IV.

Erste Gründe
einer neuen
Exponentialrechnung.

Von
Johann Pasquich
Professor der höhern Mathematik zu Pest.

§. 1. Erklärung.

Man kann jede Function y von einer veränderlichen Größe x durch ein Polynomium $Ax^a + Bx^b + Cx^c$ &c. ausdrücken, entweder weil sie unter dieser Forme wirklich gegeben wird, oder weil sie sich unter eine solche Form bringen läßt. Das Exponential nun einer Function y soll diejenige Function heißen, welche man erhält, wenn die einzelnen Glieder des ihr gleichen Polynomiums mit den ihnen zugehörigen Exponenten von x multiplicirt werden; ferner soll der der gegebenen Function y vorgesetzte Buchstabe e das Exponential derselben bedeuten.

Beyspiele. Für $y = ax^2$ soll seyn $ey = 2ax^2$. Für $y = ax^{-3}$ soll seyn $ey = -3ax^{-3}$; $y = (ax + 3x^2)^2 = a^2x^2 + 6ax^3 + 9x^4$ soll geben $ey = 2a^2x^2 + 18ax^3 + 36x^4 = 2(ax + 3x^2)e(ax + 3x^2)$.

§. 2.

Zusatz. Weil $ex = x.\ 1 = x$, und für jede Konstante $C = Cx^0$, $eC = eCx^0 = Cx^0.\ 0 = 0$ ist (§. 1.): so ist das Exponential einer Constante der Null gleich.

§. 3.

2. Zusatz. Das Eponential einer aus mehreren Functionen P, Q, R, . . . U, V von einer veränderlichen Größe x zusammengesetzten Function y ist der Summe der Exponentialien aller Bestandfunctionen gleich; nämlich $ey = eP + eQ + eR + \ldots + eU + eV$ für $y = P + Q + R \ldots + U + V$ (§. 1).

§. 4.

3. Zusatz. Wenn Z irgend eine Function von x, und C eine Constante ist; so ist das Exponential der Function $y = Z + C = Z + Cx^0$ allemal $ey = eZ + eCx^0$ (§. 3.) $= eZ$ (§. 2).

§. 5.

Aufgabe. Wenn die Exponentialien zwoer Funtionen U, V von x bekannt sind, das Exponential des Products UV zu finden.

Auflösung. Man multiplicire das Exponential jeder einzelnen Function mit der andern Function, und addire die Producte in eine Summe: man mache nämlich $eUV = UeV + VeU$.

Beweis. 1. Sey eine Function $U = Kx^k + Lx^l + Mx^m +$ &c., und eine andere $Z = Qx^q$; so wird seyn $UZ = KQx^{k+q} + LQx^{l+q} + MQx^{m+q} +$ &c. also (§. 1.) $eUZ = (k+q) KQx^{k+q} + (l+q) LQx^{l+q} + (m+q) MQx^{m+q} +$ &c., $= (Kx^k + Lx^l + Mx^m +$ &c.$) qQx^q + Qx^q (kKx^k + lLx^l + mMx^m +$ &c.) mithin wie dieses aus (§. 1) folgt, $eUZ = UeZ + ZeU$. 2) Die-

2. Dieses vorausgesetzt seyen was immer für zwo Functionen $U = Kx^k + Lx^l + Mx^m + \&c.$, $V = p + q + v + \&c.$, wobey die einzelnen Buchstaben p, q, v, &c. eben so viele Monomien von der Form Qx^q bedeuten sollen; so ist $UV = Up + Uq + Uv + \&c.$ also (§. 3.) $eUV = eUp + eUq + eUv + \&c.$ Nun aber ist einleuchtend, daß wegen des in 1. erwiesenen, $eUp = Uep + peU$, $eUq = Ueq + qeU$, $eUv = Uev + veU$, &c. seyn muß: daher ist auch $eUV = U(ep + eq + ev + \&c.) + (p + q + v + \&c.)\, eU$, folglich wegen $eV = ep + eq + ev + \&c.$ (§. 3.) auch $eUV = UeV + VeU$.

Beyspiel. Sey $y = (a + bx^3)(c - dx^5)$; so ist $ey = (a + bx^3)\, e(c - dx^5) + (c - dx^5)\, e(a + bx^3)$. Es ist aber (nach §. 1. u. §. 4.) $e(c - dx^5) = -5dx^5$, und $e(a + bx^3) = 3bx^3$; also $ey = -5dx^5 (a + bx^3) + 3bx^3 (c - dx^5)$.

§. 6.

1. Zusatz. Das Exponential des Products $PQR \ldots UV$ aus, so viel man will, Functionen P, Q, R, . . U, V von einer veränderlichen Größe x, ist der Summe der Producte gleich, welche man erhält, wenn das Exponential jeder Function insbesondere mit dem Produkte aller übrigen Functionen multiplicirt wird; denn weil dieses, wegen $ePQR = PeQR + QReP$, und $eQR = QeR + ReQ$ (§. 5.), mithin $ePQR = PQeR + PReQ + RQeP$, bey drey Functionen wirklich wahr ist, und man auf gleiche Art darthun kann, daß, wenn es von irgend einer Anzahl n von Functionen wahr ist, es auch für die um 1 größere Anzahl $n + 1$ davon wahr seyn müsse; so muß dasselbe nach der bekannten Art zu schließen, für jede wie immer große Anzahl von Functionen gelten.

§. 7.

2. Zusatz. Wenn Z was immer für eine Function von x und m eine ganze bejahte Zahl, mithin $Z^m = ZZZ \ldots . Z$ ein aus m gleichen Factoren bestehendes Product ist; so muß das Exponential davon der Summe von m gleichen Producten seyn, wovon eines $Z^{m-1}\, eZ$ ist (§. 6.) folglich ist $eZ^m = mZ^{m-1}\, eZ$.

§. 8.

Aufgabe. Für das bekannte Exponential einer Function X von x das Exponential jeder Potenz X^n zu finden.

Auflösung. Man multiplicire das bekannte Exponential der Function X mit dem Exponenten n der gegebenen Potenz von X, und mit der um einen Grad niedrigeren Potenz von X, oder man mache $eX^n = nX^{n-1}\, eX$.

Beweis. Wenn n eine ganze bejahte Zahl ist, so erhellet die Richtigkeit der gegebenen Auflösung aus (§. 7). Es sey nun $n = \frac{u}{v}$ was immer für eine gebrochene, doch bejahte Zahl; weil $\left(X^{\frac{u}{v}}\right)^v = X^u$ ist, so wird seyn nach (§. 7.) $v\left(X^{\frac{u}{v}}\right)^{v-1} eX^{\frac{u}{v}} = uX^{u-1}\, eX$, und hieraus findet man $eX^{\frac{u}{v}} = \frac{u}{v} X^{\frac{u}{v}-1}\, eX$.

Sey endlich $n = -v$ eine verneinte, ganze oder gebrochene Zahl; so wird $x^{-v}.\, x^v = x^0$; also (§. 5. u. §. 2.) $x^{-v}.\, ex^v + x^v\, ex^{-v} = 0$; weil nun $ex^v = vx^{v-1}\, ex$, so findet man $ex^{-v} = -vx^{-v-1}\, ex$.

Beyspiele. Sey $y = (a + bx^2)^5$; so ist $ey = 5(a + bx^2)^4 e(a + bx^2)$; aber $e(a + bx^2) = 2bx^2$ (§. 1. u. §. 4.) also $ey = 10 bx^2 (a + bx^2)^4$. Sey $y = \frac{1}{\sqrt[3]{(1 + x^2)^2}} = (1 + x^2)^{-\frac{2}{3}}$; so ist $ey = -\frac{2}{3}(1 + x^2)^{-\frac{5}{3}} e(1 + x^2)$. Es ist aber $e(1 + x^2) = 2x^2$ (§. 1. u. §. 4.), also $ey = -\frac{4x^2}{3\sqrt[3]{(1 + x^2)^5}}$.

§. 9.

1. Zusatz. Wenn man für $x = \frac{b}{a}$, $(1 + x)^m a^m = (a + b)^m$, hierauf $(1 + x)^m = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots = z$ setzt: so wird seyn $m(1 + x)^{m-1} e(1 + x) = ez$ (§. 8.); da also $e(1 + x) = x$ ist (§. 4.), so ist auch $mx(1 + x)^{m-1} = ez$, mithin $mxz - (1 + x)ez = 0$; und aus dieser Gleichung, wenn man ez nach (§. 1.) nimmt, findet man die Coefficienten A, B, C. Hiedurch wird $(a + b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m(m-1)a^{m-2}b^2}{1.\ 2.} + \frac{m(m-1)(m-2)a^{m-3}}{1.\ 2.\ 3.} b^3 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-v+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ldots v} a^{m-v} b^v$.

§. 10.

2. Zusatz. Wenn aber zwo Functionen, $u = Px^p + Qx^q + Rx^r + \&c.$, $v = Kx^k + Lx^l + Mx^m + \&c.$ gegeben werden, und man das Polynomium finden will, welches der gebrochenen Function $\frac{u^n}{v^s}$ gleich seyn soll; so nehme man indessen ein Polynomium $Ax^a + Bx^b + Cx^c + \&c. = z = \frac{u^n}{v^s}$

$= \frac{u^n}{v^s}$ wobey a, b, c, &c. bestimmte Zahlen seyn sollen; so wird seyn $u^n = v^s z$: also (§. 5. 8.) $nu^{n-1}eu = szv^{s-1}ev + v^s ez$, mithin $suzev + uvez - nvzeu = 0$, aus welcher Gleichung, wenn ev, ez, eu nach (§. 1) genommen worden, sich die Coefficienten A, B, C, &c. werden ableiten lassen.

§. 11.

Aufgabe. Für bekannte Exponentialien zwoer Functionen u, v von einer veränderlichen Größe x, das Exponential der gebrochenen Function $\frac{u}{v}$ zu finden.

Auflösung. Man ziehe das Product aus dem Exponential des Nenners in den Zähler vom Producte aus des Zählers Exponential in den Nenner ab, und dividire den Rest durch das Quadrat des Nenners: man mache nämlich $e\frac{u}{v} = \frac{veu - uev}{v^2}$.

Beweis. Denn es ist $\frac{u}{v} \cdot v = u$: also (§. 5.) $\frac{u}{v}\,ev + ve\frac{u}{v} = eu$, mithin $e\frac{u}{v} = \frac{veu - uev}{v^2}$.

Beyspiele. Sey $y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$ so wird seyn $ey = \frac{(1 + x^2)\,e\,(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$ $- \frac{(1 - x^2)\,e\,(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2}$. Es ist aber $e\,(1 - x^2) = -2x^2$ nach (§. 1. 4.), und $e\,(1 + x^2) = 2x^2$; also $ey = -\frac{4x^2}{(1 + x^2)^2}$. Sey $y = \frac{x^2}{\sqrt{(a^4 + x^4)}} = \frac{x^2}{(a^4 + x^4)^{\frac{1}{2}}}$;

so

so ist $ey = \frac{(a^4+x^2)^{\frac{1}{2}}\ ex^2 - x^2\ e\,(a+x^4)^{\frac{1}{2}}}{a^4+x^4}$. Aber $ex^2 = 2x^2$ (§. 1.),
$e\,(a^4+x^4)^{\frac{1}{2}} = \frac{2x^4}{(a^4+x^4)^{\frac{1}{2}}}$ (§. 1. 4. 8.); also $ey = \frac{2a^4x^2}{\sqrt{(a^4+x^4)^3}}$.

§. 12.

Erklärung. Das in (§. 1.) erklärte Exponential einer Function y von der absoluten veränderlichen Größe x (welche nämlich keine Function von einer andern veränderlichen Größe ist) soll das erste Exponential der Function y heißen: das zweyte Exponential der Function y werde ich das erste Exponential des Quotienten nennen, welchen man erhält, wenn das erste Exponential der Function y durch die absolute veränderliche Größe x dividirt wird: das dritte Exponential der Function y soll das erste Exponential des Quotienten seyn, welchen das zweyte Exponential der Function y durch x dividirt geben mag: und überhaupt jedes $(v+1)$te Exponential von y soll das erste Exponential desjenigen Quotienten bedeuten, welchen das vte Exponential von y durch x dividirt geben würde, dergestalt, daß, wenn man die Exponentialien von y das 1ste, 2te, 3te .... vte, $(v+1)$te mit ey, e^2y, e^3y .... e^vy, $e^{v+1}y$ bezeichnet, $e^2y = e\,\frac{ey}{x}$, $e^3y = e\,\frac{e^2y}{x}$, ... $e^{v+1}y = e\,\frac{e^vy}{x}$ sey.

§. 13.

1. Zusatz. Weil es gar keine algebraische Function y von einer absoluten veränderlichen Größe x giebt, wovon das erste Exponential nach (§. 5. 6. 8. 11.) nicht könnte bestimmt werden; so wird man darnach auch

auch alle höhern Exponentialien solcher Functionen bestimmen können (§. 12).

Beyspiele. Sey $y = ax^4$, so ist $ey = 4ax^4$ (§. 1.); $\frac{ey}{x} = 4ax^3$,

$\overset{2}{e}y = 12ax^3$ (§. 1. 12); $\frac{\overset{2}{e}y}{x} = 12ax^2$, $\overset{3}{e}y = 24ax^2$ (§. 1. 12); $\frac{\overset{3}{e}y}{x} = 24ax$,

$\overset{4}{e}y = 24ax$ (§. 1. 12.); $\frac{\overset{4}{e}y}{x} = 24a$, $\overset{5}{e}y = 0$, $\overset{6}{e}y = 0$, &c. (§. 2. 12).

Sey $y = \frac{a}{x^2} = ax^{-2}$, so ist $ey = -2ax^{-2}$ (§. 1); $\frac{ey}{x} = -2ax^{-3}$, $\overset{2}{e}y$

$= 6ax^{-3}$ (§. 1. 12.); $\frac{\overset{2}{e}y}{x} = 6ax^{-4}$, $\overset{3}{e}y = -24ax^{-4}$ (§. 1. 12) &c. &c.

§. 14.

2. **Zusatz.** Aus (§. 1. 12.) läßt sich jedes vte Exponential einer Function $y = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \&c.$ so bestimmen.

$$\begin{aligned} e^v y = {} & a(a-1)(a-2)\ldots\ldots(a-v+1)Ax^{a-v+1} \\ & + b(b-1)(b-2)\ldots\ldots(b-v+1)Bx^{b-v+1} \\ & + c(c-1)(c-2)\ldots\ldots(c-v+1)Cx^{c-v+1} \\ & \quad \&c. \qquad\qquad \&c. \qquad\qquad \&c. \end{aligned}$$

§. 15.

3. **Zusatz.** Wenn y' denjenigen Werth bedeutet, welchen eine Function y von der absoluten veränderlichen Größe x erlangen würde, wofern diese um eine gegebene Größe ω zunähme, weil man $y = Ax^a + Bx^b + Cx^c$

$Cx^c + \ldots\ldots + Px^p + \&c.$ setzen kann; so ist

$$y' = A(x+\omega)^a + B(x+\omega)^b + C(x+\omega)^c + \ldots + P(x+\omega)^p + \&c.$$

$$\begin{array}{lllll}
= Ax^a + \frac{a}{1} Ax^{a-1}\omega + & \frac{a(a-1)}{1.\,2.} Ax^{a-2}\omega^2 + \ldots + & \frac{a(a-1)\ldots(a-v+1)}{1.\,2.\,\ldots\,.\,v} Ax^{a-v}\omega^v \\
+ Bx^b + \frac{b}{1} Bx^{b-1}\omega + & \frac{b(b-1)}{1.\,2.} Bx^{b-2}\omega^2 + \ldots + & \frac{b(b-1)\ldots(b-v+1)}{1.\,2.\,\ldots\,.\,v} Bx^{b-v}\omega^v \\
+ Cx^c + \frac{c}{1} Cx^{c-1}\omega + & \frac{c(c-1)}{1.\,2.} Cx^{c-2}\omega^2 + \ldots + & \frac{c(c-1)\ldots(c-v+1)}{1.\,2.\,\ldots\,.\,v} Cx^{c-v}\omega^v \\
\quad \&c. \qquad \&c. & \qquad \&c. & \qquad \&c. \\
+ Px^p + \frac{p}{1} Px^{p-1}\omega + & \frac{p(p-1)}{1.\,2.} Px^{p-2}\omega^2 + \ldots + & \frac{p(p-1)\ldots(p-v+1)}{1.\,2.\,\ldots\,.\,v} Px^{p-v}\omega^v \\
\quad \&c. + \quad \&c. \quad + & \qquad \&c. & \qquad \&c.
\end{array}$$

Hieraus endlich, und aus (§. 12. 14.) folgt:

$$y' = y + \frac{ey}{1.\,x}\omega + \frac{\overset{2}{e}y}{1.\,2\,x}\omega^2 + \frac{\overset{3}{e}y}{1.\,2.\,3\,x}\omega^3 + \ldots + \frac{\overset{v}{e}y}{1.\,2.\,3.\,\ldots\,.\,vx}\omega^v + \&c.$$

§. 15.

4. Zusatz. Und hieraus erhellet nun, daß die vorhergehende Theorie auf die Lehre von größten und kleinsten, die Bestimmung der Werthe, welche gebrochenen Functionen in dem Falle zugehören, wenn sie in $\frac{0}{0}$ zu übergehen scheinen, die Zerfällung gebrochener Fuctionen in mehrere Brüche, und andere wichtige Untersuchungen auf eben die Art angewandt werden kann, auf welche Euler sich der Differentialrechnung bey solchen Untersuchungen bedient hat.