen wurde.

Ich werde im Folgenden diesen Satz etwas verallgemeinern und für ihn einen Beweis entwickeln, welcher von den beiden von den genannten französischen Mathematikern gegebenen Beweisen wesentlich verschieden ist. Im Abschnitte II. wird dann ein von mir in einem Briefe an Herrn *G. Mittag-Leffler* entwickeltes Princip allgemeiner gefasst und einige wegen der arithmetischen Natur ihrer Coefficienten interessante Potenzreihen, welche nur innerhalb des Einheitskreises existiren, entwickelt.

Schliesslich wird im Abschnitte III. ein ziemlich allgemeines Theorem über Functionen, welche eine daselbst näher characterisirte Transformation zulassen, bewiesen.

I.

1. Es seien

$$a_0, a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots$$

irgend welche von einander verschiedene complexe Grössen, und es bedeuten

$$c_0, c_1, c_2, \ldots c_\nu, \ldots$$

*) *Bulletin des Sciences mathématiques,* 2. série, t. XI., mai 1887.

**) Acta Societatis Fennicae, t. XII., p. 341.

Glieder einer absolut convergirenden unendlichen Reihe. Schliesslich sei m eine endliche Grösse, die keine positive ganze Zahl sein soll; dann wird die unendliche Reihe

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (x - a_\nu)^m$$

für sämmtliche x, denen die Grössen a_ν nicht unendlich nahe kommen, einen bestimmten endlichen Werth besitzen, den wir mit $f(x)$ bezeichnet haben. Es zeigt sich leicht, dass diese Function in einer gewissen Umgebung jeder Stelle x_0, welcher die Stellen a_ν nicht unendlich nahe kommen, durch eine Potenzreihe von der Form

$$(2) \qquad A_0 + A_1(x - x_0) + A_3(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (x - x_0)^k$$

dargestellt werden kann. Der wahre Convergenzbezirk dieser Potenzreihe ist auch ein solcher für die Potenzreihe

$$\sum_{k=n}^{\infty} n! \binom{k}{n} A_k (x - x_0)^{k-n},$$

welche die Function

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = m(m-1) \ldots (m-n+1) \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (x - a_\nu)^{m-n}$$

darstellt. Da nun die letztgeschriebene Reihe dieselbe Form wie die Reihe (1) hat, und für hinreichend grosse Werthe von n der Exponent $m - n$ einen negativen reellen Bestandtheil besitzt, so dürfen wir uns bei der Bestimmung des wahren Convergenzbezirkes der Potenzreihe (2) auf diejenigen Werthe von m beschränken, welche einen negativen reellen Bestandtheil besitzen. Es liegt nicht in unserer Absicht, den wahren Convergenzbezirk der Reihe (2) für jeden Werth von x_0 zu bestimmen, sondern wir beschränken uns auf den Fallen, dass eine der Differenzen $x_0 - a_\nu$ den kleinsten absoluten Betrag erhält, so dass, wenn dies für $\nu = \alpha$ der Fall ist, die Ungleichheiten

$$\left| \frac{x_0 - a_\nu}{x_0 - a_\nu} \right| > 1, \; (\nu \gtrless \alpha),$$

bestehen. Man darf unbeschadet der Allgemeinheit $\alpha = 0$ voraussetzen.

Nun ist klar, dass die Reihe (2) convergirt, so lange $|x - x_0| < |a_0 - x_0|$ ist; um zu zeigen, dass diese Bedingung zur Convergenz erforderlich sei, dass also $|a_0 - x_0|$ der wahre Convergenzradius der Potenzreihe (2) ist, betrachten wir die Function $f(x)$ für diejenigen Werthe von x, welche der Strecke $(x_0 \ldots a_0)$ angehören. Für dieselben bestehen offenbar die Ungleichheiten

$$\left| \frac{x - a_\nu}{x - a_0} \right| > 1, \; (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

und somit kommt für jeden Werth von ϱ

$$\sum_{\nu=\varrho}^{\infty}\left| c_\nu \left(\frac{x-a_\nu}{x-a_0}\right)^m \right| < \sum_{\nu=\varrho}^{\infty} |c_\nu|$$

Hieraus werden wir schliessen, dass die Formel

$$\lim_{x=a_0} \frac{f(x)}{(x-a_0)^m} = c_0 \tag{3}$$

besteht. Denn ist δ irgend welche noch so kleine positive Grösse, so kann man ϱ so gross wählen, dass

$$\sum_{\nu=\varrho}^{\infty} |c_\nu| < \frac{\delta}{2},$$

und somit auch

$$\left|\sum_{\nu=\varrho}^{\infty} c_\nu \left(\frac{x-a_\nu}{x-a_0}\right)^m\right| < \frac{\delta}{2};$$

ausserdem kann man auf der Strecke $(x_0 \ldots a_0)$ eine Stelle x' so nahe bei a_0 wählen, dass für sämmtliche x an der Strecke $(x' \ldots a_0)$ die Ungleichung

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\varrho-1} c_\nu \left(\frac{x-a_\nu}{x-a_0}\right)^m\right| < \frac{\delta}{2}$$

besteht; aus den beiden letzten Ungleichungen folgt aber die folgende

$$\left|\frac{f(x)}{(x-a_0)^m} - c_0\right| < \delta,$$

welche für sämmtliche x an der Strecke $(x' \ldots a_0)$ besteht. Diese Eigenschaft von $\frac{f(x)}{(x-a_0)^m}$ wird aber eben durch die Formel (3) ausgedrückt.

Wäre nun der wahre Convergenzradius der Reihe (2) grösser als $|x_0 - a_0|$, so würde die Function $f(x)$ für $x = a_0$ einen endlichen Werth annehmen müssen und die Grösse

$$\lim_{x=a_0} \frac{f(x)}{(x-a_0)^m}$$

würde mit Null übereinstimmen müssen, was mit der Formel (3) im Widerspruche ist. Somit muss der wahre Convergenzbezirk der Potenzreihe (2) die Stelle a_0 am Rande besitzen. Wir haben daher den Satz:

„*Ist x_0 keine Häufungsstelle der Punctmenge*

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots a_\nu,\ \ldots,$$

und ist $|a_\alpha - x_0|$ die kleinste der Grössen $|a_\nu - x_0|$, und bedeuten

$$c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots c_\nu,\ \ldots$$

Glieder einer absolut convergenten Reihe, so lässt sich die Function

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \, (x - a_\nu)^m$$

in eine Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \, (x - x_0)^k$$

entwickeln, welche die Grösse $|a_\alpha - x_0|$ *zum wahren Convergenzbezirke hat, vorausgesetzt, dass* m *keine positive ganze Zahl ist.“*

2. Diesen Satz in einer speciellen Form, nämlich für $m = -1$, haben die Herren *Poincaré* und *Goursat* zur Construction von Functionen, die nicht in der ganzen den Verlauf der unabhängigen Variabelen versinnlichenden Ebene existiren, benutzt.

Ist nämlich $\mathfrak{C}$ irgend eine geschlossene Linie, welche ein endliches einfach zusammenhängendes Gebiet $(\mathfrak{C})$ begränzt, und wählt man für die Grössen

$$a_0, \; a_1, \; a_2, \ldots a_\nu, \ldots$$

Elemente einer unendlichen Punctmenge, welche die Randlinie $\mathfrak{C}$ von $(\mathfrak{C})$ überalldicht bedeckt, im Uebrigen aber auch ausserhalb $(\mathfrak{C})$ gelegen sein kann, so folgt aus dem zuletzt bewiesenen Satze, dass die daselbst betrachtete Function $f(x)$ nur innerhalb des Gebietes $(\mathfrak{C})$ existirt. Denn man kann in jeder Umgebung einer Stelle an der Randcurve $\mathfrak{C}$ Stellen x_0 finden, welche dem Gebiete $(\mathfrak{C})$ angehören und einer der Stellen (a_ν) am nächsten kommen; dann wird sich $f(x)$ in eine Potenzreiche nach $(x - x_0)$ entwickeln lassen, deren Convergenzbezirk nicht über $(\mathfrak{C})$ hinausreicht, was nicht der Fall sein würde, wenn sich die Function an einer Stelle der Randcurve $\mathfrak{C}$ regulär verhielte. — Dagegen kann aus unserem Satze über den wahren Convergenzbezirk der Potenzreihe (2) nichts geschlossen werden, wenn die Punctmenge (a_ν) so beschaffen ist, dass jeder Punct von $\mathfrak{C}$ eine Häufungsstelle derselben ist, dabei aber die Randcurve $\mathfrak{C}$ selbst nicht in jedem Theile Puncte (a_ν) enthält. Dies entsteht z. B. wenn man

$$a_\nu = e^{\frac{1}{\nu} + 2\nu\alpha\pi i}, \quad (\nu = 1, \; 2, \; 3, \ldots)$$

setzt, unter α eine irrationale reelle Grösse verstanden; in diesem Falle befinden sich alle Stellen a_ν ausserhalb des Einheitskreises $|x| \leqq 1$ und jede Stelle am Umfange $\mathfrak{C}$ des letzteren ist eine Häufungsstelle der a_ν. In einem solchen Falle ist unmöglich im Gebiete $(\mathfrak{C})$ eine Stelle x_0 aufzufinden, wofür eine der Differenzen $x_0 - a_\nu$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner sei als alle übrigen. Denn wäre dies für $\nu = \alpha$ der Fall, so würde sich im Kreise mit dem Mittelpuncte x_0 und Halbmesser $|a_\alpha - x_0|$ keine weitere Stelle der Menge (a_ν) befinden können, und es könnten dann die innerhalb dieses Kreises gelegenen Randpuncte nicht Häufungsstellen von (a_ν) sein, was gegen die Annahme streitet. Ist in einem solchen Falle a ein Punct der Randcurve $\mathfrak{C}$, errichtet man in diesem Puncte an $\mathfrak{C}$ eine Normale, und lässt x

die Werthe, welche an dieser Normale versinnlicht sind, durchlaufen, so kommt bei diesem Grenzübergange

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{(x-a)^m} = 0,$$

wie dies aus der Herleitung der Formel (3) unmittelbar erhellt. Ja selbst kann man durch passende Wahl von c_ν eine Function von der Form

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{x-a_\nu}$$

erzielen, welche ihrem absoluten Betrage nach unterhalb einer von x unabhängigen Constanten bleibt,*) so lange x dem Gebiete ($\mathfrak{C}$) angehört. Solch eine Function ist z. B.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu\left(e^{\frac{1}{\nu}}-1\right)}{x-e^{\frac{1}{\nu}+2\nu\alpha\pi i}},$$

wenn α eine irrationale reelle Grösse bezeichnet. Dieselbe ist nämlich kleiner als die convergent vorausgesetzte Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu|,$$

so lange nur $|x| \leqq 1$ bleibt.

Ueber solche Functionen sagt also das oben bewiesene Theorem nichts aus und wir werden uns mit ihnen auch nicht weiter beschäftigen.

3. Wählt man

$$-a_\nu = e^{-2\nu\alpha\pi i} = a^{-\nu},$$

unter α eine irrationale reelle Grösse verstanden, so kommt für $|x| < 1$

(4) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(1+a^\nu x)^m = \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{m}{\mu} \mathfrak{P}(a^\mu)\, x^\mu,$$

wobei

(4*) $$\mathfrak{P}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$$

der Kürze wegen gesetzt wurde. Hieraus folgt der Satz:

„*Ist $\mathfrak{P}(z)$ eine Function, welche sich in eine noch für $z = 1$ unbedingt convergirende Potenzreihe entwickeln lässt, und ist a irgend welche complexe Grösse mit dem absoluten Betrage Eins, die keine Einheitswurzel ist, so convergirt die Potenzreihe*

*) Vergl. den Beweis, welchen Herr *Stieltjes* im Bulletin des Sciences mathém., t. XI, février 1887., für einen hierher gehörigen Specialsatz entwickelt.

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{m}{\nu} \mathfrak{P}(a^\nu) x^\nu$$

für sämmtliche Stellen innerhalb des Einheitskreises und lässt aus diesem Gebiete hinaus keine Fortsetzung zu, wenn nur m keine positive ganze Zahl ist."

Wählt man z. B.

$$\mathfrak{P}(z) = (1 + uz)^n,$$

wobei $|u| < 1$ und n keine positive ganze Zahl ist, so entsteht die Function

$$F(x, u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{m}{\nu} (1 + a^\nu u)^n x^\nu = \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{n}{\mu} (1 + a^\mu x) u^\mu = \sum_{\mu, \nu}^{\infty} \binom{m}{\nu} \binom{n}{\mu} a^{\mu\nu} u^\mu x^\nu,$$

welche von zwei Variabelen u, x in ähnlicher Weise abhängt und aus dem Gebiete $|x| \leqq 1$, $|u| \leqq 1$ nicht fortgesetzt werden kann.

4. Aus dem Vorhergehenden folgt, dass die unendliche Reihe

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{m-1}{\nu} \frac{1}{1 - a^\nu x}, \quad a = e^{2\alpha\pi i},$$

in welcher der reelle Bestandtheil von m grösser als Eins vorausgesetzt wird, eine Function von x darstellt, welche nur innerhalb des Einheitskreises existirt, wobei über α dieselbe Voraussetzung gemacht wird wie oben. Für diejenigen Werthe von m, deren reeller Bestandtheil grösser ist als 2, lässt diese Fnnction eine merkwürdige Darstellung zu, auf die wir eingehen wollen.

Zunächst hat man

$$2f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{m-1}{\nu} \frac{1 + a^\nu x}{1 - a^\nu x};$$

setzt man

$$x = e^{2\tau\pi i},$$

so dass der imaginäre Bestandtheil von τ positiv ist, so kommt

$$-2if(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{m-1}{\nu} \cot\pi(\tau + \nu\alpha)$$

und somit nach einer bekannten Formel

$$(A) \qquad -2\pi i f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{m-1}{\nu} \lim_{n=\infty} \sum_{\mu=-n}^{n} \frac{1}{\tau + \nu\alpha + \mu}.$$

Wir werden nachträglich zeigen, dass diese Grösse mit der folgenden

$$(B) \qquad \lim_{n=\infty} \sum_{\mu=-n}^{n} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \binom{m-1}{\nu} \frac{1}{\tau+\nu\alpha+\mu}$$

übereinstimmt, wenn der reelle Bestandtheil von m grösser als 2 ist. Unter dieser Voraussetzung hat man aber bekanntlich

$$\frac{\Gamma(m)\Gamma(s)}{\Gamma(m+s)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \binom{m-1}{\nu} \frac{1}{\nu+s},$$

und deshalb ergibt sich aus (B) die gesuchte Formel

$$(C) \qquad -\frac{2\alpha\pi i}{\Gamma(m)} f(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{\mu=-n}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\tau}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(m+\frac{\mu+\tau}{\alpha}\right)}.$$

Die singulären Werthe der Veränderlichen τ, wofür die einzelnen Summanden rechts unendlich werden, werden offenbar durch die Gleichung

$$\frac{\mu+\tau}{\alpha} = -\nu, \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

bestimmt, sind also von der Form

$$\tau = \pm\mu - \nu\alpha, \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

und kommen in jedem noch so kleinen Theile der reellen Axe vor, da α eine reelle irrationale Grösse ist. Dies steht mit der oben dargelegten Fundamentaleigenschaft der Function — dass sie nämlich nur für Werthe von τ, welche einen positiven imaginären Bestandtheil besitzen, existirt — im Einklange, jedoch ist dies allein nicht hinreichend, um diese Eigenschaft zu begründen.

Um nun die Uebereinstimmung der Grössen (A) und (B) nachzuweisen, betrachten wir die Summe

$$\sum_{\mu=-n}^{n} \frac{1}{z+\mu} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{z^2-\mu^2}.$$

Setzt man $z = u + iv$, so kommt

$$\left| \sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{z^2-\mu^2} \right| < \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(u-\mu)^2+v^2} \cdot \sqrt{(u+\mu)^2+v^2}}.$$

Ist u positiv, so ist $(u+\mu)^2 > (u-\mu)^2$, und also

$$\left| \sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{z^2-\mu^2} \right| < \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{(u-\mu)^2+v^2} < \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(u-\mu)^2+v^2}.$$

Aber man hat offenbar

$$\frac{1}{(u-\mu)^2+v^2}=-\frac{1}{2iv}\left(\frac{1}{u+vi-\mu}-\frac{1}{u-vi-\mu}\right);$$

also kommt

$$\left|\sum_{\mu=1}^{n}\frac{1}{z^2-\mu^2}\right|<-\frac{1}{2iv}\left\{\lim_{n=\infty}\sum_{\mu=-n}^{n}\frac{1}{u+vi-\mu}-\lim_{n=\infty}\sum_{\mu=-n}^{n}\frac{1}{u-vi-\mu}\right\},$$

d. h.

$$\left|\sum_{\mu=1}^{n}\frac{1}{z^2-\mu^2}\right|<-\frac{1}{2iv}\left\{\pi\cot\pi(u+vi)-\pi\cot\pi(u-vi)\right\},$$

schliesslich also für $v>0$

$$\left|\sum_{\mu=1}^{n}\frac{1}{z^2-\mu^2}\right|<\frac{\pi}{2v}\left(\frac{1+e^{-2\pi v}e^{2\pi iu}}{1-e^{-2\pi v}e^{2\pi iu}}+\frac{1+e^{-2\pi v}e^{-2\pi iu}}{1-e^{2\pi v}e^{-2\pi iu}}\right).$$

Die letztgeschriebene Grösse ist aber kleiner als

$$\frac{\pi}{v}\cdot\frac{1+e^{-2\pi v}}{1-e^{-2\pi v}};$$

man hat somit

$$\left|\sum_{\mu=-n}^{n}\frac{1}{z+\mu}\right|<\frac{1}{|z|}+|z|\,g<|z|\frac{1}{v^2}+g,$$

d. h.

$$(1)\qquad\left|\sum_{\mu=-n}^{n}\frac{1}{z+\mu}\right|<|z|\,g,$$

unter g eine nur vom imaginären Bestandtheile von z abhängige Grösse verstanden. Wir setzen

$$A_n=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\binom{m-1}{\nu}\sum_{\mu=-n}^{n}\frac{1}{\tau+\nu\alpha+\mu},$$

und wählen p so gross, dass

$$g\sum_{\nu=p}^{\infty}\left|\binom{m-1}{\nu}(\tau+\nu\alpha)\right|<\frac{\delta}{4},$$

unter δ eine vorgeschriebene positive Grösse verstanden. Dies ist möglich, falls die letztgeschriebene Reihe convergirt, was ja hier der Fall ist, weil wir den reellen Bestandtheil von m grösser als 2 angenommen haben. Wir haben dann nach (1)

$$\left|\sum_{\nu=p}^{\infty}(-1)^\nu\binom{m-1}{\nu}\sum_{\mu=-n}^{n}\frac{1}{\tau+\nu\alpha+\mu}\right|<\frac{\delta}{4},$$

$$\left| \sum_{\nu=p}^{\infty} (-1)^\nu \binom{m-1}{\nu} \lim_{n=\infty} \sum_{\mu=-n}^{n} \frac{1}{\tau+\nu\alpha+\mu} \right| < \frac{\delta}{4};$$

bezeichnet man mit A die linke Seite der Gleichung (A), so kommt offenbar

$$A - A_n = \sum_{\nu=0}^{p-1} (-1)^\nu \binom{m-1}{\nu} \sum_{\mu}{}' \frac{1}{\tau+\nu\alpha+\mu} + \vartheta\,\frac{\delta}{2}, [\mu = \pm n, \pm(n+1), \ldots \pm(n+2), \ldots],$$

wobei ϑ eine complexe Grösse bezeichnet, deren absoluter Betrag kleiner als Eins ist. Man schliesst hieraus sehr leicht die Formel

$$A = \lim_{n=\infty} A_n,$$

und somit ist die Gleichheit der beiden Grössen (A) und (B) nachgewiesen.

II.

1. In den *Contributions* habe ich bemerkt, dass die Functionen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} x^{2^\nu}, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} x^{\nu\,!}$$

nur innerhalb des Einheitskreises existiren. Diese beiden Functionen sind nur specielle Fälle einer allgemeinen Classe von Potenzreihen, welche ich in einem Briefe*) an Herrn *G. Mittag-Leffler* betrachtete. Diese letzteren sind wieder specielle Fälle eines allgemeinen Satzes, den ich hier entwickeln werde.

„Es seien

$$m_0, m_1, m_2, \ldots m_\nu, \ldots$$

positive ganze Zahlen, von denen jede einzelne in allen folgenden als Theiler aufgeht, und es bedeuten

$$\mathfrak{P}_0(x), \mathfrak{P}_1(x), \mathfrak{P}_2(x), \mathfrak{P}_3(x), \ldots$$

analytische Functionen, welche sich im Einheitskreise regulär verhalten und auf der Periferie desselben höchstens eine Unendlichkeits-Stelle $x = 1$ besitzen und so beschaffen sind, dass die Reihe

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu(x^{m_\nu})$$

für alle inneren Stellen des Einheitskreises convergirt und sich in eine für alle $|x| < 1$ convergirende Potenzreihe umwandeln lässt; ist ausserdem für unendlich viele Zahlen n bei positiven reellen $x < 1$

*) Acta mathematica, t. X., p. 87., (1887).

$$(1) \qquad \lim_{x=1} \sum_{\nu=n}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu(x^{m_\nu}) = \infty:$$

dann existirt die Function $f(x)$ nur innerhalb des Einheitskreises $|x| = 1$."

Denn würde man behaupten, dass sich die Function $f(x)$ in einer gewissen Umgebung einer Stelle $x = u$ auf der Kreislinie $|x| = 1$ regulär verhalte, so würde man damit sagen, dass die betrachtete Function in allen Stellen einer gewissen Umgebung von u ihrem absoluten Betrage nach unterhalb einer constanten Grösse verbleibt. Dass dies bei den gemachten Voraussetzungen unstatthaft sei, lässt sich auf folgende Weise begründen. Wir nehmen n so gross an, dass wenigstens eine Wurzel der Gleichung $x^{m_n} = 1$ — die wir mit $e^{\frac{2a\pi i}{m_n}} = x_0$ bezeichnen, unter a eine positive oder negative mit m_n theilerfremde ganze Zahl verstanden — in die letzterwähnte Umgebung von u fällt. Setzen wir dann

$$x = e^{\frac{2a\pi i}{m_n} - \alpha} = x_0 e^{-\alpha},$$

unter α einen positiven echten Bruch verstanden, so kommt

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \mathfrak{P}_\nu \left(e^{m_\nu \left(\frac{2a\pi i}{m_n} - \alpha \right)} \right) + \sum_{\nu=n}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu \left(e^{-\alpha m_\nu} \right).$$

Nach der Voraussetzung (1) hat man aber

$$\lim_{\alpha=0} \sum_{\nu=n}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu (e^{-\alpha m_\nu}) = \infty,$$

und da nach der Wahl von x_0 keine der Grössen $x_0^{m_\nu}$, $(\nu = 0, 1, \ldots n-1)$ der Einheit gleichkommt, so ist jede der n Grössen $\mathfrak{P}(x^{m_\nu} e^{-\alpha m_\nu})$ endlich, und somit kommt nach der zuletzt geschriebenen Formel

$$\lim_{x=x_0} f(x) = \lim_{\alpha=0} f(x_0 e^{-\alpha}) = \infty,$$

was eben die Unzulässigkeit obiger Annahme klarstellt.

In dem citirten Briefe an Herrn *Mittag-Leffler* wurde $\mathfrak{P}_\nu(x) = c_\nu x$ angenommen, und die reellen Bestandtheile γ_ν der Grössen c_ν wurden positiv und ihre Summe divergent vorausgesetzt. Es reicht aber hin, um eine nur innerhalb des Einheitskreises existirende Function zu erhalten, die γ_ν blos der Bedingung

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu = +\infty$$

zu unterwerfen, also auch negative γ_ν zulassen. Wenn also unter dieser Bedingung die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^{m_\nu}$$

für alle $|x| < 1$ convergirt, so existirt die durch sie dargestellte Function nur für $|x| < 1$; denn es wird nach einem Satze von *Abel* und *Dirichlet*

$$\lim_{x=1} \sum_{\nu=n}^{\infty} \gamma_\nu x^{m_\nu} = +\infty$$

und somit wird die in der Formel

$$\lim_{x=1} \sum_{\nu=n}^{\infty} c_\nu x^{m_\nu} = \infty$$

enthaltene Bedingung (1) erfüllt sein.

2. Ein anderes Beispiel bekommt man durch die Annahme*)

$$\mathfrak{P}_\nu(x) = c_\nu \lg(1-x),$$

unter der Voraussetzung, dass die reellen oder die imaginären Bestandtheile der Grössen c_ν gleiches Vorzeichen besitzen. Ausserdem haben die c_ν die Convergenzbedingungen von

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \lg(1 - x^{m_\nu})$$

für alle $|x| < 1$ zu erfüllen. Dazu ist nothwendig und hinreichend die Convergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^{m_\nu}$$

für alle $|x| < 1$ vorauszusetzen.

Die Bedingung (1), nämlich

$$\lim_{x=1} \sum_{\nu=n}^{\infty} c_\nu \lg(1 - x^{m_\nu}) = \infty,$$

wird hier offenbar bei allen Werthen von n erfüllt sein, da entweder die reellen oder die imaginären Bestandtheile einzelner Glieder für $\lim x = 1$ mit gleichem Vorzeichen unendlich gross werden. Also haben wir den Satz:

Die Function

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \lg \frac{1}{1 - x^{m_\nu}} \tag{2}$$

existirt nur innerhalb des Einheitskreises $|x| < 1$, *wenn entweder die reellen oder die imaginären Bestandtheile der Grössen* c *gleichbezeichnet sind, und wenn die Reihe*

$$\sum c_\nu x^{m_\nu}$$

*) Wir bedienen uns der Bezeichnung $\lg x$ anstatt log. nat. x.

für alle $|x| < 1$ *convergirt.*
Nun ist offenbar

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n , \tag{3}$$

wobei

$$A_n = \sum \frac{c_\nu}{\mu}, \qquad \mu m_\nu = n,$$

die Summe über alle Zahlenpaare μ, ν erstreckt, wofür $\mu m_\nu = n$ ist; da hier also $\frac{c_\nu}{\mu} = \frac{1}{n} c_\nu m_\nu$ ist, und m_ν ein Theiler von n ist, so haben wir

$$nA_n = \sum_\nu m_\nu c_\nu , \tag{3'}$$

die Summation auf alle ν bezogen, wofür m_ν ein Theiler von n ist. Da auch die Function

$$xf'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nA_n x^n$$

nur innerhalb des Einheitskreises existirt, und da man $m_\nu c_\nu = \psi(\nu)$ setzen kann, so haben wir den Satz:

„*Convergirt die Reihe*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \psi(\nu) x^{m_\nu}$$

für alle $|x| < 1$, *so convergirt auch die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n , \tag{3''}$$

in welcher S_n *die Summe aller* $\psi(\nu)$ *bedeutet, wofür* m_ν *ein Theiler von* n *ist, für alle* $|x| < 1$ *und stellt eine Function von* x *dar, die nur im Einheitskreise existirt, vorausgesetzt, dass die* $\psi(\nu)$ *gleiches Vorzeichen haben.*"

Setzt man z. B. $\psi(\nu) = 1$. so bedeutet S_n die Anzahl der in der Reihe

$$m_0, m_1, m_2, \ldots$$

enthaltenen Divisoren der Zahl n.

3. Die vorige Annahme ist in formaler Hinsicht ein specieller Fall der folgenden:

$$\mathfrak{P}_\nu(x) = c_\nu \lg \frac{1}{1 - a_\nu x},$$

in welcher sich also um die Function

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \lg \frac{1}{1 - a_\nu x^{m_\nu}}$$

handelt. Damit die Reihe für alle $|x| < 1$ convergent sei, ist nothwendig und hinreichend, dass die $|a_\nu|$ die Zahl 1 nicht überschreiten und dass die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^{m_\nu}$$

für alle $|x| < 1$ convergirt. Die a_ν müssen sämmtlich von -1 verschieden sein, damit $x = -1$ keine singuläre Stelle der Functionen $\mathfrak{P}_\nu$ sei. Hier sind nun folgende Fälle zu unterscheiden:

a) Sämmtliche a_ν sind reell und gleichbezeichnet. Sind dann entweder die reellen oder die imaginären Bestandtheile γ_ν der Grössen c_ν gleichbezeichnet und die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu \lg(1 - a_\nu), \quad a_\nu < 1,$$

divergent,*) so lässt sich zeigen, dass die Gleichung

$$\lim_{x=1} \sum_{\nu=n}^{\infty} \gamma_\nu \lg \frac{1}{1 - a_\nu x^{m_\nu}} = \pm \infty$$

bei allen n besteht, und somit ist die in unserem Hauptsatze ersuchte Bedingung (1) erfüllt, und die Function $f(x)$ existirt dann nur innerhalb des Einheitskreises.

b) Die c_ν sind reell und mit gleichem Vorzeichen behaftet; sind ausserdem die reellen Bestandtheile der a_ν sämmtlich negativ oder theilweise auch Null, und divergirt die Reihe

$$\sum c_\nu \lg |1 - a_\nu|,$$

so wird der reelle Bestandtheil von

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} c_\nu \lg \frac{1}{1 - a_\nu x^{m_\nu}}$$

bei $\lim x = 1$ unendlich gross und somit die Bedingung (1) erfüllt sein.

c) Sind die c_ν reell und gleichbezeichnet, und haben auch die imaginären Bestandtheile der a_ν gleiches Vorzeichen und ist schliesslich die Reihe

$$\sum c_\nu \lg \frac{1 - a_\nu}{|1 - a_\nu|}$$

divergent, so wird der imaginäre Bestandtheil von

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} c_\nu \lg \frac{1}{1 - a_\nu x^{m_\nu}}$$

*) Selbst der Fall $a_\nu = 1$ ist hier zulässig; gibt es solche Werthe $a_\nu = 1$ unendlich viele, so fällt die Divergenzbedingung weg. Denn in diesem Falle wird die Bedingung (1) erfüllt sein, was auch die positiven echten Brüche a_ν für Werthe besitzen.

für $lim x = 1$ unendlich gross, und also ist auch in diesem Falle die Bedingung (1) befriedigt. Es sei noch bemerkt, dass in den Fällen *b*) und *c*) die Grössen c_ν nicht nothwendig reell sein müssen; es reicht hin, wenn si reell und von der angegebenen Beschaffenheit sind, nachdem sie durch eine bestimmte von ν unabhängige Grösse dividirt worden sind.

Unsere Summe lässt sich wieder in die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n$$

entwickeln, in welcher

$$A_n = \sum \frac{c_\nu a_\nu^\mu}{\mu}, \qquad \mu \,.\, m_\nu = n,$$

die Summe über alle Zahlenpaare μ, ν erstreckt, wofür $\mu m_\nu = n$ ist. Setzt man hier demgemäss $\mu = \frac{n}{m_\nu}$, so kommt

$$nA_n = \sum_\nu c_\nu m_\nu a_\nu^{\frac{n}{m_\nu}},$$

die Summe über alle ν erstreckt, wofür m_ν ein Theiler von n ist. Wenden wir unsere Aufmerksamkeit auf die Function $xf'(x)$ und setzen der Kürze wegen

$$m_\nu c_\nu = \varphi(\nu), \qquad a_\nu^{\frac{1}{m_\nu}} = \psi(\nu),$$

so bekommen wir die Function

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n x^n, \tag{4}$$

in welcher T_n die auf alle in der Reihe

$$m_0,\ m_1,\ m_2,\ m_3,\ \ldots$$

enthaltene Divisoren der Zahl n bezogene Summe der Grössen $\varphi(\nu) \,.\, \psi(\nu)^n$ bedeutet, d. h.

$$T_n = \sum_\nu \varphi(\nu)\psi(\nu)^n, \quad n \equiv 0 \ (mod\, m_\nu).$$

Befriedigen die Grössen $\varphi(\nu)$, $\psi(\nu)^{m_\nu}$ die Bedingungen, welche oben in einem der Fälle *a*), *b*) und *c*) für die Grössen c_ν, resp. a_ν aufgestellt worden sind, so existirt die Function $\Phi(x)$ nur innerhalb des Einheitskreises $|x| = 1$.

4. Nun wenden wir unsere Aufmerksamkeit auf einige unendliche Producte, in welchen die Zahlenreihen

$$m_0,\ m_1,\ m_2,\ m_3,\ \ldots$$

wieder die Hauptrolle spielen.

Aus den Paragraphen 2. und 3. folgt unmittelbar, dass die beiden unendlichen Producte

$$\Psi(x) = \prod_{\nu=0}^{\infty} (1 - x^{m_\nu})^{c_\nu}, \qquad F(x) = \prod_{\nu=0}^{\infty} (1 - a_\nu x^{m_\nu})^{c_\nu},$$

in welchen a_ν und c_ν dieselben Grössen bedeuten, die in den genannten Paragrafen näher characterisirt wurden, analytische Functionen von x darstellen, die nur innerhalb des Einheitskreises existiren.

Im Producte $F(x)$ darf der Annahme nach keines der a_ν den Werth -1 annehmen. Wir werden zeigen, dass diese Bedingung unter gewissen Umständen fallen gelassen werden kann. Sind nämlich die c_ν positive reelle Zahlen und setzt man $a_\nu = -r_\nu$, $(r_\nu > 0)$, so erhält das Product $F(x)$ die Form

$$P(x) = \prod_{\nu=0}^{\infty} (1 + r_\nu x^{m_\nu})^{c_\nu},$$

wobei zu bemerken ist, dass dieses Product für $x = 1$ divergiren soll. Setzt man nun

$$x_0 = e^{\frac{2a\pi i}{m_n}}, \; x = x_0 e^{-\alpha},$$

so kommt zwar

$$(\alpha) \qquad \lim_{\alpha=0} \prod_{\nu=n}^{\infty} (1 + r_\nu e^{-\alpha m_\nu})^{c_\nu} = \infty,$$

es kann aber auch geschehen, dass

$$(\beta) \qquad \lim_{\alpha=0} \prod_{\nu=0}^{n-1} (1 + r_\nu x_0^{m_\nu} e^{-\alpha m_\nu})^{c_\nu} = 0$$

wird, und also das Product $\lim\limits_{\alpha=0} P(x_0 e^{-\alpha})$ nicht nothwendig Null oder unendlich sein wird. Gibt es aber unendlich viele Werthe von n, wofür die Gleichung (β) nicht stattfindet, so wird bei allen diesen n die Gleichung $\lim\limits_{\alpha=0} P(x_0 e^{-\alpha}) = \infty$ bestehen, und es wird somit $P(x)$ nur innerhalb des Einheitskreises $|x| = 1$ existiren. Nun ist zu untersuchen, in welchem Umstande die Gleichung (β) bei allen Werthen von n bestehen bleibt. Dies entsteht offenbar nur dann, wenn alle $r_\nu = 1$ sind (mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von ν) und wenn es unter den Zahlen $\nu = 0$, , . . . $n-1$ stets eine solche gibt, wofür $e^{\frac{2a\pi i}{m_\nu} m_\nu} = -1$ wird. Es muss somit für $n \geqq n_0$ (unter n_0 eine bestimmte ganze Zahl verstanden) $\frac{2am_\nu}{m_n}$ eine ungerade ganze Zahl sein, somit m_n durch 2 theilbar, also a ungerade. Dann muss jeder Theiler von m_n auch in m_ν enthalten sein, da a und m_n theilerfremd sind. Somit ist $\frac{2m_\nu}{m_n}$ eine ungerade ganze Zahl, und da $\frac{m_\nu}{m_n} < 1$ ist, so muss $\frac{2m_\nu}{m_n} = 1$ sein, woraus sich $\nu = n-1$, $m_n = 2m_{n-1}$ ergibt. Hieraus folgt aber $m_n = p \, . \, 2^{n-n_0}$ für $n \geqq n_0$, unter p eine positive ganze Zahl verstanden. Also nur im Falle, dass die Factoren des Productes P schliesslich die Form

$$(1 + x^{p \cdot 2^{n-n_0}})^{\alpha_n}$$

erhalten, wird die Function P noch ausserhalb des Einheitskreises existiren können. In der That ist

$$\prod_{\nu=0}^{\infty} (1 + x^{2^\nu}) = \frac{1}{1-x}$$

solch eine Function, und folglich ist die hier gefundene Ausnahme wenigstens in speciellen Fällen der c_ν eine wirkliche. Wir haben somit den Satz:

„*Sind* $r_\nu \leqq (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ *positive reelle Zahlen ebenso wie die* c_ν *und bedeuten* m_ν *positive ganze Zahlen von der in diesem Abschnitte betrachteten Beschaffenheit, so stellt das für alle* $|x| < 1$ *convergent und für* $x = 1$ *divergent vorausgesetzte Product*

$$P(x) = \prod_{\nu=0}^{\infty} (1 + r_\nu x^{m_\nu})^{c_\nu}$$

eine Function dar, die nur innerhalb des Einheitskreises $|x| < 1$ *existirt, vorausgesetzt, dass sich das Product nicht in zwei andere zerlegen lässt, von den das eine nur aus einer endlichen Anzahl Factoren besteht, während das andere die Form*

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{p 2^n})^{c_{n+n_0}}$$

erhalten würde."

Speciell existirt die durch das Product

$$f(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + x^{\nu\,!}) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

dargestellte Function nur innerhalb des Einheitskreises $|x| = 1$. In der hier angeführten Reihenentwickelung bedeutet s_n die Null, wenn die Zerlegung von n in Summanden von der Form $\nu\,!$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ nicht möglich ist, dagegen 1, wenn eine solche Zerlegung existirt. Es zeigt sich leicht, dass es derartige Zerlegung nur eine geben kann. —

Indem wir diesen Abschnitt schliessen, bemerken wir noch, dass die hier betrachteten Functionen uns durch Integration auch derartige liefern, die ihrem absoluten Betrage nach unter einer bestimmten endlichen Constante bleiben. Solch eine Function ist z. B.

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{2^\nu}}{2^\nu};$$

es ist nämlich offenbar

$$|\mathfrak{P}(x)| \leqq \frac{2\,|x|}{2 - |x|} < 2.$$

III.

Wir haben oben gezeigt, dass die Function

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{2^\nu}$$

nur innerhalb des Einheitskreises existirt. Diese Function gehorcht einem merkwürdigen Transformationsgesetze

$$f(x) = x + f(x^2),$$

aus dem man die in Rede stehende Eigenschaft derselben sehr einfach ohne Rechnung erschliessen kann. Durch die auf der Hand liegende Verallgemeinerung des Beweisganges dieses Satzes haben wir folgendes Theorem — das uns nicht ohne Interesse zu sein scheint — erhalten:

„*Ist $f(x)$ eine durch eine für alle $|x| < 1$ convergirende und für alle $|x| > 1$ divergirende Potenzreihe darstellbare Function, welche einem Transformationsgesetze von der Form*

$$f(x^a) = G[x, f(x)]$$

gehorcht, unter a eine bestimmte positive ganze Zahl und unter $G(x, z)$ eine ganze rationale oder eine ganze transcendente Function der beiden Veränderlichen x, z verstanden, so existirt dieselbe Function $f(z)$ nur innerhalb des Einheitskreises."

Beweis. Wäre der Satz nicht richtig, so würde man auf der Kreislinie $|x| = 1$ einen Punct finden können, in dessen Umgebung sich die Function $f(x)$ regulär verhalte. In dieser Umgebung könnte man einen Bereich $\mathfrak{A}$ aussondern, welcher von zwei mit dem Nullpuncte concentrischen Kreisbögen von Halbmessern $1 - \alpha$ und $1 + \alpha$ und zwei radii vectores begrenzt wird, also ein Kreisringausschnitt ist. Wir nehmen an, dass die Winkel, welche die beiden radii vectores mit der reellen Axe einschliessen, in irrationalen Verhältnissen zu 2π stehen, und bezeichnen mit β die Differenz dieser beiden Winkel. Nun wählen wir n so gross, dass

$$a^n \beta > 2\pi$$

wird. Dann ist klar, dass wenn die Veränderliche x den Bereich $\mathfrak{A}$ durchläuft, die Function x^{a^n} alle Stellen eines stetigen Gebietes $\mathfrak{A}_n$ als Werthe annimmt, und zwar besteht das Gebiet $\mathfrak{A}_n$ aus einem vollen Kreisringe mit den Halbmessern $(1 - \alpha)^n$, $(1 + \alpha)^n$, und es werden der Annahme nach die Stellen eines stetigen Theiles dieses Ringes zweimal von der Function angenommen.

Aus der Gleichung

$$f(x^a) = G[x, f(x)]$$

schliesst man eine andere

(1) $$f(x^{a^n}) = G_n[x, f(x)],$$

in welcher G_n eine analoge Bedeutung hat wie G. Aus dieser Gleichung (1) ist klar, dass man alle den Stellen z des Gebietes $\mathfrak{A}_n$ entsprechende Functionswerthe $f(z)$ unzweideutig bestimmen kann. Es bleibt uns zu zeigen, dass sich die Function $f(z)$ in allen diesen Stellen regulär verhält. Setzt man $z = x^{a^n}$, so ist einer der Werthe $x = z^{a-n}$ eine Stelle des Gebietes $\mathfrak{A}$; wählen wir $|z_0| = 1$, so ist für $x_0 = z_0^{a-n}$ ebenso $|x_0| = 1$ und es gehört x_0 dem Gebiete $\mathfrak{A}$ an. Für hinlänglich kleine Werthe von $|z - z_0|$ kommt nun

$$x = z^{a-n} = \overline{\mathfrak{P}}(z - z_0) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

Der Voraussetzung gemäss hat man für hinreichend kleine Werthe von $|x - x_0|$

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots,$$

somit für hinreichend kleine Werthe von $|z - z_0|$

$$f(x) = f(z^{a-n}) = \mathfrak{P}(z - z_0) = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

und nach (1)

$$f(z) = G_n[\overline{\mathfrak{P}}(z - z_0),\ \mathfrak{P}(z - z_0)].$$

Da G_n eine ganze Function ist, so kommt

$$f(z) = A_0 + A_1(z - z_0) + A_2(z - z_0)^2 + \ldots \tag{2}$$

Dies steht aber im Widerspruche mit der Bedingung, dass die Function $f(x)$ durch eine nur für $|x| \leqq 1$ convergirende Potenzreihe darstellbar ist, und also nothwendig eine singuläre Stelle auf der Kreislinie $|x| = 1$ besitzt. Somit ist die am Anfange des Beweises gemachte Annahme falsch und die Function $f(x)$ verhält sich an keiner Stelle der Kreislinie $|x| = 1$ regulär, was wir eben darzulegen hatten. —

Es ist klar, dass der hier durchgeführte Beweisgang eine wesentliche Vorallgemeinerung des Satzes zulässt. Wir haben uns jedoch auf einen speciellen Fall beschränkt, da sich der Beweis in analogen Fällen durchaus nicht modificirt.

Berichtigungen.

Seite 4. In der Formel (2) links soll A_2 anstatt A_3 stehen.
In der 11. Zeile v. u. soll „auf den Fall“ anstatt „auf den Fallen“ gelesen werden.

Seite 8. In der die 8. Zeile bildenden Formel ist dem Ausdrucke $(1 + a^{\mu}x)$ in der mittleren Summe noch der Exponent m hinzuzufügen.