versity, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary

Geometrische Betrachtungen

über den

Strahlen-Complex und die Congruenz.

Von

Prof. **KARL KÜPPER**.

(Abhandlungen der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. — VII. Folge, 4. Band.)

(Math.-naturw. Classe Nro 3.)

PRAG 1891.

Verlag der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. — Druck von Dr. Ed. Grégr.

In Commission bei Fr. Řivnáč.

versity, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary

versity, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary

Da hier nur von den linearen Gebilden die Rede sein wird, so haben wir das Adjektiv durchweg fortgelassen.

1. Wir schicken Bekanntes von der Involution voraus in der Absicht, den Sinn einiger gebrauchten Ausdrücke festzustellen:

Projizirt man die Puncte eines Kegelschnitts K^2 aus irgend zwei auf demselben gewählten Centren in eine Gerade G seiner Ebene, so erhält man auf G zwei projectirische Gebilde, denen eine bestimmte, von der Lage der Projectionscentra unabhängige Involution j adjungirt ist,*) nämlich die Involution der auf G befindlichen conjugirten Pole in Bezug auf K^2. Unter der einer Geraden G bezüglich K^2 adjungirten Involution sei diese j verstanden. Mit j in engem Zusammenhang steht eine krumme Involution j_1 auf K^2, deren Paare auf den Strahlen des Pols g von G bezüglich K^2 liegen. Von dieser j_1 heisst g der Pol, G die Polare. Jener Zusammenhang besteht darin, dass j, j_1 gegen jedes auf K^2 befindliche Centrum perspectivisch liegen; weshalb die eine Involution sofort aus der anderen abgeleitet werden kann. Geht man etwa von j_1 aus, die durch ihren Pol g gegeben sein möge, so hat man den Satz:

Wird die Strahleninvolution, welche j_1 aus irgend einem Puncte des K^2 projizirt, von einer Geraden geschnitten, so entsteht auf dieser entweder die ihr adjungirte j, oder nur ein einziges Paar derselben, je nachdem die schneidende Gerade die Polare der j_1 selbst, oder davon verschieden ist.

Bezeichnen wir die Geradenschaaren einer F^2 mit S, Σ, mit G eine Gerade, welche F^2 nicht berührt, so ist durch G eine involutorische Paarung S_{j_1} der Schaar S gegeben: Nämlich die der G adjungirte Involution j bezüglich F^2 — oder auch eines durch G gelegten ebenen Schnittes von F^2 — wird aus irgend einer der Leitschaar Σ entnommenen Axe durch eine Ebeneninvolution projizirt, welche diese S_{j_1} aus F^2 schneidet. Wir nennen G eine Polare der S_{j_1}, weil in jeder durch G möglichen Ebene durch S_{j_1} eine krumme Involution j_1 sich bestimmt, deren Polare G ist. Es wird sich zeigen, dass die sämmtlichen Polaren der S_{j_1} eine Congruenz ausmachen, zu welcher Σ gehört. Im Falle S_{j_1} reelle

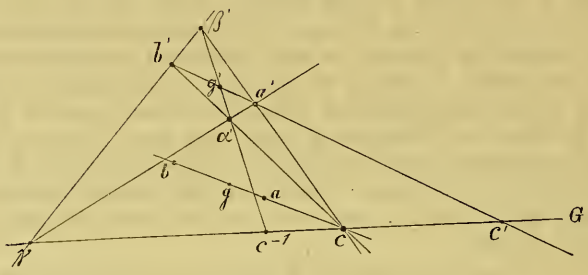
*) Von der zur conlocalen Projectivität $(c') \barwedge (c)$ gehörenden adjungirten Involution erlangt man ein Paar c, γ, wenn man im Gebilde (c) den Punct c^{-1} ermittelt, dem c im Gebilde (c') entspricht; dann erscheint γ von c durch c^{-1}, c' harmonisch getrennt.

versity, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary

Doppelgerade besitzt, leuchtet die Behauptung sogleich ein; der allgemeine Beweis verlangt eine genauere Untersuchung der Congruenz.

2. Die einem Congruenzstrahle adjungirten Involutionen.

a) Wir bezeichnen mit $\mathfrak{C}$, Γ die beiden Congruenzen, als deren Bestimmungsstücke gelten der Strahl G und je eine der Schaaren S, Σ auf F^2. Zwei beliebig durch G gelegte Ebenen E, E' werden durch die $\mathfrak{C}$ in collineare Beziehung $(\mathfrak{C})$ gesetzt. Denn die Strahlen von $\mathfrak{C}$, welche eine in E gedachte Gerade e treffen, bilden eine Regelschaar, durchdringen demnach E', welche G enthält, wieder auf einer Geraden e'. Um zu sehen, dass in dieser Collineation $(\mathfrak{C})$ die G sich selbst entspricht, fasse man die Involution S_{j_1} auf: Sie liefert in E, E' zwei krumme Involutionen j_1, j'_1, die beide G zur Polare haben; g, g' seien ihre Pole. Aus der Herleitung der S_{j_1} (1) geht hervor, dass einem beliebigen Paare $a\ b$ von j_1 ein Paar $a'\ b'$ von j'_1 collinear zugewiesen ist, daher sind auch g, g' homolog in $(\mathfrak{C})$. (Vermittelst Γ erhielte man eine neue collineare Abbildung der E auf E'; aber auch in dieser wären g, g' homologe Puncte, nur würde dem Paare $a\ b$ nicht mehr $a'\ b'$, sondern ein anderes $\alpha'\ \beta'$ von j'_1 entsprechen).



Wenn nun G von $a\ b$ in c, von $a'\ b'$ in c' geschnitten wird, wobei g von c durch a, b; g' von c' durch $a'\ b'$ harmonisch getrennt sein wird; so erkennt man c, c' als homologe Puncte in $(\mathfrak{C})$; d. h. in G erscheinen zwei projectirische Gebilde $(c') \barwedge (c)$ der Collineation $(\mathfrak{C})$. Wir werden jetzt beweisen, dass die ihnen adjungirte Involution identisch mit derjenigen j ist, welche der G in Bezug auf die Congruenzfläche F^2 zukommt.

Da $a\ b$ durch g geht, so schneiden sich die Tangentialebenen von F^2 für die Puncto a, b, in γ, der mit c ein Paar der j liefert. Treffen die durch a, b gehenden Geraden der Leitschar Σ die Ebene E' in α', β', so dass $a'\alpha'$, $b'\beta'$ sich in γ schneiden, so müssen $\alpha'\beta'$, $b'\alpha'$ durch c gehen.

Es treffe $\alpha'\beta'$ in c^{-1} die G, so dass c, γ, c', c^{-1} harmonisch sind, dann hätten wir nur darzuthun, dass c^{-1}, in E gedacht, znm Bilde c in E' hat. Das auf cg' fallende Paar der j'_1 sei $m'n' = \mu'\nu'$, es entspricht bei der einen Abbildung $(\mathfrak{C})$ dem Paare mn von j_1, bei der anderen (Γ) dem Paare $\mu\nu$. Ginge mn durch c^{-1}, so wäre unser Beweis erbracht: Durch die 4 Geraden der $F^2 : aa'$, bb', $\mu m'$, $\nu n'$ und durch den Punct c ist ein Hyperboloid bestimmt, von welchem cab eine Gerade, $cm'n'$ eine zweite ist; also liegt in E noch eine Gerade dieses Hyperboloids, die offenbar $\mu\ \nu$ sein wird; analog liegt in E' die $\alpha'b'$. Diese beiden Geraden

versity, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary

gehören zu verschiedenen Schaaren der Fläche, müssen sich somit schneiden, daher geht $\mu\,\nu$ durch c'. Dann aber muss (wie oben) der Schnittpunct von mn mit G von c' durch c, γ harmonisch getrennt werden, mithin c^{-1} sein, w. z. b. w.

Indem man in Betracht zieht, dass die Involution j allein durch die Collineation ($\mathfrak{C}$) bedingt ist, gelangt man zu der Folgerung:

Ist G ein Congruenzstrahl, F^2 eine durch irgend drei nicht mit G hyperboloidisch liegende Strahlen bestimmte Regelfläche, so hat diese auf G eine **unveränderliche** Involution j conjugirter Pole. Aus diesem Grunde soll diese j dem Strahl G adjungirt heissen.

Unsere Erörterung zeigt auch in welch verschiedener Art E auf E' durch $\mathfrak{C}$, oder Γ abgebildet wird: Im ersten Falle entspricht einer durch c^{-1} in E gezogenen Geraden (der mn) eine $(m'n')$ durch c in E'; im zweiten Falle dagegen hat eine in E liegende durch c gehende Gerade (die ab) als homologe in E' die duch c^{-1} gehende $\alpha'\beta'$.

b) Die einem Complexstrahle adjungirte Ebeneninvolution. Wie die Congruenz eine collineare Beziehung zwischen zwei durch einen Strahl gehende Ebenen herstellt, so werden in analoger Weise durch sie zwei Strahlenbündel (s), (s'), deren Centra s, s' durch einen Congruenzstrahl verbunden werden, collinear auf einander bezogen. Indem man die beiden Ebenen einander zuordnet, welche aus s, s' den nämlichen Strahl projiziren, wird jeder durch s gehenden Ebene eine durch s' gehende entsprechen, und wenn jene einen Büschel um die Axe $s\,x$ beschreibt, wird diese sich gleichzeitig um eine Axe $s'\,x'$ sich drehen. Denn die auf $s\,x$ stehenden Strahlen bilden eine Regelschaar, zu welcher ss' selbst gehört, und durch s' existirt eine einzige Transversale über diese Schaar, nämlich $s'\,x'$. Damit ist die Collineation erwiesen; in ihr ist jeder durch $s\,s'$ gehenden Ebene F wieder eine ss' enthaltende Ebene F' als homologe zugewiesen:

Als F kann man $x\,s\,s'$ ansehen, dann erhellt leicht, dass ihr die Ebene $x'\,s\,s'$ als F' entspricht. Durch die Congruenz wird ja (a) die Ebene F so auf $x'\,s\,s'$ abgebildet, dass die Geraden sx, $s'x'$ homolog sind, dass mithin auf der bei dieser Abbildung sich selbst homologen ss' zwei projectivische Gebilde auftreten, in denen die Puncte s, s' sich entsprechen (wie c, c' unter a).

Alsdann muss aber jeder durch s in F gezogenen Geraden eine durch s' gehende in $x'ss'$ fallende ebenso entsprechen, wie dies sx, $s'x'$ thun, daher ist $F' \equiv ss'x'$. Um die hier erkannte Projectivität $(F') \barwedge (F)$ zu erhalten, kann man folgendermassen verfahren: G sei ein willkührlicher Congruenzstrahl, die Ebenen Gs, Gs' fasse man als E, E' in a) auf und bestimme die unter a) mit $(c') \barwedge (c)$ bezeichnete Projectivität, dann wird diese aus der Axe ss' durch $(F) \barwedge (F')$ projizirt.

Wenn man an die Stelle von s, s' zwei beliebige andere Puncte des Strahls ss' treten lässt, so erhält man eine neue projectivische Beziehung zwischen den Puncten von G, oder den Ebeneu F, wir haben aber gesehen, dass allen den in G auftretenden Beziehungen eine invariable Involution j adjungirt ist. Die Ebeneninvolution J, welche sie aus dem Strahl ss' projizirt, wird allen den zwischen den Ebenen F auftretenden Projectivitäten adjungirt sein; deshalb heisse sie kurz dem Strahle ss' adjungirt:

versity, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary

Diese J wird von jedem beliebigen Strahl G in der ihm adjungirten Punctinvolution j geschnitten.

3. Nehmen wir jetzt die in 1. ausgesprochene Behauptung wieder auf, so wird man deren Richtigkeit bald einsehen.

Aus der Schaar Σ wählen wir eine Gerade, d, h. einen Strahl der Congruenz Γ, die ihm adjungirte Ebeneninvolution J schneidet S_{j_1} aus. S_{j_1} liefert in jeder Ebene des Raumes eine krumme Involution j_1; in derselben Ebene liegt ein Congruenzstrahl G, welcher von J in der j geschnitten wird, die der Geraden G bezüglich F^2 adjungirt ist, und hieraus folgt die Identität von G und der Polare der j_1.

Es ist klar, dass man hiebei Σ durch eine andere Strahlenschaar Σ_1 der Γ ersetzen kann, wodurch man eine involutorische Paarung ihrer Leitschaar S_1 erhält; die Polaren dieser Involution bleiben aber die früheren. Man kann auch die in Γ vorkommenden ∞^1 Complexe aus einem einzigen C_0 hervorgehen lassen, der unmittelbar durch die S_{j_1} gegeben ist, nämlich in welchem die Paare der S_{j_1} conjugirte Gerade sind. Durch den (nicht in Σ befindlichen) Congruenzstrahl G lege man eine Ebene E, die von S_{j_1} in j_1 durchstossen werde, dann ist der Pol g dieser j_1 Nullpunct der Ebene E in C_0. Wird jetzt irgend ein Complex C' der Congruenz Γ gedacht, so ist in ihm die Schaar S involutorisch gepaart, als Conjugirte in C'. Diese Involution hat mit S_{j_1} ein Paar gemein. Steht dieses in den Puncten 1, 2 auf E, so dass 12 Complexstrahl von C' ist, so wird der Schnittpunct g', von 12 und G Nullpunct der Ebene E in C' sein. Da $1, 2, g, g'$ harmonisch liegen, sagen wir, C, C_0 sind in Involution (v. 4.).

„Sämmtliche Complexe der Congruenz Γ gehen somit aus C_0 hervor, wenn man zu C_0 den involutorischen in jeder Congruenz nimmt, welche zu Directricen ein Paar von S_{j_1} hat."

Sieht man in den Congruenzstrahlen die Polaren einer involutorischen Regelschaar S_{j_1}, so springt in die Augen, dass die adjungirten Involutionen gleichartig sind, d. h. dass sie entweder alle mit reellen Doppelelementen versehen sind, oder aber keine, je nachdem in S_{j_1} reelle Doppelgerade auftreten, oder nicht.

Wollte man die adjungirten Involutionen zur Bestimmung der Congruenz verwenden, so hätte man:

Erstens: Durch einen Strahl G, die zugehörige J — oder j — und durch 2 andere Strahlen G_1, G_2 ist die Congruenz Γ bestimmt. Denn vermittelst J — oder j — wird die Schaar S, deren Leitlinien G, G_1, G_2 sind, involutorisch gepaart; und die Polaren oieser Involution constituiren die fragliche Congruenz.

Zweitens: Sind auf zwei windschiefen Geraden G_1 G_2 die gleichartigen Involutionen j_1, j_2 angenommen, so gibt es zwei Congruenzen, in welchem G_1, G_2 Strahlen, j_1, j_2 die ihnen adjungirten Involutionen sind.

Beweis. G sei ein Strahl einer dem Satze entsprechenden Congruenz, alsdann müsste aus der Axe G sich die j_1 in die j_2 projiziren. Ich werde zeigen, dass in einer Ebene E zwei solche Axen vorkommen: E werde von G_1, G_2 in d_1, d_2 und von der Geraden δ_1 δ_2,

versity, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary

welche die mit d_1, d_2 in j_1, j_2 gepaarten Punkte δ_1, δ_2 verbindet in δ getroffen. Soll in E eine Axe wie G existiren, so müsste sie offenbar durch δ gehen.

Eine beliebige Transversale über G_1, G_2 schneide diese in a_1, a_2 die E in a, die Verbindungslinie der mit a_1, a_2 in j_1, j_2 gepaarten Puncte α_1, α_2 treffe E in α. Fällt hier α auf die Gerade δa, so hat man in dieser eine der gesuchten Axen. Vermöge der Beziehung, welche hier zwischen den Puncten a, α der E hergestellt erscheint, und die involutorisch ist, erkennt man dieselbe leicht als die bekannte Steiner'sche Verwandtschaft mit den Hauptpuncten d_1, d_2, δ. Denn $d_1 a$., $d_1 \alpha$ sind die Tracen zweier Ebenen, welche durch G_1 und die Transversalen $a_1 a_2$, $\alpha_1 \alpha_2$ gehen, das heisst eines Paars der Ebeneninvolution, die aus der Axe G_1 die j_2 projizirt. Ahaloges gilt für $d_2 a$, $d_2 \alpha$.

Also werden die Paare a, α der Ebene aus d_1 und d_2 durch 2 Strahleninvolutionen projizirt, und da dem Strahl d_1 d_2 je nachdem man ihn zu der einen oder anderen dieser Involutionen rechnet, entweder d_2 δ, oder d_1 δ zugeordnet ist, so folgt, dass δ der dritte Hauptpunct sein wird. Da ferner die beiden erstgenannten Involutionen gleichartig sind, so muss die dritte (welche aus δ die Paare a, α projizirt) zwei reelle Doppelstrahlen besitzen. G sei einer dieser Doppelstrahlen; dann wird durch G_1, G_2, G und die adjungirte j_1 von G_1 eine einzige Congruenz sich bestimmen, in welcher G_2 die adjungirte j_2 zukommt. Der nicht benutzte 2te Doppelstrahl in E liefert gleicher Weise die zweite noch mögliche Congruenz.

4. Zwei Complexe in Involution.

Denkt man eine Congruenz Γ durch irgend zwei ihrer Complexe C, C' gegeben, so kommt man in neuer Weise zu den einem Strahle G adjungirten Involutionen. Eine um G sich drehende Ebene habe in C, C' die Nullpuncte c, c', dann beschreiben diese auf G zwei projectivische Gebilde $(c') \overline{\wedge} (c)$, und wir werden nachweisen, dass die denselben adjungirte Involution mit derjenigen einerlei ist, die wir unter 2. als adjungirte von G mit j bezeichnet haben. Zu dem Ende nehmen wir auf G einen beliebigen Punct an, nennen E, E' seine Nullebenen für C, C' und stellen für diese Ebenen genau die in 2. durchgeführte Betrachtung an. Wir erhielten dort in G zwei projectivische Gebilde $(c') \overline{\wedge} (c)$, die mit den hier eben so genannten übereinstimmen. Um dies einzusehen, hat man nur in den vorliegenden E, E' collineare Gerade aufzusuchen und zu zeigen, dass sie auf G die Nullpuncte einer G enthaltenden Ebene bestimmen. Durch e ziehe man irgend eine Gerade λ und nenne l, l' ihre Conjugirten für C und C'.

Alsdann fällt l in E, l' in E'. Da aber die Regelschaar, welche $l\, l'\, \lambda$ zu Leitlinien hat, aus Congruenzstrahlen besteht, so entsprechen sich l, l' in der collinearen Beziehung zwischen E, E'. Mithin sind die Schnittpuncte der l, l' mit G die unter 2. mit c, c' bezeichneten Puncte. Aber zugleich sind sie die Nullpuncte der Ebene $G\lambda$ für die Complexe C, C'. Wenn λ um den Punct e bewegt wird, so dass die Ebene $G\lambda$ variirt, so beschreiben also ihre Nullpuncte c, c' die projectivischen Gebilde, denen die j adjungirt ist, w. z. b. w.

Um die adjungirte Ebeneninvolution J zu erhalten, ist analog zu verfahren. Zu einem auf G variablen Puncte e gehören in C, C' die Nullebenen E E'; die der Projectivität $(E') \overline{\wedge} (E)$ adjungirte Involution ist dann J. Zum Beweise nehme man einen zweiten Strahl G_1 an, j_1 sei ihm adjungirt. Wenn das Ebenenpaar E, E' aus G_1 die Puncte c_1, c_1' schneidet,

versity, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary

so sind dies die Nullpuncte der Ebene $G_1 e$ für C, C', und j_1 ist nach dem eben Bewiesenen adjungirt der Beziehung $(c_1') \barwedge (c_1)$; folglich ist die Ebeneninvolution, welche aus der Axe G die j_1 projizirt, der Projectivität $(E') \barwedge (E)$ adjungirt; aber diese Ebeneninvolution ist J selbst.

Im Falle die projectivische Beziehung $(c') \barwedge (c)$ involutorisch ist, sagen wir die Complexe C, C' slnd in Involution. Es ist klar, dass diese Involution keine andere als j sein kann, und hiezu genügt bekanntlich, dass nur ein Paar c, c' mit einem Paare c, γ der j übereinstimmt.

Liegt die Congruenz Γ vor, so ist dadurch, dass man einer durch G gehenden Ebene E den Nullpunct c anweist, ein Complex C bestimmt. Indem man derselben E den Nullpunct γ gibt, hat man den involutorischen Complex C'. Nun muss aber durch G eine $\mathfrak{E}$ existiren, die in C den Nullpunct γ, in C' hingegen c hat. Sei G_1 ein zweiter Congruenzstrahl, der von E, $\mathfrak{E}$ bez. in c_1, γ_1 geschnitten werde; alsdann wird die Ebene $G_1 c \equiv F$ in C, C' die Nullpuncte c_1, γ_1 haben, während der $G_1 \gamma \equiv \mathfrak{F}$ γ_1, c_1 als Nullpuncte in denselben Complexen zukommen. Folglich wird c_1, γ_1 ein Paar der zu G_1 adjungirten j_1 sein, mit anderen Worten:

„Sind die Complexe C, C' unserer Definition gemäss in Involution, so gilt für jeden Strahl der Congruenz $(C C')$, dass die projectivische Beziehung, welche zwischen den Nullpuncten seiner Ebenen für C, C' besteht, die ihm adjungirte Involution selbst ist.“

Achtet man darauf, dass in C die Nullpuncte c, γ_1 zu E, $\mathfrak{F}$ gehören, so erkennt man die Geraden cc_1, $\gamma\gamma_1$ als Strahlen von C, und beachtet man die Nullpuncte von $\mathfrak{E}$, F in C', so sieht man, dass cc_1, $\gamma\gamma_1$ conjugirte Gerade für C' sind, d. h. „Die Strahlen des einen Complexes sind im anderen als conjugirte Gerade gepaart.“

Wenn überhaupt zwei Strahlen m, μ eines Complexes C für einen anderen C als conjugirte Gerade auftreten, so liegen C, C' in Involution Denn G sei ein C, C' gemeinsamer Strahl, der durch irgend einen Punct c von m, also auch durch einen Punct γ von μ gehen möge. Die Ebene $G m \equiv E$ hat jetzt in C, C' die Nullpuncte c, γ, während die Ebene $G \mu \equiv \mathfrak{E}$ dieselben Puncte zu Nullpuncten in C', C hat.

5. Das Verhalten eines Büschels (C) von Complexen gegen einen nicht zum Büschel gehörenden C_0.

Wir betrachten die ∞^1 Complexe C, für welche zwei gegebene Windschiefe D_1, D_2 conjugirte Gerade sind. Jeder C liefert mit C_0 eine Congruenz; die Directricen aller dieser Congruenzen bilden eine involutorische Regelschaar.

Beweis. Wenn D_1, D_2 im Complexe C_0 die Conjugirten $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ haben, so gehören diese vier Geraden einer Regelschaar S an, deren Leitschaar Σ aus Strahlen besteht, die sowohl in Complexe C_0 als auch in der Congruenz (C) enthalten sind; ausser diesen gibt es auch keine, welche der Congruenz und dem Complexe C_0 gemeinsam sind. Diese gemeinschaftlichen Strahlen müssen nun von den Directricen jeder der Congruenzen $(C_0 C)$ geschnitten werden. Sei daher D eine beliebige solche Schneidende, d. i. eine Gerade der S, $\mathfrak{D}$ die zu D in C_0 Conjugirte also auch zur S gehörig, e irgend ein Strahl der Congruenz (C) ausserhalb der Schaar Σ, so hat der Complex C_1, in welchem e vorkommt, und für den D, $\mathfrak{D}$ conjugirte Gerade sind, mit C_0 die Congruenz gemein, deren Directricen in D, $\mathfrak{D}$ vorliegen.

versity, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary

Specialfall: C_0 ist ein singulärer Complex — die Gerade G. — Die Conjugirten $\mathfrak{G}$ von G in den ∞^1 Complexen C bilden eine G enthaltende Regelschaar:

Die Strahlen der Congruenz (C), welche G treffen, erfüllen eine Regelschaar Σ, $\mathfrak{G}$ sei eine willkührliche Transversale derselben; alsdann könnte nur eine solche $\mathfrak{G}$ zu G in einem der Complexe C conjugirt sein; aber man kann einen der C dadurch bestimmen, dass man $\mathfrak{G}$, G als Conjugirte annimmt, und noch einen nicht in Σ befindlichen Congruenzstrahl wählt.

Es lässt sich der Beweis auch durch Projectivität führen: Durch 2 beliebige Puncte s, s' auf G mögen die Strahlen sx, $s'x'$ der Congruenz (C) gehen. In einem C haben s, s' je eine Nullebene E, E'; diese drehen sich, wenn C variirt, beziehlich um sx, $s'x'$, schneiden sich in einer $\mathfrak{G}$, welche eine Regelschaar beschreibt, weil $(E') \barwedge (E)$:

6. Bedeutet C irgend einen den ∞^2 Complexe, welche eine gegebene Regelschaar Σ gemein haben, C_0 einen von diesen C verschiedenen Complex, so sollen die Directricen D, $\mathfrak{D}$ aller möglichen Congruenzen $(C_0\, C)$ aufgefunden werden:

C_0 enthält zwei Strahlen Δ_1, Δ_2 der Schaar Σ. Denn ist T eine Transversale der Σ, $\mathfrak{T}$ ihr in C_0 conjugirt, so kann $\mathfrak{T}$ nicht auch Transversale der Σ sein, weil sonst C_0 mit einem C identisch wäre, mithin trifft $\mathfrak{T}$ zwei Gerade der Σ, und diese sind Δ_1, Δ_2. Wir setzen ihre Realität voraus, andernfalls wäre die Theorie des linearen Complexes durch Zulassung von imaginären conjugirten Geraden zu vervollständigen. Es ist ohne Weiteres klar, dass C_0 immer so gedacht werden kann, dass unsere Voraussetzung zutrifft. Nun müsste eine der fraglichen Directricen D sowohl Δ_1 als Δ_2 schneiden, $\mathfrak{D}$ müsste ihr in C_0 conjugirt sein. Wird dies angenommen, so wäre der die Congruenz $(C_0\, C)$ bestimmende C dadurch gegeben, dass man D, $\mathfrak{D}$ als Conjugirte nimmt, nebst einem von Δ_1, Δ_2 verschiedenen Strahl aus Σ. Demnach sind die gesuchten Directricen die Strahlen der Congruenz, deren Directricen Δ_1, Δ_2 sind.

Specialfall. Ist C_0 ein singulärer Complex G, so wird G ebenfalls von zwei Geraden Δ aus Σ getroffen. Wenn alsdann $\mathfrak{G}$ eine beliebige Transversale der Δ bedeutet, so existirt ein C, in welchem G, $\mathfrak{G}$ conjugirt sind; die Conjugirten G, $\mathfrak{G}$ nebst einem, von den Δ verschiedenen Strahl der Σ sind eben die Bestimmungsstücke dieses C.

Hier ist der Beweis, welchen die Projectivität an die Hand gibt, unabhängig von der Realität der Δ:

Auf G wählen wir die Puncte s, s' beliebig. Weisen wir s eine durch ihn gehende Ebene E als Nullebene an, so ist damit ein C festgelegt, in diesem habe s' die Nullebene E'. Auf diese Weise werden die Bündel (s), (s') collinear auf einander bezogen: Denn eine durch s gedachte Gerade sx bestimmt mit Σ eine Congruenz, der ein durch s' gehender Strahl $s'x'$ zukommt. Dreht sich jetzt E um sx, so muss E' stets $s'x'$ enthalten, und hieraus erhellt auch, dass, wenn E durch ss' gelegt wird, auch E' diese Gerade enthalten wird, d. h. dass in der vorliegenden Collineation G sich selbst entspricht. Wenn $\mathfrak{G}$ die Schnittlinie irgend zweier homologen Ebenen E, E' bezeichnet, so sieht man, dass G, $\mathfrak{G}$ in dem zugehörigen Complexe C conjugirt sind. Mittels dreier Paare E, E' habe man $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ $\mathfrak{G}_3$ abgeleitet, so ist durch G, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$ eine Congruenz bestimmt, durch welche (2) die Bündel (s), (s') collinear auf

versity, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary

einander bezogen sind. Die Identität dieser Collineation mit der eben aufgestellten wird aber sofort erkannt, wenn man die Bündel durch eine Ebene F schneidet. Nämlich in den beiden in F auftretenden collinearen Systemen entsprechen sich einmal die beiden Dreiseite, welche von den Ebenen E_1, E_2, E_3 und E_1', E_2' E_3' ausgeschnitten werden, sodann entspricht dem Durchstosspuncte von G, F dieser Punct selbst, mithin ist in F nur eine einzige Collineation vorhanden.

7. α, β seien zwei windschiefe Gerade, die in einem gegebenen Complexe C_0 nicht als Strahlen vorkommen; es sollen die Directricen der Congruenzen bestimmt werden, welche C_0 mit allen durch die Strahlen α, β möglichen Complexen C $(C_1, C_2 \ni c)$ liefert.

Wir wählen eine beliebige Ebene $\mathfrak{E}$, — e sei ihr Nullpunct in C_0 — und ermitteln die in $\mathfrak{E}$ befindlichen Disectricen $\mathfrak{D}$ in folgender Weise: Σ_1, Σ_2 seien zwei durch α, β gelegte Regelschaaren. Nach 6. gibt es einen bestimmlen Complex C_1, der Σ_1 enthält und mit C_0 eine Congruenz liefert, wovon eine Directrice $\mathfrak{D}_1$ in $\mathfrak{E}$ liegt, während dann die zweite D_1 durch e gehen wird. Durch die Schaar Σ_2 sei analog C_2, sowie $\mathfrak{D}_2$ in $\mathfrak{E}$ liegend, D_2 durch e gehend, gefunden. Schneiden sich $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ in $\mathfrak{e}$, so ist $\mathfrak{e}$ Nullpunct der Ebene $D_1 D_2 = E$ in den drei Complexen C_0, C_1, C_2 und $\mathfrak{E}$ wird in denselben den Nullpunct e haben.

Jetzt fasse man die Congruenz $(C_1 C_2)$ auf, ihre Directricen müssen je eine durch e, $\mathfrak{e}$ gehen und beziehlich in $\mathfrak{E}$, E liegen, sodann muss jede α und β treffen. Bezeichnet C einen ihrer ∞^1 Complexe, so muss die Congruenz $(C_0 C)$ zwei Directricen besitzen, wovon die eine (D) durch e geht, in E liegt, die andere $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{E}$ liegt, und $\mathfrak{e}$ enthält: Denn $\mathfrak{D}$ werde beliebig durch $\mathfrak{e}$ in $\mathfrak{E}$ gezogen, D_0 sei ihr in C_0 conjugirt, weshalb D_0 in E fallen und e aufnehmen muss. Denkt man C variabel in der Congruenz $(C_1 C_2)$, so dreht sich die Conjugirte D von $\mathfrak{D}$ bezüglich C um e in E, und es wird bei einem gewissen C Coincidenz von D_0, D eintreten.

Hiernach erhält man durch Benutzung der ebengenannten ∞^1 C als Directricen in $\mathfrak{E}$ die durch $\mathfrak{e}$ gehenden Geraden $\mathfrak{D}$, die zugehörigen D erfüllen in E den Strahlenbüschel (e). Dass es überhaupt ausser diesen C keinen anderen durch α, β gehenden Complex gibt, der mit C_0 zusammengenommen eine in $\mathfrak{E}$ fallende Directrice liefert, folgt also:

Eine zu α und β windschiefe Gerade γ, die weder in Σ, noch in Σ_2 liegt, führt zur Schaar $\alpha\beta\gamma$ oder Σ. Nun existirt (6) ein einziger Complex, der die Σ zu Strahlen hat, und mit C_0 eine Congruenz bildet, von welcher eine Directrix in $\mathfrak{E}$ liegt, aber in der Congruenz $(C_1 C_2)$ deren Directricen auf α und β stehen, kommt ein C vor, welcher den Strahl γ, somit die Schaar Σ enthält.

Um endlich sämmtliche im Raume auftretende Directricen zu übersehen, halte man die Schaaren Σ_1, Σ_2 fest, bezeichne mit $(\Sigma_1 \Sigma_2)$ die Congruenz, welche beide zu Strahlen hat. Vom Complexe C_0 enthalte Σ_1 die Strahlen Δ_1', Δ_2'; Σ_2 die Δ_1'', Δ_2''. Diese Geradenpaare liegen hyperboloidisch, weil die Congruenz $(\Sigma_1 \Sigma_2)$ mit C_0 eine Regelschaar gemein hat. Die zuerst in $\mathfrak{E}$ gefundenen Directricen $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ sind nichts anderes, als die Transversalen über Δ_1', Δ_2' und Δ_1'', Δ_2'', ebenso sind D_1, D_2 die von e aus über die nämlichen Paare möglichen Transversalen. Was aber für die Ebene $\mathfrak{E}$ — oder den Punct e — gilt, findet in gleicher Weise für jede Ebene und jeden Punct des Raumes Statt, und wir gelangen zu dem Resultat:

versity, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary

Bestimmt man mittels der conjugirten Geradenpaare Δ_1', Δ'_2 und Δ_1'', Δ_2'' einen Complex $\mathfrak{C}$, so stellen dessen Strahlen die gesuchten Directricen D, $\mathfrak{D}$ dar, und da sie in C_0 als Conjugirte erscheinen, liegt $\mathfrak{C}$ mit C_0 in Involution.

Specialfall. C_0 ist durch eine Gerade G vertreten.

Hier müsste vorangehen:

a) Ist G eine beliebige Gerade, und sind C_1, C_2 zwei Complexe derart, dass die Conjugirten $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ von G bezüglich derselben in einer Ebene $\mathfrak{E}$ liegen, wo sie sich in $\mathfrak{e}$ schneiden mögen, so fällt die Conjugirte $\mathfrak{G}$ von G für jeden C der Congruenz $(C_1\ C_2)$ in $\mathfrak{E}$, und geht durch $\mathfrak{e}$. Nach der Annahme ist $\mathfrak{e}$ Nullpunct der Ebene $G\mathfrak{e} = E$ sowohl in C_1 als auch in C_2, und es hat $\mathfrak{E}$ in diesen Complexen zum Nullpunct e. Für jeden C muss daher die Conjugirte der G durch den Nullpunct von E, d. h. durch $\mathfrak{e}$ gehen, und in der Nullebene von e, d. h. in $\mathfrak{E}$ liegen. Ferner müssen die Directricen D, $\mathfrak{D}$ der Congruenz $(C_1\ C_2)$ in je einer der Ebene E, $\mathfrak{E}$ sein und je einen der Puncte e, $\mathfrak{e}$ enthalten. Die nicht in $\mathfrak{E}$ befindliche Directrix, etwa D muss als Conjugirte von $\mathfrak{D}$ (in $\mathfrak{E}$) durch den Nullpunct e von $\mathfrak{E}$ gehen, (demnach $\mathfrak{D}$ durch $\mathfrak{e}$) und in E, Nullebene von $\mathfrak{e}$, fallen.

b) Nunmehr sei $\mathfrak{E}$ eine willkührliche Ebene, e der Schnittpunct von G, $\mathfrak{E}$. Durch α, β lege man die Regelflächen Σ_1, Σ_2 so, dass sie $\mathfrak{E}$ nicht berühren. Durch Σ_1 ist dann (6) ein Complex C_1 bestimmt, in welchem G eine in $\mathfrak{E}$ fallende Conjugirte $\mathfrak{G}_1$ hat. In derselben Weise habe man mit Benützung von Σ_2 den Complex C_2 und die in $\mathfrak{E}$ befindliche $\mathfrak{G}_2$ erhalten, $\mathfrak{e}$ sei der Punct $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$. Nach *a)* hat man jetzt eine Congruenz $(C_1\ C_2)$, deren Directricen (D, $\mathfrak{D}$) beziehlich durch e, $\mathfrak{e}$ gehen und in E, $\mathfrak{E}$ liegen. Wenn nun γ eine zu α, β windschiefe Gerade, mit diesen der Schaar Σ angehört, so existirt nach 6. durch Σ ein einziger Complex C, für welchen die Conjugirte von G in $\mathfrak{E}$ fällt. Aber in der Congruenz $(C_1\ C_2)$ kommt ein Complex vor, der den Strahl γ, also auch die Schaar Σ enthält, und für welchen G seine Conjugirte in $\mathfrak{E}$ hat, also muss dieser mit C identisch sein. Dass alle denkbaren $\mathfrak{G}$ einem Complex $\mathfrak{C}$ ausmachen, folgt wie oben. Man sieht, dass G selbst ein Strahl von $\mathfrak{C}$ wird.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der königl.- böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften

Jahr/Year: 1892

Band/Volume: 7_4

Autor(en)/Author(s): Küpper C.

Artikel/Article: geometrische Betrachtungen über den Strahlen-Complex und die Congruenz. 1-11