UEBER

# GEOMETRISCHE NETZE.

VON

Prof. **KARL KÜPPER.**

(Fortsetzung der im I. Bd., VII. Folge enthaltenen Abhandlung.)

(Abhandlungen der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. — VII. Folge, 3. Band.)

(Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe Nr. 5.)

**PRAG.**

Verlag der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. — Druck von Dr. Ed. Grégr.

1889.

1. Die Hessische Curve $J^3$ des Kegelschnittnetzes und die auf ihr befindlichen Puncttripel $S$.

Jeder Punct $o$ der Ebene gehört zu einem Quadrupel $opqr \equiv Q$. In dem Büschel von Netzcurven, dessen Grundpuncte in den $Q$ vorliegen, und welcher durch $(Q)$ bezeichnet wird, gibt es drei zerfallende Kegelschnitte, deren Doppelpuncte $s_1$, $s_2$, $s_3$ auf $J^3$ sind, ein Tripel $S$ bildend.

Ein beliebiges Tripel gehört hiernach zu einem bestimmten Quadrupel; von einem solchen kann man auf $J^3$ zwei Puncte $s_1$, $s_2$ willkührlich wählen, worauf dann $s_3$, und das entsprechende Quadrupel $(Q)$ bestimmt sein wird: Denn die zu $s_1$, $s_2$ gehörenden Geradenpaare des Netzes liefern einen Büschel desselben, somit $Q$, und auch $s_3$.

Sämmtliche $\infty^2$ Tripel lassen sich aus $J^3$ mittels der Kegelschnitte ausschneiden, welche durch ein beliebiges festes Tripel $S$ möglich sind: Denn irgend 2 Tripel sind für die Netzcurve, welche die beiden zugehörigen Quadrupel verbindet, Tripel conjugirter Pole; liegen demnach auf einem Kegelschnitt. Hieraus folgt, dass wenn man durch $s_1$, $s_2$, $s_3$ einen Kegelschnitt legt, der in $s_1$, $s_2$ die $J^3$ berührt, derselbe die $J^3$ ebenfalls in $s_3$ berühren muss. Zur Bestimmung des $s_3$, wenn $s_1$, $s_2$ angenommen werden, gelangt man am einfachsten, wenn man $J^3$ als Ort der Punctpaare $s$, $\sigma$ auffasst, die für alle Netzcurven zwei conjugirte Pole sind: Ist in dieser Weise $\sigma_1$ mit $s_1$, $\sigma_2$ mit $s_2$ gepaart, so muss $\sigma_1$ auf $s_3\, s_2$, und $\sigma_2$ auf $s_3\, s_1$ fallen, da $s_3\, s_2$ Polare von $s_1$ bezüglich eines Büschels von Netzcurven ist. Hat man sonach $\sigma_1$, $\sigma_2$, so wird $s_3$ als Schnittpunct von $\sigma_1\, s_2$, $\sigma_2\, s_1$ gefunden, und man erkennt gleichzeitig, dass dem Puncte $s_3$ in Bezug auf alle Netzcurven der Schnittpunct $\sigma_3$ von $s_1\, s_2$, $\sigma_1\, \sigma_2$ conjugirt ist, d. h. die Puncte $\sigma$, welche einem Tripel $S$ als Conjugirte für das Netz entsprechen, liegen auf einer Geraden $G$. Es ist klar, dass auch jede Gerade der Ebene in dieser Weise zu einem bestimmten Tripel gehört. Diesen Zusammenhang drücken wir dadurch aus, dass wir sagen, einem beliebigen Quadrupel $Q$, oder dem zugehörigen Tripel $S$ ist eine Gerade $G$ associirt, und umgekehrt. Die einem Quadrupel associirte Gerade nennen wir auch die Associirte von irgend einem Puncte des Quadrupels.

2. Die Beziehung, welche wir eben als zwischen den Geraden und Quadrupeln bestehend, hervorgehoben haben, führt naturgemäss dazu, den Netzcurven die Puncte der Ebene in eindeutig umkehrbarer Weise entsprechen zu lassen: Wir werden darthun, dass

den $\infty^1$ auf einer Netzcurve $K^2$ vorkommenden Quadrupeln die Geraden eines Strahlenbüschels $(K)$, und dass den Strahlen eines willkührlichen Büschels $(K)$ die Quadrupel einer Netzcurve associirt sind; sodann nennen wir $K$, $K^2$ einander associirt.

Erstens: $K^2$ besteht aus zwei in $s_1$ sich schneidenden Geraden. Die Tripel, welche zu den auf $K^2$ befindlichen Quadrupeln gehören, haben alle den Punct $s_1$ gemein. Wenn daher $\sigma_1$ zu $s_1$ für das Netz conjugirt ist, so fallen nach dem in 1. über die Lage der zu einem Tripel $S$ conjugirten $\sigma$ Vorgebrachten, diese $\sigma$ auf die Strahlen des Büschels $(\sigma_1)$; $K \equiv \sigma_1$.

Zweitens: $K^2$ zerfällt nicht.

Wir schneiden die auf $K^2$ denkbaren Quadrupel $Q$ durch einen Büschel $(Q_1)$ des Netzes aus, der zu Grundpuncten irgend ein ausserhalb $K^2$ liegendes Quadrupel $Q_1$ hat. Gehört nun zu $Q_1$ das feste Tripel $S_1$, zu $Q$ das variable $S$, so zeige ich, dass die Kegelschnitte $t^2$, welche $S_1$ mit jedem $S$ verbinden, einen unveränderlichen Punct $u$ enthalten müssen. Sind nämlich $t_1^2$, $t_2^2$ zwei durch $S_1 \equiv s_1 s_2 s_3$ und irgend zwei Tripel $S$ gelegte Kegelschnitte, so treffen diese sich ausser $s_1$, $s_2$, $s_3$ noch in $u$, und liefern einen Büschel $(t^2)$ mit den Grundpuncten $S_1$, $u$. $U$ sei die Polare von $u$ in Bezug auf $K^2$, dann muss diese $t_1^2$ in 2 Puncten schneiden, die mit $u$ ein Tripel conjugirter Pole von $K^2$ sind, weil $t_1^2$ ein $S$ enthält. Gleiches folgt für $t_2^2$. Daraus erhellt, dass der Büschel $(t^2)$ aus $U$ die Involution conjugirter Pole von $K^2$ schneidet. Aber in diesem Büschel sind die Geradenpaare $us_1$, $s_2 s_3$; $us_2$, $s_1 s_3$, folglich sind diese Paare conjugirt bezüglich $K^2$, und es liegt der Pol von $s_2 s_3$ bez. $K^2$ auf $us_1$, der von $s_1 s_3$ auf $us_2$. Da nun diese Pole durch die 3 Punkte $s_1$, $s_2$, $s_3$ schon gegeben sind, so ist auch $u$ durch sie festgelegt. Man erkennt sofort, dass $U$ einerlei mit der Geraden $G_1$ ist, die dem $Q_1$ als associirte zugewiesen wird; denn heisst $\sigma_1$ der Schnittpunct von $U$, $s_2 s_3$, so hat man in $s_1 u$ seine Polare bez. $K^2$, also in $s_1$, $\sigma_1$ zwei conjugirte Puncte für das Netz.

Nachdem der Büschel $(t^2)$ gefunden, liegt es auf der Hand, wie man die den Tripeln $S$ associirten Geraden gewinnt: Unterwirft man nämlich die $t^2$ der bekannten quadratischen Transformation, welcher der Büschel $(Q_1)$ zu Grunde liegt, so verwandelt man dieselben in Gerade $G$, die ersichtlich die verlangten sind. Dabei müssen die $G$ durch den Punct $K$ gehen, welcher dem Puncte $u$ in Bezug auf den Büschel $(Q_1)$ conjugirt ist. Wenn endlich umgekehrt $K$ beliebig gewählt wird, so ziehe man durch ihn zwei Gerade $G$, bestimme die ihnen associirten Quadrupel, und die Netzcurve $K^2$, welche diese enthält, so werden unserer Erörterung zufolge $K^2$, $K$ associirt sein.

3. Als zunächst liegende Folgerung ergibt sich, dass den Puncten $K$ einer Geraden $G$ die Kegelschnitte associirt sind, welche das der $G$ associirte Quadrupel $Q$ enthalten. Sodann folgt aus der Construction der $K$, dass das gerade Gebilde $(K)$ projectivisch auf den Büschel $(Q)$ der $K^2$ bezogen ist. Wir bedienten uns zu dieser Construction eines ganz beliebigen Tripels $s_1 s_2 s_3$, und wir wollen darunter das zu $Q$ selbst gehörige verstehen: Wenn $u$ der Pol von $G$ in Bezug auf $K^2$ ist, so erhält man $K$ als Conjugirten von $u$ bezüglich des Büschels $(Q)$. Beschreibt daher $K^2$ den Büschel, so bleibt $u$ auf einem durch $s_1$, $s_2$, $s_3$ gehenden Kegelschnitt $g^2$ — der Poloconik von $G$ — und erzeugt ein krummes Gebilde $(u)$, für welches man hat

$$(u) \barwedge (K^2).$$

Aber wegen der Abhängigkeit zwischen $u$, $K$ ist auch $(K) \overline{\wedge} (u)$; also

$$(K) \overline{\wedge} (K^2).$$

Entnehmen wir dem vorliegenden Büschel irgend 2 Kegelschnitte $K_1^2$, $K_2^2$, welche offenbar zwei willkührliche Netzcurven repräsentiren, so liegen $K_1$, $K_2$ auf $G$, $u_1$, $u_2$ auf $g^2$. Die Verbindungslinie $u_1 u_2$ ist wegen der zwischen $u$, $K$ herrschenden Beziehung sowohl Polare von $K_1$ bezüglich $K_2^2$, als von $K_2$ bez. $K_1^2$. Wäre deshalb $K_1^2$, $K_1$ bekannt, so fände man für jeden $K^2$ den associirten $K$ also: *Man bestimme von $K_1$ die Polare bez. $K^2$, nehme deren Pol bez. $K_1^2$, so hat man in ihm $K$.*

Denken wir $K_2^2$ unendlich nahe bei $K_1^2$, so wird $u_1 u_2$ Tangente von $g^2$ in $u_1$ sein, $K_2$ mit $K_1$ zusammenfallen, und jene Tangente wird identisch mit der Polare von $K_1$ bezüglich $K_1^2$; also: *Die Poloconik $g^2$ ist die Enveloppe der Polaren von $K$ in Bezug auf ihre associirten Curven $K^2$.*

Die Identität der Polare von $K_1$ bez. $K_2^2$, mit der von $K_2$ bez. $K_1^2$ führt auf eine neue Auffassung der einem Puncte — etwa $o$ — associirten Geraden $G$.

Durch $o$ gehen $\infty^1$ Netzcurven, eine derselben sei $K^2$, $K$ ihr associirter Punct, $o^2$ die associirte Curve zu $o$. Nun muss die Polare von $o$ bez. $K^2$ auch Polare von $K$ bez. $o^2$ sein, demnach geht diese letztere durch $o$, und berührt $K^2$ hier. Alsdann muss aber auch die Polare von $o$ bez. $o^2$ den Punct $K$ aufnehmen; woraus die Identität dieser Polare mit $G$ erhellt.

*Die associirte Gerade eines Punctes ist einerlei mit der Polare dieses Punctes in Bezug auf seine associirte Netzcurve.*

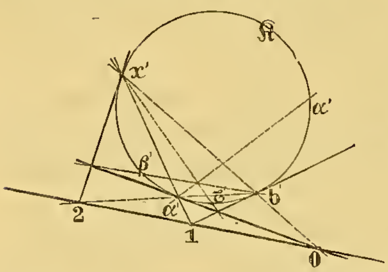
Wenden wir dies auf die Puncte $K_1$, $K_2$ von $G$ an, denen $u_1$, $u_2$ auf $g^2$ entsprechen, so sehen wir, dass die Tangenten $u_1 t$, $u_2 t$ von $g^2$ die zu $K_1$, $K_2$ associirten Geraden sind, dass mithin der Netzcurve, welche $K_1$, $K_2$ verbindet, der Schnittpunct $t$ dieser Tangenten associirt ist. Denken wir hiebei $K_1$, $K_2$ einander unendlich nahe, so folgt: *Den Netzcurven, welche eine Gerade $G$ berühren, sind die Puncte der Poloconik $g^2$ dieser Geraden associirt.* Ferner bemerkt man, dass wenn eine variable Tangente $g^2$ beschreibt, von ihrem associirten Quadrupel ein Punct die Gerade $G$ durchläuft, während die 3 anderen auf einer schon früher betrachteten Curve 3. Ordnung bleiben.

4. *Ermittelung derjenigen Puncte $K$, welche auf ihren associirten Curven liegen.*

$G$ sei eine beliebige Gerade der Ebene, $Q$ ihr Quadrupel, $K$ ein auf $G$ variabler Punct. Die associirte Curve $K^2$ schneidet für jede Lage von $K$ ein Paar $\pi$ einer bestimmten Involution $i$ aus $G$, und es besteht zwischen dem Gebilde $(K)$ und den Paaren $\pi$ Projectivität. Wir nehmen in der Ebene einen Constructionskegelschnitt an, z. B. einen Kreis $\mathfrak{K}$, auf demselben einen Punct $p$ und projiciren aus $p$ sowohl das Gebilde $K$, als die Involution $i$ auf $\mathfrak{K}$. So entstehen 2 projectivische Strahlenbüschel, von denen der eine aus den Geraden $pK$, der andere aus den Geraden besteht, welche die Paare $\pi'$ der Projection $i'$ von $i$ tragen. Mit $p'$ werde der Pol von $i'$ bezeichnet; homolog ist zu $pK$ der Strahl von $p'$, welcher das durch Projectien aus $\pi$ hervorgehende Paar $\pi'$ trägt. Diese Büschel $(p)$, $(p')$ erzeugen einen durch $p$ gehenden Kegelschnitt, welcher $\mathfrak{K}$ noch in 3 Puncten trifft, von welchen wenigstens einer reell sein muss. Projicirt man diese 3 Puncte aus $p$ auf die Gerade $G$, so erhält man auf dieser die einzig möglichen Puncte von der Eigenschaft, dass die ihnen associirten Curven sie selbst aufnehmen: Wie man auch $G$ ziehen möge, es gibt auf ihr immer einen Punct dieser Art oder aber deren drei.

Wir werden in der Folge eine Curve 3ter Ordnung construiren, auf welcher alle überhaupt möglichen sind. Einstweilen nehmen wir an, $a$ sei ein solcher Punct, $a^2$ die durch ihn gehende associirte Curve, und beweisen, dass die auf den Strahlen des Büschels $(a)$ noch befindlichen Puncte durch den Kegelschnitt $a^2$ harmonisch getrennt werden.

Aus dem über die beliebige $G$ so eben Gesagten ist deutlich, dass es durch $a$ unzählige Strahlen gibt, auf denen ausser $a$ noch 2 Puncte der fraglichen Eigenschaft vorkommen. So sei auf $ab \equiv G$, welche $a^2$ in $\alpha$ trifft, $b$ mit Hülfe des Constructionskreises $\mathfrak{K}$ gefunden, und es schneide die associirte $b^2$ den Strahl $G$ in $b$, $\beta$. Die auf $G$ zu denkende Involution $i$ ist durch die Paare $a, \alpha$; $b, \beta$ gegeben; einem Paare $\pi$ derselben entspricht ein Punct $K$, den man nach 3. also findet: Man bestimme $x$ so, dass $a$, $x$ durch $\pi$ harmonisch getrennt sind, dann findet sich $K$ als von $x$ durch $a$, $\alpha$ harmonisch getrennt. Die hier vorkommenden Puncte seien aus $p$ auf $\mathfrak{K}$ projicirt, ihre Projectionen durch Accente markirt. $o$ sei der Pol von $a'\alpha'$, in Bezug auf $\mathfrak{K}$, 1 der zum Paar $\pi'$ gehörige Pol, dann wird $1a$ den $\mathfrak{K}$ in $x'$; $ox'$ ihn in $K'$ treffen. Wegen der über $b$ gemachten Voraussetzung muss die Zeichnung so ausfallen, dass wenn 1 der Pol von $b'\beta'$ bez. $\mathfrak{K}$ ist, und wenn $1a'$ den $\mathfrak{K}$ in $x'$ schneidet, die Verbindungslinie $x'b'$ durch $o$ gerichtet ist; denn nur dann entspricht dem Paare $b'\beta'$, als $\pi'$ der $i'$ angesehen, als zugehöriger $K'$ der Punct $b'$, wie es sein soll.




Weil das Dreieck $a'b'x'$ dem $\mathfrak{K}$ einbeschrieben ist, so schneiden die Tangenten des $\mathfrak{K}$ für seine Ecken die gegenüber liegenden Seiten auf der Geraden 01 . . Trifft nun die Tangente in $x'$ die gegenüberliegende Seite in 2, und heisst $\mathfrak{x}'$ der Berührungspunct der zweiten aus 2 an $\mathfrak{K}$ möglichen Tangente, so stellt $x'\mathfrak{x}'$ ein Paar $\pi'_1$ der $i'$ dar, und für dieses Paar fällt der zugehörige $K'$ mit $x'$ zusammen. Wie man sieht, sind $b'$, $x'$ durch $a'$, $\alpha'$ harmonisch getrennt. Geht man jetzt zurück auf die in $G$ zu denkenden projicirten Puncte, so hat man in dem Puncte $x$, dessen Projection $x'$ ist, den dritten auf G befindlichen Punct, dessen associirte Netzcurve durch ihn geht. Es wird zweckmässiger sein ihn mit $c$ statt mit $x$ zu bezeichnen, $c^2$ ist seine Netzcurve, von welcher auf $ab$ ausser $c$ noch $\gamma$ falle. Die behauptete harmonische Trennung ist ohne Weiteres klar. Unsere Betrachtung führt zu einigen für die Folge bemerkenswerthen Resultaten, die in der nächsten Nummer zusammengestellt werden sollen.

5. Zuvörderst ist einleuchtend, dass man durch Anwendung des für die $G$ befolgten Verfahrens auf jeden Strahl des Büschels $(a)$ jeden Punct der Ebene erlangen wird, dessen associirte Curve durch ihn geht. Im Allgemeinen findet man auf einer $G$ zwei von $a$ verschiedene Puncte $b$, $c$; aber die Tangente $G_0$ von $a^2$ verhält sich anders:

*a)* Jeder $G$ ist ein auf $a^2$ liegendes Quadrupel $Q$ associirt, von dem Quadrupel

$Q_0$ nun, welches der $G_0$ zugewiesen ist, fällt ein Punct in $a$. Dies folgt aus der Construction des der $a^2$ associirten Punctes, als welcher sich $a$ selbst ergeben muss, $a$ ist der Pol von $G_0$ bez. $a^2$, und $a$ coincidirt mit dem ihm in Bezug auf den Büschel $(Q_0)$ conjugirten, was die Aussage beweist. Hiernach tritt auf $G_0$ nicht mehr eine Involution $i$ auf, sondern ein einfaches Gebilde, dem das aus den $K$ bestehende $(K)$ projectivisch entspricht, und zwar so, dass von den beiden Coincidenzpuncten $a$ der eine ist. Von den beiden auf $G_0$ möglichen Puncten $b_0 c_0$ existirt nur noch einer $c_0$ — verschieden von $a$.

Wir schliessen ferner: Ereignet es sich für eine Gerade, dass von dem ihr associirten Quadrupel ein Punct auf sie fällt, so berührt dieselbe iu diesem Puncte dessen associirte Curve.

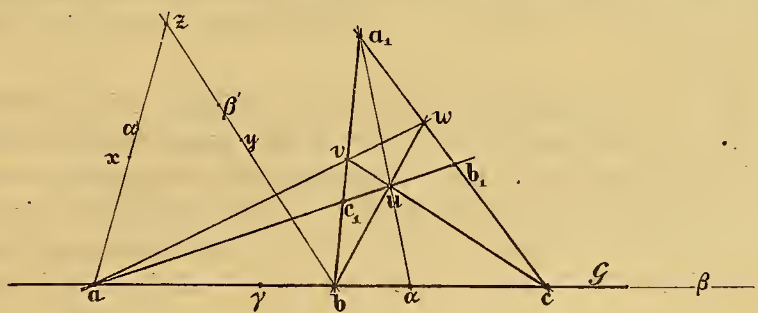
*b*) Fasst man wieder die um $a$ sich drehende $G$ auf, so fragt es sich, wie viel mal eine Punct des ihr entsprechenden Quadrupels $Q$, das auf $a^2$ beweglich ist, in $G$ fällt?

Zur Entscheidung hierüber gelangt man, indem man die $Q$ durch einen Netzbüschel $(K^2)$ ausschneidet, dessen Grundpuncte ein ausserhalb $a^2$ liegendes Quadrupel $Q_1$ bilden. Die dem $Q_1$ associirte $G_1$ wird von $G$ in einem variablen Puncte $K$ geschnitten, dessen Curve $K^2$ mit $a^2$ das der $G$ entsprechende $Q$ gemein hat. Da zwischen den $G$ und den zugehörigen $K^2$ Projectivität besteht, so erzeugen die Schnittpuncte von $G$, $K^2$ eine $\mathfrak{C}^3$, welche in $a$ die Tangente $G_0$ haben muss, weil die der $G_0$ entsprechende $K_0^2$ das Quadrupel $Q_0$ somit das Centrum $a$ des Strahlenbüschels $G$ enthält.

Die vier Puncte $x$, welche $\mathfrak{C}^3$ noch mit $a^2$ gemein haben kann, sind auf $a^2$ die Einzigen, deren associirte Curven $x^2$ durch $x$ gehen, und diese $x^2$ haben in den $x$ die Tangenten $ax$.

Wenn als Centrum des Strahlenbüschels der $G$ ein Punct $K$ genommen wird, dessen associirte $K^2$ ihn nicht enthält, so zeigt das analoge Raisonnement, dass auf $K^2$ sechs Puncte $x$ sind, deren associirte Curven durch sie gehen, und in denselben die Tangenten $xK$ besitzen.

c)




Verstehen wir unter $a^2, b^2, c^2$ die associirten Curven von drei in $G$ befindlichen Puncten $a$, $b$, $c$, so dass sie dem Büschel $(Q)$ angehören, so sind ihre Punctpaare $a$, $\alpha$, $b$, $\beta$, $c$, $\gamma$ auf $G$ in Involution und bezw. harmonisch getrennt durch $b$, $c$; $a$, $c$; $a$, $b$. Die Tangenten von $a^2$, $b^2$, $c^2$ in $a$, $b$, $c$ mögen das Dreiseit $a_1 b_1 c_1$ bilden; die Pole $u$, $v$, $w$ von $G$ in Bezug auf $a^2$, $b^2$, $c^2$ fallen auf diese Tangenten, und sind bestimmt, sobald man nur einen, z. B. $u$ kennt: Nämlich da $a$, $u$ conjugirt für den Büschel $(Q)$ sind, so ist $bu$ Polare von $a$ bez. $c^2$, mithin liegt auf ihr $w$, ebenso muss $v$ auf $cu$ sich finden; endlich muss $av$ als Polare von $c$ in Bezug auf $b^2$ durch $w$ gehen, der in Bezug auf $(Q)$ zu $c$ conjugiirt ist.

Die Poloconik $g^2$ von $G$ enthält $u$, $v$, $w$, und berührt hier die Geraden $au$, $bv$, $cw$, weil diese die Polaren von $a$, $b$, $c$ für ihre Netzcurven sind (3). Daraus folgt aber, dass $a$ von $u$ durch $b_1 . c_1$; $b$ von $v$ durch $a_1$, $c_1$; $c$ von $w$ durch $a_1$, $b_1$ harmonisch getrennt sind. Also wird die Gerade $a_1 u$ den Punct $\alpha$ enthalten und in ihm $a^2$ berühren, ebenso wird $b^2$ von $b_1 v$ in $\beta$, $c^2$ von $c_1 w$ in $\gamma$ tangirt.

Nicht unberücksichtigt darf der denkbare Fall bleiben, dass die 3 Tangenten im nämlichen Puncte — $s_1$ — zusammentreffen. Hier kann $u$ nicht von $s_1$ verschieden sein, da sonst Gleiches für $v$, $w$ gemäss unserer Beweisführung folgen würde, und demnach $g^2$ in $u$, $v$, $w$ drei durch $s_1$ gehende Tangenten hätte: Mithin muss $s_1$ der gemeinsame Pol von $G$ für $a^2$, $b^2$, $c^2$ sein; also zum Tripel des Büschels $(Q)$ gehören. Und umgekehrt, wenn angenommen wird, dass von Polen $u$, $v$, $w$ zwei coincidiren, somit auch der dritte mit diesen sich vereinigt, so gehen die 3 Tangenten nothwendig durch denselben Punct. Nun ist dem $s_1$ im Netz einer der Schnittpuncte von $G$ mit $J^3$ conjugirt, er sei $\sigma_1$. Ferner ist von den beiden Puncten $s_2$, $s_3$, die mit $s_1$ ein Tripel ausmachen, und die sowohl auf $G$ als auf $J^3$ sein müssen, gewiss einer, z. B. $s_2$ von $\sigma_1$ verschieden. Diesem $s_2$ sei im Netz $\sigma_2$ conjugirt, dann gehört $\sigma_2$ zu dem Tripel, und weil $s_1$ schon zu $\sigma_1$ conjugirt ist, so folgt, dass $\sigma_2$ identisch mit $s_3$ sein muss. Hiernach ist aber $G$ der eine Bestandtheil einer zerfallenden Netzcurve, der andere Theil dieser, die zu $G$ conjugirte Chordale enthält $\sigma_1$.

6. Definition der conischen Polaren einer Curve 3ter Ordnung $C^3$, und Beweis, dass sie ein Netz bilden.[1])

Von $C^3$ soll nichts weiter vorausgesetzt werden, als dass sie Erzeugniss eines Kegelschnittbüschels mit einem projectivischen Strahlenbüschel ist. Hierauf ist darzuthun, dass $C^3$ auch projectivisch erzeugt werden kann durch einen Strahlenbüschel, dessen Centrum $a$ beliebig auf $C^3$ gewählt wurde, und einem Kegelschnittbüschel $(x^2)$, von dessen Grundpuncten drei eine willkührliche Lage auf $C^3$ haben.[2])

Wenn man sonach vom Puncte $a$ die Polaren in Bezug auf die einzelnen $x^2$ nimmt, so erhält man einen neuen Strahlenbüschel, der auf den zuerst gedachten mit dem Centrum $a$ projectivisch bezogen sein wird. Daher beschreibt der Schnittpunct $\alpha$ zweier homologen Strahlen einen Kegelschnitt $a^2$, welcher in $a$ die $C^3$ berührt; er heisst die conische Polare des $a$ für die Fundamentalcurve $C^3$. Die Construction zeigt, dass die auf den Strahlen von $a$ befindlichen Punctepaare der $C^3$ von $a$ durch die Linie $a^2$ harmonisch getrennt werden.

Vorläufig ist die conische Polare eines jeden Punctes der $C^3$ selbst angegeben; nachdem wir aber bewiesen haben werden, dass diese Kegelschnitte sämmtlich einem Netze angehören, und dass ihnen ihre Pole associirt sind, wollen wir unter

[1]) v. Schröter, Theorie der ebenen Curven 3. Ordnung.
[2]) Siehe meinen Beweis dieses Satzes bei Bobek, proj. Geom. Leipzig 1889.

der conischen Polare eines beliebigen Punctes der Ebene die diesem Puncte associirte Netzcurve verstehen.

Beweis. Vergl. Fig. 5 *c*).

Erstens: Wenn $a^2$, $b^2$ die conischen Polaren irgend zweier Puncte $a$, $b$ sind, und man bestimmt von $a$ bezüglich $b^2$ die gewöhnliche Polare, so erhält man in ihr auch die Polare von $b$ bez. $a^2$.

Die Gerade $ab \equiv G$ durchdringt $C^3$ noch in $c$, dessen conische Polare $c^2$ die $G$ in $c$, $\gamma$ schneidet, dann liegen die Paare $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ gegen $a$, $b$, $c$ wie in der früheren Zeichnung. Aus der Beziehung zwischen $a^2$, $C^3$ erhellt ferner, dass die Tangente von $a^2$ in $\alpha$ durch den Schnittpunct $a_1$ der Tangenten von $C^3$ in $b$, $c$ gehen muss. Ist daher $b_1 c_1$ Tangente von $C^3$ in $a$, so wird sie von $a_1\alpha$ in einem Puncte $u$ geschnitten, welcher der Pol von $G$ bez. $a^2$ ist; folglich ist $u$ von $a$ durch $b_1$, $c_1$ harmonisch getrennt. Wird jetzt $a_1 c_1$ von $cu$ in $v$ geschnitten, so ist auch $v$ von $b$ durch $a_1 e_1$ harmonisch getrennt; deshalb ist $v$ der Pol von $G$ bezüglich $b^2$ und also $buv$ sowohl Polare von $b$ in Bezug auf $a^2$, als von $a$ in Bezug auf $b^2$.

Zugleich bemerkt man, dass $a$ und $u$, $b$ und $v$ conjugirt für den Büschel $(a^2, b^2)$ sind. Bezeichnet $w$ den Pol von $G$ bezüglich $c^2$, so muss dieser von $c$ durch $a_1$, $b_1$ harmonisch getrennt sein, also sowohl auf $bu$ als $av$ liegen, und er ist zu $c$ im Büschel $(a^2, b^2)$ conjugirt, weil $bu$, $av$ die Polaren des $c$ resp. in Bezug auf $a^2$, $b^2$ darstellen.

Zweitens. Im Büschel $(a^2 b^2)$ ist auch $c^2$. Sei $\mathfrak{c}^2$ die in diesem Büschel vorkommende durch $c$ gehende Curve. Da $c$, $\gamma$ ein Paar der vom Büschel aus $G$ geschnittenen Involution ist, — $a$, $\alpha$; $b$, $\beta$; $c$, $\gamma$ sind bekanntlich in Involution, so geht $\mathfrak{c}^2$ auch durch $\gamma$. Nun sind, wie wir sahen, $c$, $w$ conjugirte Pole für alle Kegelschnitte des Büschels $(a^2, b^2)$; folglich muss $cw$ Tangente des $\mathfrak{c}^2$ in $c$ sein, und da $a$, $u$ ebenfalls conjugirt für $\mathfrak{c}^2$ sind, so muss $bu$ Polare des $a$ in Bezug auf $\mathfrak{c}^2$, also $w$ der Pol von $G$ bezüglich $\mathfrak{c}^2$ sein. Daher wird $\mathfrak{c}^2$ — ebenso wie $c^2$ — in $c$, $\gamma$ die Tangenten $cw$, $\gamma w$ besitzen. Die Identität $\mathfrak{c}^2 \equiv c^2$ ergibt sich sodann, wenn man noch die conische Polare $z^2$ eines im Allgemeinen willkührlichen Punctes $z$ der $C^3$ in Betracht zieht. Die 3 Polaren von $z$ bezüglich $a^2$, $b^2$, $c^2$ sind einerlei mit den Polaren von $a$, $b$, $c$ bez. $z^2$, treffen sich somit im nämlichen Puncte $z'$, dem conjugirten von $z$ in Bezug auf den Büschel $(a^2, b^2)$. Da der Ort aller Puncte, welche den Puncten von $G$ als conjugirte für $(a^2, b^2)$ entsprechen, ein gewisser Kegelschnitt $g^2$ ist, so darf über $z$ die Annahme gemacht werden, dass $z'$ nicht auf $G$ fällt. Alsdann existirt aber unter den Kegelschnitten, welche sich in $c$, $\gamma$ berühren, einer und nur einer, welcher $z$ von $z'$ harmonisch trennt. Dies aber thut $c^2$ zufolge der Construction des $z'$, und nicht minder $\mathfrak{c}^2$, als Curve des Büschels $(a^2, b^2)$; mithin

$$\mathfrak{c}^2 \equiv c^2.$$

Drittens. Jetzt beziehen wir den Büschel $(a^2, b^2)$ oder $(Q)$ projectivisch auf das gerade Gebilde $G$ so, dass $a^2$, $b^2$, $c^2 \ldots K^2$, den Puncten $a$, $b$, $c \ldots K$ entsprechen: Nehmen wir die Polaren von $z$ für alle Curven des $(Q)$, so treffen diese sich in $z'$. Ebenso werden die Polaren von $a$, $b \ldots K$ bezw. für $a^2$, $b^2 \ldots K^2$ durch $z'$ gehen Jene liefern einen Büschel, dessen Strahlen den Kegelschnitten $a^2$, $b^2 \ldots K^2$ projectivisch zugewiesen sind, die letzteren liefern einen zweiten Strahlenbüschel. Beide haben das Centrum $z'$, und sind projectivisch so aufeinander bezogen, dass es 3 Strahlen in dem einen Büschel gibt, die mit ihren homologen des anderen zusammenfallen, folglich decken sich alle Paare homologer Strahlen; d. h. es gilt für einen beliebigen Kegelschnitt $K^2$ aus $(Q)$ und dem ihm zugewiesenen $K$: „Die Polare von $K$ für $z^2$ ist auch Polare des $z$ für $K^2$."

Viertens. $a^2$, $b^2$, $z^2$ bestimmen ein Netz, ich behaupte, in diesen sind den Curven $a^2$, $b^2$, $c^2 \ldots K^2$, $z^2$ die Puncte $a$, $b$, $c$. — $K$, $z$ associirt:

Bedeutet $s_1 s_2 s_3$ das durch $Q$ bestimmte Tripel, so wäre vor allem zu zeigen, dass die diesen $s$ im Netze conjugirten $\sigma$ auf $G$ fallen, mit anderen Worten, dass $G$ dem Quadrupel $Q$ associirt ist. Nun enthält $(Q)$ drei Geradenpaare $\sigma^2$, denen 3 Puncte $\sigma$ von $G$ zugewiesen sind. Entsprechen sich $\sigma_1^2$ und $\sigma_1$, so bedarf es keines neuen Beweises, um einzusehen, dass die Polare von $a$ bez. $K^2$ zusammenfallen muss mit der Polare von $K$ bez. $a^2$ u. s. w., dass daher auch die Polare von $\sigma_1$ bez. $K^2$ identisch ist mit der Polare von $K$ bez. $\sigma_1^2$; demnach muss die Polare von $\sigma_1$, für jeden Kegelschnitt des Büschels $(Q)$ genommen, den Punct $s_1$ — Schnittpunct des Paares $\sigma_1^2$ — enthalten; d. h. $s_1$, $\sigma_1$ sind in $(Q)$ conjugirt. Da ferner die Polare von $\sigma_1$ für $z^2$ auch die Polare von $z$ für $\sigma_1^2$ ist, so geht auch diese durch $s_1$, und $s_1$, $\sigma_1$ sind in der That für alle Netzcurven conjugirt.

Ist hiernach klar, dass $G$ dem Quadrupel $Q$ associirt ist, so hat man (2) zur Construction der zu $a^2$, $b^2$, $c^2$, $z^2$ associirten Puncte die Pole von $G$ in Bezug auf diese Curven aufzusuchen, und alsdann die ihnen in $(Q)$ conjugirten zu nehmen. Diese Pole waren aber $u$, $v$, $w$, $z'$, und die fraglichen conjugirten $a$, $b$, $c$, $z$ selbst.

In dem aufgestellten Netze ist die conische Polare $z_1^2$ eines beliebigen Punctes $z_1$ der $C^3$ die diesem Puncte associirte Netzcurve: Denn zufolge 3. ist die dem $z_1$ associirte Netzcurve dieser Bedingung unterworfen: Die Polaren von $a$, $b$, $c$, $z$ in Bezug auf dieselbe liegen vor in den Polaren von $z_1$ für $a^2$, $b^2$, $c^2$, $z^2$, wodurch mehr Bestimmungsstücke als nöthig für den etwa möglichen Kegelschnitt gegeben sind. Weil nun $z_1^2$ nach der ersten Ausführung in dieser Nnmmer den genannten Bedingungen genügt, so ist $z_1$ ihr associirter Punct.

Nennen wir überhaupt die irgend einem Puncte $K$ in unserem Netze associirte $K^2$ seine conische Polare für die Fundamentalcurve $C^3$, so sind wir gemäss der Eörterung 5. berechtigt auszusagen.

$C^3$ ist der geometrische Ort für die auf ihren conischen Polaren liegenden Puncte, und: Aus jedem Puncte $K$ der Ebene lassen sich an eine $C^3$ 6 Tangenten ziehen, und nicht mehr, ihre Berührungspuncte fallen auf die conische Polare $K^2$ des $K$.

7. Indem wir nunmehr zu unserem ursprünglichen Ausgangspuncte des allgemeinen Netzes (4) zurückkehren, finden wir uns in Stand gesetzt, die Frage nach dem Orte der Puncte, die auf ihren associirten Netzcurven liegen, vollständig zu erledigen. Wir legen das in Nr. 5 Vorgebrachte zu Grunde, und beziehen uns auf die Zeichnung unter c).

Ausser den dort vorausgesetzten Puncten $a$, $b$, $c$ und ihren Curven $a^2$, $b^2$, $c^2$ sei ein Punct $z$ gefunden, dessen associirte Curve $z^2$ ihn aufnimmt. Wir ziehen $za$, $zb$, schneiden mit diesen Geraden bezw. $a^2$, $b^2$ in $\alpha'$, $\beta'$, und bezeichnen mit $x$, $y$ die beiden Puncte, die von $z$ durch $a$, $\alpha'$, $b$, $\beta'$ harmonisch getrennt werden.

Hierauf construiren wir die Curve 3ten Ordnung $C^3$, welche $a$, $b$, $c$, $z$, $x$, $y$ enthält, und in $a$, $b$, $c$ die Tangenten $b_1 c_1$, $c_1 a_1$, $a_1 b_1$ hat; insofern $x$, $y$, $z$ nicht in einer Geraden zu liegen brauchen, existirt auch keine 2te $C^3$ mit den angegebenen Bestimmungsstücken. Die conische Polare von $a$ muss (nach 6.) in $a$, $\alpha$ die Geraden $au$, $\alpha u$ berühren, ferner muss sie durch $\alpha'$ gehen; mithin ist sie mit $a^2$ identisch, weil $a^2$ (5c) ebenfalls diesen Bedingungen genügt. Aus demselben Grunde ist $b^2$ nichts anderes als die conische Polare des $b$ für die Fundamentalcurve $C^3$. Es bleibt nur übrig, die Identität der $z^2$ mit der conischen Polare für $z$ nachzuweisen, damit das vorliegende Netz als das Netz der conischen Polaren von $C^3$ erkannt werde: Nun sind die Polaren von $z$ für $a^2$, $b^2$, $c^2$ einerlei mit den Polaren von $a$, $b$, $c$ bezüglich $z^2$, und durch diese, nebst dem einen Puncte $z$ ist $z^2$ vollständig bestimmt; aber die fragliche conische Polare des $z$ hat (6.) die nämlichen Bestimmungsstücke.

So haben wir denn auf geometrischem Wege, und wie ich glaube, zum erstenmale[1]) den wichtigen Satz hergeleitet „dass ein allgemeines Kegelschnittnetz als Netz conischer Polaren für eine bestimmte $C^3$ angesehen werden kann.“ Hier bietet sich von selbst die Aufgabe dar: Gegeben drei das Netz bestimmende Curven $K_1^2$, $K_2^2$, $K_3^2$; ihre Pole $K_1$, $K_2$, $K_3$ zu finden! Je zwei $K^2$ haben ein Quadrupel gemein, z. B. $Q_1$ ist $K_2^2$, $K_3^2$ gemeinschaftlich. Manhätte mit Hülfe der Hessischen $J^3$ die Geraden aufzusuchen, welche den drei $Q$ associirt sind; dann wären deren Schnittpuncte die verlangten $K$, wobei $K_2$, $K_3$ in $G_1$ auftreten. Jedoch ist es klarer, wenn man sich der zu den $Q$ gehörigen Tripel $S$ bedient. Diese werden zu je zwei durch drei Kegelschnitte $s^2$ verbunden, z. B. $S_1$, $S_3$ durch $s_2^2$, $S_1$, $S_2$ durch $s_3^2$. Ausser $S_1$ haben $s_2^2$, $s_3^2$ einen Punct $u_1$ gemein, ich behaupte, zu diesem $u_1$ gehört $K_1$ als sein conjugirter für den Büschel $(Q_1)$. Nämlich zufolge der Fundamentalconstruction ist $K_1$ conjugirt für $(Q_1)$ zum Pol der Geraden $G_1 \equiv K_2 K_3$ in Bezug auf $K_1^2$. Dass $u_1$ dieser Pol ist, folgt leicht: Der Ort für die Pole von $G$ bezüglich der Kegelschnitte von $(Q_2)$ ist ein durch $S_2$ und $S_1$ gehender Kegelschnitt; also $s_3^2$, ebenso liegen auf $s_2^2$ die Pole von $G_1$ bezüglich der durch $Q_3$ gehenden Netzcurven, daher wird $u_1$ der Pol von $G_1$ in Bezug auf den Kegelschnitt sein, der $Q_2$ mit $Q_3$ verbindet, und dieser ist $K_1^2$. Noch wird jeder sofort bemerken, dass die Verbindungslinie $u_1\ u_2$ ebensowohl die Polare von $K_1$ bezüglich $K_2^2$, als von $K_2$ bez. $K_1^2$ darstellt.

[1]) Bekanntlich hat Herr Cremona das Theorem aus einer mindestens zweifelhaften Constantenzählung gefolgert.