Zur Theorie

der

algebraischen Curven n^{ter} Ordnung: C^n.

Von

Prof. **KARL KÜPPER.**

(Abhandlungen der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. — VII. Folge, 3. Band.)

(Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe Nr. 7.)

PRAG.

Verlag der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. — Druck von Dr. Ed. Grégr.

1890.

In Nachstehendem sollen einige bisher nicht hinreichend klar gewordene Puncte der Theorie beleuchtet werden. Es schien mir erforderlich, einige neue Benennungen einzuführen, die man, wie ich hoffe, zweckmässig finden wird.

I. Verhalten von Punctgruppen gegen die C^n.

Wenn durch eine Gruppe G von Q-Puncten ∞^μ Curven C^n sich legen lassen, wo $\mu = \frac{n(n+3)}{2} = Q + q$, so heisst G die Basis dieser Mannigfaltigkeit (μ) der C^n, wir schreiben für sie $G_Q^{(q)}$. Falls $q = 0$, nennen wir $G_Q^{(0)}$ eine normale Gruppe oder Basis für C^n; hingegen anormal, wenn $q > 0$. Unter dem Excess einer anormalen Gruppe ist die Zahl q zu verstehen. Wir sagen ferner, die C^n haben um die Gruppe $G_Q^{(q)}$ die Beweglichkeit μ, welche normal, oder anormal ist, je nachdem $q = 0$, oder $q > 0$.

1. Werden einer für C^n normalen Gruppe $G_Q^{(0)}$ irgend welche Puncte entnommen, so hat man in diesen wiederum eine normale Gruppe. Eine anormale Gruppe $G_Q^{(q)}$ kann sowohl anormale als normale Gruppen umfassen, jedoch ist den letztgenannten als Maximum der Punctzahl $Q - q$ zugewiesen. Denn die Existenz einer solchen Gruppe von $Q - q + \nu$ Puncten würde den Widersinn involviren, dass durch dieselben weniger Curven C^n möglich sind als durch $G_Q^{(q)}$.

Wir zeigen jetzt, dass innerhalb $G_Q^{(q)}$ stets eine $G_{Q-q}^{(0)}$ aufgefunden werden kann:

In $G_Q^{(q)}$ wählen wir beliebig $Q - q - \nu$ Puncte, denken dabei ν gross genug, dass sie eine normale Gruppe $G_{Q-q-\nu}^{(0)}$ liefern. Die durch sie legbaren C^n können deshalb nicht alle übrigen Puncte der $G_Q^{(q)}$ enthalten, weil sonst für diese mindestens der Excess $q + \nu$ bestände. Fügt man daher zu $G_{Q-q-\nu}^{(0)}$ einen der Puncte, die ihre C^n nicht zu enthalten brauchen, so erhält man eine neue $G_{Q-q-\nu+1}^{(0)}$, und es werden ihre C^n wieder nicht alle übrigen Puncte der G_Q^q aufnehmen, wofern $\nu > 1$. In dieser Weise fortfahrend erlangt man nothwendig eine $G_{Q-q}^{(0)}$; über die Gruppenzahl $Q-q$ kann man aber, wie anfangs bemerkt wurde, nicht hinausgehen, womit offenbar ausgesagt ist, dass die ganze Gruppe $G_Q^{(q)}$ auf allen C^n der gefundenen Basis $G_{Q-q}^{(0)}$ liegt.

2. Lehrsatz. In einer anormalen Gruppe $G_Q^{(q)}$ befinden sich stets $Q-x$ Puncte, so dass alle durch je $Q-x-1$ derselben gehenden C^n den fehlenden $Q-x^{\text{ten}}$ Punct aufnehmen.

Beweis. Würde die Behauptung für gewisse $Q-1$ Puncte der $G_Q^{(q)}$ nicht statthaben, so hätte man in diesen eine $G_{Q-1}^{(q)}$; denn die Mannigfaltigkeit ihrer C^n überträfe um 1 diejenige, welche der $G_Q^{(q)}$ zukommt, und es ist:

$$-Q+q+1=-(Q-1)+q.$$

Träfe auch für $G_{Q-1}^{(q)}$ die Aussage nicht ein, so liesse sich vie vorher $G_{Q-2}^{(q)}$ aufstellen, u. s. w. Würde man nun in dieser Weise fortfahrend nicht zu einer $G_{Q-x}^{(q)}$ gelangen, der die im Satze ausgedrückte Eigenschaft zukommt, so müssten anormale Gruppen von beliebig kleiner Punctzahl existiren, was nicht der Fall ist. In Bezug hierauf gilt nämlich der Satz:

„Die kleinste Punctzahl für eine anormale Gruppe ist $n+2$, ihr Excess ist 1, und sie muss auf einer Geraden liegen.“

Beweis. Wir schicken voraus: Wenn die zu irgend einer Basis $G_Q^{(q)}$ $(q \gtreqless 0)$ gehörenden C^n einen ausserhalb der Basis befindlichen Punct gemein haben, so liefert dieser mit G_Q^q zusammen eine G_{Q+1}^{q+1}, d. i. eine anormale Gruppe; denn

$$-Q+q=-(Q+1)+q+1.$$

Fügt man aber zur $G_Q^{(q)}$ einen Punct, der nicht auf allen jenen C^n vorkommt, so bildet man $G_{Q+1}^{(q)}$, weil

$$-Q+q-1=-(Q+1)+q.$$

Existirte nun eine anormale Gruppe von weniger als $n+1$ Puncten, so liesse sich eine solche von $n+1$ Puncten herstellen. Gäbe es ferner eine Basis von weniger als $n+1$ Puncten, auf deren C^n noch ein weiterer Punct läge, so könnte man sich ebenfalls eine anormale Gruppe von $n+1$ Puncten verschaffen. Wenn wir daher zeigen, dass $G_{n+1}^{(q)}$ unmöglich ist, oder dass $n+1$ wie immer gelegene Puncte sich normal gegen die C^n verhalten, so haben wir zugleich dies Resultat gewonnen: Weniger als $n+1$ Puncte sind für ihre C^n eine normale Gruppe, und es können ihre C^n nicht noch einen Punct gemein haben.

Gesetzt, man habe $G_{n+1}^{(q)}$ $(q > 0)$. Da q wenigstens 1 ist, so folgt nach N° 1., dass in dieser Gruppe n Puncte $a_1, a_2, \ldots a_n$ angegeben werden können, so dass alle durch sie denkbaren C^n den fehlenden $n+1^{\text{ten}}$ Punct b enthalten. Man lege durch a_i eine Gerade, die weder b noch einen 2^{ten} a enthält, dann alle C^{n-1} durch die übrigen $n-1$ a; diese müssten durch b gehen. Scheidet man mittels einer zweiten durch a_{i+1} gelegten Geraden auch diesen aus, so müssten alle durch die $n-2$ a gehenden C^{n-2} den b. aufnehmen. Man käme so zuletzt auf einen a und es sollte jede durch diesen denkbare Gerade durch b gehen, was absurd ist.

Ist hiernach die Möglichkeit von $G_Q^{(q)}$ $(q>0)$ an die Bedingung $Q=n+1+\nu$ $(\nu>0)$ geknüpft, so ergibt sich zunächst als Maximalwerth von q die Zahl ν selbst. Denn wäre $q>\nu$, so fände man (N° 1) eine Gruppe von weniger als $n+1$ Puncten derart, dass ihre C^n noch gewisse andere Puncte gemein haben, welche aber nach dem so eben Bewiesenen undenkbar ist. Wird jetzt $G^{(\nu)}_{n+1+\nu}$ vorausgesetzt, so folgt leicht, dass ihre $n+1+\nu$ Puncte in gerader Linie liegen müssen.

Nämlich nach 1. sind in $G^{\nu}_{n+1+\nu}$ $n+1$ Puncte a in solcher Lage, dass die durch sie möglichen C^n die sämmtlichen übrigen Gruppenpuncte b_i aufnehmen. Hieraus leitet man mit der in dieser Nummer gebrauchten Schlussweise ab, dass jede, durch zwei willkürliche a gelegte Gerade die b_i aufnehmen muss, w. z. b. w.

Es bedarf wohl keiner Erläuterung, dass diese Bedingung der Lage zur $G^{(\nu)}_{n+1+\nu}$ führt; ihre C^n zerfallen demnach in die Gerade L, welche die Gruppe trägt, und die C^{n-1} der Ebene. Man kann das Ergebniss auch so aussprechen:

„Wenn $n+1+\nu$ Puncte für ihre C^n genau $n+1$ Bedingungen darstellen, so müssen sie in einer Geraden liegen“ (auf einer irreduciblen C^n ist eine solche Gruppe nicht möglich).

Für $\nu=1$ erhält man: $n+2$ Puncte liefern dann und nur dann eine anormale Gruppe für C^n, wenn sie auf einer Geraden sind. Denn für eine anormale Gruppe beträgt der Excess wenigstens 1, für $n+2$ Puncte kann er auch nicht grösser sein, und wenn er $=1$, so müssen die $n+2$ Puncte in gerader Linie liegen. $G^{(1)}_{n+2}$ ist somit ein Symbol für $n+2$ Puncte einer Geraden, sobald diese Bedingung der Lage aufgehoben wird, hat man $G^{(0)}_{n+2}$.

3. Lehrsatz. Wenn für h Puncte a zutrifft, dass alle durch je $h-1$ der a gehende C^n auch den h^{ten} Punct aufnehmen, und hiebei $h<2n+2$, so müssen die a in gerader Linie liegen.

Beweis. Für $n=1$, $n-2$ leuchtet die Richtigkeit der Aufstellung ein, wir nehmen sie für $n-1$ an, und folgern daraus Gleiches für n. Wir verbinden zwei a durch eine Gerade L, so wird diese entweder alle h Puncte enthalten, oder nicht. Die letztere Voraussetzung führt zu einer Gruppe von $h_1<2(n-1)+2$ Puncten a, ausserhalb L, die sich gegen C^{n-1} ebenso verhalten muss wie die h Puncte gegen C^n, daher müssen dieselben in in einer Geraden L_1 liegen, und (N. 2.) h_1 müsste wenigstens $= n - 1 + 2$ sein. Da nun ausserhalb L_1 gewisse a vorkommen — z. B. die beiden anfangs verbundenen — sicher aber weniger als $n + 1$ Puncte, so könnten diese sich nicht in gleicher Weise gegen die C^{n-1} verhalten, wie die h gegen C^n, was doch der Fall sein müsste (wegen derjenigen C^n, deren Bestandtheil L_1 ist). Also dürfen ausserhalb L keine a mehr vorkommen, w. z. b. w.

Zusatz. Ist $h = 2n + 2$, so ist die vorgeschriebene Lage wohl eine hinreichende; nicht aber eine nothwendige Bedingung dafür, dass der Gruppe die im Satze supponirte Eigenschaft zukommt. Indess sind hier nur noch zwei Gruppirungen möglich; nämlich entweder die a liegen insgesammt auf einer irreduciblen C^2, oder aber zu gleichen Theilen auf zwei Geraden L_1, L_2.

Dass diese Anordnungen genügen, ist offenbar, ihre Nothwendigkeit erhellt so: Man verbinde je zwei a und nehme erstens an, dass auf keiner der Verbindungslinien ein dritter a erscheint. Durch zwei Paare der a nebst a_1 sei C_1^2 bestimmt, und es werde von den übrigbleibenden $2n - 3$ a ein beliebiger a_i abgesondert, die jetzt fehlenden $2n - 4$ lassen sich paarweise durch $n - 2$ Gerade verbinden, welche eine C^{n-2} darstellen; woraus folgt, C_1^2 muss durch a_i gehen; und sämmtliche a fallen auf C_1^2.

Wenn zweitens eine der gedachten Verbindungslinien, etwa $a_1\, a_2$ noch einen oder einige a_i trägt, so müssen die fehlenden, deren es höchstens $2n + 2 - 3 < 2(n - 1) + 2$ gibt, nach unserem Satze auf einer Geraden L_1 sein, und wenigstens $n + 1$ betragen, damit sie sich gegen die C^{n-1} verhalten wie die h Puncte gegen C^n. Weiter müsste die Gruppe $a_1\, a_2\, a_i$ ganz dasselbe Verhalten gegen die C^{n-1} zeigen, folglich dürfte dieselbe ebenfalls nicht weniger als $n + 1$ Puncte a umfassen. Der Excess ist bei beiden Gruppirungen der gleiche $q = 1$.

4. Lehrsatz. Jede anormale Gruppe $G_Q^{(q)}$, in der $Q < 2n + 2$ umfasst als Untergruppe die $G_{n+2}^{(1)}$ (v. 2.). Gleiches gilt noch, wenn $Q = 2n + 2$, zugleich aber $q > 1$.

Beweis. Die in N° 1. durchgeführte Betrachtung lässt sofort erkennen, dass in $G_{2n+2}^{(q)}$ eine anormale Untergruppe von $2n + 1$ Puncten existirt. Nun kommen in jeder anormalen G_Q zufolge des 2ten Lehrsatzes $Q - x = h$ Puncte vor, wie sie im 3. vorausgesetzt wurden; deshalb müssen diese $Q - x$ Puncte in gerader Linie, und zugleich $Q - x \geqq n + 2$ sein.

Wählt man demnach $n + 2$ Puncte beliebig auf einer Geraden L, welche die $G_{n+2}^{(1)}$ darstellen können, sodann die übrigen $Q - n - 2$ Puncte irgendwo ausserhalb L, so hat man $G_Q^{(1)}$. Lässt man dann der Reihe nach einen, zwei, ɔc. der nicht in L befindlichen Gruppenpuncte auf L fallen, so erhält man $G_Q^{(2)}$, $G_Q^{(3)}$ ɔc. Kann man aus irgend einem Grunde höchstens $n + 1 + \nu_1$ Puncte auf L bringen, so wäre nur noch $G_Q^{(\nu_1)}$ möglich, ν_1 der Maximal. excess. Sollte man z. B. auf einer irreduciblen C^{n+3} eine dieser Gruppen angeben, etwa die vom Maximalexcess, so bestände sie aus den $n + 3$ Schnittpuncten einer Geraden L mit C^{n+3} und $Q - n - 3$ willkürlichen Puncten der C^{n+3}, der Excess wäre stets $= 2$, auch in dem Falle

$Q = 2n + 2$, da die ausserhalb L liegenden $Q - n - 3$ in Anbetracht ihrer Zahl für C^{n-1} normal sind. Verwendet man nur $n + 2$ Schnittpuncte von C^{n+3} u. L zur Gruppenbildung, so entsteht $G_Q^{(1)}$. Auf diese Weise findet man, wie eine $G_Q^{(q)}$ vom Maximalexcess 2 auf C^{n+3} nothwendig beschaffen ist; wofern Q innerhalb der vorgeschriebenen Grenze — unter $2n + 3$ bleibt.

Wir werden später diese Grenze überschreiten (III), einstweilen sei darauf aufmerksam gemacht, dass die bisher untersuchten Gruppen auf einer irreduciblen C_1^n nicht vorkommen, weil $G_{n+2}^{(1)}$ in keiner derselben fehlt. Von selbst drängt sich die Frage auf nach dem Minimum x des Q einer auf C_1^n befindlichen anormalen Gruppe G_x? Dass es auf C_1^n solche Gruppen gibt, wenn $Q \geqq \frac{n(n+3)}{2}$, folgt daraus, dass man auf C_1^n immer $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ Puncte so annehmen kann, dass durch sie genau $\infty^1 C^n$ gehen, welche überdies C_1^n in festen Puncten schneiden, wenn $n > 2$. Ein solcher fester Punct den angenommenen hinzugefügt würde eine derartige Gruppe liefern.

Es soll daher unter den n^2 Schnittpuncten a von C_1^n mit einer vorläufig unbekannten C^n eine $G_x^{(q)}$ von möglichst kleinem x aufgefunden werden, das vor allem $< \frac{n(n+3)}{2}$. Eigentlich ist damit der Fall $n = 3$ ausgeschlossen; jedoch genügt die Berücksichtigung des Geschlechtes 1 der C_1^3 um zu sehen, dass weniger als 9 Puncte gegen die C^3 sich normal verhalten, anormal einzig und allein 9 Puncte sind, in denen C_1^3 von einer anderen C^3 geschnitten wird.

Unter der auf C_1^n $n > 3$ vorausgesetzten $G_x^{(q)}$ kann man (1) $x - 1$ finden so, dass die durch sie möglichen C^n den x^{ten} Punct aufnehmen; die C^n schneiden mithin C_1^n in Gruppen von $n^2 - x$ Puncten, deren Beweglichkeit mindestens $\frac{n(n+3)}{2} - 1 - (x - 1)$ ist.

Folglich wird $n^2 - x - \left\{\frac{n(n+3)}{2} - x\right\} < \frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Der Ausdruck rechts ist das Geschlecht p der C_1^n; deshalb bedingt bekanntlich die Ungleichung, dass die $n^2 - x$ Puncte a auf einer C^{n-3} sein müssen, d. h.

$$n^2 - x \leqq n(n-3) \text{ oder } x \geqq 3n.$$

Hiernach wäre $3n$ das Minimum von Q. Da aber die übrigen $n^2 - 3n$ Punct a der vollständige Schnitt der C_1^n mit einer C^{n-3} sind, so muss durch die $3n$ Puncte eine C^3 gehen. In der That liefern $3n$ Schnittpuncte von C_1^n und C^3 eine $G_{3n}^{(1)}$. Denn die von ihren C^n aus C_1^n geschnittene Schaar wird auch von den C^{n-3} der Ebene ausgeschnitten, hat also die Beweglichkeit $\frac{(n-3)n}{2}$, und durch jede Gruppe existiren $\infty^1 C^n$, auf welchen die $G_{3n}^{(1)}$ ebenfalls liegt. Die Mannigfaltigkeit der zu $G_{3n}^{(1)}$ gehörenden C^n ist somit:

$$\frac{(n-3)n}{2} + 1, \text{ d. i. } \frac{n(n+3)}{2} - 3n + 1.$$

Der hergeleitete Satz: „Die $3n$ Schnittpuncte einer C_1^n mit C^3 bilden die anormale Gruppe mit kleinster Punctzahl auf $C_1^{n''}$ gilt offenbar auch, wenn $n = 2$, $n = 3$ ist.

II. Ueber die Art des Zerfallens gegebener ∞^μ Curven n^{ter} Ordnung (C^n) oder einer Mannigfaltigkeit (μ) von C^n.

Wenn eine wie immer bestimmte Mannigfaltigkeit (μ) von C^n vorliegt, und man findet, dass jede dieser C^n besteht aus einer festen $C^{n-\nu}$ und ∞^μ Curven C^ν, die nicht alle zerfallen, so nennen wir dieselbe primitiv reducibel, und $C^{n-\nu} \equiv k_\mu$ den Kern der Mannigfaltigkeit.

Ist eine Gruppe G von Q Puncten gegeben, und ist bekannt, dass genau $\infty^\mu C^n$ existiren, welche diese Q als einfache Puncte enthalten, ferner, dass die C^n ausnahmslos reducibel sind, so werden wir beweisen, dass ihr Zerfallen stets in der als primitiv definirten Weise stattfinden muss.

Um Missverständnissen vorzubeugen, betonen wir nachdrücklich, dass ein Gruppenpunct für die C^n einfach, d. h. nicht mehr als eine Bedingung sein soll. Verhält es sich anders, so wird die Behauptung unhaltbar, z. B. die C^4, welche die 4 Grundpuncte eines Büschels (C^2) zu Doppelpuncten haben, bestehen aus je zwei dieser C^2, und constituiren ein Netz $\{C^4\}$, das keinen Kern besitzt, daher nicht primitiv reducibel ist.

1. $\mu = 1$: Sollen alle durch die G möglichen C^n reducibel sein, und durch einen einzigen Büschel (C^n) erschöpft werden, so ist (C^n) ein primitiv reducibler Büschel.

Beweis. C_i^n sei eine der ∞^1 Curven, die einfach durch jeden der Q Puncte geht, sie sei zusammengesetzt aus den irreducibeln $C_i^{\nu'}$, $C_i^{\nu''}$ ɔc. Auf C_i^n sind hier die Q Puncte in Gruppen von $q_i^{\nu'}$, $q_i^{\nu''}$, ... vertheilt; die auf C_i^ν fallenden q_i^ν Puncte mögen die Gruppe der C_i^ν heissen.

Wenn nun durch die irgend einer C^ν angewiesenen Gruppe q^ν keine zweite C^ν einerlei ob irreducibel oder nicht geht, mit anderen Worten wenn jede denkbare C^ν um ihre Gruppe q^ν unbeweglich ist, so folgt sofort, dass die Anzahl der überhaupt existirenden C^ν nothwendig endlich ist: Für $q < Q$ hat man innerhalb G im Ganzen $\frac{Q!}{q!\,(n-q)!}$ differente Gruppen von je q Puncten. Unter diesen sind die auftretenden q_i^ν zu suchen; mithin sind sie der Zahl nach beschränkt, und da jede q_i^ν einer einzigen C_i^ν zugewiesen ist und umgekehrt, so sind die C^ν nur in endlicher Menge vorhanden.

Durch Zusammensetzung der C^ν sollen $\infty^2 C^n$ hervorgehen; es ist aber leicht einzusehen, das man durch Benutzung aller denkbaren Combinationen der C^ν doch nur eine endlich begrenzte Zahl von C^n erzeugen kann. Zweifellos wäre dies der Fall, wenn es feststände, dass jede C^ν zur Bildung blos einer endlichen Anzahl C^n verwendbar wäre, d. h. wenn die betreffende C^ν nicht allen C^n gemeinsam wäre. In der That ist es keineswegs ausgeschlossen, dass einige der C^ν, etwa $C_1^{\nu'}$, $C_2^{\nu''}$, Theile sämmtlicher C^n sind. Träfe dies etwa für $C_1^{\nu'}$, $C_2^{\nu''}$ zu, nicht aber für eine der übrigen C^ν, so dass die $\infty^1 C^n$ aus der festen Curve $C_1^{\nu'} \cdot C_2^{\nu''}$ von $\nu' + \nu''^{\text{ter}}$ Ordnung beständen und den durch Zusammensetzung der anderen C^ν erzeugbaren $C^{n-\nu'-\nu''}$, so könnte nunmehr eine beliebige letzterer C^ν nur zur Bildung einer endlichen Menge von $C^{n-\nu'-\nu''}$ dienen, mithin erhielte man immer nur eine endliche Anzahl C^n.

Hiernach ist mit der Existenz von $\infty^1 C^n$ die Annahme unverträglich, dass alle auftretenden irreduciblen C^ν um ihre Gruppen q^ν unbeweglich sind. Es sei also die aus der C_i^n erhaltene C_i^ν um ihre Gruppe q_i^ν beweglich und bilde mit $C_i^{\nu'}$, $C_i^{\nu''}$ ∞ diese C_i^n. Offenbar ist 1 die Beweglichkeit der C_i^ν. Denkt man jetzt die Curve $C_i^{\nu'} \cdot C_i^{\nu''} \ldots \equiv C^{n-\nu}$, und fügt ihr jede Curve des gefundenen Büschels (C^ν) — mit den Grundpuncten q_i^ν — als Factor zu, so bekommt man ∞^1 Curven C^n, die den vorausgesetzten Büschel (C^n) ausmachen werden.

Wir heben einige für unsere ferneren Betrachtungen unentbehrliche Folgerungen hervor:

a) Der aufgefundene Büschel (C^ν) umfasst alle durch die Gruppe q_i^ν möglichen C^ν. Unter diesen kommen u n e n d l i c h v i e l e i r r e d u c i b l e Curven vor. Denn zufolge der von uns angewandten Schlussweise, würde die Annahme, (C^ν) enthielte unendlich viele reducible C^ν nach sich ziehen, dass (C^ν) primitiv reducibel sei, dass mithin k e i n e irreducible C^ν im Büschel wäre. Da jedoch C_i^ν eine solche ist, so treten nur eine beschränkte Menge reducibler C^ν auf, folglich unendlich viele irreducible, und für die Gruppenzahl q_i^ν ist ν^2 eine obere Grenze.

b) B e d e u t e t C_i^n i r g e n d e i n e C u r v e d e s p r i m i t i v r e d u c i b l e n B ü s c h e l s (C^n), u n d f i n d e t m a n u n t e r i h r e n r e d u c i b l e n o d e r i r r e d u c i b l e n T h e i l e n e i n e n u m s e i n e G r u p p e b e w e g l i c h e n C_i^ν, s o s e t z e n d i e ü b r i g e n T h e i l e v o n C_i^n s i c h z u m K e r n $C^{n-\nu}$ d e s B ü s c h e l s z u s a m m e n, u n d s i n d o h n e A u s n a h m e u n b e w e g l i c h.

I m a u f g e f u n d e n e n B ü s c h e l d e r C^ν b e f i n d e n s i c h a l s d a n n u n z ä h l i g e i r r e d u c i b l e C^ν, w i r n e n n e n i h n i r r e d u c i b e l.

2. $\mu = 2$. D a s p r i m i t i v r e d u c i b l e N e t z $\{C^n\}$ m i t d e n G r u n d p u n c t e n G. S o l l d i e M a n n i g f a l t i g k e i t d e r d u r c h G m ö g l i c h e n C^n, d i e a l l e z e r f a l l e n,

durch ein bestimmtes Netz $\{C^n\}$ erschöpft werden, so müssen die C^n einen fixen Bestandtheil besitzen — $C^{n-\nu}$ —, während der variable Theil C^ν für sich ein Netz $[C^\nu]$ bildet, in welchem unzählige irreducible Büschel (C^ν) auftreten.

Beweis. Wir fassen wieder die irreduciblen Bestandtheile C_i^ν einer der unendlich vielen C^n auf, welche einfach durch jeden der Q Gruppenpuncte gehen, von C_i^n. Wie vorhin folgt, dass einer von ihnen, C_i^ν um seine Gruppe q_i^ν beweglich sein wird. Hier kann es sich ereignen, dass wofern $\nu = 1$, oder C_i^ν eine Gerade ist, ihr keine Gruppe entspricht; dann besteht offenbar das Netz aus einem Kern C^{n-1} und den ∞^2 Geraden der Ebene. Käme der C_i^ν $(\nu > 1)$ die Beweglichkeit 2 zu, so bestände das Netz $\{C^n\}$ aus dem Netze $[C^\nu]$ mit den Grundpuncten q_i^ν und dem Kern $C^{n-\nu}$, welcher C_i^ν zu C_i^n ergänzt. Dass es so sein muss, werden wir erkennen, wenn sich zeigt, dass die Annahme, C_i^ν habe blos die Beweglichkeit 1, nicht zulässig ist: Die gedachte C_i^ν kann als Curve des Büschels (C^ν) als durch einen ihrer ausserhalb q_i^ν befindlichen Punct 1 festgelegt angesehen werden. Im supponirten Netze geht durch 1 ein primitiv reducibler Büschel (C^n), der auch unsere C_i^n enthält.

Mithin muss unter den Bestandtheilen von C_i^n einer, etwa $C_i^{\nu_1}$ um seine Gruppe $q_i^{\nu_1}$ beweglich sein; und er könnte wieder höchstens die Beweglichkeit 1 besitzen, so dass ein zweiter Netzbüschel $(C^n)_1$ vorläge, bestehend aus einem irreduciblen (C^{ν_1}) nebst einem Kern $C^{n-\nu_1}$. Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Die Gruppen q_i^ν, $q_i^{\nu_1}$ sind nicht identisch. Sie haben gewiss keinen gemeinschaftlichen Punct, wenn $C_i^{\nu_1}$ irreducibel wäre; zerfällt $C_i^{\nu_1}$, so gehören zu ihren irreduciblen Theilen durchaus getrennte, und ebenfalls von q_i^ν gänzlich verschiedene Gruppen. Daher liegen die in q_i^ν und $q_i^{\nu_1}$ nicht vorkommenden Puncte der G auf einem Bestandtheile $C_i^{n-\nu-\nu_1}$ der C_i^n. Setzt man nun $C_i^{n-\nu-\nu_1}$ mit je zwei den Büscheln (C^ν), (C^{ν_1}) entnommene Curven zu einer C^n zusammen, so resultiren ∞^2 C^n, welche gemäss der Voraussetzung alle durch die G denkbaren C^n darstellen müssten.

Es ist aber leicht einzusehen, dass es sich keineswegs so verhält: Wegen der Irreducibilität der Büschel (C^ν), (C^{ν_1}) hat der eine ν^2, der andere ν_1^2 Grundpuncte, folglich sind in den Gruppen q_i^ν, $q_i^{\nu_1}$ nicht mehr als $\nu^2 + \nu_1^2$ Puncte. Ich werde darthun, dass durch die genannten Gruppen mehr als ∞^2 Curven $C^{\nu+\nu_1}$ gelegt werden können.

Für $\nu_1 = \nu$, $\nu_1 = \nu + 1$, $\nu_1 = \nu + 2$ ergibt sich sofort:

$$\frac{(\nu_1 + \nu)(\nu_1 + \nu + 3)}{2} - \nu_1^2 - \nu^2 > 2.$$

Wäre $\nu_1 = \nu + 2 + \Delta$; d. h. $\nu_1 + \nu = 2\nu_1 - 2 - \Delta$, so wende ich folgenden von mir in den Sitzungsberichten dieser Gesellschaft (Jahr 1888) bewiesenen Satz an:

„Der vollständige Schnitt zweier irreduciblen C^m, C^n ist für eine $C^{m+n-2-\Delta}$ stets eine anormale Gruppe, deren Excess $\frac{\Delta(\Delta+1)}{2}$ beträgt."

Nimmt man $m = n = \nu_1$, so findet man, dass die Mannigfaltigkeit der durch q_i^ν, $q_i^{\nu_1}$ legbaren $C^{2\nu_1 - 2 - \Delta}$ wenigstens den Werth $\frac{(\nu_1 + \nu)(\nu_1 + \nu + 3)}{2} - \nu_1^2 - \nu^2 + \frac{\Delta(\Delta + 1)}{2}$ hat, der wie eine leichte Rechnung lehrt gleich $3\nu + 1$, mithin > 2.

b) Sind q_i^ν, $q_i^{\nu_1}$ identisch, mithin auch die Büschel (C^ν), (C^{ν_1}), so ist die Constitution des Netzes klar. Jeder seiner Büschel hat in seinem Kern eine bestimmte C_1^ν des doppelt zählenden irreduciblen Büschels (C^ν), und als variablen Theil die anderen Curven des nämlichen Büschels. Somit hätte jede Netzcurve die Gruppe q_i^ν zu Doppelpuncten, was unseren Voraussetzung widerspricht.

Den Forderungen unseres Satzes entspricht nach dieser Erörterung einzig und allein das oben definirte primitiv reducible Netz $\{C^n\}$. Die Netzcurven sind zusammengesetzt aus dem Kern $C^{n-\nu}$ und den dem Netze $[C^\nu]$ entnommenen C^ν; in letzterem aber existiren unzählige irreducible Büschel (C^ν), da jeder, der durch irgend einen Punct der irreduciblen C_i^ν bestimmt ist, ein solcher sein muss. Wird jetzt ein Büschel (C^n) gedacht, dessen Kern $C^{n-\nu}$, dessen variabler Theil einer der bezeichneten irreduciblen (C^ν) ist, so hat man in (C^n) einen Büschel aus $\{C^n\}$, dessen Kern einerlei mit dem des Netzes ist.

Verwendet man hingegen zur Bildung eines (C^n) einen Büschel (C^ν), dessen Curven alle zerfallen, und bezeichnet mit $C^{\nu-\nu'}$ den Kern dieses (C^ν), so wird $C^{n-\nu}$. $C^{\nu-\nu'}$ der Kern von $[C^n]$ sein. Es existiren demnach in $\{C^n\}$ zweierlei Arten von Büscheln, solche, deren Kern zugleich Netzkern ist, andere, in deren Kern der Netzkern als Factor steckt.

3. Die Generalisation der vorstehenden Ergebnisse erfolgt durch den bekannten inductiven Schluss.

Machen wir die Unterstellung, dass jeder auf die oben angegebene Weise bestimmten Mannigfaltigkeit (μ) und $(\mu - 1)$ von C^n ein entsprechender Kern k_μ, $k_{\mu-1}$ zukomme, dass ferner wie beim Netz $\{C^m\}$ eine in $(\mu - 1)$ enthaltene Mannigfaltigkeit $(\mu - 2)$ sich finden lässt, die ebenfalls den Kern $k_{\mu-1}$ besitzt, während jede andere solche $(\mu - 2)$ als Kern ein Vielfaches von $k_{\mu-1}$ hat, so wird man für $(\mu + 1)$ folgendermassen die analogen Eigenschaften begründen: Aus $(\mu + 1)$ scheide man eine Mannigfaltigkeit $(\mu)_1$ dadurch aus, dass man die C^n durch einen und denselben Punct 1 legt. In $(\mu)_1$ gibt es eine $(\mu - 1)$, deren Kern $k_{\mu-1}$ einerlei mit dem von $(\mu)_1$ ist.

Sodannn nehme man aus $(\mu + 1)$ eine zweite $(\mu)_2$, welche mit $(\mu)_1$ jene $(\mu - 1)$ gemein hat, und nun muss der Kern von $(\mu)_2$ entweder $k_{\mu-1}$ selbst, oder doch ein Theiler $k_{\mu+1}$ von ihm sein, so dass $k_{\mu-1} = k \,.\, k_{\mu+1}$. Denkt man jetzt $(\mu + 1)$ mittels $(\mu)_1$, $(\mu)_2$ construirt, so sieht man, dass die $\infty^{\mu+1}$ hervorgehenden C^m entweder $k_{\mu-1}$, oder $k_{\mu+1}$ als constanten Bestandtheil erhalten.

Im ersten Falle würde $k_{\mu-1}$ Kern für die Mannigfaltigkeit $(\mu + 1)$; denn die Curven von $(\mu)_1$ sind durch $k_{\mu-1} \,.\, C^v$ dargestellt, wobei die C^v nicht alle reducibel sind, im zweiten Falle gilt für die C^m von $(\mu)_2$ die Formel $k_{\mu+1} \,.\, C^{v_1}$ und unter den C^{v_1} ist immer wenigstens eine irreducibel; mithin wäre $k_{\mu+1}$ der Kern für $(\mu + 1)$.

Ist einmal der Kern $k_{\mu+1}$ für $(\mu + 1)$ gefunden, so ist klar, wie man unzählige in $(\mu + 1)$ befindlichen (μ) herstellen kann, denen d e r s e l b e Kern $k_{\mu+1}$ zukommt. Ereignet es sich aber, dass bei beliebiger Wahl einer (μ) der von $k_{\mu+1}$ verschiedene Factor C^v der $\infty^{\mu} C^m$ immer zerfällt, dass also den $\infty^{\mu} C^v$ ein Kern k entspricht, so wird $k \,.\, k_{\mu+1}$ der Kern für die in $(\mu + 1)$ enthaltene — Mannigfaltigkeit (μ) sein.

Wie man vom Netz ausgehend, nach und nach zu jeder Mannigfaltigkeit aufsteigen kann, wird nach dieser Erörterung deutlich genug sein.

III. Die Specialschaaren grösster Beweglichkeit auf einer irreduciblen C_1^m ohne vielfache Puncte.

1. Als Fortsetzung der Betrachtung in II. 4. wollen wir auf einer irreduciblen C^{n+3} diejenigen Gruppen von maximalem Excess für ihre C^n aufsuchen, deren Q die Werthe *a*) $2n + 3$, *b*) $2n + 4$, *c*) $2n + 5$, *d*) $2n + 6$ hat, und entsprechend *a*) $q > 1$, *b*) $q > 2$, *c*) $q > 3$, *d*) $q > 4$.

Aus I. 1. ersieht man zunächst, dass die möglichen $G_Q^{(q)}$ vor allem eine anormale $G_{2n+2}^{(x)}$ einschliessen muss, deren Beschaffenheit leicht festzustellen ist. Nämlich $G_{2n+2}^{(x)}$ entspricht entweder selbst der Forderung des 3. Lehrsatzes, oder es steckt in ihr eine Untergruppe (I. 2.) welche dies thut. Mit anderen Worten, ihre $2n + 2$ Puncte gehören einer C^2 an, die auch in zwei Gerade L_1, L_2 zerfallen kann, wo dann auf jede $n+1$ Gruppenpuncte kommen müssen v. I. 3., oder aber $G^{(x)}_{2n+2}$ enthält $G^{(1)}_{n+2}$.

Im ersten Falle hätte man $x=1$, im anderen ebenfalls $x=1$, wenn nicht mehr als $n+2$ Puncte — diejenigen von $G^{(1)}_2$ — in einer Geraden L liegen. Wären aber $n+3$ Gruppenpuncte in L, so wird $x=2$, einerlei wie die übrigen $n-1$ Puncte liegen. Sonach ist nur $G^{(1)}_{2n+2}$ und $G^{(2)}_{2n+2}$ möglich.

Ad *a*) Nachdem die Beschaffenheit der $G^{(x)}_{2n+2}$ feststeht, kann man durch Disposition des $2n+3^{ten}$ Punctes q nicht über x hinaus wachsen lassen, wenn $x=2$, d. h. wenn schon $n+3$ der Q Puncte in einer L sind. Fasst man ferner eine der beiden Arten $G^{(1)}_{2n+2}$ auf, so könnte man durch Verlegung des $2n+3^{ten}$ Punctes höchstens $q=2$ erhalten, und zwar dann, wenn dieser auf C^2 gebracht wird, oder wenn er mit den $n-1$ ausserhalb L zu denkenden Puncte in gerader Linie liegt. Wir haben mithin auf C^{n+3} diese beiden Gruppirungen: erstens $n+3$ Puncte auf einer L, die übrigen willkürlich, zweitens sämmtliche $2n+3$ Puncte auf C^2. Das Maximum $q=2$.

Ad *b*) Wird diejenige $G^{(1)}_{2n+2}$ zu Grunde gelegt, welche ihre Puncte auf einer C^2 hat, so bleiben 2 Puncte von Q disponibel. Man erlangt $q=3$, wenn beide auf C^2 angenommen werden, ein kleineres q, sobald dies nicht geschieht.

Wird $G^{(1)}_{2n+2}$ mit $n+2$ Puncten auf L gedacht, so bleiben $n+2$ disponibel. Um $q=3$ hervorzubringen, stehen zwei Wege und diese allein offen, nämlich: man verlege noch einen Gruppenpunct auf L, die übrigen $n+1$ bringe man auf eine Gerade L_1, oder man bringe alle $n+2$ auf eine L_1, denn nur dann können $n+2$ Puncte für ihre C^{n-1} noch den Excess 2 besitzen.

Liegt endlich $G^{(2)}_{2n+2}$ vor, mit $n+3$ Puncten auf L, so müssen die disponiblen in gerader Linie liegen, damit q den Werth 3 erreichen könne.

Kurz, wie man es auch machen möge, die $G^{(3)}_{2n+4}$ muss zur Gänze einer C^2 angehören.

Man übersieht sofort, dass bei *c*), *d*) das gleiche Resultat gewonnen wird:

„Für die Gruppen von $2n+4$, $2n+5$, $2n+6$ Puncten der C^{n+3} beträgt der grösste Excess resp. 3, 4, 5 und damit er eintrete, müssen sich die Gruppen auf einer C^2 befinden.“

Nunmehr wenden wir uns zur Behandlung einer Aufgabe, von deren Lösung die Entscheidung vieler wichtigen die Raumcurven betreffenden Fragen abhängt:

2. Auf einer irreduciblen C^n_1 vom Geschlechte $p=\frac{(n-3)n}{2}+1$ sind die Specialschaaren grösster Mannigfaltigkeit zu bestimmen!

Einige erläuternde Worte dürften hier passend erscheinen: Eine Gruppe G_Q auf C_1^n heisst Specialgruppe, wenn durch sie eine C^{n-3} möglich ist. Ist G_Q die Basis von ∞^r Curven C^{n-3}, so schneiden diese aus C_1^n eine lineare Schaar von Gruppen G_R $(R = 2p - 2 - Q)$, welche die Reste der G_Q genannt werden. Mit $g_R^{(r)}$ wird diese Restschaar bezeichnet, der Exponent r gibt ihre Mannigfaltigkeit an, oder auch die Beweglichkeit irgend einer ihrer Gruppen $G_R^{(r)}$. Zu jeder $G_R^{(r)}$ gehört (in analoger Weise wie zu G_Q) eine Restschaar g_Q, in welcher G_Q als Gruppe erscheint, und man weiss durch den Restsatz, dass alle diese Schaaren doch nur eine einzige g_Q ausmachen. Diese völlig bestimmte g_Q ist durch irgend eine ihrer Gruppen gegeben, weil zu jeder dieser Gruppen immer nur $g_R^{(r)}$ als Restschaar gehört, deshalb soll sie die Schaar einer aus ihr genommenen Gruppe und $g_R^{(r)}$ ihre residuale Schaar heissen.

R Puncte von C_1^n, durch welche eine C^{n-3} nicht möglich ist, bestimmen gleichfalls eine lineare Schaar γ_R, in welcher sie eine Gruppe Γ_R bilden, nur sind die ausschneidenden Curven C^m von höherer als der n—3ter Ordnung, sonst von beliebig grossem m. Ein wesentlicher Unterschied zwischen G_R und Γ_R fällt sogleich in die Augen, nämlich wenn G_R überhaupt beweglich ist, so muss Γ_R immer eine kleinere Beweglichkeit haben. Der Grund dafür ist einfach der, dass von den Schnittpuncten einer C^m mit C_1^n weniger als p durch die übrigen bestimmt sind, sobald $m = n - 3$, hingegen p, wenn $m > n - 3$.

Die vornehmste Eigenschaft einer Specialgruppe G_Q spricht sich in dem Fundamentaltheorem aus:

„Die Beweglichkeit der Gruppe G_Q in ihrer Schaar ist einerlei mit dem Excesse q von G_Q bezüglich ihrer C^{n-3}.“ (Riemann-Roch.)

Nehmen wir demzufolge das Zeichen $G_Q^{(q)}$ in dem von uns gebrauchtem Sinne (wo q Excess bedeutet), so werden wir dasselbe in einem neuen Sinne aufzufassen haben, nämlich, wo q die Beweglichkeit der Gruppe darstellt. Da wir oben die factische Mannigfaltigkeit der durch $G_Q^{(q)}$ legbaren C^{n-3} mit r bezeichnet haben, so folgt:

$$p - 1 - Q + q = r,$$

oder auch

$$\text{I. } 2(r - q) = R - Q.$$

Und in $g_R^{(r)}$ hat r nicht blos die ihm anfangs beigelegte Bedeutung der Beweglichkeit irgend einer $G_R^{(r)}$, sondern noch die des Excesses der Gruppe für ihre C^{n-3}.

Den Zusammenhang der Excesse r, q zweier residualen Gruppen offenbart die Gleichung I.

Wenn z. B. q der Maximalexcess wäre bei bestimmtem Q, so hätte man zugleich in r das Maximum für die Zahl $2p-2-Q$.

Setzen wir eine gegen die C^{n-3} normale Gruppe voraus, d. h. $q=o$, so ist dieselbe unbeweglich, und umgekehrt. Ferner: Gleichzeitig normal oder anormal sind zwei residuale Gruppen nur wenn $R=Q=p-1$ ist, anderenfalls ist stets die grössere Gruppe anormal.

Bevor wir die allgemeine Lösung der uns gestellten Aufgabe entwickeln, wollen wir die uns bereits bekannten Specialfälle einer näheren Betrachtung unterziehen, weil wir bei dieser den später einzuschlagenden Weg angedeutet finden, und die Bedeutung des Problems erkennen werden.

a) Weniger als $n-1$ Puncte Q liefern eine normale Gruppe für C^{n-3}, also muss eine solche fest auf C_1^n sein; $n-1=n-3+2$ Puncte sind dann und nur dann beweglich, wenn sie in gerader Linie liegen. Ihre Beweglichkeit beträgt 1.

Die Schaaren $g_{n-1}^{(1)}$ werden somit von den Strahlenbüscheln ausgeschnitten, deren Centra auf C_1^n sind.

n Puncte in gerader Linie zeigen die Beweglichkeit 2, andernfalls eine geringere $(n-3+3=n)$.

b) Ueberdies kennen wir (v. II. 4., III. 1.) die Gruppen vom Maximalexcess für $Q \gtreqless 2n$. Nämlich ist $Q=2n-\beta$ und $\beta<3$, so geht durch eine solche Gruppe eine C^2, ihr Excess ist $5-\beta$. Die Schaaren $g_{2n-\beta}^{(5-\beta)}$ werden daher von den durch β beliebige Puncte der C_1^n gehenden C^2 ausgeschnitten — hiebei ist $\beta=0$ nicht ausgenommen. Hat man $\beta>3$, so besteht eine Gruppe vom Maximalexcess (II. 4.) aus n Puncten einer Geraden, und $n-\beta$ beliebig zu wählenden Puncten; der zugehörige Excess ist von β unabhängig und zwar $=2$.

Im Falle $\beta=3$ sind zweierlei Gruppen möglich, die eine auf einer irreducibleu C_1^2 befindlich, die andere, bestehend aus n Puncten einer Geraden, nebst $n-3$ willkürlichen Puncten, für beide gilt derselbe Excess $q=2$.

c) Kennt man aber für ein gewisses Q die Gruppen $G_Q^{(q)}$ mit maximalem Excess, so liegen auch in deren Restschaaren $G_R^{(r)}$ alle diejenigen vor, denen bei der Gruppenzahl $2p-2-Q$ die grösste Beweglichkeit zukommt (III, 1).

Wenn sich nun (*b*) Q durch die Formel $2n-\beta$ $(\beta<n)$ ausdrückt, so folgt:

$$R=(n-3)\,n-2n+\beta=(n-4)\,n-(n-\beta),$$

wo wieder

$$n-\beta=\beta'<n.$$

Ferner ist durch $\beta \lesseqgtr 3$ bedingt, $\beta' \gtreqless n-4+1$.

Also hat man den $G^{(q)}_{2n-\beta}$ entsprechend zwei Categorien von Schaaren $g^{(r)}_{(n-4)n-\beta}$ mit grösstmöglichem r; denn hier kann kein Zweifel hinsichtlich der ausschneidenden Curven obwalten: Liegt erstens $G^{(q)}_{2n-\beta}$ auf einer irreducible C^2_1, d. h. ist $\beta \leqq 3$, oder $\beta' \geqq n-4+1$, so muss jede durch $G^{(q)}_{2n-\beta}$ gelegte C^{n-3} jene C^2_1 als Bestandtheil haben. Mithin gehören die $\beta = n - \beta'$ Puncte, welche C^2_1 ausser der $G^{(q)}_{2n-\beta}$ mit C^n_1 gemein hat, zu allen Resten R, mit anderen Worten sie sind fest in $g^{(r)}_R$. Sie sind auch ganz willkürlich auf C^n_1, da durch $\beta \leqq 3$ Puncte, die, falls $\beta = 3$, nicht in gerader Linie sind, stets eine C^2_1 geht (die ausgeschlossene Lage wurde unter *b*) berücksichtigt). Was endlich den beweglichen Theil der $g^{(r)}_R$ betrifft, so ist er das System der Schnittpuncte der C^n_1 mit den C^{n-5} der Ebene; folglich

$$r = \frac{(n-5)(n-2)}{2} = \frac{(n-4)(n-4+3)}{2} - (n-4+1).$$

Bestehe zweitens $G^{(q)}_{2n-\beta}$ aus n Puncten einer Geraden L, nebst $n-\beta = \beta'$ beliebig gewählten; demgemäss muss L ein constanter Theil der durch $G^{(q)}_{2n-\beta}$ gelegten C^{n-3} sein. Die ausschneidenden Curven sind also durch β' willkürliche Puncte gehende C^{n-4}.

Nur wenn $\beta' = n-4+1$ wird, und diese $n-3$ Puncte in gerader Linie angenommen werden, ist die ausgeschnittene Schaar eine der so eben aufgeführten, immerhin bleibt hier:

$$r = \frac{(n-4)(n-4+3)}{2} - \beta'.$$

d) Lässt sich Q in der Form $(n-3)n - \beta\,(\beta < n-3)$ darstellen, so sind ersichtlich die Curven, welche die Schaar $g^{(q)}_Q$ ausschneiden können, sofern q möglichst gross sein soll, die durch β beliebige Puncte möglichen C^{n-3}. Die Gruppenpuncte sind sämmtlich beweglich, falls $\beta < n-2$, und $q = \frac{(n-3)n}{2} - \beta$.

Ist $\beta = n-2$, so ändert sich die Formel für q nicht, weil $n-2$ Puncte noch normal für ihre C^{n-3} sind; jedoch braucht die Schaaar nicht mehr volle Beweglichkeit der Gruppenpuncte zu zeigen. Wären nämlich die $n-2$ Puncte in gerader Linie, so bestände die $g^{(q)}_Q$ aus 2 festen Puncten mit dem vollständig beweglichen Schnittpunctssystem von C^n_1, C^{n-4}.

Ist zuletzt $\beta = n-1$, so müssen die β in einer Geraden sein, damit q ein Maximum werde, weil nur dann der Excess der Restgruppe β seinen grössten Werth annimmt. Alsdann tritt in sämmtlichen Gruppen $G^{(q)}_Q$ ein und derselbe feste, natürlicherweise willkürliche Punct auf, während der andere Theil aus den $(n-4)n$ Schnittpuncten der C_1^n mit jeder C^{n-4} bestehend volle Beweglichkeit besitzt. q ist $\frac{(n-3)n}{2}-(n-3+1)$.

3. Die vorstehende Untersuchung lieferte die fraglichen Schaaren für die speciellen Werthe von Q:

$$(n-3)n-\beta,\quad (n-4)n-\beta,\quad 2n-\beta,\quad (\beta<n),\ \text{ebenso}\ Q=n,\quad n-1.$$

Wenn deshalb die Ordnung n der Grundcurve C_1^n unter 7 liegt — $n>3$ ist selbstverständlich — so sind alle denkbaren Schaaren grösster Beweglichkeit bereits bestimmt. Z. B. $n=6$: Man bringe Q in die Form $\alpha n-\beta(\beta<n)$. Da es sich um Specialgruppen handelt, ist $\alpha \gtreqless n-3$ d. h. $\gtreqless 3$; und die sich ergebenden Fälle sind erledigt in folgender Weise: Die möglichen Schaaren werden aus C_1^6 entweder durch Curven C^α ausgeschnitten, welche durch β beliebige Puncte der C_1^6 gehen, oder aber, sie bestehen aus $6-\beta$ festen Puncten nebst dem vollständigen Schnittpunctsystem von C_1^6 und den $C^{\alpha-1}$ der Ebene.

Jetzt werden wir durch Induction den Nachweis führen, dass es sich bei C_1^n gerade so verhält.

Wir werden demnach voraussetzen, auf C_1^ν $(\nu<n)$ hätten die Schaaren grösster Beweglichkeit die so eben definirte Beschaffenheit und zeigen, dass Gleiches für C^n gilt. Man muss hiebei diese aus der angenommenen Existenz jener Schaaren auf C_1^ν folgende Umstände beachten:

1. Betrachtet man zwei solche für die Zahlen Q und Q' erhaltene Schaaren, so sieht man sofort, dass wenn $Q<Q'$, die Beweglichkeit der erstgedachten Schaar die der zweiten nicht überschreiten kann — allerdings ist Gleichheit der entsprechenden Maximalwerthe in leicht erkennbaren Fällen vorhanden. —

2. Eine Schaar für $Q=\alpha\nu-\beta$ kann nur dann eine grössere Beweglichkeit als $\frac{\alpha(\alpha+3)}{2}-\beta$ besitzen, wenn $\beta>\alpha+1$.

Inductionsbeweis für C_1^n. Durch Division von Q durch n sei erhalten $Q=\alpha\,.\,n-\beta(\beta<n)$. Da $\alpha=2$, $\alpha=n-4$ bereits erledigt ist, so beschränken wir uns auf $\alpha {> 2 \atop < n-4}$, noch sei vorerst $\beta\leqq\alpha+1$.

Wir beweisen zunächst, dass wenn auf C_1^n eine Schaar $g^{(q)}_{\alpha n-\beta}$ mit dem Werthe $q\geqq\frac{\alpha(\alpha+3)}{2}-\beta$ existiren soll, keine Gruppe G_Q in dieser Schaar vorkommen darf, durch die eine irreducible C_1^{n-3} möglich wäre.

Aus der Riemann'schen Gleichung (I. dieser Abtheilung) folgt, dass durch G_Q wenigstens die Mannigfaltigkeit $\frac{(n-3-\alpha)(n-\alpha)}{2} = r$ von C^{n-3} möglich ist. Wäre unter ihnen C_1^{n-3} irreducibel, so hätte man auf ihr eine Schaar mit der Gruppenzahl

$$(n-3)(n-3) - n\alpha + \beta = (n-3-\alpha)(n-3) - (3\alpha - \beta);$$

welche Schaar aus C_1^{n-3} von den übrigen C^{n-3} geschnitten würde. Weil aber $\beta \leqq \alpha + 1$, so müsste $3\alpha - \beta \geqq 2\alpha - 1$, und da $\alpha > 2$; $3\alpha - \beta > 3$.

Wird für C_1^{n-3} der Satz über die Schaaren zugestanden, so kann die erhaltene $g_{(n-3-\alpha)(n-3)-(3\alpha-\beta)}$ keine grössere Mannigfaltigkeit besitzen, als die für $g_{(n-3-\alpha)(n-3)-3}$ stattfindende maximale, und diese könnte den Werth $\frac{(n-3-\alpha)(n-\alpha)}{2} - 3$ nur dann überschreiten, wenn 3 grösser als $n-3-\alpha+1$ wäre, d. i. $\alpha > n-5$, was durch die über α gemachte Unterstellung ausgeschlossen ist. Man sieht hieraus, dass durch G_Q höchstens $\infty^{\frac{(n-3-\alpha)(n-\alpha)}{2} - 3 + 1}$ C^{n-3} gehen können, wofern C_1^{n-3} existirt. Wie wir oben sahen, muss die Mannigfaltigkeit dieser C^{n-3} grösser sein (wenigstens den $= r$ gesetzten Werth annehmen). Folglich ist die irreducible C_1^{n-3} nicht möglich, und weil G_Q eine willkürliche Gruppe der $g_{\alpha n-\beta}^{(q)}$ darstellt, heisst dies nichts anderes, als dass die durch irgend eine Restgruppe G_R legbaren C^{n-3} auch sämmtlich reducibel sein müssen.

Nach II. haben diese C^{n-3} einen festen Kern, nebstdem einen variablen Bestandtheil C^i, der den beweglichen Theil der $g_{\alpha n-\beta}^{(q)}$ aus C_1^n schneidet, und der nicht immer zerfällt.

Sei erstens. $\beta < \alpha + 1$. Wegen $q \geqq \frac{\alpha(\alpha+3)}{2} - \beta$ kann jetzt i nicht kleiner als α sein. Gesetzt $i = \alpha + x$, so dass alle C^i durch $xn + \beta$ Puncte der G_R gingen, ferner sei C_1^i eine irreducible dieser C^i; so würden die übrigen aus C_1^i eine Schaar von

$$\alpha(\alpha + x) - x(n - \alpha - x) - \beta,$$

oder weniger Puncten ausschneiden, je nachdem alle $\alpha n - \beta$ zur $g_{\alpha n-\beta}^{(q)}$ gehörenden Puncte beweglich wären, oder nur ein Theil derselben. Aber schon $n - \alpha - x > 3$, (da $\alpha + x < n - 3$), auch ist $3 < \alpha + 1$ — weil $\alpha > 2$. Die Annahme $x > 0$ ist somit unmöglich, wenn die C^i noch die Mannigfaltigkeit $\frac{\alpha(\alpha+3)}{2} - \beta$ darbieten sollen.

Folglich ist nothwendig $i = \alpha$. Auf jede der ausschneidenden C^α fallen ausser den $\alpha n - \beta$ zur $g_{\alpha n-\beta}$ gehörigen Puncten noch $\alpha n - (\alpha n - \beta) = \beta$ Puncte des Restes, und weil

$\beta < \alpha + 1$ Puncte normal gegen die C^α liegen, so beträgt die Mannigfaltigkeit dieser $g_{\alpha n - \beta}$ genau $\frac{\alpha(\alpha+3)}{2} - \beta = q$.

Auch können die durch weniger als $\alpha + 1$ Puncte möglichen C^α nicht noch irgend einen weiteren Punct gemein haben, das heisst die Gruppen der $g^{(q)}_{\alpha n - \beta}$ haben volle Beweglichkeit.

Sei zweitens $\beta = \alpha + 1$. Es wäre hier ungerechtfertigt zu behaupten, i könne nicht kleiner als α sein, doch ist immerhin $i = \alpha + x (x > 0)$ unzulässig. Denn auf $C_1^{\alpha+x}$ erhielte man durch die übrigen $C^{\alpha+x}$ eine Schaar von

$$\alpha(\alpha + x) - [x(n - \alpha - x) + \alpha + 1]$$

oder von

$$(\alpha - 1)(\alpha + x) - [x(n - \alpha - x - 1) + 1]$$

Puncten, wo der Subtrahend wegen $n - 3 > \alpha + x$ jedenfalls grösser als 3 wäre. Und da $3 > \alpha - 1 + 1$ zufolge der Grösse von α unmöglich ist, hätte diese Schaar höchstens die Mannigfaltigkeit

$$\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{2} - 3.$$

Mithin gingen durch die $nx + \beta$ Puncte, welche allen $C^{\alpha+x}$ gemein sind, höchstens $\infty^{\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{2} - 2}$ dieser Curven, und $g_{\alpha n - \alpha - 1}$ hätte nicht die Beweglichkeit $\frac{\alpha(\alpha+3)}{2} - \alpha - 1$, noch weniger eine höhere, wie supponirt wurde. In unserem Falle könnte demnach $i = \alpha$ sein.

Dann aber dürfen die C^α ausser ihren $\alpha + 1$ Grundpuncten im Reste G_R keinen Punct gemein haben, weil diese $\alpha + 1$ Puncte als auf einer irreduciblen C_1^α liegend nicht in einer Geraden sind. Die ausgeschnittene Schaar hat nun thatsächlich volle Beweglichkeit, die nicht mehr als $\frac{\alpha(\alpha+3)}{2} - \alpha - 1$, sondern genau so viel beträgt.

Ausserdem ist hier $i = \alpha - 1$ möglich, ein kleineres i aber nicht. Die Zulässigkeit von $i = \alpha - 1$ bedingt offenbar, dass die $C^{\alpha-1}$ keine Puncte im Reste G_R haben, da sonst ihre Mannigfaltigkeit unter $\frac{\alpha(\alpha+3)}{2} - \alpha - 1$ sinken würde; d. h. die $g^{(q)}_{n\alpha - \beta}$ bestände aus $n(\alpha - 1)$ voll beweglichen Schnittpunkten der $C^{\alpha-1}$ mit C_1^n nebst $n - \beta$ festen willkürlichen Puncten.

Was endlich die Supposition $\beta > \alpha + 1$ betrifft, so findet diese nach dem Gesagten also ihre Erledigung: Man betrachte einen zu einer $G_{n\alpha - \beta}$ gehörigen Rest G_R, wo

$$R = n(n-3) - \alpha n + \beta$$

oder

$$R = (n-2-\alpha)n - (n-\beta).$$

Da aus $\beta > \alpha + 1$ folgt $n - \beta < n - 2 - \alpha + 1$, so können wir das vorstehende Resultat (erstens) anwenden: Damit G_R maximale Beweglichkeit zeige, muss G_R auf einer $C^{n-2-\alpha}$ liegen, die $n - \beta$ Puncte der Schaar $g^{(q)}_{\alpha n - \beta}$ aufnimmt. Sonach wird eine durch G_R gelegte C^{n-3} mit $C^{n-2-\alpha}$ mehr als $(n-3)(n-2-\alpha)$ Puncte gemein haben und $C^{n-2-\alpha}$ enthalten müssen. Folglich sind die eben erwähnten $n - \beta$ Puncte in $g^{(q)}_{\alpha n - \beta}$ unveränderlich, und der bewegliche Theil dieser Schaar wird von Curven der Ordnung

$$n - 3 - (n - 2 - \alpha), \text{ d. h. von } C^{\alpha - 1}$$

ausgeschnitten, die voll beweglichen Gruppen enthalten $\alpha n - \beta - (n - \beta) = (\alpha - 1)n$ Puncte, und haben die Beweglichkeit $q = \frac{\alpha(\alpha+3)}{2} - (\alpha + 1)$, welche in diesem Falle $> \frac{\alpha(\alpha+3)}{2} - \beta$ wird.

Will man die aufgefundenen Schaaren $g^{(q)}_{\alpha n - \beta}$ klar überblicken, so unterscheide man sie je nachdem die Gruppen voll, oder unvollständig beweglich sind.

Jenes sind sie, wenn $\beta < \alpha + 1$, dieses, wenn $\beta > \alpha + 1$, und es kann das eine wie das andere für $\beta = \alpha + 1$ stattfinden.

Das der ersten und letzten Categorie entsprechende q ist $\frac{\alpha(\alpha+3)}{2} - \beta$, und es steigt die Beweglichkeit mit der Gruppenzahl. In der zweiten Categorie ist $q = \frac{\alpha(\alpha+3)}{2} - (\alpha + 1)$, die Beweglichkeit ändert sich nicht mit der Gruppenzahl und ist stets $> \frac{\alpha(\alpha+3)}{2} - \beta$.

Man bemerkt auf diese Weise sofort den für die Beweisführung wichtigen Umstand, dass die Beweglichkeit einer Gruppe $G_{\alpha n - \beta}$ nie den Werth $\frac{\alpha(\alpha+3)}{2} - \beta$ überschreitet, als wenn $\beta > \alpha + 1$, in diesem Falle aber auch immer.

Betreffs der wichtigsten Anwendungen des schönen, wie ich glaube Herrn M. Nöther zu verdankenden Theorem's sei auf dessen vortreffliche „Preisschrift über algebraische Raumcurven" verwiesen; wir schliessen mit der

Aufgabe. Auf einer irreduciblen C_1^n ist die Maximalzahl x von Puncten zu finden, die als Basis G_x *a)* einer zweifachen, *b)* einer dreifachen Mannigfaltigkeit von C^n zu Grunde liegen.

a) Die von den C^n aus C_1^n geschnittene Schaar soll also die Beweglichkeit 1 haben und eine möglichst kleine Gruppenzahl aufweisen. Folglich ist sie $g_{n-1}^{(1)}$; demnach $x = n^2 - n + 1$. Der Excess der Gruppe G_x für ihre $\infty^2 C^n$ ist

$$q = 2 - \left\{\frac{n(n+3)}{2} - n^2 + n - 1\right\} = \frac{(n-4)(n-1)}{2} + 1.$$

b) Die ausgeschnittene Schaar muss $g_n^{(2)}$ sein, mithin $x = n^2 - n$, und da $g_n^{(2)}$ von den Geraden der Ebene bestimmt wird, wird G_{n^2-n} auch auf C^{n-1} liegen; ihr Excess

$$q = 3 - \left\{\frac{n(n+3)}{2} - n^2 + n\right\} = \frac{(n-2)(n-3)}{2}.$$

IV.

1. Primitiv anormale Gruppen $G_{Q_1}^{(q)}$.

Als wesentliche Eigenschaft für eine $G_Q^{(q)}$ fanden wir (I):

Unter ihren Q Puncten können höchstens $Q-q$ angegeben werden, derart, dass sie eine normale $G_{Q-q}^{(0)}$ liefern, und stets so viele. Sobald diese $G_{Q-q}^{(0)}$ mit ihren $Q-q$ Puncten a fixirt wird, hat man alle Q in zwei Abtheilungen, bestehend aus diesen a, nebst q Puncten b vor sich, und es muss jede durch die a legbare C^n auch die b aufnehmen. Weniger als $Q-q$ Puncte a kann es auch nicht geben, für welche diese Eigenschaft der C^n bestände, weil sonst die vorgelegte $G_Q^{(q)}$ einen q übersteigenden Excess hätte.

Ferner kann man durch Hinzufügen eines b zu $G_{Q-q}^{(0)}$ der Reihe nach die Untergruppen $G_{Q-q+1}^{(1)}$, $G_{Q-q+2}^{(2)}$, $G_{Q-1}^{(q-1)}$ aufstellen. Ausgeschlossen ist $G_{Q-x}^{(q+1)}$, denn deren Existenz würde für $G_Q^{(q)}$ mindestens den Excess $q+1$ bedingen.

Dagegen wäre die Untergruppe $G_{Q-x}^{(q)}$ immerhin denkbar, nämlich dann, und nur dann, wenn die durch $G_{Q-x}^{(q)}$ möglichen C^n keinen der x fehlenden Puncte gemein haben. Im ersten Falle erhält man durch Zufügen der x offenbar $G_Q^{(q)}$, käme aber unter den x ein allen C^n gemeinsamer Punct c vor, so ergäbe dieser mit $G_{Q-x}^{(q)}$ zusammengenommen $G_{Q-x+1}^{(q+1)}$, die unmöglich ist.

Man sieht, dass die Möglichkeit der Untergruppe $G_{Q-x}^{(q)}$ erheischt, dass in $G_Q^{(q)}$ $Q-x-q+1$ Puncte angebbar sein müssen, welche gegen ihre C^n anormal liegen. Wenn daher je $Q-q$ Puncte der $G_Q^{(q)}$ normal sind, so kann die Untergruppe nicht existiren (und umgekehrt). Trifft dies zu, so heisst $G_Q^{(q)}$ primitiv.

Betrachten wir speciell $G_Q^{(1)}$: Entweder sie hat selbst primitiven Charakter, oder sie umfasst eine primitive Untergruppe $G_{Q_1}^{(1)}$: Gesetzt $G_Q^{(1)}$ enthalte die $G_{Q-x}^{(1)}$.

Wäre die gefundene $G_{Q-x}^{(1)}$ nicht primitiv, so müsste sie die Untergruppe $G^{(1)}$ von weniger als $Q-x$ Puncten umfassen, und man begreift sofort, dass man auf diese Weise nothwendig zu einer primitiven $G_{Q_1}^{(1)}$ $(Q_1 < Q)$ gelangen muss, weil anormale Gruppen von beliebig kleiner Punctzahl unmöglich sind.

Da jede $G_Q^{(q)}$ eine anormale $G^{(1)}$ enthält, und diese stets eine primitive $G_{Q_1}^{(1)}$, so tritt die $G_{Q_1}^{(1)}$ auch in $G_Q^{(q)}$ auf.

2. Es sollen auf einer irreduciblen C_1^n die kleinsten Gruppen gefunden werden, welche bezüglich der Curven C^m $(m \geqq n)$ anormal liegen!

Zunächst bemerke man, dass die mn Schnittpuncte von C_1^n mit einer C^m eine anormale Gruppe für C^m sind, deren Excess unabhängig vom m ist:

Denn durch dieselben gehen $\infty^{\frac{(m-n+1)(m-n+2)}{2}}$ C^n; und man hat:

$$\frac{(m-n+1)(m-n+2)}{2} = \frac{m(m+3)}{2} - mn + \frac{(n-2)(n-1)}{2},$$

d. h. den Excess:

$$\frac{(n-2)(n-1)}{2}.$$

Die gesuchte Minimalgruppe kann offenbar keinen grösseren Excess als 1 haben, da $G_Q^{(q)}$ immer eine $G_{Q_1}^{(1)}$ $Q_1 < Q$ einschliesst, ferner muss sie primitiv sein, weil sie sonst eine primitive kleinere Gruppe enthielte. Der vollständige Schnitt von C_1^n, C^m ist gewiss nicht die kleinste Gruppe, da $\frac{(n-2)(n-1)}{2} > 1$. Wäre daher Q_1 das gesuchte Minimum, so müssten die durch $G_{Q_1}^{(1)}$ gehenden C^m aus C_1^n eine Specialschaar schneiden.

Durch eine Gruppe dieser Schaar geht somit eine Curve C^{n-3}, so dass diese Gruppe höchstens $n(n-3)$ Puncte enthalten kann, folglich kann Q_1 nicht kleiner als $(m+3-n)\,n$ werden.

Zugleich erhellt, dass $G_{Q_1}^{(1)}$ der Schnitt von C_1^n mit einer C^{m+3-n} ist. Wird dies angenommen, so muss G_{Q_1} anormal bezüglich C^m sein, da durch die weiteren Schnittpuncte der durch G_{Q_1} gelegten C^m eine C^{n-3} geht; und es muss G_Q zufolge unserer Erörterung eine primitive $G^{(1)}_{Q_1}$ sein. Hieraus kann man einen bekannten Satz schliessen. Wird statt C^m die Curve C^{m+n-3} gedacht, so folgt: Die mn Schnittpuncte der C^n_1 mit C^m bilden für C^{m+n-3} eine primitive $G^{(1)}_{mn}$. Für Curven von höherer als der $m+n-3^{ten}$ Ordnung sind diese mn Puncte normal, weil durch den ferneren Schnitt von mehr als $n(n-3)$ Puncten auf C^n_1 eine C^{n-3} nicht möglich ist.

„Die gesuchten Minimalgruppen sind somit das Schnittpunctsystem der Curven C^{m+3-n} auf C^n_1. Dieser Satz gilt für jede irreducible C^n, auch wenn $n<4$, also C^{n-3} nicht mehr existirt.

Denn wenn $n=3$, so folgt er für die $3m$ Schnittpuncte der C^3_1 mit C^m_1 sogleich daraus, dass C^3_1 das Geschlecht 1 hat. Auf C^2_1 sind $2m+1$ oder weniger Puncte normal für C^m; die Minimalgruppe hat $2m+2=(m+3-2).2$ Puncte, auf einer Geraden bilden $m+2=(m+3-1).1$ Puncte das Minimum.

Zerfällt aber C^n_1 in die irreducible Theile C^{ν_1}, C^{ν_2} ꝛc, so besteht folgender Satz:

3. Die kleinste primitive Gruppe für C^m, welche auf C^n_1 möglich ist, wenn an sie die Bedingung gestellt wird, dass sie auf keiner Curve von niedriger Ordnung als der n^{ten} liegen soll, kann nie weniger als $(m-n+3)n$ Puncte haben.

Beweis. $G^{(1)}_{Q_1}$ bezeichne diese Gruppe, C^ν einen der irreduciblen Theile von C^n_1; dann muss C^ν gewisse x Gruppenpuncte enthalten, weil andernfalls die G_{Q_1} auf die ergänzende $C^{n-\nu}_1$ fiele. Nun müsste jede durch $x-1$ dieser Puncte gehende $C^{m-(n-\nu)}$ den x^{ten} Punct aufnehmen, woraus hervorgeht, dass x wenigstens $=(m-n+\nu+3-\nu)\nu$ $=(m-n+3)\nu$ sein muss.

Mithin ergibt sich als ein Minimum für die auf allen C^ν vertheilten Gruppenpuncte:

$$Q_1 \geqq \Sigma(m-n+3)\nu=(m-n+3)\Sigma\nu=(m-n+3)n.$$

Ob durch diese $(m-n+3)n$ Puncte eine C^{m-n+3} geht, werden wir später entscheiden.

Es ist insbesondere für die Theorie der Raumcurven von Wichtigkeit an der Bedingung festzuhalten, dass durch die primitive Gruppe für C^m, um deren Minimalwerth Q_1 es sich handelt, eine C^i $(i<n)$ nicht möglich sei. Für eine solche $G^{(1)}_{Q_1}$ findet der Satz statt:

Lässt sich durch $Q_1-\frac{i(i+1)}{2}$ Puncte der Gruppe $G^{(1)}_{Q_1}$ eine C^{m+1-i} $(i<h)$ legen, so muss diese Curve die ganze Gruppe aufnehmen.

Beweis. Vor allem ist einzusehen, dass in $G^{(1)}_{Q_1}$ immer $\frac{i(i+3)}{2}$ Puncte vorkommen, welche für C^i normal sind, wofern $i < n$, durch welche demnach eine C^i bestimmt ist: Man wähle unter den Q_1 irgend welche Gruppe (G), die normal für C^i ist, und weil die durch (G) legbaren C^i nicht alle Q_1 enthalten, so kann man eine neue Gruppe (G') bilden, welche einen Punct mehr hat, als $(G)_1$ dabei wieder normal für C^i sein wird. Indem man nun von (G') ausgeht, bilde man (G''), die 2 Puncte mehr als (G) hat, u. s. w. bis man zur Gruppenzahl $\frac{i(i+3)}{2}$ fortgeschritten ist. Alsdann wird durch diese normale Gruppe eine einzige C^i_1 gehen, und es werden in $G^{(1)}_{Q_1}$ stets noch Puncte ausserhalb C^i_1 vorkommen. Man habe in dieser Weise für C^{i-1}_1 die bestimmenden $\frac{1}{2}i(i+1)-1$ Puncte a_j in $G^{(1)}_{Q_1}$ ermittelt, b sei ein nicht auf C^{i-1}_1 liegender Punct; geht dann durch die nicht benannten fehlenden $\frac{i(i+1)}{2}$ Puncte eine C^{m+1-i}, welche sonach zusammen mit C^{i-1}_1 eine C^m ausmacht, so muss diese auch b aufnehmen. Aber man kann jedem der a_j die Rolle des b zuweisen, wenn b mit den fehlenden a zur Bestimmung einer C^{i-1}_2 genommen wird, die nicht durch a_j gehen kann, weil sie sonst mit C^{i-1}_1 identisch wäre, was nicht angeht, weil b nicht auf C^{i-1}_1 liegt. Also folgt, dass die gedachte C^{m+2-i} ebenso wie durch b auch durch sämmtliche a geht; w. z. b. w.

Folgerung. Wir haben bewiesen, dass die kleinste Punctzahl für $G^{(1)}_{Q_1}$ gleich $(m-n+3)n$ ist, wenn sie auf $C^i_{(i<n)}$ nicht vorkommen kann, aber auf einer C^n_1 wirklich liegt, einerlei ob C^n_1 irreducibel ist, oder nicht. Im irreduciblen Falle zeigte sich, dass $G^{(1)}_{Q_1}$ von einer Curve C^{m-n+3} aus C^n_1 geschnitten wird, daher entsteht die Frage, gilt noch das Gleiche, wenn C^n_1 zerfällt? Die Antwort ist bejahend, sofern man eine Grössenbeziehung zwischen m, n festsetzt, die sich bei der Irreducibilität der C^n_1 hier von selbst versteht, nämlich sofern:

$$m-n+3 \geqq n \text{ oder } m \geqq 2n-3. \quad \text{(I)}$$

Was jene Selbstverständlichkeit betrifft, so würde $m-n+3<n$ zur Folge haben, dass $G^{(1)}_{Q_1}$ auf einer Curve niederer Ordnung als der n^{ten} läge, was der fundamentalen Voraussetzung widerspricht.

Mit Hülfe unseres Satzes, unter Berücksichtigung von (I) folgt leicht, dass durch $G^{(1)}_{Q_1}$ eine C^{m-n+3} gelegt werden kann:

Durch eine kleine Rechnung erhält man die Differenz:

$$\frac{(m-n+3)(m-n+6)}{2}-\left\{(m-n+3)n-\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right\}$$

in der Form

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\{(2n-m)(2n-m-9)+20\}.$$

Indem man dem Satze gemäss $m+1-i=m-n+3$, d. h. $i=n-2$ nimmt, würde die Behauptung richtig sein, wenn die vorstehende Differenz $\geqq 0$ wäre. Das ist sie aber nach (I).

Wird z. B. $2n-m=3$ oder $m-n+3=n$ angenommen, so wird:

$$\varDelta = 1.$$

D. h. $G^{(1)}_{Q_1}$ ist der vollständige Schnitt zweier C^n.

Ist $m>2n-3$, $2n-m<-3$, so ergibt sich, dass noch eine C^{m-n+2} durch die $G^{(1)}_{Q_1}$ legbar ist.

Nämlich setzt man $m+1-i=m-n+2$; d. h. $i=n-1$; und bringt die Differenz

$$\frac{(m-n+2)(m-n+5)}{2} - \left\{(m-n+3)n - \frac{(n-1)n}{2}\right\}$$

in die Form:

$$\varDelta = \tfrac{1}{2}\{(2n-m)(2n-m-7)+10\},$$

so wird für $m=2n-2:\varDelta=0$, für $m>2n-2:\varDelta>0$.

D. h. bei der Annahme $m-n+3=n+1$ besteht $G^{(1)}_{Q_1}$ aus dem Schnitt der C^n mit einer C^{n+1}.

Wir ziehen aus dieser Rechnung den weiteren Schluss:

Wenn es von $G^{(1)}_{Q_1}$ nur feststeht, dass sie auf C^i $i<n$ nicht vorkommt, nicht aber, dass eine C^n_1 durch sie möglich ist, so würde doch Letzteres nothwendig sein, wenn $Q_1 \lesseqgtr (n+1)n$ werden sollte.

Demnach wären nur auf einer C^m_1 die möglichen Minimalgruppen von $(n+1)n$ oder weniger Puncten zu ermitteln, und dies ist oben geschehen: Die allgemeine Formel für Q_1 ist $(m-n+3)n$ und kann nicht unter n^2 sinken, Q_1 wird $=(n+1)n$ im Falle $m=2n-2$; $Q_1=n^2$, wenn $m=2n-3$. Mit anderen Worten:

Für C^{2n-2} ist die kleinste primitive Gruppe der Schnitt einer C^n mit einer C^{n+1}.

Für C^{2n-3} ist dieselbe der Schnitt zweier C^n, unter dem ausdrücklichen Vorbehalt, dass eine Curve von niedriger Ordnung als n^{ten} durch die Gruppen undenkbar ist.