Abhandlung.

Uiber die Spirallinie der Treibmaschinen, Göpel, Winden, Haspel u. dgl.

1. Freundschaftliche Verhältnisse haben mich veranlasset, im Jahr 1793 für die Pürglitzer Eisenwerke in Böhmen einen Pferdegöpel anzugeben, und dabei einige Verbesserungen anzubrigen, welche die hohe Aufmerksamkeit, der k. k. Hofkammer im Münz- und Bergwesen zu Wien, des k. Oberbergamts zu Freyberg und mehrerer Reisenden zu erhalten das Glück hatten, weßhalb mehrere Nachfragen um Zeichnungen oder Modelle, und um Bekanntmachung der nach Verschiedenheit der Fälle zu befolgenden Regeln und Verhältnisse geschehen, auch einige Nachahmungen auf benachbarten Bergwerken versucht worden sind.

Nachdem nun diese Maschine sich auch durch einen zwanzigjährigen unwandelbaren Gebrauch hinlänglich bewähret haben dürfte, so haben mich diese Umstände bewogen, zur Aufnahme der mechanischen Studien und zur Befriedigung weiterer Nachfragen hierüber Folgendes zur öffentlichen Kenntniß zu bringen.

2. Die gewöhnliche Maschine, womit große Lasten auf hohe Gebäude gebracht, oder aus tiefen Brunnen und Bergschachten zu Tage gefördert werden, ist das bekannte Rad an der Welle* (axis in peritrochio, le Tour), welche in Teutschland nach der verschiedenen Lage der Welle auch verschiedene Namen erhalten hat. Lieget nämlich die Welle auf ihren Axen horizontal oder wagerecht, so heißt sie ein Haspel; steht sie aber aufrecht, so wird dieselbe Maschine in mechanischen Schriften eine Winde, von unseren Zimmerleuten ein Brustzug, bei dem sächsischen Bergbau ein Göpel, und wenn zum Umtrieb der Maschine Pferde oder Wasser verwendet wird, in Böhmen und Ungarn eine Treibmaschine genannt.

3. Da in allen Fällen mit der angehängten Last zugleich das Seil gehoben oder aufgezogen werden muß, so haben alle diese Maschinen die wesentliche Unvollkommenheit, daß die Last vom Gewichte des Seiles vermehret wird, folglich eine größere Kraft angewendet werden muß, als die Last für sich allein fodern würde. Bei kleinen Höhen ist diese Vermehrung zwar unbedeutend, weßhalb sie auch in den Lehrbüchern der Mechanik gewöhnlich außer Acht gelassen wird; aber sie wird sehr bedeutend bei großen Höhen, wo das Gewicht des Seiles der angehängten Last gleich kommen, dieselbe auch übertreffen kann.

4. Ein Beispiel wird die Beschaffenheit dieses Gegenstandes deutlicher erklären. Auf dem Siegelsberge bei Schemnitz in Ungarn *) ist die Teufe des senkrechten oder seigeren Schachtes 150 Lachter. Ein Lachter des trockenen hanfenen Bergseiles wiegt dem Mittel nach 10 Pfunde. Die Last, welche an dieses Seil angehängt und mit jedem Zuge aufgefördert wird, beträgt 9 Laufsaren oder 9 Zentner. Da mit dem angefüllten Treibsack (oder mit der vollen Tonne) zugleich von der andern Seite ein leerer Treibsack (oder eine leere Tonne) mit dem ledigen Seile in den Schacht hineingehet, so halten die Gewichte der leeren Säcke oder Tonnen von beiden Seiten einander das Gleichgewicht; die Kraft hat demnach nebst dem Gewichte der Ladung (9 Zentner) zugleich auch das Gewicht des 150 Lachter langen Seiles (150 Zentner), und den Widerstand der Reibung und Unbiegsamkeit der Seile (welche beiläufig auf 2 Zentner angeschlagen wird) zusammen 26 Zentner zu ziehen. Diese Last nimmt jedoch mit der Höhe ab; wenn nämlich der Treibsack oder die volle Tonne die Höhe der ersten 10 Lachter erreicht hat, so ist das Zugseil mit der Last um 10 Lachter kürzer, folglich um 1 Zentner leichter; und von der andern Sei-

*) Beschreibung der bei dem Bergbau zu Schemnitz in Niederhungarn errichteten Maschinen, von Nikolaus Poda. Prag 1771, in der Waltherischen Buchhandlung.

Seite sind auch 10 Lachter des ledigen Seiles vom Treibkorb abgewunden und in den Schacht hineingegangen, wodurch der Zugkraft auch 1 Zentner Gegengewicht zu Hülfe kömmt; demnach beträgt die noch übrige Last nur 24 Zentner. Die weitere Abnahme ist in der folgenden Tabelle zu ersehen.

Höhe des vollen Sackes	Gewicht des Zugseiles	Gewicht des Gegenseiles	Der gesammte Widerstand sammt Reibung.
0 Lachter	15 Zentner	0 Zentner	26 Zentner
10 —	14 —	1 —	24 —
20 —	13 —	2 —	22 —
30 —	12 —	3 —	20 —
40 —	11 —	4 —	18 —
50 —	10 —	5 —	16 —
60 —	9 —	6 —	14 —
70 —	8 —	7 —	12 —
80 —	7 —	8 —	10 —
90 —	6 —	9 —	8 —
100 —	5 —	10 —	6 —
110 —	4 —	11 —	4 —
120 —	3 —	12 —	2 —
130 —	2 —	13 —	0 —
140 —	1 —	14 —	—2 —
150 —	0 —	15 —	—4 —

5. In dieser Tabelle verdienet bemerkt zu werden:

stens.

1tens. Wenn die Treibsäcke oder Tonnen sich begegnen, welches auf der halben Höhe bei 75 Lachtern geschieht, so ist das noch übrige Zugseil so schwer als das hineingegangene Gegenseil, folglich hat die angebrachte Kraft nur das Gewicht des Erzes in der Tonne (9 Zentner) und die Reibung (2 Zentner) zusammen 11 Zentner zu ziehen.

2tens. Wenn der volle Treibsack auf der Höhe bei 130 Lachter anlangt, so wiegt das noch übrige 20 Lachter lange Zugseil nur 2 Zentner, folglich beträgt die Last sammt Zugseil und Reibung 13 Zentner. Weil aber das 130 Lachter lange Zugseil auch 13 Zentner wiegt, so bleibt den Pferden gar nichts zu ziehen übrig.

3tens. Wenn endlich der volle Treibsack oben auf der Hängebank ankömmt, oder seinen höchsten Stand erreicht hat, so beträgt das Gewicht des Erzes sammt der Reibung nur 11 Zentner, des 150 Lachter langen Gegenseiles aber 15 Zentner, folglich ist von der Seite des hineingegangenen leeren Sacks eine Uibermacht von 4 Zentnern vorhanden, welche entweder von den Zugpferden, oder durch Anhängen des Göpelhundes, oder auch mittelst der Premse, wo eine vorhanden ist, angehalten werden muß.

6. Der Durchmesser des aufrechtstehenden Treibkorbes ist bei der Siegelsberger Maschine 3 Lachter, und der Durchmesser des Umkreises für die Zugpferde, oder die Länge der Kreuzbäume, woran die Pferde angespannet werden, ist 6 Lachter; demnach haben die Pferde nur die Hälfte des gesammten Widerstandes,

folg-

folglich zu Anfang des Treibens statt $\frac{9}{2}$ Zentner, welche dem eingeladenen Erz zukommen, wirklich eine Last von $\frac{26}{2}$ oder 13 Zentner zu ziehen, wovon $\frac{15}{2}$ Zentner dem Seile, und $\frac{2}{2}$ Zentner dem Widerstande der Maschinentheile zukommen.

Da nun bekannt ist, daß $\frac{9}{2}$ oder 4, 5 Zentner Last in einem gleichförmigen Zuge von 4 Pferden bequem gezogen werden können, wogegen zum Ziehen der ausgewiesenen 13 Zentner auf dem Siegelsberge 8 Pferde gebraucht werden, welche hiebei noch mit vieler Anstrengung arbeiten müssen, so erhellet, wie wichtig für die Bergökonomie (und für alle ähnliche Fälle) die Erfindung und Anwendbarkeit einer Vorrichtung sey, wodurch dieses bedeutende Hinderniß gehoben, und den Zugpferden nebst dem wenig bedeutenden Reibungswiderstande nur allein die Last des heraufzuziehenden Erzes aufgebürdet, die Last der Seile und Treibsäcke hingegen beständig unter einander ausgeglichen werden.

7. Zu diesem Zweck sind von den Kunst- und Maschinenmeistern mehrere Modalitäten: als Spiralgewinde, Gegenzüge, Seile ohne Ende u. d. m. angegeben und versucht, aber alle wieder abgebauet und die gewöhnlichen zilindrischen Treibkörbe wieder eingeführet worden *), weil diese Erfindungen ihrem Zwecke nur

*) Akademische Vorlesung über die zu Schemnitz errichteten Pferdegöpel. Dresden 1773 in der Walterischen Hofbuchhandlung.

nur unvollkommen entsprochen haben, mehrere Seilbrüche und Reparaturen vorgefallen, und dabei viele Göpelpferde zu Grunde gegangen sind. Nur bei den Treibmaschinen mit Wasser sind die konischen Treibkörbe in der Anwendung geblieben, welche die bezweckte Ausgleichung zwar nicht ganz, aber doch so weit bewirken, daß die noch übrigen Ungleichheiten theils durch Abstellung des Aufschlagwassers, theils auch durch die Premse (nämlich bei der eintretenden Uiberwucht) leicht behoben werden können.

Diese Beibehaltung ist hauptsächlich dem Umstande zuzuschreiben, weil diese Spiralkörbe auf der Welle des Wasserrades eine horizontale Lage haben, und deßhalb keiner Seilleitung bedürfen.

Aus den Bemerkungen, welche Poda, Delius, Breitenheim u. a. über die Versuche mit aufrecht stehenden Spiralkörben hinterlassen haben, gehet nämlich hervor, daß die vorgefallenen Seilbrüche und andere Unglücke nur dem Mangel einer verläßigen Seilleitung zuzuschreiben sind, weil die Seile nicht in den vorgeschriebenen Gewinden geblieben, sondern von ihrer Schwere herabgezogen, und über einander gelaufen sind, worauf ein Herabfallen des Oberseiles und der beladenen Tonne im Schachte erfolgte. Meine erste Sorge war demnach diesem widrigen Umstande auf eine einfache Art zu begegnen; zu welcher Absicht auf die Spiralgewinde des Korbes noch eine größere Windung für die Seilleitung gelegt wurde, mittelst welcher, als von einer Schraube ohne Ende, nach Maßgabe als die Seile auf und abgewunden werden, auch der Rahmen mit den Leitungswalzen auf und abgeschraubt, sonach die darüber laufenden Seile ihrer zugehörigen Spiralwindung wagrecht zugeführet werden. Zur deutlichern Erklärung dessen ist auf der beigebundenen Kupferplatte Fig. 1) das Profil dieser Seilleitung sammt der Führung des Rahmens durch vier Hebel a vorgestellet worden; wobei noch das Gegengewicht b zu merken ist, welches zur Vermeidung der Reibung und Schonung des Schraubengewindes mit dem Gewichte des Rahmens c c und der halben horizontalen Seile d d ins Gleichgewicht gesetzt werden muß.

9. Nachdem auf solche Art für die Verlässigkeit des Seilganges gesorgt ist, so handelt es sich noch um die Bestimmung derjenigen krummen Linie, welche die Spiralgewinde erhalten müssen, damit die Pferde nebst der unbedeutenden Reibung nur allein das Gewicht des Erzes in der Tonne zu ziehen haben, die Gewichte der Tonnen und Seile aber sich für jede Höhe wechselseitig ausgleichen.

Zu dieser Absicht sey das Gewicht des Treibsacks oder der Tonne . = T

Das Gewicht des einzuladenden Erzes. = Q

Das Gewicht des Zugseiles für die ganze Höhe des Schachtes . . . = S

Der größere Radius der Spiralgewinde, woran zu Anfang des Treibens die leere Tonne T hängt . . . . . = a

und der kleinste Radius des Spiralkorbes, woran

zu

zu Anfang des Treibens die volle Tonne sammt dem Gewicht des Seiles $Q + T + S$ hängt . . . $= b$

Der Radius für die angebrachte Zugkraft $(= K)$ sey . . . . $= A$

so haben wir bei dem Anfang des Treibens, wenn die Reibung als unbedeutend weggelassen wird,
$KA = (Q + T + S)\,b - Ta$ . . . (I)
und zu Ende des Treibens, wenn die volle Tonne auf der Hängebank anlangt, $KA = (Q + T)\,a - (T + S)\,b$ . . . . (II)

Werden diese zwey Gleichungen addirt und mit $2Q$ dividirt, so ist $\frac{KA}{Q} = \frac{a + b}{2} = m.$ Hieraus ergibt sich demnach der mittlere Radius des Treibkorbes, wenn die Last Q und die angewendete Kraft K mit ihrem Hebelsarm A bekannt sind; und umgekehrt.

Werden aber dieselben Gleichungen (I) und (II) von einander abgezogen, so ist $0 = (Q + 2T + 2S)\,b - (Q + 2T)\,a$, sonach $a : b = Q + 2T + 2S : Q + 2T$ und $\frac{a - b}{2} : \frac{a + b}{2} = S : Q + 2T + S.$ Hieraus folgt der halbe Unterschied des größten und kleinsten Radius $\frac{a - b}{2} = \frac{m.\,S}{Q + 2T + S}$; der größere Radius $a = m\left(1 + \frac{S}{Q + 2T + S}\right)$; und der kleinere Radius $b = m\left(1 - \frac{S}{Q + 2T + S}\right)$.

In dem oben angeführten Beispiele war $Q = 900$ Pfund, $S = 1500$ Pfund; setzen wir hiezu noch das Gewicht des Treibsacks sammt der eisernen Schurzkette $T = 150$ Pfund, so ist $\frac{S}{Q + 2T + S} = \frac{1500}{900 + 300 + 1500} = \frac{5}{9}$.

Nehmen wir nun den mittlern Durchmesser des Spiralkorbs, so wie des bestehenden zilindrischen Korbs $= 3$ Lachter $= 18$ Fuß $= 2m$, so ist der größte Radius der Spiralgewinde $a = 9\ (1 + \frac{5}{9}) = 14$ Fuß, und der kleinste Radius der Spiralgewinde $b = 9\ (1 - \frac{5}{9}) = 4$ Fuß; und die Zugkraft der Pferde ist so wohl zu Anfang als zu Ende des Treibens $K = \left(\frac{a + b}{2A}\right) Q = 450$ Pfund.

10. Der Unterschied des größten und kleinsten Radius $a - b = \frac{2mS}{Q + 2T + S}$ wird offenbar groß, wenn das Gewicht des Seiles S groß, und dagegen das Gewicht der Ladung Q klein ist, folglich wenn aus tiefen Schachten nur kleine Lasten gefördert werden. Dasselbe geschieht, wenn statt der leichteren hanfenen Bergseile schwerere eiserne Ketten genommen werden.

Da die Gewichte sowohl der Seile als der Tonne der Last des Erzes proporzional genommen werden müssen, so folgt bei gleichen Schachttiefen ein beständiges Verhältniß für $\frac{a - b}{m}$, folglich eine Aehnlichkeit der Spiralkörbe.

11.

11. Um die krumme Linie des Profils aymb, oder die Radien der übrigen Gewinde zu finden, wollen wir annehmen, daß die volle Tonne $Q + T$, welche zu Anfang des Treibens sich mit dem Seile S am Radius $B\,b = b$ befunden hat, nach einem unbestimmten Drehungswinkel ($= \phi$) sich am Hebelsarm $Z\,z = z$ befinde. Das Gewicht des Seils, welches hiedurch von $B\,b$ bis $Z\,z$ aufgewunden worden, sey $= W$, so ist von der Seite der vollen Tonne das statische Moment $(Q + T + S - W)\,z$ vorhanden. Durch dieselbe Drehung des Korbes sey die leere Tonne T vom Radius $A'\,a' = a$ zu dem Radius $Y'\,y' = y$ gelanget, und das Gewicht des Seiles, welches von $A'\,a'$ bis $Y'\,y'$ vom Spiralkorb abgewunden, und in den Schacht hineingetrieben worden, sey $= U$, so beträgt das statische Moment des Gegenzugs, welches dem Momente der Kraft zu Hülfe kommt $= (T + U)\,y$. Demnach haben wir die Gleichung $KA = (Q + T + S - W)\,z - (T + U)\,y$ . . . (III). Durch fortgesetzte Umdrehungen wird die Last der vollen Tonne $Q + T$ an den Hebelsarm $Y\,y = Y'\,y'$ gelangen, und vom Seile S wird in dieser Stellung nur noch das Seiltrumm U übrig seyn, welches den Raum von $Y\,y$ bis $A\,a$ auf dem Spiralkorb noch eben so einnehmen wird, als dasselbe von der andern Seite von $Y'\,y'$ bis $A'\,a'$ abgewunden worden. Demnach beträgt in dieser Stellung das statische Moment von Seite der vollen Tonne $(Q + T + U)\,y$; und weil zu gleicher Zeit das Gegenseil noch bis $Z'\,z'$ abgewun-

wunden worden, folglich am Hebelsarm z die Last $T+S-W$ hängt, so ist das statische Moment des Gegenzugs $=(T+S-W)\,z$. Demnach haben wir abermal die Gleichung $KA=(Q+T+U)\,y-(T+S-W)\,z$ . . . . . . (IV)

12. Die Addizion der Gleichungen (III) und (IV) gibt $\frac{KA}{Q}=\frac{y+z}{2}=m$; demnach ist der mittlere Radius $Mm=m=\frac{a+b}{2}$ nicht nur der mittlere für den Anfang und das Ende des Treibens, sondern auch für alle übrige gleiche Entfernungen der Seile von der Mitte des Korbes; und der gesammte Widerstand ist eben so groß, als ob an dem mittlern Radius m nur allein die Last Q hienge, so wie es dem Zwecke der Aufgabe gemäß ist.

13. Werden endlich die Gleichungen (III) und (IV) von einander abgezogen, so ist $(Q+2T+2S-2W)\,z=(Q+2T+2U)\,y$ folglich $y:z=Q+2T+2S-2W:Q+2T+2U$; und $\frac{y-z}{2}:\frac{y+z}{2}=S-W-U:Q+2T+S-W+U$.

Setzen wir $\frac{y-z}{2}=py=qz=v$, so erhalten wir wegen $\frac{y+z}{2}=m$, die Gleichung $Q+2T+S+U-W=\frac{m}{v}(S-W-U)$. Weil die Gewichte der

Ladung Q, der Tonne T, und des ganzen Seiles S beständige Größen sind, so erhalten wir zur Bestimmung der Spirallinie die einfache Differenzialgleichung

$$d. m \left(\frac{S - W - U}{v}\right) + d\,(W - U) = o \quad . \text{(V)}.$$

14. Für ein gewöhnliches Bergseil sey das Gewicht einer Lachter = g, so ist das Gewicht der Seillänge s = gs. Nachdem aber diese Seillänge auf eine Spirallinie gewunden wird, so sey der unbestimmte Winkel, den der Radius der Spirallinie beschreibt (Fig. 3) $mYy = \phi$, so ist $ds = yd\phi \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{yd\phi}\right)^2\right)}$ welche wir sehr nahe $= yd\phi$ setzen könnnen, weil die Zunahme der Radien in Vergleichung mit der Länge des Seiles sehr klein ist. (In dem angeführten Beispiel war a — b = 10 Fuß, und die Länge des Seils 150 Lachter = 900 Fuß, folglich $\sqrt{(810000 + 100)}$ = 900, 1; wo der Unterschied 0,1 gegen 900 Fuß offenbar als unbedeutend weggelassen werden kann). Dasselbe gilt noch mehr von der Steigung der Spiralgewinde nach ihrer Höhe. Setzen wir demnach $s = \int y\,d\phi$, so ist das Gewicht der unbestimmten Seillänge $gs = g\int y\,d\phi$.

Da wir bereits gesehen haben, daß die Ordinaten py und zq auf gleichen Entfernungen von m einander gleich sind, so wollen wir den Winkel, welcher von m nach y beschrieben wird, $= \phi$ setzen, so ist das Gewicht des Seiles, welches auf dem Spiralgewinde von m bis y zu liegen kömmt, $= g\int y\,d\phi = g\int (m + v)\,d\phi = gm\phi + g\int v\,d\phi$.

Und eben so haben wir wegen der Gleichheit der Winkel von m bis y und von m bis z, auch das Gewicht des Seiles auf dem Spiralgewinde von m bis $z = g\int(m - v)\, d\phi = gm\phi - g\int v\, d\phi$; die Summe dieser beiden Ausdrücke gibt das Gewicht des Seiles, welches von z bis y auf dem Spiralgewinde zu liegen kömmt, $= 2gm\phi = S - W - U$.

Nennen wir endlich noch das Gewicht des Seiles, welches auf der untern Hälfte des Spiralkorbs von d bis m liegt $= B$, und welches auf der obern Hälfte von m bis a liegt $= E$, so ist $W = B - gm\phi + g\int v d\phi$ und $U = E - gm\phi - \int gv d\phi$; demnach $W - U = B - E + 2\int gv d\phi$. Diese Werthe in die Gleichung (V) gesetzt, geben $d.\frac{2gm^2\phi}{v} + 2gv\, d\phi = 0$

oder: $\frac{v d\phi - \phi dv}{v^2} + \frac{v d\phi}{m^2} = 0$; folglich $\frac{d\phi}{\phi} = \frac{dv}{v} - \frac{v dv}{mm + vv}$. Das Integrale dieser Gleichung ist offenbar $\log. \frac{\phi}{v} \sqrt{(mm + vv)} = C$.

15. Die Bestimmung der beständigen Größe C wird sich ergeben, wenn wir vorläufig die nöthige Anzahl aller Windungen, welche der Spiralkorb für jede gegebene Tiefe des Schachtes braucht, zu bestimmen wissen. Da die Länge des aufgewundenen Seiles von z bis $y = 2m\phi$, folglich für jede gleiche Anzahl Windungen zu beiden Seiten von der Mitte eben so

groß

groß ist, als ob das Seil auf den mittlern Durchmesser des Spiralkorbes aufgewunden würde; so erhellet, daß die nöthige Anzahl Windungen für jede Seillänge auf dieselbe Art gefunden werde, wie für einen zilindrischen Spiralkorb. Setzen wir nämlich die Länge des Seiles $= L$, und die mittlere Peripherie des Korbes $= 2\pi . m$, so ist die Anzahl aller Windungen $n = \frac{L}{2\pi m}$. In dem obigen Beispiel war $L = 900$ Fuß, und $m = 9$ Fuß, folglich ist die nöthige Anzahl der Spiralgewinde $n = \frac{7 \cdot 900}{44 \cdot 9} = 16$ beinahe. Rechnen wir für die Höhe einer Windung 3 oder 3, 5 Zolle, so beträgt die Höhe der Spiralgewinde für jedes Seil 4 bis $4\frac{2}{3}$ Fuß.

16. Der Winkel, mit welchem das ganze Seil aufgewunden wird, ist offenbar $= 2\pi n$ demnach die Hälfte dessen, oder der Winkel von m bis a oder von m bis b, nämlich $\phi = \pi n$. Da nun zu gleicher Zeit auch der Unterschied $v = \frac{a - b}{2} = \alpha$ werden muß, so haben wir die beständige Größe $C = \log \frac{\pi n}{\alpha} r$ $(mm + \alpha\alpha.)$ folglich ist die vollständige Gleichung der Spirallinie für eine gleichförmige Seilstärke

$$\frac{\phi}{\pi n} = \frac{v}{\alpha} r \left(\frac{mm + \alpha\alpha}{mm + vv}\right).$$

In dem oben angeführten Beispiel war $m = 9$ Fuß, $\alpha = 5$ Fuß, und $n = 16$; setzen wir noch statt ϕ

die Winkel 2π, 4π, 6π u. s. w. so ergeben sich für die Zeichnung des Profils dieser Spirallinie folgende Radien.

Windungen	v	Radien	Gleichförmige Steigung	Unterschiede
0	5,00 Fuß	14,00 Fuß	14,00 Fuß	0,00 Fuß
1	4,22 —	13,22 —	13,37 —	0.15 —
2	3,52 —	12,52 —	12,75 —	0,23 —
3	2,87 —	11,87 —	12,13 —	0,26 —
4	2,25 —	11,25 —	11,50 —	0,25 —
5	1,67 —	10,67 —	10,88 —	0,21 —
6	1,10	10,10 —	10,25 —	0,15 —
7	0,54 —	9,55 —	9,63 —	0,08 —
8	0,00 —	9,00 —	9,00 —	0,00 —
9	—0,54 —	8,45 —	8,37 —	0,08 —
10	—1,10 —	7,90 —	7,75 —	0,15 —
11	—1,67 —	7,33 —	7,12 —	0,21 —
12	—2,25 —	6,75 —	6,50 —	0,25 —
13	—2,87 —	6,13 —	5,87 —	0,26 —
14	—3,52 —	5,48 —	5,25 —	0,23 —
15	—4,22 —	4,77 —	4,62 —	0,15 —
16	—5,00 —	4,00 —	4,00 —	0,00 —

17. In der vierten Columne dieser Tafel sind noch die Radien für eine gleichförmige Steigung beigesetzt worden, um die Unterschiede dieser Spirallinie von der gemeinen auf der Oberfläche eines Kegels leichter beurtheilen zu können; welche in dem angenommenen Beispiel zwar wenig bedeuten, jedoch größer aus-

ausfallen, wenn der halbe Unterschied des größten und kleinsten Radius $\left(\frac{a-b}{2} = \alpha = \frac{mS}{R+2T+S}\right)$ größer ist. Zugleich sehen wir, daß der obere Theil dieser Spirallinie von a bis m innerhalb des Kegels, und der untere von m bis b ausserhalb des Kegels liege. Das Profil dieser Spirallinie kömmt demnach mit dem bekannten Zuge der Karnißleisten in der Architektur oder mit der Schönheitslinie unserer Vorfahren überein.

18. Zur bessern Uibersicht dieses Gegenstandes wollen wir noch die Umstände untersuchen, bei welchen diese Spirallinie eine gleichförmige Steigung erhält, oder gänzlich in die Oberfläche eines Kegels fällt. Zu dieser Absicht ist vorläufig zu bemerken, daß die Stärke oder das Gewicht einer Seilklafter der anzuhängenden Last proporzional genommen werden muß; und daß sonach das obere Ende, welches nebst der Last der beladenen Tonne zugleich noch das ganze Gewicht des Seiles tragen muß, stärker seyn sollte, als das untere Ende, welches nur allein die Last der beladenen Tonne zu tragen hat. Da auf solche Art die Stärke der Seile von oben nach unten abnehmen muß, so wollen wir das veränderliche Gewicht einer Seillachter, welche auf dem Radius Z z zu liegen kommt $= G$ und das Gewicht einer Seillachter für den Radius Y y $= \gamma$ nennen. Demnach ist das Gewicht des Seiles von m bis y, $= \int \gamma y d\phi$, und von m bis z, $= \int G z d\phi$, folglich $U = E - \int \gamma y d\phi$, und $W = B - \int G z d\phi$. Werden nun diese Werthe in die all-

gemeine Gleichung (V) gesetzt, so erhalten wir

$$\frac{dm}{v}(\int \gamma y d\phi + \int G z d\phi) + \gamma y d\phi - G z d\phi = 0.$$

Wollten wir hier die Gewichte γ, g, G den Radien y, m, z umgekehrt proporzional oder $\gamma y = gm = Gz$ setzen, so wäre $d.\frac{m}{v}\ 2gm\,\phi = 0$, folglich $\frac{2gm^2\phi}{v} = C = 2gm^2\frac{\pi n}{\alpha}$ sonach $v = \frac{\alpha\phi}{\pi n}$, welches die Gleichung für die gleichförmige Steigung der Spirallinie auf der Oberfläche eines Kegels ist. Die Bedingniß daß $G : \gamma = y : z$ seyn müsse, nähert sich offenbar dem praktischen Bedürfnisse, indem wir bereits gesehen haben, daß das Seil am obern Ende, welches von b nach z gewunden wird, stärker seyn solle, als am untern Ende von a nach y. Diese Bedingniß ist jedoch nicht so leicht, bei Seilen wegen des gleichförmigen Gespinnstes als vielmehr bei eisernen Ketten ausführbar, wo das zunehmende Gewicht der Seillachtern in jedem beliebigen oder gegebenen Verhältnisse durch Abwiegen des dazu gegebenen Eisens ohne Anstand vermehrt werden kann.

19. Bevor wir in dieser Untersuchung weiter gehen, wird es vortheilhaft seyn, über die Gewichte der Seile und Ketten noch Folgendes zu bemerken. Ein Schemnitzer Treibseil *) hat in der Länge 206 Lachter im Durchmesser $2\frac{1}{4}$ bis $2\frac{1}{2}$ Zoll; es bestehet aus 3 gro-

*) Beschreibung der Bergbaumaschinen von N. Poda. Prag 1771 S. 2.

großen Litzen, deren jede aus 4 kleineren zusammengesetzt ist; eine kleine Litze hat 16 Fäden. Ein Lachter des trockenen hanfenen Bergseils wiegt dem Mittel nach 10 Pfund, des feuchten und schmundigen aber 14 Pfund. Die Teufe des 7ten Sargozi Laufs im Leopoldischachte ist 176 Lachter, folglich beträgt das Seilgewicht für diese Tiefe wenigstens 17,6 Zentner. Das Gewicht der angeschlagenen 9 Laufpaaren sammt Treibsack, Schurzkette und Reibung können wir nahe auf 11 Zentner berechnen; demnach hat das obere Ende des Seiles wenigstens 28,6 Zentner zu tragen. Wollten wir die Stärke dieses Seiles auf 30 Zentner annehmen, so würde folgen, daß eine Seillachter, welche 1 Pfund wägt, 300 Pfunde tragen könne. Setzen wir dieses Verhältniß $\frac{1}{300} = p$, die Last des Seiles $= S$, und das Gewicht, welches an das untere Ende des Seiles angehängt werden muß $= P$, so gibt die Proporzion $1 : p = S + P : p\,(S + P)$ das Gewicht einer Seillachter. Nennen wir die Länge des Seiles oder die Tiefe des Schachtes $= L$, so ist das Gewicht des ganzen Seiles $= Lp\ (S + P) = S$. Hieraus folgt das nöthige Gewicht des Seiles $S = \frac{pLP}{1 - pL}$; und das Gewicht einer Seillachter $= \frac{pP}{1 - pL}$.

Für die Teufe von 250 Lachter und $P = 1100$ ℔ würde demnach jede Lachter Bergseil 22 ℔ schwer gemacht werden müssen, wodurch das Seil eine Last von

55 Zentnern erhielte, und ein 300 Lachter langes Seil würde von seinem eigenen Gewichte zerrissen werden. Hieraus erhellet die Ursache, warum aus so großen Teufen nicht in einem Zuge, sondern nur durch Abtheilungen gefördert werden kann.

20. Nach Muschenbröks Versuchen wurde ein Eisendrath der $\frac{1}{10}$ Rheinische Zolle im Durchmesser hatte, von 450 Pfund zerrissen.

Aus dieser Erfahrung würde folgen, daß ein Drath, wovon 1 Klafter 1 Pfund wägt, beiläufig 2400 österreichische Pfunde bis zum Zerreissen würde tragen können. Aber so stark ist das gewöhnliche Stabeisen nicht, woraus die Ketten verfertigt zu werden pflegen. Wollten wir indessen annehmen, daß eine Klafter Eisenkette, die ein Pfund wiegt, nur 200 ℔ mit Sicherheit tragen kann, so wäre das hanfene Seilwerk bei gleichem Gewichte anderthalbmal so stark als eiserne Ketten; und die Tiefe, aus welcher mit gleichförmigen eisernen Ketten nicht mehr gefördert werden kann, käme nur an 200 Lachter. Dagegen haben aber die Ketten den Vortheil einer längeren Dauer für sich, vorzüglich in nassen Schachten, und da man an die gleichförmige Stärke der Ketten nicht gebunden ist, sondern das Gewicht der einzelnen Klaftern der daran hängenden Last proporzional machen kann, so wird dadurch auch ihr Gewicht geringer und ihre Brauchbarkeit für jede Tiefe hergestellet.

Zu dieser Absicht sey die unbestimmte Länge der Kette $= s$, und das Gewicht dieser Kette $= k$; das

Ge-

Gewicht der darangehängten Last = P; so ist das Gewicht einer Lachter bei dieser Länge = p (P + k), folglich das Gewicht des Bestandtheils d k = p (P + K) d s. Demnach $\frac{dk}{P+k} = p.\,ds$, und $\log\left(\frac{P+k}{P}\right) = ps$. Setzen wir die bekannte Basis der natürlichen Logarithmen = 2,71828 = e. so ist $P + k = P.\,e.^{ps}$

Hieraus erhellet, daß das Gewicht der Kette mit der daran hängenden Last (k + P) in geometrischen Verhältnissen größer werde, wenn die Länge s in arithmetischen Verhältnissen zunimmt.

Das Gewicht der Kette allein ist $k = P\left(e^{ps} - 1\right)$

und das Gewicht einer Lachter p (P + k) ist = $pPe.^{ps}$

Diese beiden Gewichte sowohl für eine Lachter als für die ganze Länge sind viel kleiner als nach der vorigen Formel für eine gleichförmige Stärke, wo nämlich das Gewicht am untern Ende schwerer ist, als für die Last P nöthig ist, und deßhalb auch am obern Ende und durch die ganze Länge schwerer seyn muß. Auch ist merkwürdig, daß die Gewichte der eisernen Ketten (wenn $p = \frac{1}{100}$ gesetzt wird) zwar anfangs bei kleinen Schachtteufen größer sind, als die Gewichte der hänfenen Seile (für welche $p = \frac{1}{300}$ genommen wird.) Aber diese Gewichte werden einander gleich bei 175 Lachter, und über diese Tiefe hinaus werden die gleichförmigen Seile sogar schwerer als die Ketten von zunehmender Stärke.

21.

und $W - U = S - Pp\,(2m\pi n - 2\int vd\phi +$ $p(mm\pi\pi nn + mm\phi\phi - 2m\pi n\int vd\phi + \int vd\phi . \int vd\phi)$.

Da nun zu Folge (V) $\frac{d.\ m}{v}\,(S - W - U) + d$ $(W - U = 0$ seyn muß, so haben wir $d.\ \frac{mm\phi}{v}$ $(1 + pm\pi n - p\int vd\phi) + vd\phi - p\,(mm\phi\, d\phi -$ $m\pi n v d\phi + vd\phi\int vd\phi) = 0$ sonach $mm\left(\frac{vd\phi - \phi dv}{vv}\right)$ $(1 + p\,(m\pi n - \int vd\phi)) - 2pmm\phi\, d\phi + vd\phi\,(1 +$ $p\,(m\pi n - \int vd\phi)) = 0$; hieraus folgt $\frac{vd\phi - \phi dv}{vv}$ $+ \frac{vd\phi}{mm} = \frac{2p.\,\phi d\phi}{1 + p(m\pi n - \int vd\phi)}$. Wird nun diese Gleichung mit $\frac{mmv}{\phi\,(mm + vv)}$ multiplizirt, so erhalten wir $\frac{d\phi}{\phi} - \frac{mmdv}{v(mm+vv)} = \frac{pmm\,2vd\phi}{(mm+vv)(1 + pm\pi n - p\int vd\phi)}$.

23. Der zweite Theil dieser Gleichung verschwindet, wenn $p = 0$, oder wenn die Kette gleichförmig ist; und in diesem Fall haben wir $\frac{d\phi}{\phi} - \frac{mmdv}{v(mm+vv)}$ $= 0$, welches dieselbe Gleichung ist, die wie oben (§. 14) für Seile von gleichförmiger Stärke gefunden haben.

24. Nachdem schon vorhin (§. 14) gezeigt worden, daß die Form der Spiralkörbe für Seile von zunehmender Stärke sich dem Kegel nähere, so können

wir

wir zur Integrazion des zweiten Theils der Gleichung $\phi = \frac{\pi n v}{\alpha}$ setzen. Dadurch erhalten wird $v d\phi = \frac{\pi n v d v}{\alpha}$, und $\int v d\phi = \frac{\pi n v v}{2\alpha}$. Nun gibt die bekannte Zerlegung der Brüche $\frac{d\phi}{\phi} - \frac{dv}{v} + \frac{v dv}{mm + vv} =$
$\frac{pmm2\pi n}{\alpha + p\pi n(2m\alpha + mm)} \left(\frac{2vdv}{mm+vv} + \frac{p\pi n2vdv}{\alpha + p\pi n(2m\alpha - vv)}\right)$.
Setzen wir noch, um abzukürzen $\frac{pmm2\pi n}{\alpha + p\pi n\,(2m\alpha + mm)} = \lambda$, so ist das Integrale dieser Gleichung $\log \frac{\phi}{\pi n} - \log \frac{v}{\alpha} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{mm + vv}{mm + \alpha\alpha}\right) = \lambda \log \left(\frac{mm + vv}{mm + \alpha\alpha}\right) + \lambda \log \left(\frac{2mm - \lambda\lambda\,(mm + \alpha\alpha)}{2mm - \lambda\lambda\,(mm + vv)}\right)$

folglich $\frac{\phi}{\pi n} = \frac{v}{\alpha} \cdot \left(\frac{mm + vv}{mm + \alpha\alpha}\right)^{\lambda - \frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2mm - \lambda\lambda\,(mm + \alpha\alpha)}{2mm - \lambda\lambda\,(mm + vv)}\right)$. Um das angeführte Beispiel zur Vergleichung so viel möglich mit einstimmigen Zahlen durchzuführen, wollen wir $p = \frac{1}{150}$ setzen, so ist das Gewicht der Kette $= (Q + T) \left(ps + \frac{ppss}{2}\right) = 1000\ (1 + \frac{1}{2}) = 1500$ Pfund; demnach auch $\alpha = 5$ Fuß, $m = 9$ Fuß, $n = 16$, $\pi = \frac{22}{7}$, $\lambda = 0,87$. Mit diesen Zahlen ergeben sich für die einzelnen Windungen folgende Radien.

Win-

Windungen	v	Radien der Spirallinie	Radien für den Kegel	Unterschiede
0	5,00 Fuß	14,00	14,00	0,00
1	4,60 —	13,60	13,37	0,23
2	4,16 —	13,16	12,75	0,41
3	3,67 —	12,67	12,13	0,54
4	3,10 —	12,10	11,50	0,60
5	2,44 —	11,44	10,87	0,57
6	1,69 —	10,69	10,25	0,44
7	0,86 —	9,86	9,63	0,23
8	0,00 —	9,00	9,00	0,00
9	—0,86	8,14	8,37	—0,23
10	—1,69	7,31	7,75	—0,44
11	—2,44	6,56	7,13	—0,57
12	—3,10	5,90	6,50	—0,60
13	—3,67	5,33	5,87	—0,54
14	—4,16	4,84	5,25	—0,41
15	—4,60	4,40	4,63	—0,23
16	—5,00	4,00	4,00	—0,00

25. Die Unterschiede in der fünften Columne zeigen, daß diese Spirallinie in Vergleichung mit dem Kegel eine der vorigen (§ 16) entgegengesetzte Lage habe; indem hier die oberen Radien außerhalb und die unteren innerhalb des Kegels fallen, wogegen bei gleichförmigen Seilen die oberen innerhalb und die unteren außerhalb des Kegels gefallen sind.

26. Da in der Gleichung (§ 24) nur die Größen p, n, m, und α vorkommen, so sehen wir hieraus daß

die

die Gewichte der Ladung Q, der Tonnen oder Treibsäcke T, und der Kette S nur in so weit auf die Spirallinie einen Einfluß nehmen, als dadurch m und α eine andere Bestimmung erhalten, und daß die Spiralform der Treibkörbe ähnlich bleibt, wenn diese Größen unter einander gleiche Verhältnisse haben.

27. Uibrigens beweiset die Unbedeutenheit der Unterschiede §. 16 und §. 24, daß für den allgemeinen Gebrauch die Form des Kegels empfohlen, sonach für jeden Fall nur der mittlere Halbmesser m und die Höhe der Gewinde $\alpha = \frac{mS}{Q+2T+S}$ berechnet und in Ausführung gesetzt werden dürfe, indem die bei dem Bergbau angestellten Maschinenmeister sich vermuthlich nicht gerne auf die Rechnungen §. 22 und §. 24 einlassen, sondern die Ausgleichung der noch übrig bleibenden Ungleichheiten lieber der Anstrengung oder dem Nachlassen der Pferde werden überlassen wollen.

28. Endlich verdienet noch bemerkt zu werden, daß die Widerstände der Reibung und Unbiegsamkeit der Seile nur die Zugkraft oder die nöthige Anzahl der Göpelpferde vermehren, aber an der Spirallinie selbst gar nichts ändern können. Denn da mittelst der Spiralgewinde die Gewichte der Seile der geladenen und ungeladenen Tonne ausgeglichen, und überhaupt alle Widerstände auf den mittlern Radius m zurückgeführet werden, so müssen offenbar auch die Widerstände der Reibung, welche denselben Gewichten

pro=

proporzional sind, gleichfalls zu einem mittleren Widerstand gebracht werden. Es sey dieser Widerstand $= R$, so haben wir für den Anfang der Bewegung $K' A = (Q + T + S)\, b - Ta + Rm \ldots \ldots (I)$ und für das Ende $K' A = (Q + T)\, a - (T + S)\, b + R m \quad . \quad (II)$

Die Summe dieser zwey Gleichungen gibt $K'A = (Q + R)\, m$, oder $\frac{K'}{Q + R} = \frac{m}{A} = \frac{K}{Q}$, woraus erhellet, daß nur die Zugkräfte $K : K'$ in dem Verhältnisse wie $Q : Q + R$ vermehret werden müssen, wenn das Verhältniß $m : A$ beibehalten wird. Werden aber die zwey Gleichungen (I) und (II) von einander abgezogen, so ist $(Q + 2\,T + 2\,S)\, b = (Q + 2\,T)\, a$; woraus $\frac{a - b}{2} = \alpha = \frac{m\,S}{Q + 2\,T + S}$ folgt, wie oben §. 9 ohne der Reibung berechnet wurde.

proporzional sind, gleichfalls zu einem mittleren Widerstand gebracht werden. Es sey dieser Widerstand $= R$, so haben wir für den Anfang der Bewegung $K' A = (Q + T + S)\ b - Ta + Rm$ . . . . (I) und für das Ende $K' A = (Q + T)\ a - (T + S)\ b + R\ m$. (II)

Die Summe dieser zwey Gleichungen gibt $K' A = (Q + R)\ m$, oder $\frac{K'}{Q + R} = \frac{m}{A} = \frac{K}{Q}$, woraus erhellet, daß nur die Zugkräfte $K : K'$ in dem Verhältnisse wie $Q : Q + R$ vermehret werden müssen, wenn das Verhältniß $m : A$ beibehalten wird. Werden aber die zwey Gleichungen (I) und (II) von einander abgezogen, so ist $(Q + 2\ T + 2\ S)\ b = (Q + 2\ T)\ a$; woraus $\frac{a - b}{2} = \alpha = \frac{m\ S}{Q + 2\ T + S}$ folgt, wie oben §. 9 ohne der Reibung berechnet wurde.

Tab. I.

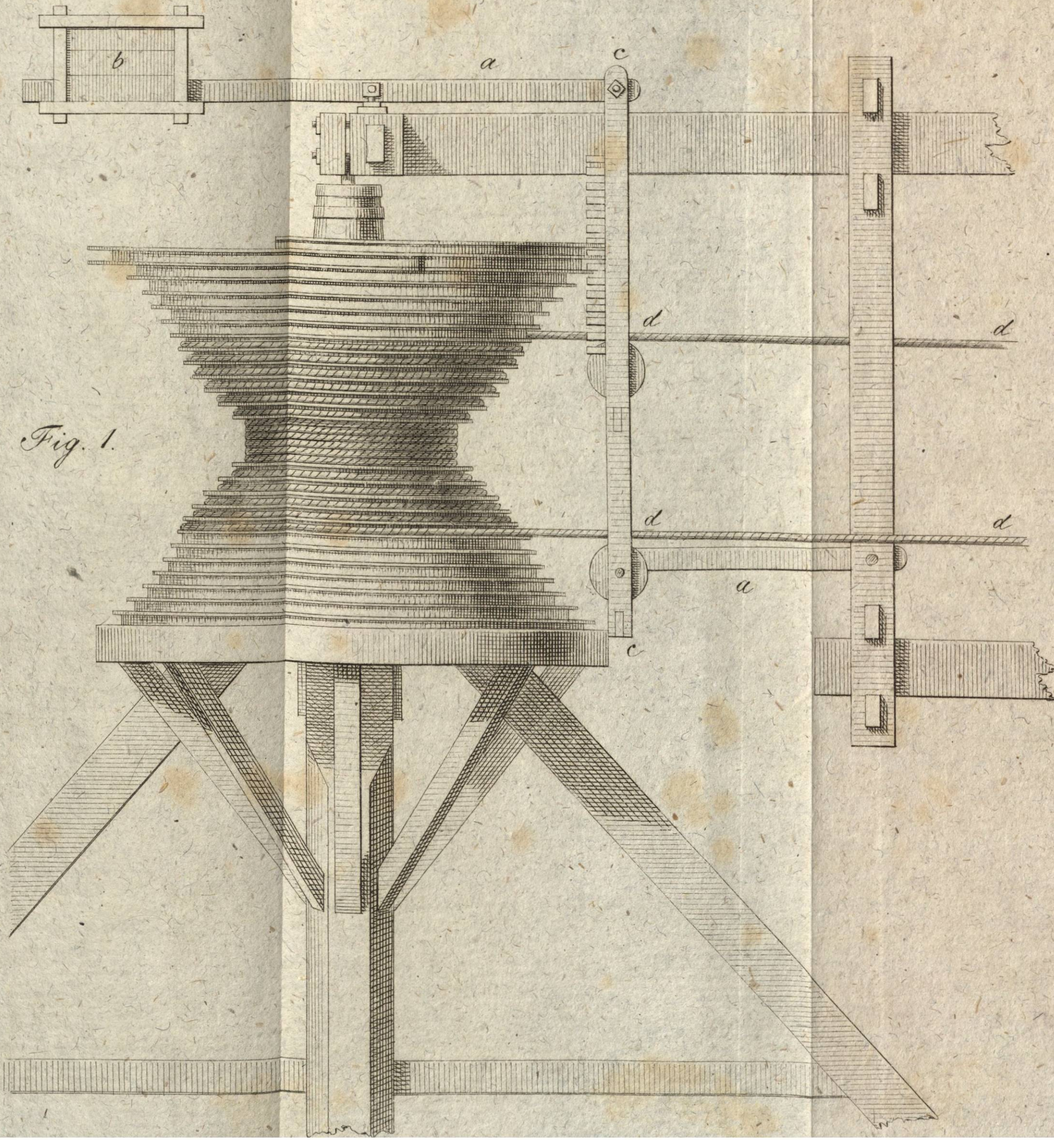

Fig. 1.

Tab. II.

Fig. 2.

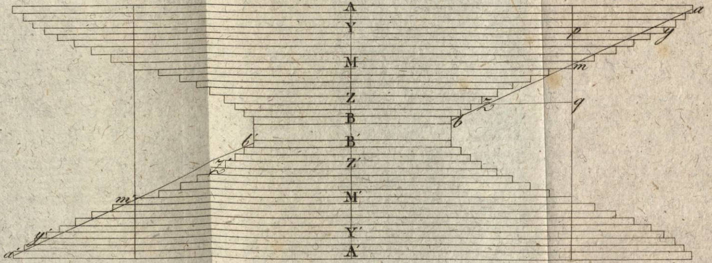

Fig. 3.