

FORTSETZUNG

DER

UNTERSUCHUNG ÜBER ALGEBRAISCHE UND RAUMCURVEN

(v. diese Abh. B. III, IV, F. VII).

Von

Prof. KARL KÜPPER.

(Abhandlungen der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. — VII. Folge, 4. Band.)

(Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe Nr. 7.)

PRAG.

Verlag der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. — Druck von Dr. Ed. Grégr.

1891.

1. Die anormalen Gruppen $G_q^{(q)}$ in Beziehung zu Curven m^{ter} Ordnung C^m (cf. B. III).

Wenn Q -Puncte, durch welche wenigstens eine Curve m^{ter} Ordnung C^m geht, den durch sie legbaren C^m nur $Q-q$ Bedingungen auferlegen, d. h. wenn die Mannigfaltigkeit dieser C^m den Exponenten

$\frac{m(m+3)}{2} - Q + q$ hat, so nennen wir dieselben eine anormale Gruppe bezüglich C^m , mit dem Excess q , und bezeichnen sie mit $G_q^{(q)}$.

Ist $q = 0$, so sagen wir, die Gruppe verhalte sich normal gegen die C^m .

Wenn $q > 0$, so kann der $G_q^{(q)}$ die Eigenschaft zukommen, dass jede durch $Q - 1$ beliebige Gruppenpunkte gehende C^m auch den Fehlenden aufnimmt. In diesem Falle heisst $G_q^{(q)}$ primitiv, mag hiebei $q \geq 1$ sein.

Allgemein gilt für jede anormale $G_q^{(q)}$:

Erstens. Es lassen sich in ihr stets $Q - q$, aber nicht mehr Puncte angeben, die normal gegen C^m liegen, und es muss dann jede C^m , welche diese $G_{Q-q}^{(0)}$ enthält, durch die übrigen q -Puncte gehen.

Hieraus wird deutlich, dass die $G_q^{(q)}$ für alle Curven C^{m-i} ($i > 0$) anormal ist, sowie dass normales Verhalten gewisser Puncte gegen C^m ein eben solches gegen Curven höherer Ordnung bedingt.

Zweitens. $G_q^{(q)}$ umfasst eine Untergruppe $G_{q_i}^{(1)}$ primitiver Art mit dem Excess 1. (Siehe Abh. III. B.)

Liegt eine primitive $G_q^{(1)}$ vor, so kann in ihr keine anormale Gruppe vorkommen, weil sonst offenbar für die ganze Gruppe der Excess > 1 wäre.

Manche Autoren schreiben ohne Weiteres einer $G_q^{(1)}$ die Primitivität als quasi selbstverständlich zu. Dass dies nicht angeht, mag an einem einfachen Beispiel erkannt werden:

In den 12 Schnittpunkten einer C^3 und C^4 hat man bekanntlich eine primitive $G_{12}^{(1)}$ bezüglich C^4 . Nimmt man zu diesen 12 irgend einen 13^{ten} der Ebene, so erlangt man eine G_{13} , welcher ersichtlich der Excess 1, nicht aber Primitivität zukommt.

Eine primitive $G_Q^{(1)}$ für C^m liegt normal gegen C^{m+1} , und somit ebenfalls gegen Curven höherer Ordnung.

Beweis. Wir entnehmen der Gruppe irgend welche $Q-1$ Punkte a , der übrige bleibende sei b : Dieser wird jetzt allen durch die a möglichen C^m gemeinsam sein. Dagegen muss durch $Q-2$ der a eine C_1^m möglich sein, welche weder den fehlenden a , noch auch b enthält, weil je $Q-1$ Gruppenpunkte normal für C^m sind. Da nun in dieser C_1^m nebst einer durch a gezogenen Geraden eine nicht durch b gehende C^{m+1} erhalten wird, da ferner die $Q-1$ Punkte a sowohl normal gegen C^m , als gegen C^{m+1} sind, so entsteht, wenn man ihnen b zugesellt, wieder eine normale Gruppe bezüglich C^{m+1} .

Besonders wäre hervorzuheben:

Weil jede anormale Gruppe eine primitive $G^{(1)}$ einschliesst, so müssen anormale Gruppen kleinster Punctzahl jederzeit primitiver Art sein, und den Excess 1 haben.

2. Steht fest, dass eine für C^m primitive $G_Q^{(1)}$ wohl noch auf einer Curve n^{ter} Ordnung ($n \leq m$), nicht aber auf einer C^i ($i < n$) liegen kann, so lässt sich eine untere Grenze ihres Excesses für die C^{m-i} herleiten:

Man entnehme der $G_Q^{(1)}$ β Punkte b , welche gegen C^i normal sind, was immer angeht, da man β beliebig klein denken kann; alsdann müssen alle diese b auf jede C^{m-i} fallen, die man durch die übrigen $Q-\beta$ Gruppenpunkte a legt: Denn wegen der normalen Lage der b geht durch $\beta-1$ beliebige b eine C^i , welche den fortgelassenen b , nicht enthält; folglich muss die genannte C^{m-i} durch b , gehen.

Nun kann man, ausgehend von den b innerhalb $G_Q^{(1)}$ zu $\frac{i(i+3)}{2} + 1$ Puncten gelangen, welche sich normal gegen C^i verhalten. Man lege nämlich durch die b eine C^i , und füge ihnen einen der Gruppenpunkte zu, den diese C^i nicht aufnimmt, so erhält man eine normale Gruppe von $\beta + 1$ Puncten b . Ist $\beta + 1 < \frac{i(i+3)}{2}$, so lässt sich in gleicher Weise eine Gruppe von $\beta + 2$ Puncten b aufstellen, u. s. w., bis man zu einer solchen von $\frac{i(i+3)}{2}$ b gelangt ist. Jetzt wäre durch diese b eine C^i bestimmt, welche (wegen $i < n$) nicht die ganze Gruppe $G_Q^{(1)}$ aufnehmen wird, etwa B nicht. Rechnet man daher diesen B mit zu den eben ermittelten b , so sind

$\frac{i(i+3)}{2} + 1 = \frac{(i+1)(i+2)}{2}$ b gefunden, derart, dass jeder ausserhalb der durch die übrigen bestimmten C^i sich befindet. Weil aber diese b auf jeder durch die

$Q - \frac{(i+1)(i+2)}{2}$ a denkbaren C^{m-i} liegen, so beträgt der Excess der $G_Q^{(1)}$ bezüglich C^{m-i} mindestens $\frac{(i+1)(i+2)}{2}$. Er wird diesen Werth überschreiten, oder nicht, je nachdem die a sich gegen C^{m-i} anormal, oder normal verhalten. Dies lässt sich unter Umständen entscheiden (v. No. 4).

Für den Beweis ist Primitivität der $G_Q^{(q)}$ unerlässlich; bildet man aber eine bloß anormale G_{Q_1} dadurch, dass man der $G_Q^{(q)}$ einige Punkte zufügt, so gilt der aufgestellte Satz für G_{Q_1} ebenfalls deshalb, weil dieser Gruppe für C^{m-1} kein niedriger Excess zukommen kann, als der ursprünglichen $G_Q^{(q)}$.

3. Die anormalen $G_Q^{(q)}$ auf einer irreduciblen $C^m (n \leq m)$.

Wir setzen C^m ohne vielfache Punkte voraus, um nicht jedesmal wiederholen zu müssen, dass ein etwaiger vielfacher Punkt der C^m zur Gruppe nicht zuzulassen ist.

Betrachten wir zunächst den vollständigen Schnitt der C^m mit einer C^n . Die Mannigfaltigkeit der durch diese mn Punkte gehenden C^m ist $\frac{(m-n+1)(m-n+2)}{2}$, und führt sofort zum Excess $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Von diesen mn Punkten sind immer wenigstens $n-2$ durch die übrigen festgelegt, weil eine Gruppe von weniger als $n-1$ Punkten auf C^m nicht beweglich sein kann. Hieraus ist die Primitivität der Gruppe klar.

Sollen nun irgend welche Q dieser mn Punkte sich anormal gegen C^m verhalten, so ist nothwendig und genügend, dass die anderen $mn-Q$ Punkte einer C^{m-3} angehören.

Hierdurch wird dem Q ein Minimalwerth Q_1 zugewiesen, welcher eintritt, wenn die $mn-Q_1$ Punkte den vollständigen Schnitt von C^m mit einer C^{m-3} ausmachen. Also:

„Die anormale Gruppe kleinster Punktzahl für C^m wird aus C^m durch eine C^{m-n+3} ausgeschnitten.“*)

Diese $G_{Q_1}^{(1)}$ ist nach Obigem primitiv, und hat den Excess 1.

Nunmehr sei $Q > Q_1 = n(m-n+3)$; es findet Folgendes statt:

„Der Excess q für G_Q beträgt um 1 mehr, als die Mannigfaltigkeit r der durch die übrigen $mn-Q = Q'$ Punkte möglichen C^{m-3} ; und wenn kein Gruppenpunkt allen diesen C^{m-3} gemeinsam ist, so wird G_Q primitiv sein.“

Beweis. Gehen durch $G_Q \propto^\mu$ Curven C^m , so ist: $q = \mu - \frac{m(m+3)}{2} + Q$.

Da die Schaar von $Q' = mn-Q$ Punkten, b , welche die $\propto^\mu C^m$ aus C^m schneiden, auch von C^{m-3} aus schneidbar ist, so kann man mit Hilfe des Riemann-Roch'schen Satzes ihre Beweglichkeit q' bestimmen. Nämlich:

$$2(q' - r) = 2(mn - Q) - n(n-3), \text{ folglich}$$

$$\mu = q' + \frac{(m-n+1)(m-n+2)}{2},$$

woraus durch eine kleine Rechnung sich $q = 1 + r$ ergibt.

Der zweite Theil der Behauptung folgt also: a_j sei ein Gruppenpunkt, C^{m-3} eine durch die $Q' = mn-Q$ Punkte b gehende, a_j nicht aufnehmende C^{m-3} . Die durch $Q-1$ Gruppen-

*) Der Satz gilt auch für $n < 4$, wobei C^{m-3} ausfällt (v. B. 3).

puncte, a_j ausgenommen, möglichen C^m liefern auf C^m eine Schaar, wovon eine Gruppe besteht aus a_j , nebst den Q' auf C^{n-3} fallenden Puncten b .

Zieht man durch a_j eine Gerade A , so macht diese mit C^{n-3} eine C^{n-2} aus, und man erkennt, dass die fragliche Schaar durch C^{n-2} ausschneidbar ist, welche durch die $n-1$ Puncte gehen, die A und C^m ausser a_j gemein haben. Mithin enthalten diese C^{n-2} alle die Gerade A als Bestandtheil, d. h. a_j ist in der Schaar unveränderlich, oder jede C^m , welche die G_Q mit Ausnahme des Punctes a_j enthält, muss auch diesen aufnehmen. Man ersieht hieraus die Primitivität, sowie die Bedingung, woran sie geknüpft ist.

4. Betrachten wir speciell die Minimalgruppe $G_{Q_i}^{(1)}$, welche der vollständige Schnitt von C^m mit einer C^{m-n+3} liefert, so kann man ihren Excess bezüglich C^{m-i} sofort angeben. Denn eine C^{m-i} hat ausser $G_{Q_i}^{(1)}$ noch $n(m-i) - n(m-n+3) = n(n-i-3)$ Puncte mit C^m gemein, die auf einer C^{m-i-3} liegen müssen, falls $i < n-3$. Daher wird diese C^{m-i-3} ein Bestandtheil jeder durch diese $n(n-i-3)$ Puncte möglichen C^{m-3} sein, woraus für diese letzteren die Mannigfaltigkeit $\frac{i(i+3)}{2}$ folgt, mithin wird $\frac{(i+1)(i+2)}{2}$ der fragliche Excess sein. Dies findet auch dann statt, wenn $i = n-3$ (No. 3).

In etwas modificirter Fassung führt das Vorstehende unmittelbar zum Cayley'schen Satze mit vollständiger Determination:

a) „Die mn Schnittpuncte von C^m mit einer $C^m (m \geq n)$ stellen eine primitive $G_{mn}^{(1)}$ für C^{m+n-3} dar, und liegen normal gegen die Curven höherer Ordnung; in Bezug auf $C^{m+n-3-i}$, $i < n-2$, kommt ihnen der Excess $\frac{(i+1)(i+2)}{2}$ zu.“

b) Durch Anwendung des Satzes in 2):

„Entnimmt man der $G_{mn}^{(1)}$ β Puncte b , welche normale Lage gegen C^i haben, so müssen diese b allen $C^{m+n-3-i}$ gemeinsam sein, welche durch die übrigen $mn - \beta$ Puncte a gehen. — Wird hier $\beta = \frac{i(i+3)}{2} + 1$ gesetzt, d. h. gehören diese b nicht einer C^i an, so müssen sich die $mn - \frac{(i+1)(i+2)}{2}$ a normal gegen $C^{m+n-3-i}$ verhalten, weil sonst der Excess der Gruppe bezüglich dieser Curven $> \frac{(i+1)(i+2)}{2}$ ausfallen würde. Wenn hingegen eine C^i durch die b geht, so folgt aus der Primitivität der $G_{mn}^{(1)}$, dass die Puncte a nicht normal zu $C^{m+n-3-i}$ liegen, also auch, dass nicht sämtliche durch die a möglichen $C^{m+n-3-i}$ auch die b enthalten können, weil andernfalls sich wieder ein zu grosser Excess herausstellen würde.“

Für die Anwendung bleibt es gleichgiltig, ob die mn Puncte von einfachen, oder auch von vielfachen Puncten der C^m herrühren.

Das Folgende steht in engem Zusammenhang mit der Abhandlung B. IV A, B, C, D.

5. Die Theorie der Raumcurven R^{m+4} vom Maximalgeschlecht, oder ihrer Projectionen C^{m+4} erheischt die Behandlung der Aufgabe: „Die Minimalgruppe $G_{Q_1}^{(1)}$ für C^m zu finden, wenn diese der einzigen Bedingung unterworfen wird, dass durch dieselbe eine $C^i (i < n)$ unmöglich sei.“

Einen Anhaltspunkt zur Lösung bietet der von mir (B. III) bewiesene Satz: „Geht durch die fragliche Gruppe eine C^n , so ist $Q_1 \cong n(m - n + 3)$, einerlei ob diese C^n irreducibel ist, oder nicht“.

Setzen wir nur voraus, die Gruppe solle höchstens $n(m - n + 3)$ Punkte haben, und zugleich

1. $m = 2n - 3$, so zeigt sich, dass sie auf $\infty^1 C^m$ liegt, sonach nicht aus weniger als n^2 Punkten bestehen kann. Also: Die Projectioncurve C^{2n+1} muss wenigstens n^2 Doppelpunkte D besitzen, die Grundpunkte eines Büschels C^n bildend.

Setzen wir 2. $m = 2n - 4$, so ergibt sich, dass nicht nur eine C^n , sondern noch C^{n-1} durch die Gruppe möglich ist; und dass sie deshalb mindestens $n(n - 1)$ Punkte haben muss.

Die etwa mögliche Projectioncurve C^{2n} müsste wenigstens $n(n - 1)$ Doppelpunkte D haben, und wenn sie so viele hat, so müssen sie den Schnitt einer C^n u. C^{n-1} darstellen.

Um nunmehr die Existenz irreducibler Projectioncurven darzuthun, verfähre man folgendermassen:

Erstens. C^{2n+1} . Wird eine irreducible C^{2n+1} mit $n^2 D$ angenommen, welche D die Basis eines Büschels (C^n) sind, so beweise man zuerst die Irreducibilität dieses Büschels: Ein Zerfallen sämtlicher $\infty^1 C^m$ wäre aber nur in der Weise denkbar, dass die C^m beständen aus einer festen Curve $C^{n-\nu}$, und einem irreduciblen Büschel C^ν , auf dessen Basis $\nu^2 D$ kämen, so dass $C^{n-\nu}$ $n^2 - \nu^2$ Punkte D enthielte. Hier ist nun

$$(n - \nu)(2\nu + 1) < 2(n^2 - \nu^2);$$

mithin wäre $C^{n-\nu}$ ein Bestandtheil der C^{2n+1} , welche doch irreducibel vorausgesetzt wurde. Wenn sonach eine irreducible C^n zu Grunde gelegt werden darf, um auf ihr die $n^2 D$ zu ermitteln, so ergibt sich ganz naturgemäss die projectivische Erzeugung aller denkbaren C^{2n+1} , wie wir sie in diesen Abhandlungen (IV. B.) aufgestellt haben.

Zweitens. Eben dort haben wir auch für C^{2n} die $n(n - 1)$ Doppelpunkte D , durch welche sowohl eine C^{n-1} als eine C^n existiren muss, auf einer als irreducibel supponirten C^{n-1} bestimmt. Nun ist diese Voraussetzung nicht nöthig; aber die ∞^3 durch die $G_{n(n-1)}^{(1)}$ möglichen C^n dürfen nicht alle reducibel sein, wenn die irreducible C^{2n} bestehen soll. Denn andernfalls würde wie vorhin eine feste Curve $C^{n-\nu}$, nebst $\infty^3 C^\nu$ auftreten, wobei letztere eine irreducible Mannigfaltigkeit bildeten, der eine gewisse Anzahl der D als Basis dient. Weil diese Basis höchstens $\nu^2 - \nu D$ absorbirt (cf. B. III), so entfielen auf $C^{n-\nu}$ wenigstens $n^2 - n - \nu^2 + \nu D$, und da

$$2(n^2 - n - \nu^2 + \nu) > (n - \nu) 2n,$$

so wäre $C^{n-\nu}$ ein Bestandtheil der C^{2n} .

Schneidet man nunmehr aus einer irreduciblen C^n durch irgend eine C^{n-1} die Gruppe der D aus, so folgt ohne Weiteres die projectivische Construction für jede überhaupt mögliche C^{2n} .

6. Die Projectioncurve C^{2n} mit $(n-1)n+1 D$.

Wir haben a. a. O. B.) die Gruppe der D als eine primitive $G_{(n-1)n+1}^{(1)}$ bezüglich C^{2n-4} aufgestellt; es entsteht die Frage, ob dies nothwendig ist? Mit Hilfe des Riemann-Roch'schen Satzes kann man bloß das anormale Verhalten der D gegen die C^{2n-4} folgern. Sollen aber alle D ausschliesslich von scheinbaren Doppelpunkten der Raumcurve R^{2n} stammen, so lässt sich beweisen, dass die Gruppe primitiv sein muss. Man sieht leicht, dass durch die D als anormale Gruppe wenigstens $\infty^2 C^n$ gehen, ein irreducibles Netz ausmachend: Denn beständen diese C^n aus einer festen C^{n-v} und einer irreduciblen Mannigfaltigkeit von Curven C^v , $v > 1$, so könnten diese letzteren höchstens $v^2 - v + 1$ der D enthalten, die übrigen, wenigstens $n^2 - n - v^2 + v$ kämen auf C^{n-v} ; und C^{n-v} hätte allein in den Doppelpunkten der C^{2n} mit ihr mehr als $(n-v)2n$ Punkte gemein, was bei einer irreduciblen C^{2n} nicht angeht. Aus demselben Grunde ist die Annahme $v=1$ nicht zulässig.

Handelt es sich hiernach darum, auf einer irreduciblen C_1^n $n(n-1)+1$ Grundpunkte D eines Netzes (C^n) anzugeben, so bieten sich zwei Möglichkeiten dar: Da, wie bekannt, jede Netzcurve ausser den D noch $n-1$ Punkte mit C_1^n gemein hat, die zugleich auf die Strahlen eines Büschels (α) fallen, dessen Centrum α auf C_1^n liegt, so kann α entweder mit einem der D , etwa D_1 , coincidiren, oder nicht. Im letzteren Falle hätte man die primitive $G_{n(n-1)+1}^{(1)}$, welche unserer früheren Betrachtung B) zu Grunde lag.

Gehen wir nun auf den Fall näher ein, wo α selbst ein Gruppenpunkt D_1 ist, so folgt sofort, dass durch die anderen D eine C^{n-1} existirt, d. h. dass in diesen D die Minimalgruppe $G_{n(n-1)}^{(1)}$ vorliegt, und es ist klar, dass als D_1 irgend ein Punkt der C_1^n dienen kann, den man der $G_{n(n-1)}^{(1)}$ zufügt. Es besteht dann Anormalität der D für C^{2n-4} , aber nicht mehr Primitivität. Sind diese D Doppelpunkte einer C^{2n} , so ist vor allem einzusehen, dass die R^{2n} , deren Projection C^{2n} ist, auf einer Fläche 2ter Ordnung F^2 sich befindet.

Zu diesem Ende bestimmen wir wieder die Mannigfaltigkeit der Vollschaar, in welcher die von den C^2 der Ebene aus C^{2n} geschnittene ∞^5 Schaar enthalten ist. Indem man C_1^n zusammen mit einer willkürlichen C^2 als eine der C^{2n} adjungirte C^{n+2} auffasst, findet man diese Mannigfaltigkeit als diejenige der adjungirten C^{n+2} , welche mit C^{2n} die nämlichen $2n-2$ einfachen Punkte gemein haben wie die C_1^n . Es kommt daher nur darauf an, die Beweglichkeit der $(n+2)n - n(n-1) - 1 - 2n + 2 = n+1$ Punkte zu ermitteln, die eine solche C^{n+2} ausser den festbleibenden noch mit C_1^n gemein hat. Schreibt man $n+1 = 2n - (n-1)$, so sieht man, dass die maximale Beweglichkeit von $n+1$ Punkten 2 nicht übersteigt, sofern $n-1 > 2$, od. $n > 3$. Die Annahme $n > 3$ ist aber dadurch schon geboten, dass das Geschlecht der C^{2n} grösser als $n-3$ sein soll. Hieraus geht alsdann hervor, dass jene Mannigfaltigkeit den Werth 9 nicht erreicht, und demzufolge muss eine F^2 durch R^{2n} gehen. Die Voraussetzung, dass alle D von scheinbaren Doppelpunkten der R^{2n} herrührten, hätte zur

Folge die Existenz einer $g_{n-1}^{(1)}$ auf C^{2n} von der Beschaffenheit, dass dieselbe durch adjungirte C^n ausschneidbar wäre (v. B.). Weil hier die Doppelpunkte mit Ausnahme des D_1 auf einer C^{n-1} sind, so würde die $g_{n-1}^{(1)}$ von den durch D_1 gezogenen Geraden ausgeschnitten, was nicht möglich ist, da wegen des Auftretens einfacher Doppelpunkte das Projectionscentrum nicht auf F^2 gedacht werden darf.

Ganz anders verhält es sich, wenn D_1 allein von einem eigentlichen Doppelpunkte der R^{2n} herrührt. Dann wären nämlich die Geraden der F^2 ohne Unterschied n -punktige Secanten von R^{2n} , wie dies die Gleichungen lehren:

$$\begin{aligned} x + y &= 2n \\ \frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2} + 1 &= n(n-1) + 1. \end{aligned}$$

Und auf C^{2n} erschienen 2 Schaaren $g_n^{(1)}$, deren Gruppen auf den Tangenten eines Kegelschnitts lägen. Trägt z. B. die Tangente T die Gruppen G' , $\mathfrak{G}'$, so ziehe man durch D_1 eine Gerade L , welche C^{2n} in $2n-2$ Punkten s schneide. Man hat jetzt in C^{n-1} nebst T und L eine adjungirte C^{n+1} durch die G' gehend; also würde die $g_n^{(1)}$, zu welcher G' gehört, durch die durch die Punkte s und $\mathfrak{G}'$ gehenden C^{n+1} erhalten. Offenbar bildet L einen Bestandtheil dieser ∞^1 Curven, und so folgt, dass $g_n^{(1)}$ durch diejenigen C^n ausgeschnitten wird, welche durch die $n(n-1)D$ und die Gruppe $\mathfrak{G}'$ sich legen lassen.

7. Der eingehenden Untersuchung der R^{2n+1} mit n^2+2 scheinbaren Doppelpunkten hat die Erledigung der Schlussbemerkung unseres vorigen Aufsatzes voranzugehen. „Besitzt eine C^{2n+1} n^2+1 Doppelpunkte D , die für C^{2n-3} eine primitive Gruppe bilden, so ist C^{2n+1} reducibel“.

Beweis. Wäre eine C^{n-1} durch die D möglich, so müsste diese, wie leicht zu sehen, einen Theil der C^{2n+1} ausmachen. Existirt solche C^{n-1} nicht, so gehen nach No. 2 durch die D wenigstens $\infty^4 C^{n+1}$. Es sind nun 2 Hypothesen zu machen:

Die erste: Diese C^{n+1} zerfallen sämmtlich in eine feste Curve $C^{n+1-\nu}$ und eine irreducible Mannigfaltigkeit von C^ν . Der Fall $\nu=1$ ist von selbst ausgeschlossen; bei $\nu=2$ hätte C^{n-2} in den n^2 auf sie kommenden D mehr Punkte mit C^{2n+1} gemein, als es bei Irreducibilität sein kann: Ist $\nu>2$, so könnten die C^ν höchstens $\nu^2-(2\nu-2)$ der D enthalten, wie sich zeigt, wenn man eine dieser C^ν festhält, und die Schaar betrachtet, welche die übrigen auf ihr liefern, der mindestens die Beweglichkeit 3 zukommen muss. Sonach entfielen auf $C^{n+1-\nu}$ wenigstens:

$$n^2 + 1 - \nu^2 + 2\nu - 2D.$$

Durch eine kleine Rechnung findet man

$$(n+1-\nu)(2n+1)-2(n^2-\nu^2+2\nu-1)<0,$$

wofern ν zwischen 2 und $n+1$ gewählt wird, was sich ja von selbst versteht.

Also wird wieder erkannt, dass die $C^{n+1-\nu}$ ein Bestandtheil von C^{2n+1} wäre.

Zweite Hypothese. Unter den C^{n+1} kommt eine irreducible vor, was die Irreducibilität der ganzen Mannigfaltigkeit zur Folge hat. Je zwei C^{n+1} haben alsdann ausser

den D noch $(n+1)^2 - n^2 - 1 = 2(n+1) - 2$ Punkte s gemein. Werden diese s auf einer der C^{n+1} , welche festgehalten wird, beweglich gedacht, so kann denselben höchstens die Beweglichkeit 3 zukommen, und damit diese eintrete, müssen die s auf einer C^2 liegen. Mithin erhellt, dass hier nicht mehr als $\infty^1 C^{n+1}$ möglich sind, und zugleich, wie man auf einer vorgelegten C^{n+1} die D bestimmen könnte. Um unnöthige Weitläufigkeit zu vermeiden, schlagen wir einen anderen Weg ein: Da (nach 2) durch die D immer noch eine C^n gelegt werden kann, so suchen wir die mögliche Gruppe auf einer irreduciblen C^n_i ; die Irreducibilität der $\infty^1 C^{n+1}$ folgt dann von selbst. Nun hat eine C^{n+1} nebst den D $n-1$ Punkte s mit C^n_i gemein, denen die Beweglichkeit 1 zukommen muss. Eine höhere ist unmöglich, und damit 1 statffnde, müssen die s auf einer Geraden liegen. Hieraus ergibt sich die Construction der Gruppe: Durch einen auf C^n_i gewählten fixen Punkt f ziehe man eine Gerade L , und lege durch die $n-1$ Punkte s_i in welchen sie C^n_i trifft, eine f nicht enthaltende C^{n+1} , so schneidet diese aus C^n_i die verlangte G_{n+1} aus. Nämlich der vollständige Schnitt von C^{n+1} , C^n_i ist primitiv bezüglich C^{2n+1-3} , also sind es die D bezüglich C^{2n+1-4} (indem man die L ausfallen lässt). Wir ziehen in f die Tangente L_1 der C^n_i , von den $n-1$ auf ihr zu denkenden Punkten s_i fällt einer mit f zusammen, aber diese s_i bilden mit den D die Grundpunkte einer dreifachen irreduciblen Mannigfaltigkeit von C^{n+1} , ebenso wie dies bei den auf L befindlichen s der Fall war. Wir beweisen jetzt, dass jede C^{2n+1} mit den Doppelpunkten D die von f verschiedenen $n-2$ Punkte s_i enthalten muss, und falls $n > 3$, zudem den f selbst: Hiebei benutzen wir den Schnittpunctsatz 4 b): Die D , zusammen mit f und den $n-2$ Punkten s_i fassen wir als Doppelpunkte einer aus zwei C^{n+1} bestehenden C^{2n+2} auf.

Wir bestimmen i gemäss:

$$n + 2n + 2 - 3 - i = 2n + 2, \text{ d. h. } i = n - 3.$$

Die $n-2 = n-3+1$ Punkte s_i haben nothwendig normale Lage gegen C^i , können deshalb für die Punkte b des Satzes genommen werden; mithin wird jede C^{2n+2} , welche die s_i nur einfach, die D nebst f dagegen doppelt enthält, noch einmal durch jeden s_i gehen. Existirt daher C^{2n+1} mit den Doppelpunkten D , so liefert dieselbe mit der Geraden L_1 eine solche C^{2n+2} ; folglich wird C^{2n+1} die $n-2$ Punkte s_i aufnehmen.

Wenn $n > 3$ angenommen wird, so zeigt sich, dass auch f auf der supponirten C^{2n+1} liegen muss, wo dann C^n Bestandtheil dieser Curve wird, weil sie mehr als $n(2n+1)$ Punkte mit ihr gemein hat:

Man beachte nämlich die Schaar von $2n+1$ Punkten, welche von den denkbaren C^{2n+1} auf einer durch D, f, s_i gehenden C^{n+1}_i ausgeschnitten wird. Als eine solche C^{2n+1} nehme man C^n_i in Verbindung mit einer nicht durch s_i gehenden C^{n+1} , so erhält man eine Gruppe der Schaar, bestehend aus dem Punkte f , und $2(n+1)-2$ auf einem gewissen C^2 liegenden Punkten. Daraus erhellt die Ausschneidbarkeit der Schaar mittelst Curven C^3 , welche etwa durch die n Punkte gehen, in welchen die oben benutzte Gerade L die C^{n+1} trifft. In der Schaar wird demnach f ein fester Punct sein, falls $n > 3$, und somit jene C^3 diese L zum Bestandtheil haben.

8. Die irreducible Projectioncurve C^{2n+1} mit $n^2 + 2D$, welche sämmtlich von scheinbaren Doppelpuncten der R^{2n+1} stammen.

Wir werden hier den Nachweis erbringen, dass die im vorigen Artikel (B. IV) gegebene Construction für $n > 4$ absolut vorgeschrieben ist. Zuerst wäre die Gruppe der D festzustellen. Es ist nicht zu übersehen, dass man mit Hilfe des Riemann-Roch'schen Satzes blos die Anormalität der D bezüglich C^{2n} , nicht die Primitivität findet; in der That wird letztere erst zur Nothwendigkeit, wenn kein D einem eigentlichen Doppelpunct der R^{2n+1} entspricht. Mag aber die G_{n^2+2} primitiv sein, oder die Minimalgruppe $G_{n^2}^{(1)}$, oder die primitive Untergruppe G_{n^2+1} umfassen, stets gehen durch dieselbe wenigstens $\infty^3 C^{n+1}$.

a) Diese C^{n+1} stellen eine irreducible 3fache Mannigfaltigkeit dar.

Denn, zerfielen sie in eine feste $C^{n+1-\nu}$ und in eine Mannigfaltigkeit irreducibler C^ν , so könnten die letzteren höchstens um $\nu^2 - \nu$ Punkte D beweglich sein, so dass $C^{n+1-\nu}$ wenigstens $n^2 + 2 - \nu^2 + \nu D$ enthielte. Schreibt man die Differenz:

$$2(n^2 + 2 - \nu^2 + \nu) - (n + 1 - \nu)(2n + 1) \text{ in die Form } (n - \nu)(2\nu - 3) + 3,$$

so bemerkt man sofort, dass sie für die zulässigen Werthe von ν ($1 < \nu < n + 1$) positiv wird; d. h. dass $C^{n+1-\nu}$ schon in den D mehr als $(n + 1 - \nu)(2n + 1)$ gemeinsame Punkte mit C^{2n+1} hätte.

b) Wenn hiernach die D auf einer irreduciblen C_i^{n+1} liegen, so folgt leicht, dass R^{2n+1} auf einer F^2 sein muss, indem man ebenso wie unter 6) schliesst: C^{2n+1} wird von C_i^{n+1} in $(n + 1)(2n + 1) - 2n^2 - 4 = 3n - 3$ einfachen Puncten s geschnitten, und es wäre die Mannigfaltigkeit der durch die s möglichen adjungirten C^{n+3} zu bestimmen. Nun liefern diese C^{n+3} auf C_i^{n+1} eine Schaar von

$$(n + 3)(n + 1) - n^2 - 2 - 3n + 3 = 2(n + 1) - (n - 2) \text{ Puncten,}$$

deren Beweglichkeit nicht über 2 steigt, sobald $n - 2 > 2$.

Ist daher $n > 4$, so beträgt die Mannigfaltigkeit jener C^{n+3} weniger als 9, und durch R^{2n+1} geht eine F^2 . Alsdann aber hat die Voraussetzung von $n^2 + 2$ scheinbaren Doppelpuncten zur nothwendigen Folge (B. IV) die Existenz einer $g_{n-1}^{(1)}$ auf C^{2n+1} , welche sowohl von den Tangenten T eines Kegelschnitts, als auch von adjungirten C^{n+1} ausschneidbar ist.

Und hieran knüpfen wir die weitere Folgerung:

Durch sämmtliche D ist eine C^n unmöglich, noch können durch $n^2 D \infty^1 C^n$ existiren.

Nämlich G' sei eine beliebige Gruppe der $g_{n-1}^{(1)}$, auf der Tangente T' befindlich, welche ausser G' noch $n + 2$ Punkte τ der C^{2n+1} enthält. Längen die D auf C^n , so müssten durch die τ noch $\infty^1 C^{n+1}$ möglich sein, durch welche die $g_{n-1}^{(1)}$ ausgeschnitten würde. Da diese C^{n+1} aber die Gerade T' zum Bestandtheil hätten, so gingen $\infty^1 C^n$ durch die $n^2 + 2D$, was wegen der Irreducibilität von C_i^{n+1} nicht sein kann.

Wären ferner $n^2 D$ Grundpuncte eines Büschels (C^n), und gehörten D_1, D_2 nicht zu diesen, so geht doch durch D_1 eine Curve des Büschels. Wir haben a. a. O. gezeigt, dass jede C^{n+1} , welche von einer Gruppe wie G' einen Punct aufnimmt, die Gruppe ganz enthält;

somit müsste G' auf eine Gerade fallen, welche einen ihrer Punkte mit D_2 verbindet, ebenso auf eine durch D_1 gehende Gerade, was unmöglich ist.

c) Das Gesagte begründet den Ausspruch:

„Wenn R^{2n+1} ($n > 4$) $n^2 + 2$ scheinbare Doppelpunkte hat, so gehören von ihren Projectionen niemals $n^2 + 1$ einer C^n an.“ Damit ist zugleich bewiesen, dass die Gruppe der Projectionen primitiver Art sein muss, da sie weder die primitive Minimalgruppe G_{n^2} , noch auch G_{n^2+1} umfassen kann.

Endlich erhellt hieraus die Nothwendigkeit bei der Construction der D und der C^{2n+1} so zu verfahren, wie es in D) der vorigen Abhandlung geschehen ist.

d) Die Annahme $n = 4$ verdient specielle Berücksichtigung. Befolgen wir auch hier unsere Methode, um die 18 D , sodann die C^9 zu erlangen, wobei also die D nicht auf C^4 sein werden, so erkennt man sofort, dass durch die entsprechende Raumcurve R^9 eine F^2 legbar ist. Nämlich die von den C^2 der Ebene auf C^9 bestimmte Vollschaar von 18 beweglichen Punkten kann wegen des Nichtvorhandenseins einer adjungirten C^4 nicht Specialschaar sein; und weil das Geschlecht der C^9 gleich 10 ist, so beträgt die Mannigfaltigkeit jener Schaar 8.

Im vorliegenden Falle gibt es aber eine Projectioncurve C^9 , deren 18 Doppelpunkte einer C^4 angehören, nur geht jetzt keine F^2 durch die R^9 , denn die eben betrachtete Vollschaar besitzt als Specialschaar eine höhere Mannigfaltigkeit als 8.

Bekanntlich ist diese C^9 der vollständige Schnitt zweier Flächen 3^{ter} Ordnung.

9. Um den Weg vorzuzeichnen, auf welchem man zu neuen Resultaten gelangen kann, wollen wir R^{2n} mit $n(n-1) + 4$ scheinbaren Doppelpunkten und ihre Projection C^{2n} behandeln. Hauptsächlich werden wir diese Ansprüche rechtfertigen:

a) Die $n(n-1) + 4$ D sind die Basis einer vierfachen irreduciblen Mannigfaltigkeit von C^{n+1} und eine primitive Gruppe für C^{2n-4} .

b) Wenn $n \geq 6$, so geht durch R^{2n} eine F^2 , deren Gerade $n-2$ - und $n+2$ -punktige Secanten der Raumcurve sind.

a) Weil die D anormal bezüglich C^{2n-4} liegen, und weil wegen Irreducibilität der C^{2n} eine Curve von niedriger als der n ten Ordnung durch dieselben unmöglich ist, so lässt sich der Satz 2) anwenden. Er ergibt sofort für $i = n-5$, dass wenigstens ∞^4 C^{n+1} durch die D legbar sind. Zunächst ist nun einzusehen, dass diese C^{n+1} nicht alle zerfallen können: Denn geschähe dies in eine feste Curve $C^{n+1-\nu}$ und in eine irreducible Mannigfaltigkeit von C^ν , wobei selbstverständlich $\nu = 1$ ausgeschlossen erscheint, so wäre nur $\nu \geq 2$ zuzulassen. Bei $\nu = 2$ fielen auf C^{n+1-2} $n(n-1) + 3$ der D , alsdann müsste aber diese C^{n-1} einen Theil der C^{2n} ausmachen. Ist $\nu > 2$, so wären als Grundpunkte der irreduciblen Mannigfaltigkeit (C^ν) höchstens $\nu^2 - (2\nu - 2)$ D in Anrechnung zu bringen, so dass auf $C^{n+1-\nu}$ wenigstens $n(n-1) + 2 - \nu^2 + 2\nu$ D kämen.

Aber die Differenz:

$$2n(n-1) + 4 - 2\nu^2 + 4\nu - 2n(n+1-\nu), \text{ d. h. } 2(n-\nu)(\nu-2) + 4$$

ist positiv, daher müsste $C^{n+1-\nu}$ wieder Bestandtheil der C^{2n} sein.

Mithin stellt sich uns die Aufgabe: Auf einer gegebenen irreduciblen C_i^{n+1} eine geeignete Gruppe der D aufzufinden! Ihre Lösung beruht einfach darauf, dass es erforderlich und genügend ist, wenn die Punkte, welche eine durch die D gelegte C^{2n-4} noch ausserdem mit C_i^{n+1} gemein hat, einer C^{n+1-3} angehören. Diese C^{n-2} würde sodann C_i^{n+1} in weitern 6 Punkten (den Restpunkten R) schneiden, welche man umgekehrt beliebig auf C_i^{n+1} annehmen kann, um von ihnen ausgehend, die D zu erhalten. Hiebei kann man offenbar so verfahren: Durch die R lege man irgend eine C^3 , die nebst einer C^{n-5} ($n > 5$) eine C^{n-2} darstellt. Nun würde eine durch die $(n-2)(n+1) - 6$ Schnittpunkte gehende C^{2n-4} die D ausschneiden: Da hier die C^{2n-4} den vollständigen Schnitt von C_i^{n+1} und C^{n-5} enthält, so muss durch D und die auf C^3 entfallenden $3(n+1) - 6$ Schnittpunkte noch eine $C^{2n-4-(n-5)}$, d. i. C^{n+1} möglich sein. Mit andern Worten: Die Schaar, welche von allen durch die D existirenden C^{n+1} aus C_i^{n+1} geschnitten wird, ist identisch mit derjenigen, welche die durch die 6 R legbaren C^3 liefern. Sie hätte somit die Beweglichkeit 3, wenn es feststände, dass mehr als 4 R nicht in gerader Linie angenommen werden dürfen. In der That lässt sich die Unvereinbarkeit einer solchen Annahme mit der Irreducibilität von C^{2n} darthun:

Erstens. Befänden sich alle R auf der Geraden L_1 , so füge man zu dieser eine C^2 , dann müssten die $2n+2$ Schnittpunkte von C_i^{n+1} und C^2 nebst den D noch einer C^{n+1} angehören, folglich gäbe es durch die D eine C^{n-1} , was ein Zerfallen der C^{2n} nach sich zöge.

Zweitens. Fünf R seien auf L_1 , einer (R_1) nicht. L_1 trifft C_i^{n+1} in $n-4$ Punkten f , und eine um R_1 sich drehender Strahl L schneidet C_i^{n+1} in einer Schar $g_n^{(1)}$. Indem man L_1 mit L und einer willkürlichen Geraden der Ebene als C^3 auffasst, bemerkt man, dass diese $g_n^{(1)}$ durch Curven C^n ausgeschnitten wird, welche die D und jene f enthalten und die zusammen n^2 ausmachen. Auch sieht man sofort, dass der hier auftretende Büschel (C^n) irreducibel ist, wenn man die Beschaffenheit der $g_n^{(1)}$ beachtet.

Gesetzt C_i^{2n} sei eine irreducible der ∞^1 Curven, C^{2n} habe die D zu Doppelpunkten, so behaupte ich, C^{2n} hat in jedem f zwei vereinigte Punkte mit C_i^{2n} gemein: Zunächst ist klar, dass irgend 2 von C_i^{2n} verschiedene Curven unseres Büschels (C^n) eine C_i^{2n} zusammensetzen, für welche das Gesagte stattfindet. Und man wird weiter schliessen, dass die etwa möglichen C^{2n} eine Schaar aus C^n schneiden würden, von welcher die doppelt gerechneten f eine Gruppe bilden. Es gibt aber auch keine zweite Gruppe, wie unmittelbar aus dem bekannten Restsatz hervorgeht. Nämlich, die Gerade L_1 , doppelt genommen, stellt eine Linie 2^{ten} Grads dar, welche die vorliegende Gruppe enthält, sie trifft C_i^{2n} in einem Rest von 2.4 Punkten, durch welche offenbar keine zweite C^2 denkbar ist. Hiermit ist die Behauptung erwiesen: Da nun an die Stelle von C_i^{2n} eine andere Büschelcurve treten kann, so folgt, dass die C^{2n} alle $n-4f$ zu Doppelpunkten haben, und mithin in je zwei C^n zerfallen müssen.

Die Existenz einer irreduciblen C^{2n} bedingt also die einer genau 4fachen irreduciblen Mannigfaltigkeit adjungirter C^{n+1} , und zugleich ist durch dieselbe die Construction der D vorgeschrieben.

„Auf C_i^{n+1} nehme man 6 Punkte R an, von denen keine fünf in gerader Linie liegen, führe durch die R eine C^3 und durch den ferneren Schnitt von C^3 , C_i^{n+1} eine C^{n+1} , so liefert diese die Gruppe der D .“

Weil der ganze Schnitt von C_1^{n+1} , C^{n+1} sich primitiv bezüglich C^{2n+2-3} verhält, so wird auch den D Primitivität für C^{2n-1-3} d. i. C^{2n-4} zukommen.

Durch Anwendung von 3) findet man endlich als Excess der construirten Gruppe 1 bezüglich C^{2n-4} , wenn man berücksichtigt, dass 6 Punkte einer C_1^{n+1} unbeweglich sind, sobald $n > 5$ und keine fünf derselben auf einer Geraden liegen.

b) Diesen Punkt erledigen wir durch den Nachweis, dass die Mannigfaltigkeit der auf R^{2n} von den F^2 des Raumes gelieferten Schaar weniger als 9 beträgt. Wie in vorangegangenen Fällen wird es darauf ankommen, die Mannigfaltigkeit der Vollschaar zu ermitteln, welche die von den C^2 der Ebene auf C^{2n} bestimmte ∞^5 Schaar einschliesst.

Erwägt man, dass in C_1^{n+1} nebst einer willkürlichen C^2 eine C^{2n} adjungirte C^{n+3} vorliegt, so erkennt man die fragliche Mannigfaltigkeit als diejenige μ jener C^{n+3} , welche C^{2n} in den nämlichen

$$Q_1 = (n+1)2n - 2n^2 + 2n - 8 = 4n - 8$$

einfachen Punkten schneiden, wie C_1^{n+1} .

Für $n = 6$ oder $n+3 = 2 \cdot 6 - 3$ folgt μ direct mittels des Riemann-Roch'schen Theorems. Denn den Q_1 Punkten kommt auf C^{2n} die Beweglichkeit 4 zu; also

$$2(\mu - 4) = 24 - 16; \mu = 8.$$

Ist $n > 6$, so hat man nur die Beweglichkeit der Schaar festzustellen, welche von den in Rede stehenden C^{n+3} auf C_1^{n+1} erzeugt wird. Eine Gruppe umfasst:

$$(n+3)(n+1) - n^2 + n - 4 - 4n + 8 = 2(n+1) - (n-5)$$

Punkte. Wenn daher $n-5 \geq 2$, oder $n \geq 7$, so wäre hier die Maximalbeweglichkeit $= 2$, folglich $\mu \leq 8$. Bei $n = 7$ könnte diese Schaar noch die Beweglichkeit 3 haben, jedoch nur dann, wenn durch jede Gruppe eine C^3 existirte. Diese Voraussetzung ist deshalb unzulässig, weil sie auf einen Widerspruch mit dem Riemann-Roch'schen Satze führt. Nämlich sie hätte zur Folge, dass die auf C_1^8 befindlichen Grundpunkte D und Q_1 der $\infty^4 C^{10}$ eine primitive Gruppe für

$$C^{8+10-3-2} \text{ d. i. für } C^{13}$$

darstellten; so dass der Excess dieser Gruppe bezüglich C^{11} wenigstens $\frac{(2+1)(2+2)}{2} = 6$ betrüge, während die Beweglichkeit der Q_1 auf C^{2n} erheischt, dass er $= 4$ sei.

Wenn jetzt kein Zweifel bestehen kann darüber, dass R^{2n} auf einer Fläche F^2 vorkommt, so ergeben die oft benutzten Gleichungen

$$\begin{aligned} x+y &= 2n \\ \frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2} &= n^2 - n + 4 \end{aligned}$$

wie sich die Geraden von F^2 zur R^{2n} verhalten.

10. Man findet durch eine der vorstehenden analoge Betrachtung für Projectionscurven C^{2n+1} mit $n^2 + 6D$: „Ihre Doppelpuncte sind die Basis einer fünffachen irreduciblen Mannigfaltigkeit von Curven C^{n+2} . Die entsprechende R^{2n+1} liegt auf F^2 , falls $n > 5$.

Anstatt hierauf näher einzugehen, wollen wir zum Schluss eine einfache Regel ableiten, um auf einer Fläche 2^{ten} Grads F^2 die Raumcurve zu erhalten, für welche die Geraden der F^2 ξ , und η -punctige Secanten sind. Wir stützen uns auf den bekannten Satz, dass die Raumcurve $R^{\xi+\eta}$ durch eine gewisse Anzahl windschiefer Geraden der F^2 zum vollständigen Schnitt dieser Fläche ergänzt wird. Bedarf man hiezu α der ξ -punctigen Secanten, so wäre ersichtlich $\alpha + \eta$ die Ordnung der ausschneidenden Fläche, also $2\alpha + 2\eta$ diejenige des ganzen Schnitts. Dieser besteht aber aus α Geraden und der $R^{\xi+\eta}$; mithin:

$$\alpha + 2\eta = \xi + \eta, \alpha = \xi - \eta,$$

und es wird ξ selbst die Ordnung der ausschneidenden Fläche angeben.

Wenn sonach $\xi > \eta$, so lege man durch $\xi - \eta$ der ξ -punctigen Secanten eine F^ξ , so wird diese die verlangte Raumcurve liefern.



ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Abhandlungen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der königl.- böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften](#)

Jahr/Year: 1892

Band/Volume: [7 4](#)

Autor(en)/Author(s): Küpper C.

Artikel/Article: [Fortsetzung der Untersuchung über algebraische und Raumkurven. \(v. diese Abh. B. III, IV, F. VII\). 1-15](#)