versity, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary

versity, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary

Anwendung der in diesen Abhandlungen (VII. Folge 3. Bd.) vorgetragenen Sätze

über

ALGEBRAISCHE CURVEN AUF DIE THEORIE DER RAUMCURVEN.

(Die citirten Nummern finden sich in jenem Aufsatze.)

Von

Prof. KARL KÜPPER.

(Abhandlungen der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. — VII. Folge, 4. Band.)

(Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe Nr. 5.)

PRAG 1891.

Verlag der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. — Druck von Dr. Ed. Grégr.

— In Commission bei Fr. Řivnáč. —

versity, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary

versity, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary

Wir betrachten nur solche Raumcurven m^{ter} Ordnung R^m, deren Geschlecht grösser als $m-3$ ist, auf welchen daher die ∞^3 Ebenen eine Specialschaar $G_m^{(3)}$ bestimmen.

Versteht man unter C^m die ebene Centralprojection von R^m, und ist h die Anzahl der scheinbaren Doppelpuncte der R^m — das Vorkommen eigentlicher vielfachen Puncte sei ausgeschlossen —, so bekommt C^m im Ganzen h Doppelpuncte D.

Mit Hülfe des Riemann-Roch'schen Satzes findet man, dass diese D den durch sie möglichen Curven C^{m-4} nur $h-1$ Bedingungen auferlegen, sowie dass es wirklich solche C^{m-4} gibt, die alle D enthalten, mit anderen Worten: Die D stellen für C^{m-4} eine anormale Gruppe $G_h^{(1)}$ mit dem Excess 1 dar. Und wenn dies stattfindet, so folgt auch die Existenz einer R^m, als deren Centralprojection C^m auftritt (vergl. M. Nöther's Preisschrift über Raumcurven § 3.).

Hier ist nun $G_h^{(1)}$ entweder primitiv bezüglich C^{m-4}, oder $G_h^{(1)}$ umfasst eine primitive Untergruppe von weniger als h Puncten (v. IV, 1.). Im letzteren Falle gäbe es somit eine R^m mit weniger als h scheinbaren Doppelpuncten. Wird deshalb bei gegebenem m der kleinstmögliche Werth von h gedacht, so muss $G_h^{(1)}$ primitiv sein, d. h. es müssen je $h-1$ der D sich normal gegen C^{m-4} verhalten. Wenn jedoch der primitive Charakter feststeht, so folgt keineswegs, dass h sein absolutes Minimum erreicht, wie dies unter B), D) deutlich wird.

A) $m=2n$. Die R^{2n} vom Maximalgeschlecht.

Soll die Projection C^{2n} möglichst wenig Doppelpuncte besitzen, so würde es sich darum handeln, die für C^{2n-4} primitive $G_h^{(1)}$ mit der kleinsten Punctzahl aufzufinden: C^ν sei die Curve niedrigster Ordnung ν, auf welcher die gesuchte Gruppe vorkommt; dann besteht für h die nothwendige Bedingung

$$h \geqq \nu(2n-1-\nu) \text{ — (v. IV 3).}$$

Insofern die D die Dopelpuncte einer C^{2n} sind, muss $h \leqq \nu \cdot \frac{2n}{2}$; folglich

$$2\nu - 2(n-1) \geqq 0, \text{ oder } \nu \geqq n-1.$$

versity, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary

Wenn ν seinen kleinsten Werth $n-1$ annimmt, so wird zwar $\nu\,.\,(2n-1-\nu)$ ein Maximum, ich behaupte aber, dass h nie unter die Grenze $(n-1)\,n$ herabsinken kann: Denn bei der Voraussetzung $h \leqq (n-1)\,n$, ist wegen der Primitivität der $G_h^{(1)}$ stets eine C^{n-1} durch die Gruppe möglich, wie dies eine einfache Anwendung des unter IV. 3. hervorgehobenen Satzes lehrt. Nämlich nimmt man i gemäss: $2n-4+1-i=n-1$, d. h. $i=n-2$, so brauchte eine C^{n-1} nur $h-\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ der $G_h^{(1)}$ aufzunehmen, damit auf sie die ganze Gruppe falle. Diese Differenz überschreitet aber den Werth $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ nicht, sobald h höchstens $=(n-1)\,n$ werden soll, und durch $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ oder weniger Puncte ist immer eine C^{n-1} möglich. Mag dann die C^{n-1}, welche die Curve niedrigster Ordnung durch die D sein wird, zerfallen oder irreducibel sein, es kommt die Ungleichung,

$$h \geqq (2n-1-\nu\,.\,\nu)$$

nach IV. 3. zur Geltung, welche für $\nu=n-1$ aussagt; dass h überhaupt nie unter den Werth $(n-1)\,n$ herabsinken kann. Ferner wäre diese untere Grenze nur durch eine auf einer C^{n-1} vorkommende $G_{(n-1)n}^{(1)}$ erreichbar. Mit Benützung von IV. 2. finden wir auf einer irreduciblen C^{n-1} alle solche Gruppen in dem vollständigen Schnitt der C^{n-1} mit einer willkührlichen C^n $(n=2n-4+3-n+1)$. Durch die $G_{n(n-1)}^{(1)}$ gehen noch ∞^3 Curven C^n, eine irreducible Mannigfaltigkeit deshalb, weil ein allen C^n gemeinschaftlicher Bestandtheil auch in C^{n-1} sein müsste, was durch die Irreducibilität der C^{n-1} ausgeschlossen ist.

Zudem ist $G_{n(n-1)}^{(1)}$ eine Basis grösster Punctzahl für ∞^3 C^n (v. III. Aufgabe), von welchen je zwei sich ausserhalb der Gruppe in n in gerader Linie liegenden Puncten schneiden.

Wie man mit Hülfe zweier Büschel der C^n eine C^{2n} construiren kann, welche die $G_{n(n-1)}^{(1)}$ zu Doppelpuncten D hat, bedarf hiernach keiner Auseinandersetzung, nur bleibt es fraglich, ob man auf diese Weise (projectivisch) jede $\mathfrak{C}^{2n}$ erzeugt mit den Doppelpuncten D. Aufschluss hierüber gibt Nachstehendes:

1. Die Raumcurve $\mathfrak{R}^{2n}$ als deren Centralprojection eine solche $\mathfrak{C}^{2n}$ erscheint, muss auf einer Fläche 2ten Grads $\mathfrak{F}^2$ liegen, und deren sämmtliche Geraden zu n-punctigen Secanten haben.

Diese Aussage würde unzweifelhaft sein, wenn sich herausstellte, dass der Vollschaar $g_{4n}^{(x)}$, welche die von allen Flächen $\mathfrak{F}^2$ aus $\mathfrak{R}^{2n}$ geschnittene Gruppen enthält, eine Mannigfaltigkeit $x<9$ zukommt. Zur Ermittelung des x dient uns die projicirte Vollschaar auf $\mathfrak{C}^{2n}$ deren Mannigfaltigkeit dieselbe Zahl x sein muss. Nun hat man eine Gruppe der letzteren in den $4n$ Puncten, welche irgend ein Kegelschnitt C^2 mit $\mathfrak{C}^{2n}$ gemein hat. Weil aber in C^2 und C^{n-1} einer der C^{n-2} adjungirte C^{n+1} vorliegt, so wird bekanntlich die in Rede stehende Vollschaar von den überhaupt existirenden ∞^x adjungirten C^{n+1} ausgeschnitten. Beachtet man jetzt die Schaar $g_{n-1}^{(y)}$, welche diese C^{n+1} auf C^{n-1} liefern, so besteht eine Gruppe derselben ersichtlich aus

versity, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary

den $n-1$ Schnittpuncten einer Geraden L mit C^{n-1}, da L nebst einer der $\infty^3 C^n$ eine C^{n+1} bildet; daher folgt $y=2$. Durch jede Gruppe der $g_{n-1}^{(2)}$ gehen aber noch ∞^6 Curven C^{n+1}; mithin $x=8$.

Wenn hiernach $\mathfrak{R}^{2n}$ auf $\mathfrak{F}^2$ liegt, deren Gerade $\mathfrak{x}$-, $\mathfrak{y}$-punctige Secanten der Curve seien, so bestehen die Gleichungen:

$$\mathfrak{x}+\mathfrak{y}=2n$$

$$\frac{\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)}{2}+\frac{\mathfrak{y}(\mathfrak{y}-1)}{2}=(n-1)n,$$

welche

$$\mathfrak{x}=\mathfrak{y}=n$$

zur Folge haben.

Für $\mathfrak{C}^{2n}$ leiten wir unmittelbar die Folgerung ab. Sie besitzt zwei verschiedene Schaaren $g_n^{(1)}$, $\mathfrak{g}_n^{(1)}$, deren Gruppen paarweise auf den Tangenten des Kegelschnitts $\mathfrak{C}^2$ vorkommen, welcher die Centralprojection der $\mathfrak{F}^2$ ist. Eine Tangente T möge von je einer Schaar die Gruppen G und $\mathfrak{G}$ tragen. Da T mit C^{n-1} eine der $\mathfrak{C}^{2n}$ adjungirte C^n ausmacht, so hat man in den n^2 Puncten D, G die Grundpuncte eines Büschels (C^n), durch welchen man $\mathfrak{g}_n^{(1)}$ ausschneiden kann, und analoges gilt für $g_n^{(1)}$. Ist p ein zu G gehöriger Punct, so gibt es auch e i n e $\mathfrak{G}_1$, in welcher p sich befindet, und es muss diese $\mathfrak{G}_1$ offenbar auf die Tangente von $\mathfrak{C}^2$ fallen, welche T in p schneidet, also haben G, $\mathfrak{G}_1$ ausser p keinen Punct gemein, woraus die Verschiedenheit der Schaaren erhellt.

Wie man sieht, liefert jede Gruppe der einen Schaar einen Büschel (C^n), welcher die andere ausschneidet. Damit wäre die projectivische Erzeugung der $\mathfrak{C}^{2n}$ anf die eben angegebene Art dargethan, und die aufgeworfene Frage entschieden.

B) Die Raumcurve R^{2n} mit $(n-1)n+1$ scheinbaren Doppelpuncten.

1. Construction einer ebenen C^{2n} mit $(n-1)n+1$ Doppelpuncten D, welche bezüglich C^{2n-4} eine primitive $G_{(n-1)n+1}^{(1)}$ darstellen.

Wird eine derartige Gruppe vorausgesetzt, so ist durch sie eine Curve C^ν $(\nu<n)$ unmöglich; denn

$$\nu\,.\,2n \geqq 2(n-1)n+2,$$

oder

$$\nu \geqq n-1.$$

Durch Gebrauch des Satzes in IV. 3, indem man

$$m=2n-4, \qquad 2n-3-i=n$$

nimmt, ergibt sich, dass durch die D noch ∞^2 C^n gehen werden.

In der Aufgabe unter III. a. O. haben wir auf einer irreduciblen C^n eine Gruppe nachgewiesen, bestehend aus der grösstmöglichen Anzahl von Puncten, welche die Basis eines Netzes von Curven C^n haben kann. Diese Anzahl war $(n-1)n+1=h$, und je zwei Netz-

versity, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary

curven schneiden sich ausserhalb der Basis in $n-1$ in gerader Linie liegenden Puncten. Da jede C^{2n-3} die von den $h+n-1$ gemeinsamen Puncten zweier C^n irgendwelche $h+n-2$ enthält, nach IV. 2. auch den Fehlenden aufnimmt, so muss auch jede C^{2n-4}, welche durch $h-1$ Basispuncte D geht, die ganze Basis enthalten. Es ist klar, dass die h Puncte sich anormal gegen C^{2n-4} verhalten, ihre Gruppe ist aber auch eine primitive: Man hat nämlich allgemein:

„Wenn $(n-1)n+\delta$ Puncte D einer C_1^n gegen C^{2n-4} anormal sind, so beträgt der Excess für dieselben stets dann 1, wenn $\delta < n-1$."

Beweis. Eine durch die Puncte D gelegte C^{2n-4} trifft C^z in weiteren $(n-3)n-\delta$ Puncten, welche wegen der supponirten Anormalität jener D auf einer C^{n-3} liegen werden. Demnach bestimmen die zu betrachtenden C^{2n-4} auf C_1^n eine Schaar, deren Beweglichkeit $\frac{(n-3)n}{2}-\delta$ ist, und es ergibt sich als faktische Mannigfaltigkeit der C^{2n-4}:

$$\frac{(n-3)n}{2}-\delta+\frac{(n-3)(n-2)}{2}=(n-3)(n-1)-\delta,$$

während die normale $=(n-2)(2n-1)-(n-1)n-\delta$ wäre.

Mithin folgt, dass der Excess 1 beträgt. Zudem besitzt unsere Gruppe von $h=(n-1)n+1$ Puncten D die Eigenschaft, dass jede durch $h-1$ D gehende C^{2n-4} den fehlenden D enthält; aus diesem Grunde können keine $h-1$ D sich anormal gegen C^{2n-4} verhalten, sonst wäre der Excess nothwendig >1. Dies aber beweist die Primitivität der $G_h^{(1)}$.

2. Die Gruppen Γ.

Wir nennen die $n-1$ Puncte einer Geraden T, in welchen sich zwei C^n (Curven unseres Netzes) schneiden, und welche die D zu den n^2 Grundpuncten eines Netzbüschels ergänzen, eine Gruppe Γ. Ist C_i^n irgend eine irreducible Netzcurve, so erscheint derselben ein bestimmter ihrer Puncte x_i zugewiesen. Nämlich die übrigen C^n bestimmen auf C_i^n eine Schaar $g_{n-1}^{(1)}$, deren Gruppen Γ auf die Strahlen eines Büschels fallen müssen, dessen Centrum eben jener Punct x_i ist.

Jeder Punct x der Ebene gehört zu einer einzigen Γ, z. B. x_i gehört derjenigen Γ an, welche die Tangente der C_i^n ausschneidet. Es ist klar, dass den ∞^2 C^n die Puncte x in umkehrbar eindeutiger Weise entsprechen; denn gehört x zur Gruppe Γ — auf T —, so wird ihm in dem Netzbüschel, der D, Γ zu Grundpuncten hat, die Curve entsprechen, welche T in x berührt. Die D machen eine Ausnahme, ein solcher Punct gehört zu ∞^1 Gruppen, welche sich auf der Netzcurve vorfinden, die ihn zum Dopelpunct hat, und zugleich auf einer durch ihn gehenden Geraden T. Um dies einzusehen, braucht man nur zwei Netzcurven betrachten, die in einem D eine gemeinschaftliche Tangente T besitzen.

So entspricht jedem D diejenige C^n, deren Doppelpunct er ist. Würde man einem Puncte x der Ebene die übrigen $n-2$ seiner Gruppe Γ als entsprechende zuweisen, so erlangte

versity, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary

man eine involutorische Transformation der Ebene, deren Grad ν sich leicht bestimmen lässt, Einer Geraden A entspreche eine C^ν, so muss diese jeden D-nfach enthalten, da die Γ, zu welchen D gehört, wie wir sahen auf einer Netzcurve liegen.

Wir nehmen eine zweite Gerade A_1, und zählen die gemeinschaftlichen ν^2 Puncte der beiden Curven C^ν C_1^ν wie folgt, auf:

Die Gruppe Γ, welche den Schnittpunct A, A_1 enthält, liefert $n-2$ derselben.

Die D ergeben deren $n^2(n^2-n+1)$.

Die ν Schnittpuncte von C^ν A_1 gehören zu ν Gruppen Γ, in welchen auch die ν Schnittpuncte von C_1^ν, A vorkommen, deren übrige $\nu(n-3)$ Puncte noch den C^ν, C_1^ν gemeinsam sind, überdiess können sie keinen Punct gemein haben; also:

$$\nu^2-(n-3)\nu-n+2=n^2(n^2-n+1),$$

eine Gleichung, deren positive Wurzel $=n^2-1$, dem Grade der Transformation.

Auf einer beliebigen Geraden T liegt eine einzige Gruppe Γ: Entspricht nämlich einem auf T angenommenen Puncte x_i die C_1^n, so schneidet diese T in einnr Gruppe, und es wird jede durch diese Γ gelegte Netzcurve mit T noch ein Punct x gemein haben, dem sie offenbar entspricht.

Durch zwei Gruppen Γ_1, Γ_2 ist eine C_i^n bestimmt, die auch den Schnittpunct x_i der Geraden T_1, T_2 enthält, auf welchen die Gruppen sind. Alle durch die D, Γ_1, Γ_2 möglichen C^{n+1} müssen x_i enthalten, und bilden eine irreducible Mannigfaltigkeit, wenn C_i^n irreducibel ist. Denn diese C^{n+1} umfassen die Curven, welche aus der Geraden T_1 und jeder C^n bestehen, die dem irrreduciblen Büschel entnommen wird, dessen Grundpuncte in den D nebst Γ_2 vorliegen; ebenso sind unter den C^{n+1} unendlich viele, welche in T_2 und eine irreducible C^n zerfallen. Hieraus erkennt man (II) die behauptete Irreducibilität, zugleich auch dass der Punct x_i auf den C^{n+1} liegen muss, weil eine solche ausser Γ_1, Γ_2 nur noch e i n e n Punct mit C_i^n gemein hat, der nicht beweglich sein kann, die von uns aufgefassten zerfallenden C^{n+1} aber offenbar x_i enthalten.

Die D, ferner drei beliebige Gruppen Γ_1, Γ_2, Γ_i, nebst den Schnittpuncten ihrer Geraden T_1, T_2, T_i sind die $(n+1)^2$ Grundpuncte eines Büschels (C^{n+1}). Denn die C_i^n, welche Γ_1, Γ_2 verbindet, macht mit T_i eine C^{n+1} aus, welche die genannten $(n+1)^2$ Puncte enthält, in gleicher Weise kann man zwei andere C^{n+1} aufstellen. Wenn wir nunmehr C_i^n, die wir irreducibel voraussetzen und Γ_1, Γ_2 festhalten, Γ_i aber variabel auffassen, so werden die C^n, welche jede Γ_i mit Γ_1 verbinden, einen Büschel $(C^n)_1$ liefern, und ebenso erhalten wir einen zweiten Büschel $(C^n)_2$, welchem die Grundpuncte Γ_2 zukommen.

3. Bezeichnen wir die eben definirten Büschel projectivisch aufeinander, so erzeugen sie eine C^{2n}, für welche jeder D ein Doppelpunct ist als geometrischer Ort der variablen Γ_i.

versity, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary

Wenn dabei eine der T_i die Geraden T_1, T_2 in x, x' trifft, so dass die Γ_i enthaltende C^n des ersten Büschels durch x, die des zweiten durch x' geht, so werden die Gebilde (x), (x') auf T_1, T_2 projectivisch sein, also wird T_j einen Kegelschnitt $\mathfrak{C}^2$ umhüllen, den auch T_1, T_2 berühren. Und bei dieser Erzeugung der C^{2n} bemerkt man, dass die auf ihr vorkommenden Γ_i eine Schaar $\gamma^{(1)}_{n-1}$ constituiren, welche von jedem Netzbüschel (C^{n-1}) ausgeschnitten wird, zu dessen Grundpunkten irgend eine Grupe der Schaar gehört; mithin liegen auch Γ_1, Γ_2 in der $\gamma^{(1)}_{n-1}$. Zu gleicher Zeit erkennt man, dass auf C^{2n} eine zweite Schaar $g^{(1)}_{n+1}$ vorhanden ist, wenn man als ausschneidende Curven die ∞^1 adjungirten C^{n+1} benutzt, welche Γ_1, Γ_2 und eine willkührliche Γ_i der C^{2n} enthalten. Eine dieser C^{n+1}_1 hat ausser den drei Γ noch $n+1$ Puncte mit C^{2n} gemein, eine Gruppe G_1 der fraglichen Schaar. Hier muss aber die $\gamma^{(1)}_{n-1}$ durch einen Büschel (C^{n+1}) ausschneidbar sein, zu dessen Grundpuncten Γ_1, Γ_2, x_i, G_1 gehören. Da nun diese Puncte mit den D zusammen $(n+1)^2$ ansmachen, von welchen $n(n+1)$ — nämlich $D, \Gamma_1, \Gamma_2, x_i$ — auf C^n_i fallen, so folgt dass G_1 auf einer Geraden liegt. Diese Gerade trifft C^{2n} noch in $n-1$ Puncten, welche nothwendig der $\gamma^{(1)}_{(n-1}$ zukommen, weil eine der ∞^1 in Betracht kommenden (C^{n+1}) aus C^n_i besteht, und der Geraden, welche G_1 trägt.

Also: Die $2n$ Puncte, die eine Tangente T_i des $\mathfrak{C}^2$ mit C^{2n} gemein hat, zerfallen in zwei Gruppen von $n-1$ und $n+1$ Puncten, so dass die eine zu einer bestimmten $\gamma^{(1)}_{n-1}$, die andere einer $g^{(1)}_{n+1}$ gehört.

Es liegt auf der Haud, wie man projectivisch (in der eben erläuterten Weise) eine C^{2n} construirt, welche durch 5 willkührliche Gruppen Γ geht. Die zugehörigen 5 T bestimmen als Tangenten genommen, einen Kegelschnitt, dessen Tangenten die Gruppen der auf C^{2n} befindlichen $\gamma^{(1)}_{n-1}$ tragen. So ist also jedem der ∞^5 Kegelschnitte der Ebene eine unserer C^{2n} zugeordnet, und umgekehrt, wir entscheiden jetzt:

5. Die Frage, ob ausser diesen ∞^5 C^{2n} etwa noch andere $\mathfrak{C}^{2n}$ mit den Doppelpuncten D denkbar sind?

Zu diesem Ende führen wir den Nachweis, dass die $\mathfrak{R}^{2n}$ als deren Centralprojection eine solche $\mathfrak{C}^{2n}$ immerhin angesehen werden kann, auf einer $\mathfrak{F}^2$ vorkommen muss, deren Gerade für $\mathfrak{R}^{2n}$ $n-1$-, und $n+1$-punctige Secanten sind.

Die vorhin gedachte C^n_i wird von der Gesammtheit der möglichen $\mathfrak{C}^{2n}$ in einer $g_{2(n-1)}$ geschnitten, von welcher Schaar eine Gruppe aus Γ_1 und Γ_2 besteht, eine zweite G' auf der supponirten $\mathfrak{C}^{2n}$ liegt. Durch jene und den Punct x_i geht eine adjungirte C^{n+1}; mithin wird die Vollschaar, welche die $g_{2(n-1)}$ umfasst, von den C^{n+1} aus C^n_i geschnitten, welche die D und x_i enthalten, folglich liegt G' auf einer dieser C^{n+1} etwa C^{n+1}_1. Nunmehr lässt sich (vergl. A) die Mannigfaltigkeit x der Vollschaar g_{4n} ermitteln, welche die von den Kegel-

versity, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary

schnitten der Ebene auf $\mathfrak{C}^{2n}$ bestimmte ∞^5 Schaar in sich schliesst. In C_i^n nebst einem Kegelschnitte hat man eine der $\mathfrak{C}^{2n}$ adjungirte C^{n+2}; deshalb ist x einerlei mit der Mannigfaltigkeit der durch G' existirenden C^{n+2}. Diese ergeben auf C_i^n dieselbe Schaar wie die ∞^2 Geraden der Ebene, weil eine solche Gerade mit C_1^{n+1} eine jener C^{n+2} bildet. Man findet ohne Weiteres $x = 2 + 6 = 8$, womit der Schluss begründet ist, dass eine $\mathfrak{F}^2$ durch $\mathfrak{R}^{2n}$ legbar ist.

Dass die Geraden der $\mathfrak{F}^2$ $n+1$-, $n-1$ punctige Secanten sind, ergeben sodann die Gleichungen:

$$\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = 2n,$$

$$\frac{\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)}{2} + \frac{\mathfrak{y}(\mathfrak{y}-1)}{2} = n^2 - n + 1.$$

Für die Projection $\mathfrak{C}^{2n}$ der $\mathfrak{R}^{2n}$ fliesst die Folgerung: „$\mathfrak{C}^{2n}$ besitzt eine $g_{n-1}^{(1)}$, deren Gruppen voll beweglich sind, und auf die Tangenten eines Kegelschnitts fallen.“ Man sieht aber ohne Mühe, dass die $g_{n-1}^{(1)}$ ausschliesslich aus Gruppen Γ besteht. Denn sind p, q zwei beliebige Puncte einer Gruppe, so zeigt sich, dass jede adjungirte C^n, die durch p gelegt wird, nothwendig q enthält. Man braucht nur durch jeden der $n-3$ übrigen Gruppenpuncte eine Gerade zu ziehen, welche pq schneidet, so hat man in diesen $n-3$ Geraden, im Verein mit jener C^n eine adjungirte C^{2n-3}, die nach einem bekannten Satze q aufnehmen muss. Hieraus leuchtet das Behauptete ein, sowie ferner, dass die $g_{n-1}^{(1)}$ mit $\gamma_{n-1}^{(1)}$ zu bezeichnen wäre, und dass sie von jedem Büschel ausgeschnitten wird, der eine willkührliche Gruppe zu Grundpuncten hat.

Auch steht es fest, dass $\mathfrak{C}^{2n}$ eine der ∞^5 C^{2n} sein wird, welche wir nach Obigem projectivisch construiren können.

C) $m = 2n + 1$. Die Raumcurve R^{2n+1} vom Maximalgeschlecht.

Soll die Projection C^{2n+1} möglichst wenig Doppelpuncte D haben, so müssen die D für C^{2n-3} die primitive $G_h^{(1)}$ mit dem Minimum h von Puncten constituiren. Unter C^ν die Curve niedrigster Ordnung verstanden, auf welcher eine so beschaffene $G_h^{(1)}$ liegt, muss wieder $h \geqq \nu(2n-\nu)$ (v. IV. 3.), sodann

$$h \leqq \frac{\nu(2n+1)}{2},$$

weil eine C^{2n+1} in den D Doppelpuncte haben soll; mithin

$$2\nu - 2n + 1 \geqq 0, \qquad \text{oder } \nu \geqq \frac{2n-1}{2}.$$

versity, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary

Hiernach wäre n der kleinste für ν zulässige Werth. Bei dieser Annahme wird zwar das Product $\nu(2n-\nu)$ möglichst gross, nämlich $=n^2$; jedoch kann h überhaupt nie kleiner als n^2 werden. Denn die Voraussetzung $h \leqq n^2$ hat zur nothwendigen Consequenz die Existenz einer C^n, auf welcher die $G_h^{(1)}$ sich befindet. Der Satz unter IV. 3. besagt, wenn man $i=n-2$, $m=2n-3$ nimmt, dass eine C^n die Gruppe ganz enthält, wenn nur $h-\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ Gruppenpuncte auf ihr sind, eine Differenz, die den Werth $\frac{n(n+3)}{2}-1$ nicht überschreitet, wofern h höchstens $=n^2$ werden darf; und durch $\frac{n(n+3)}{2}-1$, oder weniger Puncte ist immer eine, (sogar ∞^1) C^n möglich. Mag nun die C^n, welche die $G_h^{(1)}$ trägt, irreducibel sein, oder nicht, es besteht die Ungleichung $h \geqq \nu(2n-\nu)$ für $\nu=n$, das heisst $h \geqq n^2$: Die unterste Grenze n^2 erreicht man aber nur bei einer $G_h^{(1)}$, die wirklich auf einer C^n sich befindet.

Mit Hülfe von IV. 2. finden wir auf einer irreduciblen C^n alle solche Gruppen in dem vollständigen Schnitt dieser C^n mit irgend einer anderen Curve gleicher Ordnung, das heisst, als die n^2 Grundpuncte eines irreduciblen Büschels $(C^n)_1$.

C^{2n+1} habe die gefundene Gruppe $G_{n^2}^{(1)}$ zu Doppelpuncten D, und sei die Projection von R^{2n+1}: Wir werden darthun, dass eine Fläche 2ten Grads F^2 existiren mus, welche R^{2n+1} aufnimmt. Es geschieht dies durch das schon zweimal gebrauchte Verfahren, indem wir die Mannigfaltigkeit x für die Vollschaar suchen, welcher die von den Kegelschnitten C^2 auf C^{2n+1} bestimmte ∞^5 Schaar angehört. Hiebei ist zunächst die Schaar $g_n^{(1)}$ in's Auge zu fassen, die vom Büschel $(C^n)_1$ auf C^{2n+1} herrührt. Ist G_1 eine Gruppe derselben, so zeigt sich, dass ihre n Puncte in einer Geraden L_1 liegen müssen. Wir verbinden zwei dieser Puncte p, q durch eine Gerade L_1, und beweisen, dass ein beliebiger 3ter Punct r auf L_1 fällt.

Hier stützen wir uns auf den bekannten Satz, dass jede adjungirte C^{2n+1-3}, welche $n-1$ Puncte von G_1 hat, auch den fehlenden r aufnimmt. Denkt man demnach durch die $n-3$ nicht bezeichneten Puncte der G_1 ebenso viele Gerade, wovon keine r enthält, so machen diese mit L_1 und einer Curve des Büschels $(C^n)_1$ eine solche C^{2n-2} aus; mithin muss L_1 den Punct r enthalten.

Wir dürfen ferner unterstellen, dass die C_1^n, welche G_1 ausschneidet, irreducibel ist. Ein willkührlicher Kegelschnitt C^2 mit C_1^n zusammengenommen liefert eine adjungirte C^{n+2}, also wird die fragliche Vollschaar durch die ∞^x adjungirten C^{n+2} erhalten, auf welchen G_1 sich befindet.

Aber jede dieser C^{n+2} hat mit C_1^n noch n variable Puncte gemein, welche in gerader Linie L liegen, weil die D und G_1 den vollständigen Schnitt von C_1^n mit einer C^{n+1} darstellen. Sonach ist die Beweglichkeit jener n variablen Puncte $=2$; und folglich $x=2+6$

versity, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary

die gesuchte Mannigfaltigkeit der C^{n+2}. Ginge aber durch R^{2n+1} keine der ∞^9 F^2, se müsste x mindestens $= 9$ sein.

Wenn endlich die Geraden der F^2, worauf R^{3n+1} ist, $\mathfrak{x}$-, $\mathfrak{y}$-punctige Secanten sind, so hat man

$$\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = 2n + 1,$$

$$\frac{\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)}{2} + \frac{\mathfrak{y}(\mathfrak{y}-1)}{2} = n^2; \text{ d. i } \mathfrak{x} = n, \ \mathfrak{y} = n + 1.$$

Demzufolge besitzt C^{2n+1} eine $g_n^{(1)}$, und eine $g_{n+1}^{(1)}$, die gleichzeitig von den Tangenten eines gewissen Kegelschnittes $\mathfrak{C}^2$ ausgeschnitten werden. Die Identität der erstgenannten Schaar $g_n^{(1)}$ mit der von uns ebenso bezeichneten, ist leicht einzusehen. Man braucht nur zu zeigen, dass eine C^n, die von einer Gruppe G nur einen Punct p enthält, jeden andern Gruppenpunct enthalten muss, was eine sich von selbst verstehende Anwendung des bereits angeführten Satzes über die adjungirten C^{2n+1-3} unmittelbar ergibt.

Eine projectivische Construction der C^{2n+1} wird folgendermassen gewonnen.

Trägt die Tangente L_1 der $\mathfrak{C}^2$ die Gruppe G_1 von $g_n^{(1)}$ und die G_1' von $g_{n+1}^{(1)}$, so bemerkt man, dass $g_n^{(1)}$ sich durch einen Büschel (C^{n+1}) ausschneiden lässt, zu dessen Grundpuncten die $n+1$ Puncte der G_1' gehören. Nämlich in L_1 und einer C^n von $(C^n)_1$ hat man eine adjungirte C^{n+1}; so dass die Basis des Büschels (C^{n+1}) besteht aus den n^2 D, den $n+1$ Puncten G_1' und einer beliebigen Gruppe der $g_n^{(1)}$. Indem man sodann $g_n^{(1)}$ sowohl mit dem Büschel $(C^n)_1$, als mit (C^{n+1}) ausschneidet, tritt unmittelbar die projectivische Erzeugung der C^{2n+1} zu Tage.

D) Die Raumcurve R^{2n+1} mit n^2+2 scheinbaren Doppelpuncten.

Construction einer ebenen Curve C^{2n+1} mit n^2+2 Doppelpuncten D, welche bezüglich C^{2n-3} eine primitive Gruppe $G_{n^2+2}^{(1)}$ bilden sollen.

1. Gesetzt, eine solche $G_{n^2+2}^{(1)}$ liege vor, dann ist durch dieselbe eine Curve von niedriger als der n^{ten} Ordnung unmöglich, weil schon $(n-1)(2n+1) < 2(n^2+2)$,

Somit ist der Satz (IV. 3.) anwendbar, dass eine $C^{2n-3+1-i}$, $(i < n)$, welche

$$n^2 + 2 - \frac{i(i+1)}{2}$$

der D enthält, die Gruppe vollständig aufnehmen muss.

Dies gibt für $i = n-3$: $G_{n^2+2}^{(1)}$ liegt auf jeder durch

$$n^2 + 2 - \frac{(n-3)(n-2)}{2} = \frac{(n+1)(n+4)}{2} - 3$$

versity, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary

Gruppenpuncte gehenden C^{n+1}, oder durch $G^{(1)}_{n^2+2}$ lassen sich mindestens ∞^3 C^{n+1} legen. Wir nehmen an C^{n+1}_i sei eine dieser C^{n+1} und zwar eine irreducible:

Alsdann muss die von den übrigen aus C^{n+1}_i geschnittene Schaar von

$$(n+1)^2 - n^2 - 2 = 2(n+1) - 3$$

Puncten wenigstens die Beweglichkeit 2 haben.

Nach III. 2. können aber Gruppen von $\alpha(n+1) - \beta$ nie eine grössere Beweglichkeit, als $\frac{\alpha(\alpha+3)}{2} - \beta$, hier $= 2$ besitzen, und es kann die Beweglichkeit 2 nur eintreten bei zwei Schaaren von folgender Beschaffenheit:

Erstens: Die Gruppen der $g^{(2)}_{2(n+1)-3}$ bestehen aus den $n+1$ Schnittpuncten der ∞^2 Geraden L mit C^{n+1}_i nebst $n-1$ unbeweglichen Puncten.

Zweitens. Die $g^{(2)}_{2(n+1)-3}$ wird ausgeschnitten durch ein irreducibles Netz von Kegelschnitten C^2, dessen drei Grundpunkte x, y, z sich auf C^{n+1}_i befinden.

Den zweiten Fall, als den allgemeineren, legen wir unserer Betrachtung zu Grunde. Um also eine den festgestellten Forderungen möglicherweise entsprechende Gruppe $G^{(1)}_{n^2+2}$ zu erlangen, nehmen wir auf C^{n+1}_i drei beliebige, jedoch nicht auf eine Gerade fallende Puncte x_i, y_i, z_i an, legen durch dieselben eine C^2, welche eine Gruppe der $g^{(2)}_{2(n+1)-3}$ liefert; durch diese werde eine C^{n+1}_1 geführt. Dann werden wir beweisen, dass die n^2+2 Puncte D, welche C^{n+1}_1 ausser der gedachten Gruppe mit C^{n+1}_i gemein hat, in der That eine primitive $G^{(1)}_{n^2+2}$ für C^{2n-3} sind. Wir hätten zweierlei darzuthun, einmal, dass jede durch n^2+1 der D gehende C^{2n-3} den fehlenden Gruppenpunct enthalten muss, ferner, dass irgend n^2+1 Puncte D sich gegen die C^{2n-3} normal verhalten. Was die erste Aussage betrifft, so betrachte man den vollständigen Schnitt von C^{n+1}_i und C^{n+1}_1: In diesem hat man zufolge IV. 2. eine primitive $G^{(1)}_{(n+1)^2}$ für $C^{2(n+1)-3}$, und da von ihm ein Theil einer C^2 angehört, so muss für die übrigen n^2+2 Puncte D das Behauptete zutreffen.

Die zweite Behauptung wird offenbar als richtig erkannt, wenn sich zeigen sollte, dass der bezüglich C^{2n-3} anormalen Gruppe der D der Excess 1 zuzuschreiben ist. Deshalb müsste man die faktische Mannigfaltigkeit μ der die D aufnehmenden C^{2n-3} bestimmen.

Aus C^{n+1}_i schneiden dieselben eine Schaar von

$$(2n-3)(n+1) - n^2 - 2 = n^2 - n - 5$$

Puncten, die wegen der anormalen Lage der D Specialschaar, somit durch Curven C^{n+1-3} ausschneidbar sein muss. Hiebei werden letztere durch 3 auf C^{n+1}_i feste Puncte gehen, so dass

versity, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary

man in $\frac{(n-2)(n+1)}{2} - 3 = \frac{n^2 - n - 8}{2}$ die Beweglichkeit der Schaar hat. Nun existiren noch durch jede Gruppe $\infty^{\frac{(n-3)(n-2)}{2}}$ C^{2n-3}; folglich ergibt sich

$$\mu = n^2 - 3n - 1.$$

Bei normaler Lage der D wäre aber $\mu = (2n-3)n - n^2 - 2 = n^2 - 3n - 2$; daher beträgt der Exeess wirklich 1.

Ganz auf dieselbe Weise lässt sich der Ausspruch begründen:

„Legt man durch $2(n+1) - \delta$ der Schnittpuncte von C_i^{n+1} mit einer C^2 die C_1^{n+1} so schneidet dieselbe C_i^{n+1} noch in $n^2 + \delta - 1$ Puncten, welche für die C^{2n-2} stets dann eine primitive $G^{(1)}_{n^2+\delta-1}$ constituiren, wenn

$$\delta < n - 2 + 2, \quad \text{d. h. } \delta < n.$$

2. Für das Folgende ist erforderlich die ∞^2 Schaar auf C_i^{n+1}, die von dem Netze der C^2 herrührt, sowie die Beschaffenheit ihrer Gruppen zu beachten. Insbesondere sind die zerfallenden C^2 zu berücksichtigen. So bestehen die von den ∞^1 C^2, deren gemeinsamer Theil die Gerade xy ist, erhaltenen Gruppen aus $n-1$ unveränderlichen Puncten der Geraden xy, und je n Puncten einer beliebig durch z gezogenen Geraden. Wir werden jene $n-1$ Puncte unter der Bezeichnung „die Gruppe γ" verstehen. Wie man sieht, liegt eine derartige γ mit den D auf ∞^2 Curven C^{n+1}, oder auch, damit γ einer der ∞^3 C^{n+1} angehöre genügt, dass nur einer ihrer $n-1$ Puncte auf einer C^{n+1} sei.

Auch ist hervorzuheben, dass mehr als n Puncte in gerader Linie in keiner Gruppe auftreten, woraus erhellt, dass eine C^n durch die D unmöglich ist, und hieraus schliesst man weiter, dass, wenn man C_i^{n+1} durch eine andere C_1^{n+1} ersetzen würde, auch auf dieser nie $n+1$ Gruppenpuncte in gerader Linie erscheinen, mithin die ihr entsprechenden x_1, y_1, z_1 ein Dreieck bilden müssen.

Wir werden jetzt darthun, dass alle in der Ebene vorkommenden γ zum Ort eine C^{2n+1} mit den Doppelpuncten D haben, und dass die Dreiecke xyz, deren Seiten diese γ tragen, einem Kegelschnitt $\mathfrak{C}^2$ umbeschrieben sind.

Aus Vorstehendem geht deutlich hervor, dass durch zwei γ noch ∞^1 C^{n+1} möglich sind. Jede Curve C^{n+1} dieses Büschels enthält eine dritte γ, und die Schnittpuncte der Geraden, welche drei Gruppen tragen, sind auf der betreffenden C^{n+1} die ihr zukommenden Puncte x, y, z.

Wir fixiren die drei auf den Seiten des Dreiecks x_1, y_1, z_1 befindlichen Gruppen γ_1, γ_2, γ_3; die Gerade T, welche die variabel zu denkende γ trägt, treffe die Seiten x_1, y_1, $x_1 z_1$ in y, z. Die D nebst γ_2, γ_3, x_1 sind die Grundpuncte eines Büschels $(C^{n+1})_1$, ebenso ist durch D, γ_1, γ_3, y_1 ein Büschel $(C^{n+1})_2$ bestimmt. Im ersten Büschel gibt es eine durch γ, y ge-

versity, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary

hende Curve, im zweiten ebenfalls; dabei geht jene auch durch z. Lässt man diese beiden C^{n+1} sich entsprechen, so werden dadurch bei der Variation von γ die Büschel projectivisch auf einander bezogen, und sie erzeugen ausser der Geraden $x_1 y_1$ eine C^{2n+1}, auf welcher die gesammten γ vorkommen. Weil aber die Puncte y, z stets auf einer Curve des Büschels $(C^{n+1})_1$ sind, so hat man auch $(y) \barwedge (z)$; das heisst die Gerade $yz = T$ umhüllt einen Kegelschnitt C^2, der $x_1 y_1$, $x_1 z_1$ ebenfalls berührt.

Ferner folgt: *a*) Die ∞^1 C^{n+1}, die irgend zwei γ enthalten, schneiden C^{2n+1} in den übrigen γ.

b) Alle C^{n+2}, welche drei γ, etwa γ_1, γ_2, γ_3 enthalten, gehen durch die Ecken des Dreieks $x_1 y_1 z_1$, auf dessen Seiten diese drei γ liegen. Denn die C^{n+1}, welche durch $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, sich bestimmt, und die irreducibel vorausgesetzt werden darf, muss von den gedachten C^{n+2} noch in 3 Puncten geschnitten werden, die nicht beweglich sein können. Nun liefert eine Dreieckseite $y_1 z_4$ mit jeder C^{n+1}, welche durch die auf $x_1 y_1$, $x_1 z_1$ befindlichen γ gelegt wird eine C^{n+1}, u. s. w.

c) Vier γ, z. B. $\gamma_1 \ldots \gamma_4$, auf den Tangenten $T_1, \ldots T_4$ von $\mathfrak{C}^2$ gelegen, und die 6 Ecken des vollständigen Vierseits $T_1 \ldots T_4$ machen zusammengenommen mit den D die $(n+2)^2$ Grundpuncte eines Büschels $(C^{n+2})_1$ aus. Denn man hat in T_1 nebst der durch γ_2, γ_3, γ_4 bestimmten C^{n+1} eine C^{n+2}, auf welcher die genannten Puncte sind, in T_2 mit der durch γ_1, γ_3, γ_4 gehenden C^{n+1} eine zweite.

Der Büschel $(C^{n+2})_1$ schneidet C^{2n+1} in einer Schaar $g^{(1)}_{n+2}$, deren Gruppen G auf den Tangenten T der $\mathfrak{C}^2$ liegen.

Nämlich T_1 hat mit C^{2n+1} gemein die Gruppe γ_1, sodann $n+2$ Puncte, welche eine Gruppe G_1 der $g^{(1)}_{n+2}$ darstellen. Ein Gleiches gilt von T_2; nun lässt sich aber die $g^{(1)}_{n+2}$ auch durch einen Büschel $(C^{n+2})_2$ ausschneiden, der zu Grundpnncten hat γ_1, γ_3, γ_4 und eine vierte willkührliche Gruppe γ (statt γ_2); folglich liefert die zu jeder γ gehörende Tangente T eine Gruppe G der Schaar $g^{(1)}_{n+2}$

Dabei fällt sogleich in die Augen, dass man in einer G, zusammengenommen mit drei beliebigen γ die Grundpuncte eines Büschels von Curven C^{n+2} hat, welcher alle γ ausschneidet. Indem man die eine oder die andere Schaar auf zweifache Weise ausschneidet, ergeben sich projectivische Constructiouen der C^{2n+1}, auf die wir nicht näher eingehen; dagegen wollen wir zeigen, dass C^{2n+1} die Centralprojection einer R^{2n-1} ist, dass eine Fläche 2ten Grads F^2 durch die R^{2n+1} geht, und dass keine andere $\mathfrak{C}^{2n+1}$ mit den Doppelpuncten D existirt.

Beweis. Der erste Theil der Behauptung folgt sofort aus dem anormalen Verhalten der D gegen C^{2n-3}. Was den zweiten Theil angeht, so würde es sich (vergl. *A*) um Ermittelung der Vollschaar $g^{(x)}_{4n+2}$ handeln, welche die von den ∞^5 C^2 auf C^{2n+1} (od. $\mathfrak{C}^{2n+1}$) be-

versity, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary

stimmten Gruppen umfasst: Sei C_1^{n+1} eine irreducible Curve, durch die D, γ_1, γ_2, γ_3 die 3 Gruppen, welche sie mit C^{2n+1} gemein hat; sie bildet mit einer C^2 eine C^{n+3}, daher wird x die Mannigfaltigkeit der durch γ_1, γ_2, γ_3 möglichen adjungirten C^{n+3} angeben. Nun kann man durch die drei γ eine adjungirte C^{n+2} legen, welche nebst einer beliebigen Geraden L eine C^{n+3} ausmacht, wie sie verlangt wird; woraus erhellt, dass die ∞^x C^{n+3} aus C_1^{n+1} Gruppen schneiden, bestehend aus 3 festen Puncten (x_1, y_1, z_1) und je $n+1$ Puncten in gerader Linie. Also haben diese Gruppen die Beweglichkeit 2. Durch jede Gruppe gehen noch ∞^6 Curven C^{n+3}; mithin $x = 8$. d. h. R^{2n+1} liegt auf einer F^2.

Wären jetzt noch andere $\mathfrak{C}^{2n+1}$ vorhanden, so müssten diese ebenfalls auf Flächen 2ten Grads sein; denn die Schaar von $3(n-1)$ Puncten, die sie auf C_1^{n+1} liefern würden, wäre nothwendig durch Curven C^{n+2} ausschneidbar, welche x_1, y_1, z_1 enthalten. Gilt aber für die $3(n-1)$ Puncte, die $\mathfrak{C}^{2n+1}$ und C^{n+1} gemein haben ebenso wie für γ_1, γ_2, γ_3, dass sie auf einer C^{n+2} liegen, so tritt auch unser Raisonnement in Kraft; und eine $\mathfrak{R}^{2n+1}$, als deren Centralprojection $\mathfrak{C}^{2n+2}$ erscheint, muss auf einer F^2 liegen.

Die dritte Aussage erledigt sich nunmehr folgendermassen: Die Geraden der F^2 seien $\mathfrak{x}$-, $\mathfrak{y}$-punctige Secanten von $\mathfrak{R}^{2n+1}$, so dass

$$\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = 2n + 1.$$

$$\frac{\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)}{2} - \frac{\mathfrak{y}(\mathfrak{y}-1)}{2} = n^2 + 2;$$

folglich

$$(\mathfrak{x} - \mathfrak{y})^2 = 3^2.$$

Mithin müssen die einen Geraden $n-1$-punctige, die anderen $n+2$-punctige Secanten sein. Hieraus ergibt sich auf $\mathfrak{C}^{2n+1}$ die Existenz einer $\mathfrak{g}_{n-1}^{(1)}$, deren Gruppen sich auf den Tangenten eines gewissen Kegelschnitts — der Centralprojection von F^2 — vorfinden.

Es ist leicht zu sehen, dass durch irgend eine dieser Gruppen ∞^2 adjungirte C^{n+1} möglich sind. Nämlich, durch einen Gruppenpunct p gehen genau ∞^2 C^{n+1}, diese müssen aber auch jeden anderen Gruppenpunct q aufnehmen. Denn zieht man durch jeden der $n-3$ fehlenden Puncte eine Gerade, die weder p noch q enthält, so geben diese mit einer durch p gedachten C^{n+1} eine adjungirte C^{2n-2}, welche wegen der vollen Beweglichkeit der Schaar durch q gehen muss; also fällt q nothwendig auf die gedachte C^{n+1}. In der Ebene haben gemäss unserer Auseinandersetzung jedoch nur die mit γ bezeichneten Gruppen die Eigenschaft, dass durch sie ∞^2 adj. C^{n+1} existiren. Somit kann die $\mathfrak{g}_{n-1}^{(1)}$ nur aus Gruppen γ bestehen, und $\mathfrak{C}^{2n+1}$ nicht von C^{2n+1} verschieden sein.

Wäre endlich die Aufgabe gestellt, auf einer gegebenen $\mathfrak{F}^2$ eine $\mathfrak{R}^{2n+1}$ zu bestimmen, so bietet sich von selbst diese Lösung dar:

versity, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary

Durch drei windschiefe Gerade L der $\mathfrak{F}^2$ lege man eine Fläche der $n+2^{ten}$ Ordnung F^{n+2}, dann werden $\mathfrak{F}^2$, F^{n+2} eine Raumcurve $2n+1^{ter}$ Ordnung gemein haben, für welche die Geraden der $\mathfrak{F}^2$, die jene L treffen $n-1$-punctige, mithin die anderen $n+2$-punctige Secanten seien. Projicirt man sodann die Raumcurve aus einem ausserhalb $\mathfrak{F}^2$ befindlichen Centrum auf eine Ebene, so entsteht in dieser eine C^{2n+1}, wie wir sie kennen gelernt haben.

Anmerkung. Leitet man für Curven $2n+1-4^{ter}$ Ordnung C^{2n-3} eine primitive $G^{(1)}_{n^2+1}$ ab, bestehend aus n^2+1 Puncten D, so können diese nur dann noch Doppelpuncte einer irreduciblen C^{2n+1} sein, wenn n den Werth 3 nicht übersteigt. Näheres hierüber folgt in einem späteren Artikel.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der königl.- böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften

Jahr/Year: 1892

Band/Volume: 7_4

Autor(en)/Author(s): Küpper C.

Artikel/Article: Anwendung der in diesen Abhandlungen (VII. Folge 3. Bd.) vorgetragenen Sätze über algebraische Curven auf die Theorie der Raumcurven. (Die citirten Nummern finden sich in jenem Aufsatze.) 1-16