Bemerkungen

über das

hydrometrische Pendel

und über

das Gesetz, nach welchem die Geschwindigkeiten des Wassers von der Oberfläche bis auf das Grundbett der Flüsse sich ändern;

von

Franz Ritter von Gerstner,

Ritter des k. k. Leopoldordens, Professor der höhern Mathematik, Mechanik und Astronomie, k. k. Direktor der physisch-mathematischen und technischen Studien, k. k. Landeswasserbaudirektor, Mitglied mehrerer gelehrten Gesellschaften.

Mit einer Kupfertafel.

Für die Abhandlungen der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften.

Prag, 1819.

Gedruckt bei Gottlieb Haase, k. böhm. ständ. Buchdrucker.

Bemerkungen

über den Gebrauch des Pendels in der Hydrometrie.

1. Unter den Instrumenten, welche zur Messung der Geschwindigkeit des Wassers in Flüssen gebraucht werden, hat sich das Pendel durch seine Einfachheit in der Verfertigung sowohl, als in der Anwendung allgemein empfohlen. Wird nämlich eine Kugel von Elfenbein, Messing, Kupfer, Zinn oder Bley an einen Faden von Seide, Hanf, Flachs oder dünnen Metalldraht befestigt und ins Wasser gehalten, so stellt sich das Pendel im ruhigen Wasser in die Richtung der Schwere oder in die sogenannte Senkbleylinie (AC Fig. 1), welche mit der Oberfläche des Wassers einen rechten Winkel macht; wird aber dasselbe Pendel in fließendes Wasser gehalten, so treibt der Stoß des Wassers die Kugel von der Senkbleylinie ab, und das Pendel begibt

sich in jene Stellung, wo die Richtung der mittlern, aus dem Stoße des Wassers und dem Gewichte der Kugel zusammengesetzten Kraft durch den Punkt (A) gehet, an welchem das Pendel festgehalten wird. Setzen wir nämlich die Stoßkraft des Wassers an die Kugel GK=K, und das Gewicht der Kugel im Wasser GH=M, so ist die Tangente des Neigungswinkels HCF oder tang. CAG = $\frac{ON}{AO} = \frac{K}{M}$.

2. Sowohl die Theorie als Erfahrungen haben gelehrt, daß die Stoßkraft des Wassers an einen und denselben Körper dem Quadrate der Geschwindigkeit proporzional ist, demnach verhalten sich die Tangenten der Winkel, um welche das Pendel von der Senkbleylinie abweicht, oder die Abweichungen ON, ON′ wie die Quadrate der Geschwindigkeiten des Wassers in G und G′. Hat man an irgend einem Orte die Geschwindigkeit des Flusses C und zugleich an demselben Orte die Abweichung des Pendels ON=A, oder den Winkel OAN=β gemessen, so ergibt sich für einen andern Ort des Flußes, wo die Abweichung des Pendels ON′=a, oder der Winkel OAN′ = α beobachtet worden, die zu messende Geschwindigkeit $c = C \sqrt{\frac{a}{A}} = C \sqrt{\frac{\text{tang.}\,\alpha}{\text{tang.}\,\beta}}$.

Die Messung einer Geschwindigkeit C, welche bei dieser Proporzion vorausgesetzt wird, kann an der Oberfläche des Flußes mittelst schwimmender Körper, oder nach dem Vorschlag des Eustach Manfredi (Nuova Raccolta T. II. p. 373 etc.) durch Ziehen einer Pendelvorrichtung auf ruhig stehendem Wasser, Messung des beschriebenen Raums und der dabei verflossenen Zeit, ohne Anstand bewerkstelliget werden.

3. Diese Messungsart ist jedoch nur für die Geschwindigkeiten an der Oberfläche der Flüsse anwendbar; denn wenn die Kugel in eine größere Tiefe hinabgelassen wird, so wird nicht nur die Kugel, sondern auch der Faden vom Wasser fortgetrieben, und weil die Stoßkräfte des Wassers gegen die Kugel und gegen den Faden nicht den Entfernungen ihrer Theile vom Punkte A proporzional sind, sondern nach andern Gesetzen bestimmt werden, so bildet der Faden im Wasser eine krumme Linie DCMNOPQ (Fig. 2), und der Winkel CAD, welcher an der Oberfläche des Wassers beobachtet wird, ist von dem Winkel HQF im Wasser verschieden. Weil aber die Geschwindigkeit, mit welcher die Kugel vom Wasser getrieben wird, nur aus dem Winkel HQF an der Kugel gemessen werden kann, das Verhältniß der

beiden Winkel CAD, HQF aber von den verschiedenen Geschwindigkeiten abhängt, von welchen alle Theile des Fadens von der Oberfläche bis zur Kugel getrieben werden, so glaubte der Cav. Bonati, daß dieses Instrument aus der Hydrometrie verbannt werden müsse, aus dem Grunde, weil die Abweichung des Pendels nicht unter dem Wasser sondern nur an der Oberfläche beobachtet werden kann, sonach zur Berechnung der Geschwindigkeit, womit die Kugel allein getrieben wird, nothwendig die Triebkraft des Wassers gegen den Faden in Rechnung genommen werden muß, welches ohne Kenntniß der Geschwindigkeitsscale oder des Gesetzes, nach welchem sich die Geschwindigkeiten von der Oberfläche bis zur Kugel ändern, nicht geschehen kann, wobei folglich dasjenige vorläufig bekannt seyn müßte, was mit diesem Instrumente erst gefunden werden soll.

4. Herr Venturoli, Professor der angewandten Mathematik an der päbstlichen Universität zu Bologna (Opuscoli scientifici, fasc. II.), machte dagegen den Vorschlag, daß man an der Oberfläche des Flußes nicht den Winkel CAD, welchen der Faden AD mit der Senkbleylinie AC macht, sondern die Kraft, mit welcher der Faden nach der schiefen Richtung AD ins Wasser gezogen wird, durch ein Gegengewicht T messen möge. Aus dem Ver-

hältnisse dieses Gewichtes T zum Gewicht der Kugel im Wasser M werde sich (mittelst der Gleichung $\frac{M}{T} = \frac{QH}{QF} = \cos. HQF$) der Winkel ergeben, den die Richtung der Kugel im Wasser mit der Senkbleylinie macht, und aus diesem könne sonach die Geschwindigkeit des Wassers in jeder Tiefe mit derselben Genauigkeit, wie an der Oberfläche des Flußes gemessen werden. — Herr Venturoli glaubte nämlich, daß die Spannung des Fadens in allen Punkten der krummen Linie DCMNOPQ gleich sey, und er unterstützte diese Meinung mit einer Rechnung, bei welcher nur der winkelrechte Stoß des Wassers an den Faden berücksichtiget, und der Umstand außer Acht gelassen wurde, daß alle in einer schiefen Stellung schwimmende Körper nicht nach der winkelrechten Richtung aus dem Wasser in die Höhe getrieben, sondern in der horizontalen zur Oberfläche des Wassers parallelen Richtung fortbewegt werden. Uibrigens widerspricht dieser Meinung des Herrn Venturoli nicht nur die allgemeine Erfahrung, sondern auch selbst seine hierüber geführte Rechnung, mit welcher erwiesen wird, daß die krumme Linie des Fadens in die Klasse der Kettenlinien gehöre, von jeder Kette aber bekannt ist, daß nicht alle Glieder gleich gespannt sind, sondern die obern mehr, die untern weniger zu tragen haben. Endlich würde aus der Voraussetzung einer gleichen Spannkraft in allen Punkten des Fadens bei der bekannten Gleichheit der senkrechten, vom Gewichte der Kugel bewirkten Zugkraft nothwendig folgen, daß die Verhältnisse des Gewichtes der Kugel zur Spannkraft des Fadens in allen Punkten gleich seyn, (nämlich $\frac{M}{T} = \frac{QH}{QT} = \frac{Nn}{No} = \frac{Dd}{DC} \ldots$) sonach der Faden im Wasser keine krumme, sondern eine gerade Linie bilden würde.

5. Gegen die (§. 3) angeführten Einwürfe des Bonati wäre zu bemerken, daß dieselben schon dadurch viel von ihrer Kraft verlieren, weil die gewöhnlichen Tiefen unserer Flüsse nicht bedeutend, und die beobachteten Unterschiede der Geschwindigkeiten an der Oberfläche und in der Tiefe nicht groß sind; es kann aber auch der Stoß des Wassers an den Faden in Vergleich mit jenem an die Kugel unmerklich gemacht werden, wenn nur die Dicke des Fadens möglichst klein, und dagegen der Durchmesser der Kugel möglichst groß genommen wird. Endlich macht der Anstand, daß zum richtigen Gebrauche des Pendels die Geschwindigkeiten des Wassers schon vor ihrer Messung bekannt seyn müßten, diesen Gegenstand nur zu einer algebraischen Aufgabe, deren Auflösung, wie bekannt, durch solche Voraussetzungen nicht ge-

hindert wird. Es dürfte demnach eine möglichst genaue und für den praktischen Gebrauch leicht anwendbare Anweisung, wie aus der Abweichung des Pendels an der Oberfläche die Geschwindigkeiten des Wassers in der Tiefe zu berechnen sind, um so erwünschlicher seyn, als dadurch dieses Instrument nicht nur in allen Fällen anwendbar, sondern auch mit demselben eine Genauigkeit erreicht wird, welche den übrigen bekannten Strommessern noch größtentheils mangelt.

6. Zur größeren Deutlichkeit der hierüber folgenden Rechnung, wollen wir Anfangs die Theile des Fadens DL, LM, MN, ... von endlicher Größe, ohne Schwere, und so wie die Glieder einer Kette nur in den Verbindungspunkten, D, L, M, N... biegsam annehmen. Das Gewicht der Kugel im Wasser sey wie vorhin $= M$, der Stoß oder Druck des fließenden Wassers an die Kugel $= K$, der Stoß an die erste oder unterste Abtheilung des Fadens $PQ = w$, an die zweite Abtheilung $OP = w'$, an die dritte $ON = w''$ ... Es ist bereits oben gezeigt worden, daß der Stand der Kugel im fließenden Wasser, von dem Verhältnisse des Gewichtes der Kugel im Wasser M zu dem Wasserstoße an die Kugel K bestimmt werde, welche beide in ihrer Zusammensetzung die Diagonalkraft QF geben, daß sonach die Tangente des Winkels, den die Richtung dieser Diagonalkraft

mit der Senkbleylinie macht, durch die Gleichung $\frac{HF}{HQ}$ = tang. HQF, oder $\frac{K}{M}$ = tang. α = a bestimmt werde. Der Trieb des Wassers w gegen das erste Glied des Fadens QP treibt dasselbe nach der nämlichen Richtung, nach welcher die Kugel vom Wasser fortgetrieben wird. Nach der oben angeführten Voraussetzung der Unbiegsamkeit von Q bis P, können wir die Triebkraft des Wassers w in zwei gleiche Hälften theilen und annehmen, daß an jedem der beiden Endpunkte P und Q die Triebkraft $\frac{w}{2}$ wirksam sey. Da die Kugel unmittelbar an dem Punkte Q hängt, so erfährt dieser Punkt offenbar dieselbe mittlere Triebkraft QF oder die beiden Seitenkräfte M = QH und K = QK wie die Kugel. Wird nun zu QK = k, die Kraft $\frac{w}{2}$ = Kk hinzugesetzt, so sehen wir, daß am Ende Q des Fadengliedes PQ die beiden Kräfte Q k = K + $\frac{w}{2}$ nach der Richtung der Bewegung des Wassers, und QH = M nach der Richtung der Schwere wirksam sind. Aus beiden entsteht die mittlere Triebkraft Qf, welche zugleich die Richtuug oder die Stellung PQ bestimmt, in welcher das erste Glied des Fadens die aus allen drei Kräften $K + \frac{w}{2}$ und M zusammengesetzte Zugkraft auszuhalten im Stande ist. Hieraus folgt für die Stellung des untersten oder ersten Fadengliedes die Gleichung $\text{tang. } pPQ = \text{tang. } HQf = \frac{K + \frac{w}{2}}{M}$.

Der zweite Winkelpunkt des Fadens P wird von der Diagonalkraft $PQ = Qf$, oder was dem gleich ist, von den zwei Seitenkräften M in der senkrechten und $K + \frac{w}{2}$ in der wagrechten Richtung getrieben. Zu der letzten kommt noch die zweite Hälfte $\frac{w}{2}$ von der Triebkraft des Wassers gegen das erste Fadenglied, und auch die erste Hälfte $\frac{w'}{2}$ von der Triebkraft des Wassers gegen das zweite Fadenglied. Demnach wird der Winkelpunkt P in der senkrechten Richtung von dem Gewichte der Kugel M und nach der wagrechten Richtung von der Triebkraft des Wassers an die Kugel und den Faden $K + w + \frac{w'}{2}$ getrieben; und da das zweite Glied des Fadens sich nur in der mittlern Richtung dieser Seitenkräfte erhalten kann, so folgt für die Stellung des zweiten Fadengliedes die Gleichung tang. oOP $= \frac{K + w + \frac{w'}{2}}{M}$.

Auf dieselbe Art wird der dritte Winkelpunkt O von dem Gewichte der Kugel M senkrecht, und von der Triebkraft des Wassers gegen den Faden und die Kugel $K + w + w' + \frac{w''}{2}$ wagrecht getrieben; aus beiden entsteht die mittlere Kraft nach der Richtung NO, und wir haben für die Stellung des dritten Gliedes die Gleichung tang. nNO $= \frac{K + w + w' + \frac{w''}{2}}{M}$.

7. Aehnliche Gleichungen ergeben sich für die Stellungen aller folgenden Elemente des Fadens; wenn sonach der Trieb des Wassers gegen den Faden von Q bis N oder D, nämlich $w + w' + w'' .. = W$ gesetzt wird, so folgt für die Stellung des nächstfolgenden Fadenglieds, sonach auch für die Richtung des Fadens außer dem Wasser tang. CAD $= \frac{K + W}{M}$.

Weil aber bei der Kugel im Wasser die Gleichung tang. HQF $= \frac{K}{M} =$ tang. $\alpha = a$ statt findet, so haben wir zwischen den Neigungswinkeln an beiden Enden des Fadens ober und unter dem Wasser die Gleichung tang. CAD $= \left(1 + \frac{W}{K}\right)$ tang. α, oder wenn wir die Abweichungen des Pendels bei der Kugel a und an der Oberfläche des Wassers Z nennen, so haben wir auf diese Art $\left(1 + \frac{W}{K}\right) a = Z$. Es wird also nur darauf ankommen, das Verhältniß der Triebkraft des Wassers gegen den Faden und gegen die Kugel zu bestimmen, welches um so verlässiger geschehen kann, als die Schwierigkeiten, welche über das absolute Maß des Wasserstoßes noch obwalten, gegen die kreisrunde Kugel und gegen den kreisrunden Faden von gleicher Art sind, sonach bei der Vergleichung dieser Kräfte von selbst aus der Rechnung entfallen.

8. Es verdient hier noch bemerkt zu werden, daß die Spannkraft des Fadens in jedem Punkte N oder O der krummen Linie DMNO ... sich zum Gewichte der Kugel im Wasser verhält, wie NO zu Nn, oder bei M wie MN : Mm u. s. w., und an der Oberfläche wie AD : AC = cos. CAD : 1 = M : T. Hieraus ist zu ersehen, daß der Vorschlag des Herrn Venturoli nur eine andere Messungsart des Winkels BAD außer dem Wasser enthalte, aber den Win-

kel HQF, den die Richtung der Kugel im Wasser mit der Bleylothlinie macht, nicht geben könne.

9. Das Verhältniß der Stoßkraft des Wassers an die Kugel und an den Faden $\frac{W}{K}$ läßt sich auf folgende Art berechnen. Es sey der Halbmesser der Kugel = m, das bekannte Verhältniß der Peripherie zum Durchmesser 3, 14159 = π, so ist die Durchschnittsfläche durch die Mitte der Kugel = πmm. Nach den bekannten Gesetzen der Hydrostatik wird die Kugel im ruhigen Wasser von dem Gewichte einer Wassersäule gedrückt, welche die Durchschnittsfläche der Kugel zur Grundfläche und die Höhe des Wasserstandes über den Mittelpunkt der Kugel (die wir H nennen wollen) zur Höhe hat. Setzen wir das Gewicht des Wassers für die Einheit des kubischen Maßes = W, so ist der hydrostatische Druck gegen die Kugel = W. π. mmH. Weil dieser Druck an die Kugel nach entgegenstehenden Richtungen gleich ist, so bleibt die Kugel in Ruhe. — Im bewegten Wasser äußert jeder Punkt nebst dem hydrostatischen Druck der Wassersaule H noch in der Richtung der Bewegung des Wassers einen hydrodynamischen Druck, welcher der Wassersäule gleich ist, von der das Wasser seine Geschwindigkeit erhalten hat. Wenn das Wasser z. B. aus der Oeffnung eines Gefäßes ausfließt,

so ist, wie bekannt, seine Geschwindigkeit so groß, als wenn die Wassertheilchen von der Oberfläche des Wassers bis zur Oeffnung des Gefäßes herabgefallen, oder über eine schiefe Fläche von derselben Höhe herabgelaufen wären. Wird nämlich der Raum, den das Wasser in einer Sekunde zurücklegt, $= c$, und der Fallraum der schweren Körper in der ersten Sekunde $= g$ gesetzt, so ist diese Höhe $= \frac{cc}{4g}$; und wenn das Wasser über eine andere schiefe Fläche wieder hinaufgeleitet wird, so steigt es, wie bekannt, wieder auf dieselbe Höhe $\frac{cc}{4g}$. Hieraus erhellet deutlich, daß das Wasser in jedem Punkte eine Triebkraft besitze, welche so groß ist, als der Druck der Wassersäule $\frac{cc}{4g}$. Wenn demnach der Bewegung des Wassers eine feste Fläche winkelrecht entgegen gehalten wird, so drückt an jeden Punkt dieser Fläche die Wassersäule $H + \frac{cc}{4g}$. Weil aber das Wasser zu gleicher Zeit von der rückwärtigen Seite der Fläche mit der Geschwindigkeit c abfließen, und dieselbe frei lassen würde, wenn das Wasser nicht von der hydrostatischen Wassersäule H gegen die Fläche zurückgetrieben würde, so ist der Gegendruck des Wassers an die rückwärtige Seite der Fläche $= H - \frac{cc}{4g}$. Die Fläche wird demnach in der Richtung des Flußes von dem Unterschiede der beiden Wassersäulen $H + \frac{ce}{4g}$ und $H - \frac{cc}{4g}$ getrieben; folglich wäre der Druck an die senkrechte Durchschnittsfläche der Kugel $= W. \pi mm. \frac{cc}{2g}$.

10. Dieses Maß der Stoßkraft des Wassers an ebene Flächen, wird durch die bekannten Versuche des A. Bossut in Schußgerinnen, wie auch durch die Versuche des Prof. Langsdorf über die Stoßkraft der Wasserstrahlen gegen winkelrecht entgegengehaltene breitere Flächen, und überhaupt sowohl von der Theorie als Erfahrung in allen jenen Fällen bestätigt, wo dem Wasser entweder kein Spielraum zum nebenseitigen Abfluße gelassen, oder dasselbe genöthiget wird, seine ursprüngliche Richtung winkelrecht zu verlassen und über die entgegengesetzte Fläche parallel abzufließen.

11. Da die Oberfläche der Kugel von allen Seiten gleich und ähnlich ist, sonach der Druck und Gegendruck des Wassers gleichen Gesetzen unterliegt, so können wir die Triebkraft des Wassers gegen die

vordere und hintere Seite der Kugel in einer und derselben Rechnung begreifen. In dieser Hinsicht sey der Unterschied der Wassersäulen, welche in dem horizontalen Querschnitt der Kugel AMM′A′m′m (Fig. 3.) an die gegenüberstehenden Punkte der Kugel in M und M′, oder N und N′ drücken, nämlich $\frac{cc}{2g} = DM$, die zugehörige Ordinate des Kreises $PM = y$, die Abscisse $CP = \sqrt{(mm - yy)}$. Der Druck der Wassersäule DM zerfällt wegen seiner schiefen Richtung gegen das Element des Bogens MN in die zur Oberfläche parallele Kraft GM, mit welcher das Wasser in der Ebene seiner Bewegung parallel zu MN abfließt, und in $EM = DM. \frac{CP}{CM}$, welche an den Bogen MN winkelrecht drückt. Weil aber an dem gegenüberstehenden Punkte m eine gleiche Wassersäule $dm = DM$ und $em = EM$ drückt, so geben beide Kräfte EM und em in ihrer Zusammensetzung nach der Richtung AC die mittlere Kraft $HM + hm = 2EM. \frac{CP}{CM}$ $= 2DM. \frac{CP. CP}{CM. CM} = \frac{cc}{g}\left(\frac{mm - yy}{mm}\right)$. Auf gleiche Art werden auch alle zwischen M und N, m und n liegende Punkte von einer gleichen Wassersäule, sonach die vier Elemente der Peripherie MN und M′ N′, mn und m′ n′ von der Wasserfläche $\frac{cc}{g}\left(\frac{mm - yy}{mm}\right) dy$ gedrückt. Demnach ist der Trieb des Wassers gegen den Theil der Peripherie $MAm + M'A'm' = \frac{cc}{g}\left(\frac{3mm - yy}{3mm}\right)y$, folglich gegen die ganze Kreisperipherie $= \frac{cc}{3g}\ 2m$.

12. Auf gleiche Art ist die Stoßkraft des Wassers gegen die Peripherie eines jeden andern horizontalen oder zum Wasserspiegel parallelen Querschnitts der Kugel QQ′ (Fig. 4) = dem Druck der Wasserfläche $\frac{cc}{3g}\ QQ'$. Demnach ist der Druck des Wassers gegen die zwischen den zwei Querschnitten QQ′ und RR′ eingeschlossene Ringfläche der Kugel $= W. \frac{cc}{3g}\ QQ'. TU$. Weil aber alle Ellementarflächen $QQ'. TU + RR'. UW \ldots$ oder $QQ' R'R + RR' S'S \ldots$ zusammen die Querschnittsfläche der Kugel $AZA'Z' = \pi mm$ ausmachen, so ist der Wasserstoß gegen die ganze Kugel $= W. \pi mm. \frac{cc}{3g} = K$.

13. Bei dieser Rechnung ist nur derjenige Widerstand betrachtet worden, welcher die Wassertheile nöthigt, von beiden Seiten auszuweichen, ohne die horizontale oder zur Oberfläche des Flußes parallele Fläche, in welcher sie ihre Bewegung ohne Anwesenheit der Kugel fortsetzen würden, zu verlassen. Dagegen haben viele Schriftsteller eine Abweichung von der Horizontalfläche angenommen, und den Widerstand der Kugeln im Wasser so zu berechnen gelehret, als ob dieselben von einem aus der Bodenöffnung eines Gefäßes ausfließenden von allen Seiten freien Wasserstrahle umflossen würden. Man glaubte von dieser Voraussetzung keinen Gebrauch zu machen, weil der auf einem Grundbette fortfließende Wasserstrom diese Freiheit wirklich nicht hat. Der Abfluß des Wassers unter der Kugel wird von dem unterhalb fortfließenden Wasser, von der Inkompressibilität und Trägheit der Wassertheile, und von der Unnachgiebigkeit des Grundbettes gehindert; auch zeigt die Erfahrung an dem Orte, unter welchem sich die Kugel in einer größeren Tiefe befindet, auf der Oberfläche keine Erhöhung, welche doch statt finden müßte, wenn die Wassertheile eben so leicht über als neben der Kugel abfließen könnten.

14. Die bisherige Rechnung wurde übrigens nur über denjenigen Theil des Wasserstoßes geführt,

welcher dem Quadrate der Geschwindigkeit des Wassers proporzional und unter den übrigen Widerständen, welche der Kugel im Wasser begegnen, der größte ist. Eine vollkommene und ganz genaue Theorie dieses Gegenstandes würde noch mehrere Rücksichten fordern, deren viele schon von Newton (Princip. phil. natur. lib. II. Sect. 6 de motu et resistentia corporum funependulorum) bemerkt worden sind, und von denen zum Nachtheil der Wissenschaft zu bedauern ist, daß sie bei den vielen Bemühungen, welche sich seither d'Alembert, Condorcet, Bossut, Dubuat u. a. um die Erforschung des Widerstandes schwimmender Körper, und die Bewegungsgesetze des Wassers in Röhren, Kanälen und Flüssen gegeben haben, vergessen und unbeachtet geblieben sind. Gegenwärtig haben die hydrotechnischen Schriftsteller zwar mit Newton das allgemeine Gesetz angenommen, daß die Widerstände, welche die Bewegung des Wassers in Röhren und Flußbetten hindern, theils der ersten, theils der zweiten Potenz der Geschwindigkeiten proporzional sind; da es aber bei dem Stoße des Wassers an feste Körper noch hauptsächlich auf die Bestimmung der Wege ankommt, nach welchen die Wassertheile dem Körper ausweichen, so würden nebst einer genauern Kenntniß des schiefen Stoßes noch Rücksichken auf die Wellenbewegung, auf die Nähe der Kugel am Grundbette, auf die Temperatur, Cohäsion und Adhäsion u. m. d. zu nehmen seyn. Diesen vielen noch nicht hinlänglich erörterten Umständen ist es ohne Zweifel beizumessen, daß die bisherigen Theorien des Wasserstoßes in Flüssen mit den Resultaten der Erfahrung noch nicht ganz vereinigt werden konnten. — Es wäre aber viel zu weitläufig, wegen eines so geringen Gegenstandes, als es der Stoß des Wassers an den Faden in Vergleichung mit dem Stoße an die Kugel seyn muß, vorläufig alle diese Schwierigkeiten aufräumen zu wollen, um so mehr, als der Hauptanstand, nämlich das absolute Maß der Stoßkraft des Wassers gegen die Kugel und den Faden dadurch behoben wird, daß man vor der Anwendung des Pendels zu Geschwindigkeitsmessungen in der Tiefe, vorläufig die Geschwindigkeit des Wassers C an der Oberfläche messen, und die Abweichung des Pendels von der Senkbleylinie A bei dieser Geschwindigkeit beobachten muß, sonach aus der Abweichung des Pendels an einem andern Orte a nach dem Erfahrungssatz §. 2 auf die Verhältnisse der Geschwindigkeiten CC, cc an beiden Orten schließen kann, ohne hiezu der absoluten Maße des Wasserstoßes zu bedürfen.

13. Wir müssen nun nach denselben Grundsätzen, wie §. 11 und 12, den Wasserstoß an den Faden zu bestimmen suchen. Zur leichtern Uibersicht der hierüber zu führenden Rechnung wollen wir vorläufig den Faden in der senkrechten, dann in der schiefen, und endlich in der gebogenen Stellung betrachten. Im ersten Falle sey die Geschwindigkeit, womit das Wasser der Kugel in der Tiefe H begegnet $= c$, und die Geschwindigkeit, womit das Wasser dem Faden begegnet $= v$, der Durchmesser des Fadens $= f$, so ist die Kraft des Wassers gegen die Kugel (nach §. 12,) $K = \mathfrak{W}.\ \pi \frac{mm.cc}{3g}$, und nach denselben Grundsätzen ist auch die Stoßkraft des Wassers gegen den Faden $W = \mathfrak{W}.\ \frac{f.H.vv}{3g}$; demnach $\frac{W}{K} = \frac{f.H.vv}{\pi mm.cc}$. Wird nun dieser Werth in die Gleichung (§. 7) $Z = a.\left(1 + \frac{W}{K}\right)$ gesetzt, so erhalten wir die Abweichung an der Oberfläche $Z = a + \frac{fH.vv.a}{\pi mm.cc}$, und wegen $a = \frac{Acc.}{CC}$ (§. 2) $Z = \frac{Acc}{CC} + \frac{fH.vv.A}{\pi mm.CC}$.

Die Geschwindigkeit des Wassers in der Tiefe der Kugel H wird sonach aus der Gleichung $cc =$

$\frac{CCZ}{A} - \frac{fH : vv}{\pi mm}$ erhalten, in welcher C, A und Z aus der Beobachtung bekannt sind; das Verhältniß der senkrechten Durchschnittsfläche des Fadens fH zur Durchschnittsfläche der Kugel πmm ergibt sich aus der Messung. Auf kleinen Tiefen unter der Oberfläche ist $\frac{fH}{\pi mm}$ sehr klein, und wir können für so geringe Tiefen ohne Anstand $v = C$ setzen, und nachdem auf solche Art die Geschwindigkeiten des Wassers nahe unter der Oberfläche bestimmt sind, kann die Messung in größere Tiefen fortgesetzt, und für v die aus den vorhergegangenen Messungen sich ergebende mittlere Geschwindigkeit gesetzt werden.

16. In der schiefen Stellung des kreisrunden Fadens ist der wagerechte Durchschnitt desselben eine Ellipse. Zur größeren Deutlichkeit sey der Theil des Fadens NO (Fig. 2) nach einem größeren Maßstabe (Fig. 5) gezeichnet; der Neigungswinkel $nNO = NCR = \lambda$; der Durchmesser des Fadens $Bb = RR'$ wie zuvor $= f$; so ist die halbe größere Axe der Ellipse CN zur halben kleinern Axe CB oder CR wie $1 : \cos. \lambda$; demnach ist die größere Axe $NN' = \frac{f}{\cos. \lambda}$. Wird dieser wagrechte elliptische Durchschnitt (Fig. 6) besonders gezeichnet, und

$Bb = f$, $AA' = \frac{f}{\cos.\lambda}$ gesetzt, dann durch irgend einen Punkt der Ellipse M nach der Richtung der Bewegung des Wassers die Linie DMM' gezogen, und $DM = \frac{vv}{2g}$ genommen, so ist auf ähnliche Art, wie vorhin beim Kreise, $EM = DM.\frac{NO}{NM}$, $HM = DM.\frac{NO.\ NO}{NM.\ NM}$, sonach der Wasserstoß an die vier Elemente der Ellipse MN, $M'N'$, mn $m'n'$ gleich der Wassersäule $2\,NO.DM.\frac{NO.\ NO}{NM.\ NM}$.

Um hieraus den Wasserstoß gegen die ganze Peripherie der Ellipse zu finden, sey der Winkel $ACR = \varphi$, folglich $QR = PM = \frac{f.}{2}\sin.\varphi$; $CQ = \frac{f.}{2}\cos.\varphi$;

$CP = \frac{f\cos.\varphi}{2\cos.\lambda}$; $ON = \delta.PM = \frac{f.}{2}\,\delta.\sin.\varphi$

$= \frac{f\,\delta\varphi\cos.\varphi}{2}$; $MO = \delta.CP = -\frac{f\,\delta\varphi\sin.\varphi}{2\cos.\lambda}$;

$$MN = \sqrt{(NO.\ NO + MO.\ MO)}$$

$$= \frac{f\,\delta\varphi}{2}\sqrt{\left(\cos.\varphi.\ \cos.\varphi + \frac{\sin.\varphi.\ \sin.\varphi}{\cos.\lambda.\ \cos.\lambda}\right)}$$

$$= \frac{f\,\delta\varphi}{\ }\sqrt{\left(1 - \sin.\varphi.\ \sin.\varphi + \frac{\sin.\varphi.\ \sin.\varphi}{\cos.\lambda.\ \cos.\lambda}\right)}$$

$$= \frac{f \partial \varphi}{2} \Gamma (1 + \sin. \varphi. \sin. \varphi. \text{tang.} \lambda. \text{tang.} \lambda).$$

Die Substituzion dieser Werthe gibt die Wassersäule, welche gegen die genannten vier Elemente der Ellipse drücken $= \frac{f. v v. \ \partial \sin. \varphi. \ \cos. \varphi. \cos. \varphi}{2 g \ (1 + \sin. \varphi. \sin. \varphi. \text{tang.} \lambda. \text{tang.} \lambda)}.$

Zur Abkürzung der Rechnung sey $\sin. \varphi. \text{tang.} \lambda = z$, so ist $\partial \sin. \varphi = \frac{\partial z}{\text{tang.} \lambda}$; $\cos. \varphi. \cos. \varphi$

$$= 1 - \frac{z z}{\text{tang.} \lambda. \text{tang.} \lambda} = 1 - \frac{z z \cos. \lambda. \cos. \lambda}{\sin. \lambda. \sin. \lambda}$$

$= 1 + z z - \frac{z z}{\sin. \lambda. \sin. \lambda}.$ Demnach ist der Wasserstoß gegen die elliptischen Bögen $M A m$ und

$$M' A' m' = \frac{f v v.}{2 g \text{tang.} \lambda} \int \partial z \left(\frac{z z}{1 - \sin. \lambda. \sin. \lambda. (1 - z z)} \right)$$

$$= \frac{f v v.}{2 g \text{ tang.} \lambda} \int \partial z \left(1 - \frac{z^2 + z^4 - z^6 + z^8 \ldots}{\sin. \lambda. \sin. \lambda} \right)$$

$$= \frac{f v v.}{2 g \text{ tang} \lambda} \left(z - \frac{\frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} \ldots}{\sin. \lambda. \sin. \lambda} \right)$$

Wird nun zur Erhaltung der Wassersäule, welche gegen die ganze Peripherie der Ellipse drückt, $\sin. \varphi = 1$ gesetzt, so ist $z = \text{tang.} \lambda = \text{tang.} \ n N O$ (Fig. 2) oder an der Oberfläche $= \text{tang.} \ C A D$, (welche wir §. 7 gleichfalls $= z$ gesetzt haben) und weil $\sin. \lambda$

$= \text{tang.}\,\lambda.\ \cos.\,\lambda,$ so ist $\sin.\,\lambda.\ \sin.\,\lambda$
$= \frac{\text{tang.}\,\lambda.\ \text{tang.}\,\lambda}{1 + \text{tang.}\,\lambda.\ \text{tang.}\,\lambda} = \frac{zz}{1+zz}$; demnach ist die gegen die ganze Peripherie der Ellipse drückende Wassersäule $= \frac{f.vv}{3g}\left(1 - \frac{z^2}{5} + \frac{3z^4}{5.7} - \frac{3z^6}{7.9} + \frac{3z^8}{9.11} \ldots\right)$

17. Setzen wir diese Wassersäule bei N. (Fig. 2) $= TN$, und eben so die Wassersäule gegen den wagrechten Durchschnitt des Fadens bei O, $= UO$, so ist der kubische Inhalt der Wassersäule, welche gegen den gebogenen Faden von N bis O drückt, $= TN.\ Nn$
$= \frac{fvv}{3g}\left(1 - \frac{z^2}{5} + \frac{3z^4}{5.7} - \frac{3z^6}{7.9} + \frac{3z^8}{9.11} - \frac{3z^{10}}{11.13} \ldots\right).Nn$
Demnach ist der Stoß oder die Triebkraft des Wassers gegen den Faden von Q bis N, oder nach der Benennung

$$\S.\,7.\ W = \mathfrak{W}.f.\int \frac{vv}{3g}\left(1 - \frac{z^2}{5} + \frac{3z^4}{5.7} - \frac{3z^6}{7.9} \ldots\right) Nn.$$

Wir wollen nun diesen Werth in die Gleichung (§. 7)
$\text{tang.}\ nNO = \text{tang.}\ \alpha \left(1 + \frac{W}{K}\right)$ oder $z = a\left(1 + \frac{W}{K}\right)$ setzen, und eben so statt K den Werth desselben (§. 12) $\mathfrak{W}.\ \pi\, mm.\ \frac{cc}{3g}$ substituiren, so haben wir die Gleichung

$$\frac{z}{a} = 1 + \frac{f.}{\pi mm} \int . \frac{vv}{cc}\left(1 - \frac{z^2}{5} + \frac{3z^4}{5.7} - \frac{3z^6}{7.9}\right) Nn.$$

Das Differenziale dieser Gleichung ist $\partial. z = \frac{a f.}{\pi m m} \frac{v v}{c c} \left(1 - \frac{z^2}{5} + \frac{3 z^4}{5 \cdot 7} - \frac{3 z^6}{7 \cdot 9}\right) N n$, oder nachdem mit der Funktion (z), welche im zweiten Theile dieser Gleichung vorkommt, dividirt worden,

$$\partial z \left(1 + \frac{z^2}{5} - \frac{8 z^4}{5 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{8 z^6}{3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}\right) = \frac{a f\ v v.\ N n.}{\pi m m.\ c c}$$

Zur Bestimmung der beständigen Größe bei der Integration dieser Gleichung ist zu bemerken, daß für den Fall, wenn die Tiefe der Kugel im Wasser oder der Wasserstoß an den Faden verschwindet oder = o wird, der Winkel n N O = d D C oder z = a seyn müsse; demnach erhalten wir $z + \frac{z^3}{3 \cdot 5} - \frac{8. z^5}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{8 z^7}{3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7} =$

$$a + \frac{a^3}{3 \cdot 5} - \frac{8. a^5}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{8 a^7}{3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{a f.}{\pi m m} \int \frac{v v. N n.}{c c}$$

Zur Integrirung des letzten Gliedes dieser Gleichung, muß die Geschwindigkeitsskale oder das Gesetz bekannt seyn, nach welchem die Geschwindigkeiten des Wassers von der Oberfläche bis auf das Grundbett der Flüsse sich ändern. Wir wollen dieses Gesetz vorläufig aus der Natur des Gegenstandes nach mechanischen Prinzipien abzuleiten suchen, und nach dem Beispiele der Astronomen, die Coeffizienten zu den Gliedern der Skale nach bewährten Erfahrungen bestimmen, um auf solche Art die Theorie mit der

Erfahrung in die möglichste Uibereinstimmung zu bringen.

Das Wasser besitzt seiner Natur nach zwar einen hohen Grad von Flüssigkeit, wodurch seine Theile untereinander beweglich und fähig sind jedem Widerstande leicht auszuweichen, doch ist dasselbe vermög seiner Schwere, Undurchdringlichkeit und Trägheit denselben Gesetzen der Mechanik, wie die festen Körper unterworfen, und selbst von der Anreibung und wechselseitigen Mittheilung der Bewegungen seiner Theile nicht frey. Das Rieseln der Bäche und das Brausen der Wasserfälle, das Fortwälzen großer in die Flußbette von den angränzenden Felsen herabgefallener Steine, der aus den Gebirgen herabkommende Schotter und Sand, und die für die Hydrotechnik so wichtige Kraft, mit welcher die Flüsse ihre Bette selbst räumen, sind hinlängliche Beweise sowohl für die Größe der Kräfte, mit welcher die Wässer alle Hindernisse ihrer Bewegung zu beseitigen streben, als auch für die wechselseitige Mittheilung, mit welcher die Wassertheile einander in Bewegung setzen, beschleunigen und verzögern. Von der Bewegung des Wassers in Röhren und Kanälen ist (§. 14) das von den Hydrotechnikern angenommene Gesetz angeführt worden, daß die Widerstände der Röhrenwände und Flußbette theils der ersten, theils der zweiten Potenz der Geschwindigkeiten, oder den Geschwindigkeitshöhen proporzional sind, und wir haben dort zugleich die Gründe angeführt, aus welchen nur der größere Theil dieser Widerstände, welcher der Geschwindigkeitshöhe proporzional ist, in unsere Rechnung aufgenommen wurde, welche Voraussetzung wir auch hier noch zur Vermeidung größerer Weitläufigkeiten beibehalten. Das Wasser erfährt in dieser Hinsicht bei seiner Bewegung über Sand und Steine in den Flußbetten, und durch seinen Stoß an diese Körper einen ähnlichen Widerstand, wie die Wägen auf gepflasterten Straßen, von dem (in den neuern Abhandlungen der böhm. gelehrten Gesellschaft Prag 1812) gezeigt worden, daß derselbe gleichfalls dem Quadrate der Geschwindigkeit, mit welcher gefahren wird, proporzional sey. Diese Widerstände wirken der bewegenden Kraft, die aus dem Gefälle der Flüsse entsteht, entgegen, und veranlassen eine verzögerte, gleichförmige, oder beschleunigte Bewegung des Wassers, je nachdem die örtlichen Widerstände des Flußbettes größer, gleich oder kleiner sind als das Gefälle. Die langsamere Bewegung, in welche dadurch die unterste oder dem Flußbette nächste Wasserschicht gesetzt wird, ist offenbar auch den obern geschwinder fließenden Wasserschichten hinderlich, nur mit dem Unterschiede, daß der

Widerstand der untersten Wasserschicht auf dem ruhenden Flußbette der größte, und der ganzen Geschwindigkeitshöhe proporzional ist, dagegen die Widerstände der obern auf einander fortfließenden Wasserschichten, welche sich nur mit dem Unterschiede ihrer Geschwindigkeitshöhen $\left(= \delta \frac{vv}{4g}\right)$ begegnen, nur diesem Unterschiede proporzional seyn können. Aus der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung, welche in der Natur aller Orten statt findet, folgt von selbst, daß von diesem Widerstande die nächst untere langsamer fließende Wasserschicht eben so sehr beschleunigt, als die nächst obere geschwinder fließende verzögert werden müsse. Da wir aber gegenwärtig nur dasjenige Hinderniß betrachten, welches in der Beschaffenheit, größern oder geringern Rauhheit oder Schlüpfrigkeit der Wassertheile seinen Grund hat, so folgt aus der Voraussetzung einer gleichen Beschaffenheit der Wassertheile, daß auch die Ursache der wechselseitigen Wirkung der Wassertheile in der ganzen Höhe des Flußes gleich, sonach die Unterschiede dieser wechselseitigen Einwirkung, oder das zweite Differenzial der Geschwindigkeitshöhe $\delta\delta \frac{vv}{4g} = 0$ seyn müsse.

19. Da wir hiebei die Geschwindigkeit des Wassers als eine Funktion der Höhe oder Tiefe des Wassers betrachten, so sey die Tiefe eines Wassertheilchens, das mit der Geschwindigkeit v fortfließt, $= x$, die Tiefe des nächst untern $= x + \partial x$, so ist das erste Integrale der gefundenen Gleichung $\partial . \frac{vv}{4g} = - B \partial x$, wo der beständigen Größe $B \partial x$ das negative Zeichen vorgesetzt worden, weil der Widerstand $\partial \frac{vv}{4g}$ vom Flußbette aufwärts abnimmt, sonach die Vermehrung der Geschwindigkeit ∂v mit einer Verminderung der Tiefe $- \partial x$ verbunden ist. Wird die letztere Gleichung noch einmal integrirt, so erhalten wir zur Geschwindigkeitsskale die Gleichung

$$\frac{vv}{4g} = A - Bx.$$

Zur Bestimmung der beständigen Größen A und B, haben wir die Geschwindigkeit des Wassers an der Oberfläche des Flußes für $x = 0$, $v = C$, demnach $A = \frac{CC}{4g}$. Dann sey noch für eine gegebene Tiefe $x = h$, die Geschwindigkeit $v = \nu$, so ist $\frac{\nu\nu}{4g} = \frac{CC}{4g} - Bh$; demnach $B = \frac{CC}{4g} - \frac{\nu\nu}{4g}$. Wir haben sonach für alle übrigen Wassertiefen $\frac{vv}{4g}$ $= \frac{CC}{4g} - \frac{(CC - \nu\nu)}{4g}\frac{x}{h}$ oder $vv = CC - (CC - \nu\nu)\frac{x}{h}$.

20. In mehreren hydrotechnischen Schriften wird die Abnahme der Geschwindigkeit des Wassers in Flüssen von der Oberfläche bis auf das Grundbett gleichförmig angenommen; dagegen zeigt unsere Rechnung, daß diese Gleichförmigkeit nicht den Geschwindigkeiten, sondern ihren Quadraten, oder den Geschwindigkeitshöhen zukommt, aus dem Grunde, weil die Ursache der abnehmenden Geschwindigkeit, nämlich der Widerstand der Wassertheile nicht der ersten, sondern der zweiten Potenz der Geschwindigkeit proporzional ist. Eine gleichförmige Abnahme findet nur bei sehr langsamen Bewegungen des Wassers statt, wo nämlich der wechselseitige Widerstand der Wassertheile mehr der Cohärenz als dem Stoße beizumessen, sonach mehr die erste als die zweite Potenz der Geschwindigkeiten merklich ist. Auch bei größeren Geschwindigkeiten kann die Abnahme als gleichförmig betrachtet werden, wenn die Tiefe x und der Unterschied der Geschwindigkeiten $C - \nu$ klein ist, weil in diesem Falle bei der Ausziehung der Quadratwurzel die höhern Potenzen

des Bruches $\left(\frac{CC - \nu\nu}{2\,CC}\right)\frac{x}{h}$ vernachlässigt, sonach die Geschwindigkeit $v = C.\left(1 - \left(\frac{CC - \nu\nu}{CC}\right)\frac{x}{2h}\right)$ gesetzt werden kann.

21. Die §. 19 gefundene Gleichung zeigt, daß die Geschwindigkeiten des Wassers in Flüssen überhaupt dem Gesetze der Ordinaten einer auf ihren Scheitel aufgestellten Parabel folgen, und wenn wir dieselbe Gleichung in der folgenden Gestalt betrachten $vv = \left(\frac{CC - \nu\nu}{h}\right)\left(\frac{CC.h}{CC - \nu\nu} - x\right)$, so sehen wir, daß der Parameter dieser Parabel um so kleiner ist, je kleiner die Unterschiede der Geschwindigkeiten $CC - \nu\nu$ für eine gegebene Tiefe h vorgefunden werden. Die Geschwindigkeit oder die Ordinate der Parabel v ist $= 0$, wenn $x = \frac{CCh}{CC - \nu\nu}$; der Scheitel der Parabel befindet sich demnach unter der Oberfläche des Wassers in der Tiefe $\frac{CCh}{CC - \nu\nu}$; oder wenn h die ganze Tiefe des Flußes und ν die Geschwindigkeit des Wassers am Grundbette vorstellet, so ist die Tiefe des Scheitels unter dem Grundbette $= \frac{CC.h}{CC - \nu\nu} - h = \nu\nu.\frac{h}{CC - \nu\nu}$.

22. Wir wollen nun die §. 19 gefundene Skala an einigen bewährten Versuchen prüfen, um entweder ihre Uibereinstimmung zu erfahren, oder von demjenigen, was hiebei noch abzuändern seyn möchte, genauer unterrichtet zu werden.

Die folgenden Geschwindigkeitsmessungen sind vom L. Ximenes im Arno mit seiner bekannten Wasserfahne gemacht, und vom Herrn geh. Rath Eitelwein (Handbuch der Mechanik und Hydraulik. Berlin 1801 S. 196) im rheinischen Maße berechnet worden. Man hat sich bemüht, den beständigen Größen A und B solche Werthe beizulegen, damit die Summe aller Unterschiede in der ganzen Reihe der Versuche sich aufheben, sonach aus der Größe der Unterschiede die nöthige Uibereinstimmung um so leichter zu erkennen seyn möchte. Die Zahlen $1525 = CC$ und $448 = CC - \gamma\gamma$ sind Quadratzolle; die Höhe h ist 100 Soldi oder 15, 46 Rhein. Fuß, der die Höhen x analog genommen werden müssen.

Tiefe unter der Oberfläche		beobachtete Geschwindigkeiten	Rechnung			Unterschiede der Rechnung von der Beobacht.
			$1525-448\frac{x}{h}=vv$		v	
Soldi	R. Fuß	R. Z.			R. Z.	R. Z.
0,00	0,00	- -	1525— 0	1525	39,1	——
6,25	0,97	- -	1525— 28	1497	38,7	——
12,50	1,93	38,4	1525— 56	1469	38,3	+ 0,1
18,75	2,90	37,9	1525— 84	1441	38,0	−0,1
25,00	3,86	37,3	1525—112	1413	37,6	−0,3
31,25	4,83	37,3	1525—140	1385	37,2	+ 0,1
37,50	5,80	36,2	1525—168	1357	36,8	−0,6
43,75	6,76	36,2	1525—196	1329	36,5	−0,3
50,00	7,73	36,1	1525—224	1301	36,1	0,0
56,25	8,70	36,1	1525—252	1273	35,7	+ 0,4
62,50	9,66	36,0	1525—280	1245	35,3	+ 0,7
68,75	10,63	35,0	1525—308	1217	34,9	+ 0,1
75,00	11,59	35,0	1525—336	1189	34,5	+ 0,5
81,25	12,56	34,2	1525—364	1161	34,1	+ 0,1
87,50	13,53	33,6	1525—392	1133	33,7	−0,1
93,75	14,49	33,1	1525—420	1105	33,2	−0,1
100,00	15,46	32,6	1525—448	1077	32,8	−0,2
106,25	16,50	30,0	1525—476	1049	32,3	−2,3

Diese Messungen stimmen demnach sehr nahe mit einer Parabel, deren Scheitel 340,4 Soldi, oder 52,6 Rhein-Fuß unter der Oberfläche des Flußes, oder 36,1 Fuß unter dem Grundbette liegt. Der Parameter dieser Parabel ist = 2,4 Rhein-Zolle.

23. Die folgenden Messungen sind vom Herrn Brünings im Ober- und Niederrhein und in der Waal mit einem eigenen Instrumente angestellt. Zur Ersparung des Raums sind von den beobachteten Geschwindigkeiten die Hunderttheile des Zolles weggelassen und nur die Zehntheile beibehalten worden. Weil aber bei allen diesen Messungen die Quadrate der Geschwindigkeiten mehr als nach Verhältniß der Tiefe abnehmen, so mußte in die Rechnung noch die zweite Potenz der Tiefe eingeführt, sonach für die Geschwindigkeitsskale eine Ellipse (oder Hyperbel) angenommen werden. Die Coeffizienten der Skala wurden abermals so bestimmt, daß die Summe der positiven und negativen Unterschiede in jeder Versuchsreihe sich möglichst aufheben möchte, und da diese Messungen mehr als die von Ximenes angeführten, von einander abweichen, so hat man zur Bewirkung einer genauern Uibereinstimmung die

beinahe gleichen Geschwindigkeiten auf gleichen Tiefen im Ober- und Nieder-Rhein zusammen genommen, und bei der hierüber geführten Rechnung sich blos an das Mittel gehalten.

Tiefen unter der Oberfläche	Gemessene Geschwindigkeiten			
	Nieder-Rhein	Ober-Rhein	Nieder-Rhein	Mittel
Fuß	Zolle	Zolle	Zolle	Zolle
0	— —	— —	— —	— —
1	56,8	56,1	54,8	55,9
2	55,4	55,4	55,4	55,4
3	54,1	54,8	54,5	54,5
4	54,1	55,4	53,4	54,3
5	54,8	54,8	54,1	54,6
6	52,8	52,7	54,1	53,3
7	52,8	54,1	53,4	53,4
8	54,8	52,0	52,7	53,2
9	50,6	52,8	53,4	52,0
10	50,6	51,5	51,5	51,2
11	46,1	46,9	50,0	47,6
12	45,3	46,5	48,4	46,7
13	41,5	46,8		45,6
14	46,1	43,6		44,8
15	42,6	41,0		41,8

Rechnung			Unterschiede der Rechnung von der Messung
$3100-375\,\frac{x.\ x}{8.\ 8}$	$=vv$	$v.$	
□ Zolle	□ Zolle	Zolle	Zolle
3100 — 0	3100	55,7	
3100 — 6	3094	55,6	+ 0,3
3100 — 23	3077	55,4	0,0
3100 — 53	3047	55,2	— 0,7
3100 — 94	3006	54,8	— 0,5
3100 — 147	2953	54,3	+ 0,3
3100 — 211	2889	53,7	— 0,4
3100 — 287	2813	53,0	+ 0,4
3100 — 375	2725	52,2	+ 1,0
3100 — 474	2626	51,2	+ 0,8
3100 — 586	2514	50,1	+ 1,1
3100 — 709	2391	48,9	— 1,3
3100 — 844	2256	47,5	— 0,8
3100 — 991	2109	45,9	— 0,3
3100 — 1149	1951	44,2	+ 0,6
3100 — 1319	1781	42,2	— 0,4

Diese Messungen geben für die Geschwindigkeitsskala eine Ellipse. Die größere halbe Axe dieser Ellipse ist = 22,7 Fuß, die kleinere halbe Axe = 55,7 Zolle. Der Mittelpunkt der Ellipse befindet sich an der Oberfläche.

Tiefe unter der Oberfläche	Geschwindigkeiten in der Waal	Rechnung: $vv = 2165 + 158\frac{x}{8} - 343\cdot\frac{x.x}{8\cdot 8}$	Rechnung: v	Unterschiede der Rechnung von der Messung
Fuß	Zolle	Quadr. Zolle	Zolle	Zolle
0	- -	2165	46,5	
1	46,8	2180	46,7	+ 0,1
2	46,1	2183	46,7	— 0,6
3	46 5	2176	46,6	— 0,1
4	46,9	2158	46,5	+ 0,4
5	46,1	2130	46,2	— 0,1
6	46,1	2090	45 8	+ 0,3
7	44,7	2040	45,2	— 0,5
8	4[illegible],6	1980	44,5	— 0,9
9	43,6	1909	43,7	— 0,1
0	44,4	1827	42,7	+ 1,7
11	42 8	1734	41,6	+ 1,2
12	4[illegible],0	1630	40,4	+ 0,6
13	38,3	1516	39,0	— 0,7
14	36,3	1391	37,3	— 1,0
15	35,3	1255	35,[illegible]	— 0,1

Auch nach diesen Messungen ist die Geschwindigkeitsskale eine Ellipse. Die größere halbe Axe ist = 20,2 Fuß, die kleinere halbe Axe = 46,7 Zolle. Der Mittelpunkt dieser Ellipse befindet sich 1,8 Fuß unter dem Wasserspiegel.

Tiefe unter der Oberfläche	Geschwindigkeiten im Ober-Rhein	Rechnung: $vv = 1764 + 20.x - 8xx$	Rechnung: v	Unterschiede von der Erfahrung
F.	Zolle	Quad. Zolle	Zolle	Zolle
0	--	1764	42,0	--
1	41,9	1776	42,1	— 0,2
2	42,8	1772	42,1	+ 0,7
3	41,0	1752	41,9	— 0,9
4	40,1	1716	41,4	— 1,3
5	41,9	1664	40,8	+ 1,1
6	40,1	1596	39,9	+ 0,2
7	39,2	1512	38,9	+ 0,3
8	37,3	1412	37,6	— 0,3
9	36,3	1296	36,0	+ 0,3

Diese Messungen geben für die Geschwindigkeitsskale abermals eine Ellipse. Die größere halbe Axe ist = 15 Fuß, die kleinere halbe Axe = 42,1 Zoll. Der Mittelpunkt der Ellipse liegt 1,25 Fuß unter der Oberfläche des Wassers.

24. Diese Geschwindigkeitsmessungen geben demnach das übereinstimmende Resultat, daß die Geschwindigkeiten dieser Flüsse von der Oberfläche bis auf das Grundbett nach dem Gesetze der Ordinaten einer Ellipse abnehmen. Der Mittelpunkt der Ellipse befindet sich bei der ersten Versuchsreihe an der Oberfläche, bei der zweiten 1,8 und bei der dritten 1,2 Fuß unter der Oberfläche. Dieses Resultat bestätigt Herr Brünings mit der Bemerkung, daß er die größte Geschwindigkeit nicht an der Oberfläche, sondern meistens 1 bis 2 Fuß unter der Oberfläche gefunden habe. — Die größere Axe der Ellipse steht winkelrecht auf der Oberfläche des Wassers, und der untere Scheitel dieser Axe befindet sich unter dem Grundbette, in der ersten Versuchungsreihe bei 22,7 — 15,0 = 7,7 Fuß, in der zweiten Versuchsreihe bei 20,2 + 1,8 — 15 = 7,0 Fuß, und in der dritten Versuchsreihe bei 15 + 1,2 — 9 = 7,2 Fuß; woraus demnach auf eine mittlere Tiefe des Scheitels unter dem Flußbette von 7,3 Fuß zu schließen wäre. Das Verhältniß der kleinern Axe

zur größern ist in der ersten Versuchsreihe wie 55,7 : 23,0. 12 = 1 : 5,0; in der zweiten Versuchsreihe wie 46,7 : 20,2. 12 = 1 : 5,2; in der dritten wie 42,1 : 15 . 12 = 1 : 4,3; welche Verhältnisse gleichfalls nicht viel von einander abweichen. Aus dieser Uibereinstimmung dürfte jedoch nur auf eine gleiche Beschaffenheit der Flußbette in den genannteu Gegenden zu schließen, aber keine allgemeine für alle Flüsse anwendbare Regel abzuleiten seyn, weil schon die Messungen des Ximenes im Arno hievon abweichen, und die verschiedene Beschaffenheit der Flußbette als Schlamm, Sand, Schotter, Steine, schroffe Felsen u. dgl. zu groß ist, als daß bei den hievon abhängigen Bewegungen des Wassers an ein bestimmtes allgemeines Maß gedacht werden könnte.

25. Da alle Messungen des Herrn Brünings darin übereinstimmen, daß die Unterschiede der Geschwindigkeitshöhen für gleiche Stuffen in der Tiefe nahe am Flußbette größer sind als nahe an der Oberfläche, sonach die Widerstände mit der Wassertiefe zunehmen, welche Erfahrung mit der (§. 18) angenommenen gleichen Beschaffenheit der Wassertheile nicht vereinigt werden kann, so wollen wir hierüber noch folgende Erklärung versuchen. Es ist bereits oben (§. 18) eine Analogie zwischen dem Widerstan-

de der Wägen auf gepflasterten Straßen und dem Widerstande des Wassers auf steinigten Flußbetten bemerkt worden. Beide diese Widerstände veranlassen eine wellenförmige Bewegung sowohl für die Frachtwägen als für die Wassertheile auf ihrem Wege über die Unebenheiten des Flußbettes. Von dem Widerstande der Wägen ist bekannt, daß derselbe der Höhe der Steine proporzional ist, und durch die Versuche des Herrn Edgeworth in England ist erwiesen, daß die Zugkraft der Wägen für die Pferde erleichtert wird, wenn die Ladung auf elastische Federn gelegt, folglich durch Nachgiebigkeit der Federn die Stöße vermindert und die Unebenheiten der wellenförmigen Bewegung ausgeglichen werden. Bei dem Wasser findet eine ähnliche Ausgleichung aus einem andern Grunde statt; denn das Wasser schwillt vor den Hindernissen seiner Beweguug an, wodurch die Unebenheiten des Grundbettes für die obern Wasserschichten nach Maßgabe der Höhe, auf welcher sie fortfließen, vermindert werden. Es ist aus den Erfahrungen der Taucher bekannt, und auch in der Theorie der Wellen (Abhandl. der böhm. gelehrten Gesellschaft. Prag 1804) erwiesen worden, daß die durch Stürme und andere Ursachen an der Oberfläche des Meeres erregten Wellen in die Tiefe hinab sehr schnell vermindert und für die Taucher unmerklich werden; es ist demnach nicht unwahrscheinlich, daß auch umgekehrt die von den Unebenheiten des Flußbettes erzeugten Wellen (Fig. 8) nach Verhältniß der Höhe der Wasserschichten über dem Grundbette kleiner werden. An der Oberfläche seichter Wildbäche sind alle Unebenheiten des Grundbettes deutlich zu sehen, welche aber bei steigendem Wasser immer unmerklicher werden, so daß bei großen Anschwellungen der Flüsse, selbst die größeren Wasserbauwerke, als Mühlwehren, Faschinendämme, Sporne, u. dgl. an der Oberfläche verschwinden; und da bei dem Steigen des Wassers in Flüssen immer auch eine größere Geschwindigkeit an ihrer Oberfläche sichtbar wird, obgleich das Gefälle des Flußes unveränderlich dasselbe bleibt, so erhellet, daß die Widerstände der Bewegung des Wassers auf größern Höhen über dem Grundbette abnehmen, oder weniger wirksam sind.

26. Da es aber noch an Erfahrungen mangelt, welche über die Gesetze dieser Abnahme einen hinreichenden Aufschluß geben könnten, so wollen wir einstweilen diese Vermehrung des Widerstandes der Wassertiefe proporzional setzen. Es sey demnach diejenige Tiefe unter der Oberfläche des Flußes, wo die Unebenheiten des Flußbettes verschwinden, $= e$, so wird der Widerstand der Wassertheile untereinan-

der, nämlich $\partial . \frac{vv}{4g}$ der Tiefe $x - e$ proporzional seyn, und wenn wir den zur Gleichheit nothwendigen Coeffizienten dieses Widerstandes $= \frac{- B \partial x}{4 g}$ setzen, so ergibt sich die Geschwindigkeitsskale aus der Gleichung $\partial \left(\frac{vv}{4g}\right) = - B \frac{(x - e) \partial x}{4g}$, folglich $vv = CC + Bex - \frac{Bxx}{2}$. Um die beständigen Größen B und e zu bestimmen, sey in der Tiefe h die Geschwindigkeit $= \nu$, und in der Tiefe 2 h die Geschwindigkeit $= c$, so haben wir erstlich $\nu\nu = CC + Beh - \frac{Bhh}{2}$; demnach $Be = \frac{\nu\nu - CC}{h} + \frac{Bh}{2}$. Dieser Werth statt Be in die gefundene Gleichung gesetzt, gibt $vv = CC - (CC - \nu\nu) \frac{x}{h} - \frac{Bx}{2} (x - h)$. Dann ist bei der Kugel in der Tiefe 2 h, $cc = CC - 2 (CC - \nu\nu) + Bhh$, sonach $B = \frac{2 \nu\nu - CC - cc}{hh}$. Wird nun noch dieser Werth statt B in die letzte Gleichung gesetzt, so haben wir die Geschwindig-

keitsskala $vv = CC - (CC - \nu\nu)\frac{x}{h} +$
$(CC - 2\nu\nu + cc)\frac{x}{h} \cdot \frac{(x-h)}{2h}$.

Zur Abkürzung sey unter den drei Geschwindigkeitsquadraten CC, $\nu\nu$, cc die erste Differenz $CC - \nu\nu = \triangle$, die zweite Differenz $CC - 2\nu\nu + cc = \triangle\triangle$, so haben wir für die Geschwindigkeitsskala oder für die krumme Linie, welche durch die Endpunkte der Ordinaten CC, $\nu\nu$, cc geht, die Gleichung vv

$$= CC - \triangle\frac{x}{h} + \triangle\triangle\frac{x\ (x-h)}{h.\ 2h}.$$

27. Von dieser Gleichung ist zu bemerken, erstens die Wassertiefe, in welcher die Ungleichheiten des Grundbettes verschwinden, $e = \frac{\nu\nu - CC}{Bh} + \frac{h}{2}$ $= \frac{h}{2} + \frac{\triangle\ h}{\triangle\triangle}$. Nach den Messungen des Ximenes war die zweite Differenz der Quadrate der Geschwindigkeiten $\triangle\triangle = 0$, oder wenigstens eine unmerklich kleine Größe, folglich wäre e unendlich oder doch sehr groß; demnach müßten die Unebenheiten des Grundbettes auf allen Höhen des Wassers in gleichem Maße sichtbar seyn. Da die Erfahrung dem widerspricht, so ist dadurch auch die Meinung von der gleichförmigen Abnahme der Geschwindigkeiten des

Wassers in Flüssen unhaltbar. — Nach den Messungen des Herrn Brünings sind die ersten Differenzen der Geschwindigkeitshöhen in der Nähe des Grundbettes größer, als nahe unter der Oberfläche; demnach ist $\triangle\triangle$ eine negative Größe, folglich $e < \frac{h}{2}$; und da nach denselben Messungen $\triangle\triangle$ beinahe $= -2\triangle$, so verschwinden die Ungleichheiten des Flußbettes nahe an der Oberfläche. Der Rhein zeigt demnach in den genannten Gegenden eine ebene Oberfläche, und gehört unter die stillen Flüsse.

Zweitens. Die Gleichung $vv = CC + Bex - \frac{Bxx}{2}$ gehört offenbar zu einer Ellipse. Die Tiefe des Scheitels dieser Ellipse, oder der Ort, wo die Geschwindigkeit $v = 0$ wird, ist $= e \pm r\left(ee + 2\frac{CC}{B}\right)$; demnach befindet sich der Mittelpunkt der Ellipse und die größte Geschwindigkeit in der Tiefe e; die größere halbe Axe der Ellipse ist $= r\left(ee + \frac{2CC}{B}\right)$, und die kleinere halbe Axe, oder die größte Geschwindigkeit ist $= r\left(CC + \frac{B.ee}{2}\right)$. In der ersten Reihe der Messungen des Herrn Brünings war $2\triangle + \triangle\triangle$ oder $2(CC - vv) + CC - 2vv + cc = 0$, demnach war der Mittelpunkt der Ellipse und die größte Geschwindigkeit an der Oberfläche des Flusses, u. s. w.

28. Es wäre wohl möglich (nach der Theorie der Wellenbewegung ist es wahrscheinlich), daß bei einer genauern Untersuchung der Geschwindigkeiten des Wassers in Flüssen nebst den ersten und zweiten Differenzen der Geschwindigkeitshöhen auch noch dritte Differenzen zum Vorschein kommen möchten. Da wir die Geschwindigkeitsmessungen mit dem Pendel auf eine allgemeine Art abhandeln müssen, und uns sonach an kein bestimmtes Gesetz für diese Geschwindigkeiten binden dürfen, so wollen wir die Geschwindigkeiten, welche in den Tiefen o, h, 2h, 3h, ... anzutreffen sind, C, ν, ν', ν'', ... nennen, und für die Geschwindigkeitsskale folgende allgemeine Gleichung annehmen $vv = CC - Nx - Pxx - Qxxx \ldots$ Die Bestimmung der Coeffizienten N, P, Q, . . ergibt sich durch folgende Gleichungen: Erstens für $x = h$ und $v = \nu$ ist $\nu\nu = CC - Nh - Phh - Qhhh$; also $N = \frac{CC - \nu\nu}{h} - Ph - Qhh$. Dieser Werth statt N gesetzt, gibt $vv = CC - (CC - \nu\nu)\frac{x}{h} - \frac{Px(x-h)}{h} - \frac{Qx(xx-hh)}{h}$. Zweitens für $x = 2h$ und $v = \nu'$ ist $\nu'\nu' = CC - 2(CC - \nu\nu)$

D

$-2Ph-2.3.Qhh$, folglich $P=\frac{-CC+2\nu\nu-\nu'\nu'}{2h}$
$-3Qh$; und dieser Werth statt P gesetzt, gibt
$vv=CC-(CC-\nu\nu)\frac{x}{h}+(CC-2\nu\nu+\nu'\nu')$
$\frac{x(x-h)}{h.2h}-\frac{Qx(x-h)(x-2h)}{h}$. Drittens
für $x=3h$ und $v=\nu''$ ist $\nu''\nu''=CC-3$
$(CC-\nu\nu)+3(CC-2\nu\nu+\nu'\nu')-3h.2h.Q$;
hieraus folgt $Q=\frac{CC-3\nu\nu+3\nu'\nu'-\nu''\nu''}{2h.3h}$. Setzen wir nun zur Abkürzung die erste Differenz $CC-\nu\nu=\triangle$, die zweite Differenz $(CC-\nu\nu)-(\nu\nu-\nu'\nu')=CC-2\nu\nu+\nu'\nu'=\triangle\triangle$, die dritte Differenz $(CC-2\nu\nu+\nu'\nu')-(\nu\nu-2\nu'\nu'+\nu''\nu'')=CC-3\nu\nu+3\nu'\nu'-\nu''\nu''=\triangle\triangle\triangle$, so haben wir für die Geschwindigkeitsskale folgende allgemeine Gleichung $vv=CC-\triangle\frac{x}{h}+\triangle\triangle\frac{x(x-h)}{h.2h}$
$-\triangle\triangle\triangle\frac{x(x-h)(x-2h)}{h.2h.3h}$, welche ohne Anstand noch weiter fortgesetzt und auf die vierten und fünften Differenzen u. s. w. erstreckt werden kann.

29. Wir kommen nun auf die Gleichung §. 17 zurück, für welche noch das Verhältniß des Wasserstoßes an den eingetauchten Faden und an die Ku-

gel oder $\int \frac{af.vv.Nn}{\pi mm.cc}$ gefunden werden muß. Setzen wir zu dieser Absicht die unbestimmte Tiefe EX, (Fig. 2) in welcher das Element des Fadens NO sich befindet $= x$, sonach $Nn = XY = \partial x$, und nehmen wir zuerst nach den Erfahrungen des Ximenes die Geschwindigkeitsskale $vv = CC - \Delta \frac{x}{h}$, so ist

$$\int vv \partial x = \int \left(CC - \frac{\Delta x}{h}\right) \partial x = x.\left(CC - \frac{\Delta x}{2h}\right)$$

folglich wenn wir die Tiefe der Kugel im Wasser $x = h = H$, und die Geschwindigkeit in dieser Tiefe $v = c$ setzen, so ist $\int vv \partial x = H\left(CC - \frac{\Delta}{2}\right)$ $= H\left(\frac{CC + cc}{2}\right)$. Weil aber in diesem Fall die Quadrate der Geschwindigkeiten gleichförmig abnehmen, so können wir die Geschwindigkeit in der Mitte des Wassers zwischen der Oberfläche und der Kugel μ nennen, sonach $\frac{CC + cc}{2} = \mu\mu$ setzen; auf solche Art erhalten wir $\int \frac{afvv.Nn}{\pi mm.cc} = \frac{a.f\,H.\,\mu\mu}{\pi mm.cc}$.

Bei den Messungen des Brünings mußte noch die zweite Differenz der Quadrate der Geschwindigkeiten in Rechnung genommen werden; nehmen wir demnach $vv = CC - \Delta\frac{x}{h} + \Delta\Delta\frac{x(x-h)}{h.\ 2h}$,

so ist $\int. vv\partial x = \left(CC - \Delta\frac{x}{2h} + \Delta\Delta\frac{x(2x-3h)}{3h.\ 4h}\right)$.

Setzen wir in der Tiefe der Kugel $H = x = 2h$, $\nu' = c$, so ist $\int. vv\partial x = H\left(CC - \Delta + \frac{\Delta\Delta}{6}\right)$ oder (wegen $\Delta = CC - \nu\nu$, und $\Delta\Delta = CC - 2\nu\nu + cc$) $= H\left(\frac{CC + 4\nu\nu + cc}{6}\right)$. Wenn sonach $\frac{CC + 4\nu\nu + cc}{6} = \mu\mu$ gesetzt wird, so erhalten wir $\int\frac{a\,f\,vv\,Nn}{\pi\,mm\,cc} = \frac{a.\,f.\,H.\,\mu\mu}{\pi\,mm.\,cc}$.

Für den Fall, wenn noch die dritten Differenzen eine merkliche Größe erhalten, haben wir $vv = CC - \Delta\frac{x}{h} + \Delta\Delta\frac{x}{h}\left(\frac{x-h}{2h}\right) - \Delta\Delta\Delta\frac{x}{h}\left(\frac{x-h}{2h}\right)\left(\frac{x-2h}{3h}\right)$; demnach $\int vv\partial x = CCx - \Delta\frac{xx}{2h} + \Delta\Delta\frac{xx}{3h}\left(\frac{2x-3h}{4h}\right) - \Delta\Delta\Delta\frac{xx(x-2h)(x-2h)}{2h.\ 3h.\ 4h}$.

Setzen wir für den ganzen Faden von der Oberfläche bis zur Kugel $x = 3h = H$, und $\nu'' = c$ so ist $\int. vv\partial x = H\left(CC - \frac{3\Delta}{2} + \frac{3\Delta\Delta}{4} - \frac{\Delta\Delta\Delta}{8}\right)$ oder

(wegen $\nu'' = c$) $= H \left(\frac{CC + 3\nu\nu + 3\nu'\nu' + cc}{8}\right)$.
Wenn in diesem Falle die mittlere Geschwindigkeit μ aus der Gleichung $\frac{CC + 3\nu\nu + 3\nu'\nu' + cc}{8} = \mu\mu$ bestimmt wird, so erhalten wir abermals $\int \frac{af, vv.\delta x}{\pi mm. cc}$
$= \frac{afH.\mu\mu}{\pi mm.cc}$.

Auf gleiche Art würde diese Rechnung noch über die vierte und fünfte Differenz erstrecket, sonach der Wasserstoß an den Faden bis zu jeder Tiefe mit der größten Genauigkeit berechnet werden können; weil aber die Unterschiede der Geschwindigkeiten von einem Fuß zum andern in die Tiefe hinab nicht sehr groß sind, auch der Coeffizient $\frac{fH}{\pi mm}$ oder das Verhältniß der Durchschnittsfläche des Fadens zur Durchschnittsfläche der Kugel, mit welchem das Verhältniß des Wasserstoßes an den Faden und an die Kugel multiplizirt werden muß, sehr klein ist, so können wir für die folgenden größeren Tiefen zur Bestimmung des Quadrates der mittlern Geschwindigkeit folgende allgemeine Methode anwenden. Es sey (Fig. 7) die Skale der Geschwindigkeiten durch die krumme Linie d o p q r s vorgestellt, nämlich die Wasfertiefen durch D O, D P, D Q ... und die Quadrate der Geschwindigkeiten, welche auf diesen Tiefen anzutreffen sind oder die Größen $\nu\nu$, $\nu'\nu'$, $\nu''\nu''$ durch die Ordinaten O o, P p, Q q . . . Setzen wir die Tiefe D Q = x, so ist der Wasserstoß an das Element Q R offenbar gleich der Fläche Q q R r, oder $vv\partial x = \left(\frac{Qq + Rr}{2}\right) QR$. Einen ähnlichen Ausdruck erhalten wir für alle übrigen Elemente D O, O P, P Q, . . . demnach ist $\int. vv\partial x$ $= \left(\frac{Dd+Oo}{2}\right)DO + \left(\frac{Oo+Pp}{2}\right)OP + \left(\frac{Pp+Qq}{2}\right)Qq + \left(\frac{Qq + Rr}{2}\right) QR$ . . . . Es sey die Tiefe der Kugel D S = H, und die Anzahl der gleichen Abtheilungen, in welche diese Tiefe getheilt worden, = n, so ist $DO = OP = PQ \ldots = \frac{H}{n}$; demnach ist die Fläche $DdsS = \left(\frac{Dd+2Oo+2Pp+2Qq+2Rr+Ss}{2}\right)DO$, oder $\int vv\partial x = \left(\frac{CC+2\nu\nu+2\nu'\nu'+2\nu''\nu''+2\nu'''\nu'''+cc}{2n}\right)H$. Hieraus ergibt sich

$\mu\mu = \frac{CC + 2\nu\nu + 2\nu'\nu'+2\nu''\nu''+2\nu'''\nu'''..+ cc}{2n}$; und

$\int \frac{a f v v \partial x}{\pi m m c c} = \frac{a f H. \mu \mu}{\pi m m. cc}$ wie zuvor. Es wird also nur darauf ankommen, für jede Tiefe die mittlere Geschwindigkeit μ, mit welcher das Wasser dem Faden begegnet, mit der erforderlichen Genauigkeit zu bestimmen; welches um so verläßiger geschehen kann, je mehrere Geschwindigkeiten $C, v, v' \ldots$ bereits gemessen worden sind.

30. Wird nun in die Gleichung §. 17 statt $\int \frac{a f v v. N n}{\pi m m. cc}$ der gleiche Werth $\frac{a f H. \mu \mu}{\pi m m. cc}$ oder wegen $\frac{a}{cc} = \frac{A}{CC}$ der Werth $\frac{A. f H. \mu \mu}{\pi m m. CC}$ gesetzt, so erhalten wir zwischen der Abweichung der Kugel unter dem Wasser a und der beobachteten Abweichung an der Oberfläche z folgende Gleichung: $a + \frac{a^3}{15} - \frac{8 a^5}{875} + \frac{8 a^7}{2625} \ldots = z + \frac{z^3}{15} - \frac{8 z^5}{875} + \frac{8 z^7}{2625} \ldots - \frac{A f H. \mu \mu}{\pi m m. CC}$.

In dieser Gleichung ist die Entfernung z, wie weit nämlich der Faden außer dem Wasser von der Senkbleylinie absteht, aus der Beobachtung bekannt, eben so sind die Durchschnittsflächen des eingetauchten Fadens f H, und der Kugel $\pi m m$ aus ihrer Messung bekannt, und da die Geschwindigkeitsmessungen immer an der Oberfläche des Flußes angefangen und nach und nach in größere Tiefen fortgesetzt werden, so ist auch die Geschwindigkeit des Wassers an der Oberfläche C, der Abstand A, und die mittlere Geschwindigkeit μ (nach §. 29) bekannt; es wird also nur noch darauf ankommen, aus dieser Gleichung den Abstand der Kugel von der Senkbleylinie a auf eine leichte Art zu berechnen, aus welchem nachher (gemäß §. 2) die Geschwindigkeit des Wassers bei der Kugel ohne Anstand berechnet werden kann.

31. Es ist von selbst einleuchtend, daß die Abweichung der Kugel unter dem Wasser a der Abweichung des Pendels an der Oberfläche z gleich seyn würde, wenn der Trieb des Wassers gegen den Faden unmerklich, sonach die Größe $\frac{AfH.\mu\mu}{\pi mm.CC}$ aus der Gleichung weggelassen werden könnte. Weil jedoch der Werth dieser Größe sehr klein ist, so würde hierauf zwar eine konvergirende Reihe gegründet werden können, welche aber für unsern Zweck immer noch zu weitläufig seyn würde; es ist demnach vortheilhafter, dem Instrumente eine solche Einrichtung zu geben, daß die höhern Potenzen von a aus der Rechnung wegbleiben können, ohne dem Grade der Genauigkeit, mit welcher die Geschwindigkeiten gemessen werden sollen, nachtheilig zu werden. Da die von Ximenes und Brünings

gemessenen Geschwindigkeiten um drei bis vier Prozente von ihrem mittleren Gange abweichen, so wollen wir annehmen, daß mit dem Pendel eine größere Genauigkeit als mit jenen Instrumenten erreicht, und die berechnete Geschwindigkeit nur um ein Hunderttheil von ihrer wahren Größe abweichen darf. Die Gleichung (§. 2) $cc = \frac{a\,CC}{A}$ zeigt, daß die Abweichungen a den Quadraten der Geschwindigkeit cc proporzional sind. Wenn wir demnach annehmen, daß die in der Gleichung §. 30 vorkommenden Potenzen von a die Geschwindigkeit c nur um 0,01 . c ändern sollen, so können wir im ersten Theile dieser Gleichung c (1,01) statt c und im zweiten Theile $a + \frac{a^3}{15} - \frac{8a^5}{875} + \frac{8a^7}{2625}$ statt a schreiben, dadurch erhalten wir $cc\,(1{,}01)^2 = a\left(1 + \frac{a^2}{15} - \frac{8a^4}{875} + \frac{8a^6 \ldots}{2625}\right)\frac{CC}{A}$. Wird diese Gleichung mit der vorigen $cc = \frac{a\,CC}{A}$ dividirt, so erhalten wir $1{,}0201 = 1 + \frac{a^2}{15} - \frac{8a^4}{875} + \frac{8a^6}{2625}$; und hieraus $a = 0{,}560$. Wir müssen demnach der Kugel eine solche Größe geben, daß dieselbe von der größten Geschwindigkeit, welche gemessen werden soll, oder von der Geschwindigkeit des Flußes an der Oberfläche nicht weiter als auf die Entfernung ON $= 0{,}56 . AO$ (Fig. 1) getrieben werden könne.

32. Da alle Geschwindigkeitsmessungen an der Oberfläche angefangen werden, so wird zwar Jeder gleich bei dem Anfange seiner Messungen sehen, ob die hiezu gewählte Kugel die angemessene Größe habe. Um jedoch das Instrument schon vorläufig zu diesem Zweck entsprechend einzurichten, wird es vortheilhaft seyn, über die beiläufige Größe der Kugel durch folgende Rechnung unterrichtet zu werden. Es sey die spezifische Schwere der Kugel $= p$, so ist das Gewicht der Kugel im Wasser $M = W . \pi m m . \frac{4}{3} m (p - 1)$. Oben (§. 11) war der Wasserstoß an die Kugel $K = W . \frac{cc}{3g} \pi m m$. Setzen wir demnach $\frac{K}{M} = \frac{cc}{4 g m (p - 1)} = 0{,}560$, so folgt der Durchmesser der Kugel $2m = \frac{cc}{0{,}56 . 2g . (p - 1)}$. Die Kugel muß demnach um so größer seyn, je größer die zu messende Geschwindigkeit des Wassers und je kleiner die spezifische Schwere der Kugel ist. Hieraus ergeben sich für bleyerne Kugeln von der spezifischen Schwere $p = 11{,}3$ folgende Durchmesser:

Geschwindigkeiten des Wassers an der Oberfläche	Durchmesser	Gewichte
	der Kugeln	
nied. öster. Fuß	nied. öster. Zolle	nied. öst. Pfunde
4	1,1	0,25
5	1,7	1,0
6	2,4	2,7
7	3,3	6,8
8	4,3	15,4
9	5,5	32,0

Da die größte Geschwindigkeit, welche Herr Brünings im Rhein und in der Waal gemessen hat, nur 56 Zolle beträgt, so erhellet, daß bei der Messung solcher Geschwindigkeiten schon mit einer einpfündigen Kugel auszureichen, mit einer zwei oder dreipfündigen aber eine noch größere Genauigkeit als von 0,01 . c zu erreichen seyn werde. In den böhmischen Flüssen beträgt die Geschwindigkeit der gewöhnlichen Sommerwässer 5 bis 6 Fuß, zu deren Messung sonach schwerere Kugeln nöthig sind:

bei Eisgängen und einigen größern Sommerwässern wurde die Größe der Geschwindigkeit der Moldau durch Prag zwischen 15 und 20 Fuß beobachtet; aber hiebei wird es Niemand wagen, außer der Geschwindigkeit an der Oberfläche des Flußes noch Untersuchungen über die gleichzeitigen Geschwindigkeiten in der Tiefe anzustellen.

Bei kleineren Geschwindigkeiten zwischen 2 und 4 Fuß würde man Kugeln von Zinn, und bei Geschwindigkeiten unter 2 Fuß, Kugeln von Elfenbein oder hohle metallene Kugeln anwenden können; jedoch würde bei so kleinen Geschwindigkeiten noch die nöthige Rücksicht auf jenen Theil des Widerstandes, welcher der ersten Potenz der Geschwindigkeit proporzional ist, genommen werden müssen.

33. Bei Geschwindigkeiten von 8 bis 12 Fuß, würde entweder ein schwereres Material für die Kugel gewählt, oder das Glied $\frac{a^3}{15}$ noch in der Rechnung beibehalten, und die Abweichung der Kugel unter dem Wasser a aus einer Gleichung des dritten Grades bestimmt werden müssen. Doch würde das dritte Glied der Gleichung und die folgenden Glieder weggelassen werden können, wenn die Abweichung des Pendels nicht über 45 Grade beträgt, oder wenn ON (Fig. 1) nur höchstens der Höhe des In-

struments AO gleich ist, weil in diesem Falle die folgenden Glieder nicht nur durch ihre Coeffizienten kleiner als 0,01 sind, sondern auch wegen der fortwährenden Veränderung der Zeichen sich größtentheils aufheben.

Zur Bestimmung des Durchmessers der Kugel, haben wir für diesen Fall die Gleichung $2m = \frac{cc.}{2g(p-1)}$, nach welcher folgende Tafel berechnet worden.

Geschwindigkeit an der Oberfläche des Flußes	Durchmesser	Gewicht
	der bleyernen Kugel	
nied. öster. Fuß	nied. öster. Zolle	n. öster. Pfunde
7	1,84	1,20
8	2,41	2,81
9	3,05	5,49
10	3,76	10,29
11	4,55	18,23
12	5,41	30,64

34. Obwohl in den bekannten europäischen Flüssen keine größeren Geschwindigkeiten als die hier angeführten zu messen sind, und auch die Wünsche der Hydrotechniker durch die Genauigkeit von ein Prozent vollkommen befriedigt werden dürften, so läßt sich doch eine noch größere Genauigkeit und auch für die Anwendbarkeit des Pendels ein größerer Umfang erreichen, wenn noch auf einen möglichst kleinen Durchmesser des Fadens fürgedacht wird. Sowohl aus der Gleichung (§. 29) als auch an und für sich ohne alle Rechnung erhellet, daß die Abweichungen des Pendels in der Tiefe und an der Oberfläche a und z einander gleich seyn würden, wenn der Durchmesser des Fadens f = o seyn könnte, und daß beide einander um so näher kommen, je kleiner der Durchmesser des Fadens f, und je größer dagegen der Durchmesser der Kugel 2 m genommen wird. Weil jedoch der Faden das Gewicht der Kugel sammt dem Wasserstoß auszuhalten im Stande seyn muß, so kann der Durchmesser des Fadens nur bis auf ein von der Natur für die Festigkeit der Materie bestimmtes Maß vermindert werden, widrigens der Faden zerreissen und die Kugel im Wasser verloren gehen würde.

35. Zur Beurtheilung der nöthigen Stärke des Fadens, sind einige Versuche vorzüglich mit dünnen Fäden angestellt und in der folgenden Tafel angemerkt

worden; wo in der vierten Reihe die Durchmesser und in der fünften Reihe die Gewichte angegeben sind, von welchen jeder Faden zerrissen wurde. Die Durchmesser der Fäden konnten wegen ihrer Kleinheit nur durch Wiederholung gemessen werden: es wurden nämlich auf einen Zylinder so viele Fäden nebeneinander aufgewunden, bis ihre Anzahl ein bestimmtes Maß von $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$ Zoll bedeckt hat, worauf sie mit einem Mikroskope untersucht, genau an einander gerichtet und gezählt wurden; das bedeckte Maß mit der darauf befindlichen Zahl der Fäden dividirt, gab den Durchmesser des Fadens oder Drahtes. Bei allen Versuchen ist das landesübliche niederösterreicher Maß und Gewicht gebraucht worden, dessen Verhältniß zu den übrigen europäischen Maßen hinlänglich bekannt ist.

Nro. der Versuche	Namen der Fäden	Stoff der Fäden	Durchmesser der Fäden n. öst. Lin.	Gewichte wovon siezerissen wurden Pf.	Gewicht für den Durchm. 1 Linie Pf.
1	Spagat (grauer)	Hanf	$\frac{2}{3}$	20	45
2	Spagat (weißer)	Hanf	$\frac{1}{2}$	12	48
3	Zwirn (weißer)	Flachs	$\frac{1}{4}$	5	80
4	Zwirn (weißer)	Flachs	$\frac{1}{5}$	3,5	87
5	Zwirn (grauer)	Flachs	$\frac{1}{8}$	1,5	96
6	Schnur	gelbe Seide	$\frac{1}{3}$	8	72
7	Schnur	gelbe Seide	$\frac{1}{5}$	5	80
8	Drath	Eisen	1	250	250
9	Claviersaite	Stahl	$\frac{1}{2}$	80	320
10	Claviersaite	Stahl	$\frac{1}{5}$	16	400
11	Claviersaite	Stahl	$\frac{1}{10}$	5	500
12	Drath	Silber	1	200	200
13	Drath	Silber	$\frac{1}{10}$	2,5	250
14	feinst. Drath	Silber	$\frac{1}{36}$	0,25	324

Die Zahlen in der letzten Reihe wurden durch Rechnung erhalten, indem nämlich das Gewicht in der fünften Reihe mit dem Quadrate des in der vierten Reihe angegebenen Durchmessers dividirt wurde. Diese sechste Reihe zeigt sonach die verhältnißmäßige Stärke der Fäden, und zugleich das merkwürdige Resultat, daß nicht nur bei gedrehten Zwirnen, Schnüren und Stricken (wie Buffon, Duhamel, Muschenbröck u. a. bemerkt haben), sondern auch bei Metallen eine größere Festigkeit in dünnen als in dicken Dräthen anzutreffen ist; welches nebst der Ungleichförmigkeit der metallischen Bestandtheile seinen Grund darinn haben dürfte, daß diejenigen Stellen des Metalles, wo eine geringere Festigkeit anzutreffen war, bereits bei dem Ziehen des Drathes zerrissen, sonach in dem dünneren Drathe nur die festesten Theile übrig geblieben sind.

36. In der letzten Reihe ist noch zu ersehen, daß die gezwirnte Seide und der gezwirnte Flachs bei gleichen Durchmessern des Fadens beinahe gleiche Stärke besitzen. Die größte Stärke findet sich aber bei den Metallen, indem das Silber beiläufig dreimal und der Stahl oder das stahlartige Eisen beinahe viermal so viel Last erträgt als ein Faden Zwirn oder Seide von gleichem Durchmesser. Da

es bei dem hydrometrischen Gebrauche des Pendels (nach §. 32) vortheilhaft ist, eine große und schwere Kugel mit einem möglist dünnen Faden zu verbinden, so verdienen hier die metallenen Fäden vor den seidenen oder hanfenen den Vorzug. Dagegen tritt aber die Bedenklichkeit ein, daß die Steifheit der Metalldräthe die Rechnung (§. 6 und 28) ändern, sonach zwischen der Abweichung des Pendels an der Oberfläche und in der Tiefe eine andere Gleichung anzunehmen seyn möchte. Um diese Bedenklichkeit zu beheben, ist nothwendig diesen Gegenstand noch durch folgende Rechnung zu würdigen.

37. Es sey die Länge zweier Metalldrathe L, l, ihre Querschnittsflächen Q, q, die daran gehängten Gewichte P, p, die von diesen Gewichten bewirkte Ausdehnungen oder Verlängerungen der Fäden E, e. Nach den bekannten Gesetzen der Festigkeit und Elastizität stehen die Gewichte P, p, mit der Anzahl der gespannten Punkte oder mit den Querschnittsflächen der Fäden Q, q, und mit ihren Ausdehnungen E, e, im geraden, und mit den Längen der Fäden L, l, im umgekehrten Verhältnisse; hieraus ergibt sich zur Berechnung der Spannkräfte die Proporzion $P : p = \frac{QE}{L} : \frac{qe}{l}$; folglich haben wir für

einen unendlich kleinen Theil der Querschnittsfläche die Gleichung $\partial P = \frac{p\,l}{q\,e} \cdot \frac{E \partial Q}{L}$.

38. Wenn ein von einem Gewichte M bereits gespannter Faden oder Metalldrath (Fig. 9) in die krumme Linie HOG gebogen wird, so ist die Ausdehnung AM an der obern Seite offenbar größer und an der untern Seite BN kleiner als in der Mitte HO. Es sey die Länge des Drathes $HO = \partial s$, die Biegung $HEO = \partial \varphi$, der Krümmungshalbmesser $HE = r$, und der Durchmesser des Drathes $AB = f$, so ist offenbar $AM = HO.\frac{AE}{HE}$ und die größere Ausdehnung an der Oberfläche $AM - HO$ $= HO\left(\frac{AE - HE}{HE}\right) = HO\frac{AH}{HE} = \frac{f\partial s}{2r} = \frac{f\partial\varphi}{2}$. Setzen wir noch $OS = x$, so ist auf gleiche Art $RS = HO\,\frac{RE}{HE}$ und der Unterschied der Längen $RS - HO = \frac{x\partial s}{r} = x\partial\varphi$. Weil der Drath in der geraden und gebogenen Richtung dasselbe Gewicht zu tragen hat, so müssen die Summen der Ausdehnungen aller Elemente in der geraden und in der gebogenen Richtung gleich seyn; hieraus erhellet, daß die Summe der größern Ausdehnungen von O bis

M der Summe der Ausdehnungsverminderungen von O bis N gleich seyn, und deshalb auch die statischen Momente der Spannkräfte um den Mittelpunkt O von beiden Seiten gleich seyn müssen. Es sey (Fig. 10) der Durchmesser des Drahtes MN = f, und MOT = μ, so ist OS = x = $\frac{f \cos. \mu}{2}$; demnach die Ausdehnung bei S und in allen Punkten der Fläche TUut, oder $x \partial \varphi = \frac{f \cos. \mu}{2} \partial \varphi = E$; die Fläche TUut = TU.Ss = $\frac{f f \partial \mu}{2} \sin. \mu . \sin \mu . = \partial Q$; folglich ist die Kraft, mit welcher die Fläche TUut der größeren Ausdehnung widerstrebt

$$\partial P = \frac{p\,l}{q\,e} . \frac{E \partial Q}{L} = \frac{pl.\, ff \partial \mu .\, \sin. \mu .\, \sin. \mu .\, f \cos. \mu .\, \partial \varphi}{q\,e\, .\, 2\, .\, 2\, .\, \partial s}$$

$$= \frac{p\,l}{q\,e}\ \frac{f\ \partial \mu .\, \cos. \mu .\, \sin.^2 \mu .\, \partial \varphi}{4 \partial s}$$; und das statische Moment dieser Kraft $x \partial P = \frac{p\,l}{q e} . \frac{f^4}{8} . \partial \mu . \sin.^2 \mu . \cos.^2 \mu . \frac{\partial \varphi}{\partial s}$. Das Integrale dieser Gleichung gibt das Steifheitsmoment der Fläche MTU oder

$$\int x \partial P = \frac{p\, l.}{q\,e}\ \frac{f^4.}{8} \left(\frac{\mu + \sin \mu . \cos \mu - 2 \sin \mu . \cos \mu^3}{8} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial s} .$$

Wird nun $\mu = \pi$, sonach $\sin. \mu = \sin. \pi = 0$.

gesetzt, so ist das Moment, mit welchem der steife Drath seiner Biegung widerstrebt, $= \frac{p\,l.}{q\,e}\,\frac{f^4.}{8}\,\frac{\pi.}{8}\,\frac{\partial\varphi}{\partial s}$. Die Unbiegsamkeit des Drahtes ist demnach, eben so wie das Tragungsvermögen der Säulen in der Architektur, der vierten Potenz des Durchmessers f und umgekehrt dem Krümmungshalbmesser $\left(r = \frac{\partial s}{\partial\varphi}\right)$ proporzional.

39. Um die Größe dieses Moments der Steifheit bei dem Faden des Pendels in Anschlag zu nehmen, sey (wie oben §. 6) das Gewicht der Kugel im Wasser $= M$; der Halbmesser der Kugel $= m$; der Trieb des Wassers gegen die Kugel $= K$; die gleichen Abtheilungen des Fadens (Fig. 2) $QP = PO = ON = NM = \partial s$; der Wasserstoß an die erste Abtheilung $QP = \partial w$, an die zweite $PO = \partial w'$, an die dritte $ON = \partial w''$; der Winkel $qQG = HQF = \alpha$; $pPQ = \beta$; $oOP = \gamma$; $nNO = \lambda$. Da die Kugel an dem untersten Punkte des Drahtes Q befestigt ist, so können wir diesen Punkt als den Stützpunkt sowohl für das Gewicht der Kugel in G, das nach der Richtung RS herabzieht, als auch für den Wasserstoß an die Kugel, von welchem dieselbe nach der Richtung qG getrieben wird, betrachten; um welchen sonach die statischen Momente dieser bei-

den Kräfte sich im Gleichgewicht erhalten. Hiebei wird nämlich angenommen, daß der Mittelpunkt der Kugel sich in G befinde. Wir haben demnach $M . QR = K . Qq$ oder $M . m \sin. \alpha = K . m \cos. \alpha$, und wenn beiderseits mit $M m \cos. \alpha$ dividirt wird, so folgt hieraus $\text{tang.} \alpha = \frac{K}{M}$. (wie §. 1.) Diese Gleichheit findet aber nur statt, wenn von Q bis P keine Biegung vorhanden ist, oder wenn das Element des Drathes QP mit dem Halbmesser der Kugel QS sich in einer geraden Linie befindet. Wir haben aber angenommen $HQF = \alpha$, und $pPQ = \beta$, folglich die Biegung des Elementes PQ, $= \beta - \alpha = \partial \alpha$; es wirkt sonach dem Momente der Kugel um den Stützpunkt Q nebst dem Momente des Wasserstoßes an die Kugel noch das Moment der Steifheit des Drathes entgegen, und wir haben bei dem Punkte Q die Gleichung $M m \sin. \alpha = K m \cos. \alpha + \frac{p l . \pi f^4 . \partial \alpha}{64 . q e . \partial s}$. (I)

Eben so haben wir bei dem zweiten Punkte P die Gleichung $M . PS. = K. (Pp + Qq) + \frac{\partial w.}{2} . Pp + \frac{p l . \pi f^4 . \partial \beta}{64 \; q.e . \partial s}$. II) Wird hievon die Gleichung (I) abgezogen, so bleibt $M \; (PS - QR)$

$$= K . Pp + \frac{d w}{2} . Pp + \frac{p l . \pi f^4 . (\partial\beta - \partial\alpha)}{64 . q e . \partial s}$$

oder $M . ds \sin.\beta = \left(K + \frac{\partial w}{2}\right)\partial s . \cos.\beta + \frac{pl . \pi f^4 . \partial\partial\alpha}{64 . qe . \partial s}$.

Auf gleiche Art haben wir bei dem dritten Punkte O die gleichen Momente $M . OY = K . GY + \frac{\partial w}{2} . YR + \left(\frac{\partial w + \partial w'}{2}\right) YS + \frac{p l . \pi f^4 . \partial\gamma}{64 . q e . \partial s}$. (III). Wird hievon die Gleichung (II) abgezogen, so bleibt

$$M . (OY - PS) = K . (YG - SG) + \frac{\partial w}{2} (YR - Pp) + \left(\frac{\partial w + \partial w'}{2}\right) Oo + \frac{p l . \pi f^4}{64 . q e}\left(\frac{\partial\gamma - \partial\beta}{\partial s}\right)$$

oder

$$M . \partial s . \sin. \gamma = \left(K + \partial w + \frac{\partial w'}{2}\right) \partial s . \cos. \gamma + \frac{p l . \pi f^4 .}{64 . q e} \frac{\partial\partial\beta}{\partial s}.$$

Aehnliche Gleichungen finden bei allen folgenden Punkten N, M, L, . . . statt. Setzen wir demnach allgemein den Winkel, um welchen der Drath bei M von der Senkbleylinie abweicht, nämlich $mMN = \lambda$, und den gesammten Trieb des Wassers gegen den Drath von Q bis M, nämlich $\partial w + \partial w' + \partial w'' . + \frac{\partial w'''}{2} = W$, so haben wir

$$M . \partial s . \sin . \lambda = (K + W) \partial s \cos . \lambda + \frac{p\, l . \pi f^4 . \partial\partial\lambda}{64 . q e . \partial s};$$

und nachdem alle Glieder dieser Gleichung mit $M . \partial s . \cos . \lambda$ dividirt und tang. α statt $\frac{K}{M}$ gesetzt worden, so ergibt sich für die krumme Linie des Drathes die allgemeine Gleichung $\text{tang.}\, \lambda = \left(1 + \frac{W}{K}\right)$

$$\text{tang.}\, \alpha + \frac{p.}{M} \frac{l.}{e} \frac{\pi f f.}{q} \frac{f f.\ \partial\partial\lambda}{64 . \partial s . \partial s . \cos . \lambda}.$$

40. Diese Gleichung ist von der oben (§. 7) gefündenen nur durch das letzte Glied, nämlich durch die hinzugekommene Steifheit oder Elastizität des Drathes verschieden. Weil aber der Wasserstoß an einen möglichst dünnen Drath sehr klein ist, demnach die krumme Linie des Drathes im Wasser nur eine geringe Biegung hat, überdieß die Wirkung der Elastizität oder Steifheit des Fadens nur dem $\partial\partial\lambda$ oder der Abweichung der krummen Linie des Fadens von einer Kreislinie proporzional ist, so sehen wir, daß die Steifheit oder Elastizität des Drathes nur einen sehr kleinen Unterschied von der (§. 30) gefundenen Gleichung bewirken könne. Wir dürfen demnach bei einem beiläufigen Uiberschlag über die Größe dieser Abweichung die Gleichung (§. 7) tang. λ

$= \left(1+\frac{W}{K}\right)$ tang. α, oder (nach §. 17) tang. λ $=$ tang. α. $\left(1+\int \frac{f.\ vv.\ \partial s\ \cos.\ \lambda}{\pi\, mm\, .\, CC}\right)$ unbedenklich zu Hilfe nehmen. Die letztere Gleichung gibt $\frac{\partial \lambda}{\cos.\lambda,\ \cos.\lambda} = \frac{a.\ f.\ vv.\ \partial s\ \cos.\lambda}{\pi\, mm\, cc}$, sonach $\partial\lambda$ $= \frac{a f.\ vv.\ \partial s.\ \cos.\lambda^3}{\pi\, mm\, .\, cc}$. Weil aber ∂s (§. 39) als eine beständige Größe angenommen worden, so erhalten wir durch eine nochmalige Differenzirung $\partial\partial\lambda$ $= \frac{a f \partial s.}{\pi\, mm.\, cc}\ (2v\partial v \cos\lambda^3 - 3vv \cos^2\lambda.\ \sin\lambda.\ \partial\lambda)$

Oben (§. 26) war nach Brünings $vv = CC$ $- \frac{\Delta x}{h} + \Delta\Delta\ \frac{x\,(x-h)}{h.\ 2h}$, folglich $2\, v\partial v$ $= -\Delta \frac{\partial x}{h} + \Delta\Delta \frac{(2x-h)\partial x}{2h\ .\ h} = (-\Delta + \Delta\Delta$ $\left.\frac{(2x-h)}{2h}\right)\frac{\partial s.\cos.\lambda}{h}$; demnach ist $\partial\partial\lambda = \frac{af.\ \partial s.\ \partial s.\cos^4\lambda}{\pi\, mm\ .\ cc.}$ $\left(-\frac{\Delta}{h} + \frac{\Delta\Delta.\ (2x-h)}{h\ .\ 2h} - \frac{3\, afv^4.\ \sin\lambda.\ \cos\lambda}{\pi\, mm\ .\ cc}\right)$.

An der Oberfläche des Flußes ist $x = 0$, und $v = C$; demnach erhalten wir, wegen $\frac{a}{cc} = \frac{A}{CC}$; $\Delta = CC - vv$;

$\Delta\Delta = CC - 2\nu\nu + cc$; $\frac{\partial\partial\lambda}{\partial s.\partial s} = \frac{Af.\cos.^4\lambda}{\pi mm}$
$\left(\frac{4\nu\nu - 3CC - cc}{H.CC} - \frac{3Af.\sin\lambda.\cos.\lambda}{\pi mm}\right)$; und
die von der Steifheit des Drathes bewirkte Abweichung des Pendels ist $= \frac{p.l.\pi ff.ff.\ A.f.\cos^3\lambda}{M.e.q.64\pi mm.H}$
$\left(\frac{4\nu\nu - 3CC - cc}{CC} - \frac{3A.f.H.\sin.\lambda.\cos.\lambda}{\pi mm}\right)$.
In der ersten Reihe der Messungen des Herrn Brünings war die Tiefe des Mittelpunkts der Ellipse (§. 26 und 27) $e = \frac{\nu\nu - CC}{Bh} + \frac{h}{2} = \frac{4\nu\nu - 3CC - cc}{2Bh}$ $= 0$, demnach ist die von der Steifheit des Drathes bewirkte Abweichung des Pendels $= -\frac{p.}{M}$
$\frac{\pi ff.}{4q}\frac{3l,}{16.e}\left(\frac{Aff}{\pi mm}\right)^2 \sin.\lambda.\cos.\lambda^4$.

41. Zur Ermessung der Größe dieser Abweichung ist ein Versuch über die Verhältnisse zwischen den Größen p, q, l, e nöthig. Der Umstand, daß unsere Metalldräthe nur einer sehr kleinen Ausdehnung e fähig sind, sonach die genaue Messung dieser Ausdehnung mit einiger Schwierigkeit verbunden ist, gab die Veranlassung, hiezu folgende Methode zu wählen. An eine 18 Zoll lange Claviersaite,

welche $\frac{1}{5}$ Linie im Durchmesser hatte, wurde ein Gewicht von 2 Pfunden gehängt, und eine gleiche Saite auf dem Monochord bis zu demselben Tone angezogen oder in Einklang (unisonus) gestimmt. Dann wurden zu dem Gewichte an der ersten Saite noch 6 Pfunde zugelegt, so daß diese Saite zusammen mit 8 Pfunden beschwert war; durch dieses vierfache Gewicht stieg ihr Ton genau auf die Oktav. Nun wurde die Saite auf dem Monochord zur Oktav angezogen und hiebei der Winkel gemessen, um welchen der Stimmschlüssel gedrehet werden mußte, um den ersten Grundton bis zur Oktav zu erhöhen. Zur größeren Genauigkeit dieser Messung wurde der Stimmschlüssel mit einem 14 Zoll langen Hebel versehen, die Sehne des beschriebenen Bogens gemessen und aus derselben die Länge des Bogens berechnet. Aus dem Verhältnisse dieses Durchmessers (von 14 Zoll) zum Durchmesser des Stiftes und der aufgewundenen Saite (zusammen von 2,5 Linien) ergab sich mit vieler Genauigkeit, daß die 18 Zolle lange Saite bei der Erhöhung ihres Tons bis zur Oktav oder durch das Gewicht von 6 Pfunden um $\frac{15}{18}$ Linien verlängert wurde. Derselbe Versuch wurde noch mit der Quint und mit der Terz wiederholt und die Ausdehnungen den Gewichten proporzional gefunden. Setzen wir demnach $p = 2$ Pfund, $l = 18$

Zoll oder 216 Linien, $q = \frac{\pi}{100}$, so ist die Ausdehnung $e = \frac{5}{28}$ Linien.

In der ersten Reihe des Herrn Brünings, war die Geschwindigkeit des Wassers an der Oberfläche C = 55,7 Zolle, zu deren Messung (nach §. 30) eine zweipfündige bleyerne Kugel mit dem Halbmesser m = 13 Linien, und (nach §. 33) ein Clavierdrath mit dem Durchmesser $f = \frac{1}{10}$ Linie vollkommen hinreichen. Das Gewicht der zweipfündigen bleyernen Kugel im Wasser ist $M = \frac{2.103}{113}$, demnach $\frac{P}{M} = \frac{113}{103}$. Das Verhältniß der Querschnittsflächen der beiden Dräthe, nämlich desjenigen, welcher bei dem angeführten Ausdehnungsversuche gebraucht worden, und desjenigen, welcher für die Geschwindigkeitsmessungen des Herrn Brünings nöthig ist, wovon der erste $\frac{1}{5}$ und der zweite $\frac{1}{10}$ Linie im Durchmesser hat, ist $\frac{\pi ff}{4q} = \frac{1}{4}$. Das Verhältniß der Länge zur Ausdehnung $\frac{l}{e} = \frac{18.\ 12.\ 28}{5}$, sonach $\frac{l}{16e} = 75,6$. Das Verhältniß $\frac{ff.A}{\pi mm}$

$= \frac{7 \cdot 0{,}3735}{22 \cdot 130 \cdot 130}$. Diese Zahlen geben die von der Steifheit des Drathes bewirkte Abweichung

$$= \frac{-3 \cdot p}{M} \cdot \frac{\pi ff}{4q} \cdot \frac{l}{16e} \left(\frac{Aff}{\pi mm}\right)^2 \sin. \lambda. \quad \cos^4\lambda$$

$= \frac{-\sin. \lambda. \cos^4\lambda}{1133064714}$. Es würde demnach selbst ein zehnmal stärkerer Drath (oder $f = 1$ Linie) die Abweichung des Pendels von der Senkbleylinie nur um $\frac{\sin. \lambda. \cos. \lambda^4}{1133}$, folglich noch nicht um ein Tausendtheilchen verändern; woraus erhellet, daß die Steifheit des Drathes bei dem Gebrauche des Pendels in der Hydrometrie unbedenklich weggelassen werden könne.

42. Die Rücksichten §. 30 und 33 überlassen uns demnach zur Berechnung der Abweichung des Pendels in der Tiefe der Flüsse die einfache Gleichung $a = z - \frac{AfH \cdot \mu\mu}{\pi mm \cdot CC}$; und wenn (nach §. 2) $\frac{Acc}{CC}$ statt a gesetzt wird, so erhalten wir die Geschwindigkeit des Wassers in der Tiefe H mittelst der Gleichung $cc = \frac{CCz}{A} - \frac{fH \cdot \mu\mu}{\pi mm}$.

An der Oberfläche des Wassers ist die Abweichung des Pendels $z = A$, und die Tiefe $H = 0$, demnach ist $c = C$ so wie es oben angenommen wurde.

Auf kleinen Tiefen unter der Oberfläche ist die mittlere Geschwindigkeit gegen den Faden μ von der Geschwindigkeit an der Oberfläche C nicht viel verschieden, und weil die Durchschnittsfläche des Fadens fH zur Durchschnittsfläche $\pi m m$ noch ein sehr kleines Verhältniß hat, so können wir den Unterschied $C - \mu$ vernachlässigen, oder $C = \mu$ setzen; dadurch erhalten wir noch immer mit vieler Genauigkeit $cc = \left(\frac{Z}{A} - \frac{fH}{\pi m m}\right)$.

Bei zunehmender Tiefe kommt uns die Bemerkung zu statten, daß nach Ximenes und vielen andern Kunstverständigen die Quadrate der Geschwindigkeiten auf kleinen Tiefen in einem arithmetischen Verhältnisse abnehmen; wir können demnach statt $\mu\mu$ das Quadrat der Geschwindigkeit setzen, welches in der vorhergegangenen Messung in der Mitte zwischen der Oberfläche und der Kugel gefunden wurde.

Wenn auf solche Art drei Geschwindigkeiten C, v, v' gemessen worden, und sich zwischen den ersten Differenzen $CC - vv$ und $vv - v'v'$ ein Unterschied offenbaret, so erhalten wir aus der nach Brünings angenommenen Gleichheit der zweiten

Differenzen $CC - 2\nu\nu + \nu'\nu' = \nu\nu - 2\nu'\nu' + \nu''\nu''$ sowohl die Geschwindigkeit auf der dritten Tiefe $\nu''\nu'' = CC - 3\nu\nu + 3\nu'\nu'$ als auch die mittlere Geschwindigkeit μ, mit welcher das Wasser dem Faden von der Oberfläche bis zur dritten Tiefe begegnet; nämlich (nach §. 29) $\mu\mu = CC + 3\nu\nu + 3\nu'\nu' + \nu''\nu''$ $= \frac{CC + 3\nu'\nu'}{4}$. Demnach ist die genauere Geschwindigkeit des Wassers auf der dritten Tiefe $\nu''\nu''$ $= CC\frac{Z}{A} - \frac{fH}{\pi mm}\left(\frac{CC + 3\nu'\nu'}{4}\right)$.

Auf dieselbe Art läßt sich für jede folgende Tiefe vorläufig sowohl die beiläufige Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser der Kugel begegnet, als auch die mittlere Geschwindigkeit μ mit einer für das Glied $\frac{fH\mu\mu}{\pi m m}$ hinreichenden Genauigkeit angeben; sonach auch die Geschwindigkeit in der Tiefe der Kugel mittelst der Gleichung $cc = CC\frac{Z}{A} - \frac{fH\mu\mu}{\pi mm}$ berechnen.

Hiebei wird angenommen, daß nicht nur a, sondern auch z kleiner als 0,560 sey; sollte dieses nicht statt finden, so müßte $z + \frac{z^3}{15}$ statt z gesetzt werden.

43. Diejenigen, welche statt dieser Annäherung eine genaue Rechnung wünschen, können zu diesem Ziele durch folgende weitläufigere Rechnung gelangen. Für die Geschwindigkeit auf der ersten Tiefe unter der Oberfläche war nämlich $\nu\nu = CC\frac{Z}{A} - \frac{fH}{\pi mm}\left(\frac{CC+\nu\nu}{2}\right)$; die genaue Auflösung dieser Gleichung gibt $\nu\nu = \frac{CC}{A}\left(\frac{2\pi mm zz - AfH}{2\pi mm + fH}\right)$. Für die Geschwindigkeit auf der zweiten Tiefe war $\nu'\nu' = CC\frac{Z}{A} - \frac{fH}{\pi mm}\left(\frac{CC + 4\nu\nu + \nu'\nu'}{6}\right)$, hieraus folgt $\nu'\nu' = \frac{6\pi mm z CC - AfH\,(CC + 4\nu\nu)}{A\,(6\pi mm + fH)}$. Auf gleiche Art erhalten wir zur Bestimmung der Geschwindigkeit in der dritten Tiefe

$$\nu''\nu'' = \frac{8\pi mm z CC - AfH\,(CC + 3\nu\nu + 3\nu'\nu')}{A\,(8\pi mm + fH)}$$

und überhaupt zur Messung der n^{ten} Geschwindigkeit cc $= \frac{2n\pi mm.\,z.\,CC - AfH\,(CC + 2\nu\nu + 2\nu'\nu' + 2\nu''\nu''\ldots)}{A\,(2n\pi mm + fH)}$.

44. Nach der bisherigen Rechnung kann jedoch die Geschwindigkeit (gemäß der Bemerkung §. 30) nur mit der Genauigkeit von einem Hundertheil ihrer Größe gemessen werden; eine genauere

bis auf ein Zehntausendtheilchen sichere Rechnung wird erhalten, wenn mit Beibehaltung der Bemerkung §. 30 noch die zweiten Glieder $\frac{a^3}{15}$ und $\frac{z^3}{15}$ in Rechnung genommen werden. Dann haben wir $z - a + \frac{z^3 - a^3}{15} = \frac{A f H \mu \mu}{\pi m m C C}$; hieraus folgt der Unterschied der Abweichungen an der Oberfläche und in der Tiefe $z - a = \frac{A f H \mu \mu \,.\, 15}{\pi m m C C (15 + zz + az + aa)}$. Aus diesen Gleichungen kann die Abweichung der Kugel im Wasser a entweder mittelst Auflösung einer Gleichung des dritten Grades gefunden werden, oder man kann die letzte Gleichung in eine unendliche Reihe nach den steigenden Potenzen der kleinen Größe $\frac{A . f H . \mu \mu . 15}{\pi m m . C C . (15 + zz)}$ auflösen, und zur Bestimmung der Abweichung a von dieser Reihe so viele Glieder beibehalten, als zur verlangten Genauigkeit nothwendig erachtet werden. Wir können aber zu demselben Ziele schneller gelangen, wenn aus der Abweichung des Pendels an der Oberfläche z vorläufig nur die Abweichung unter Wasser a gesucht wird, aus welcher nachher die Geschwindigkeit mittelst der Gleichung (§. 2) $v v = \frac{a . C C}{A}$ ohne Anstand berechnet werden kann. Um hiezu auf dem kürzesten Wege zu gelangen, ist nöthig, die Geschwindigkeiten μ und C aus dieser Gleichung ganz zu entfernen und die Rechnung nur nach den Abweichungen a und z allein zu führen. Nennen wir die den Geschwindigkeiten C, ν, ν', ν'' . . zugehörigen Abweichungen A, b, b' b'', . . . so ist (nach §. 2)

$$\nu\nu = \frac{b\,CC}{A},\ \nu'\nu' = \frac{b'.CC}{A},\ \nu''\nu'' = \frac{b''CC}{A}, ..$$ wenn

sonach diese Werthe in die Gleichungen für die verschiedenen Tiefen (§. 29 und 30) gesetzt werden, so erhalten wir

für die erste Tiefe $b = z - \frac{fH.(A+b).\ 15.}{\pi mm.\,2A\,(15+zz+bz+bb)}$

Weil aber nahe unter der Oberfläche wegen Unbedeutenheit der Durchschnittsfläche des Fadens fH gegen die Durchschnittsfläche der Kugel πmm, im zweiten Gliede dieser Gleichung die Abweichung A statt b gesetzt werden kann, so ist $b = z - \frac{fH.}{\pi mm}$

$\left(\frac{15.}{15+zz+A\,(A+z)}\right)$. Für die zweite Tiefe ist

$$(z-b')\left(1+\frac{zz+b'(z+b')}{15}\right)=\frac{fH.}{\pi mm}\left(\frac{A+4b+b'}{6A}\right);$$

wird hier im zweiten Gliede statt b' der nahe bekannte Werth a b — A gesetzt, so ist die genauere Abweichung b′

$$= z - \frac{fHb}{\pi mm}\left(\frac{15}{15 + zz + (2b - A)(z + 2b - A)}\right)$$

Für die dritte Tiefe ist $(z - b'')\left(1 + \frac{zz + b''(z + b'')}{15}\right)$

$= \frac{fH.}{\pi mm}\left(\frac{A + 3b + 3b' + b''}{8A}\right)$, aus der Gleichheit der zweiten Differenzen $A - 2b + b' = b - 2b' + b''$ folgt die Größe der dritten Abweichung $b'' = A - 3b + 3b'$; demnach ist die genauere Abweichung auf der dritten Tiefe $b'' = z - \frac{fH.}{\pi mm}$

$$\left(\frac{A + 3b}{4A}\right)\left(\frac{15}{15 + zz + (A - 3b + 3b')(z + A - 3b + 3b')}\right)$$

Eben so ist auf der nten Tiefe die Abweichung der Kugel im Wasser $a = z - \frac{fH.}{\pi mm}\left(\frac{A + 2b + 2b' \,.\,.\, + a}{2n.\ A}\right)$

$\left(\frac{15}{15 + zz + az + aa}\right)$, wo der beinahe Werth der Abweichung a für das letzte Glied um so genauer voraus bestimmt werden kann, je mehr Abweichungen A, b, b′, b″, . . bereits gemessen worden sind. Hieraus erhellet, daß diese Methode nicht nur für kleine Tiefen, sondern auch für die größeren, wo

$\frac{fH}{\pi mm}$ eine bedeutende Größe wird, mit gleicher Genauigkeit anwendbar sey.

45. Da diese Rechnung überhaupt für bestimmte Fälle in Ziffern leichter und einfacher ausfällt, als dieselbe durch allgemeine algebraische Formeln vorgestellt werden kann, so wird zu ihrer bessern Erläuterung noch folgendes Beispiel dienen, wo zuerst die Abweichungen des Pendels über der Oberfläche z aus den Abweichungen im Wasser a, und dann umgekehrt die Abweichungen a aus den Abweichungen z berechnet werden. In der ersten Reihe des Herrn Brünings (§. 23) war nämlich die Geschwindigkeit an der Oberfläche des Rheins C=55,67 Zolle oder CC = 3100. Wir wollen annehmen, daß das Pendel von dieser Geschwindigkeit auf die Entfernung 0,3735 von der Senkbleylinie abgetrieben worden, so folgt für die übrigen Geschwindigkeiten (nach §. 2) die Abweichung a $= \frac{A \cdot cc}{CC} = \frac{0{,}3735 \cdot cc}{3100} = \frac{747 \cdot cc}{6200000}$. Nach dieser Gleichung sind die Abweichungen in der dritten Columne berechnet. Es sey der Halbmesser der bleyernen Kugel m = 13 Linien, und der Durchmesser des Drathes f = $\frac{1}{10}$ Linie, so ist $\frac{A\, fH}{\pi mm} = \frac{0{,}3735 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 12 \cdot H}{10 \cdot 22 \cdot 13 \cdot 13}$

$= \frac{8H}{790}$, wo an die Stelle von H die Anzahl der Fuße, wie tief die Kugel ins Wasser eingesenkt wird, zu setzen ist. Da bei den Messungen des Brünings die zweiten Unterschiede der Quadrate der Geschwindigkeiten einander gleich sind, so ist der Unterschied der Abweichungen an der Oberfläche und in der Tiefe $= \frac{A\,f\,H}{\pi\,m\,m}\left(\frac{CC + 4\nu\nu + cc}{CC}\right) = \frac{A\,f\,H.}{\pi\,m\,m}\;\frac{\mu\mu}{CC}$, welcher in der fünften Columne angeführt wird. — Nach §. 30 ist $a + \frac{a^3}{15} + \frac{A\,f\,H.}{\pi\,m\,m}\;\frac{\mu\,\mu}{C\,C} = z + \frac{z^3}{15}$; die genaue Auflösung dieser Gleichung des dritten Grades gibt die Abweichungen des Pendels an der Oberfläche z, welche in der folgenden siebenten Columne angeführt sind. Die fünften und siebenten Potenzen von A und Z wurden aus dieser Gleichung weggelassen, weil sie weniger als 0,0001 betragen.

Tiefe der Kugel im Wasser	Geschwindigkeiten	Abweichungen der Kugel und des Fadens im Wasser		
	co	a	$\frac{aaa}{15}$	$\frac{8H \cdot}{790} \frac{\mu\mu}{CC}$
0	3100	0,3735	0,0035	0,0000
1	3094	0,3728	0,0035	0,0101
2	3077	0,3707	0,0034	0,0202
3	3047	0,3672	0,0033	0,0302
4	3006	0,3622	0,0032	0,0401
5	2953	0,3559	0,0030	0,0498
6	2889	0,3481	0,0028	0,0594
7	2813	0,3389	0,0026	0,0687
8	2725	0,3283	0,0023	0,0778
9	2626	0,3163	0,0021	0,0865
10	2514	0,3029	0,0018	0,0949
11	2391	0,2880	0,0016	0,1029
12	2256	0,2718	0,0013	0,1105
13	2109	0,2541	0,0011	0,1176
14	1951	0,2350	0,0009	0,1242
15	1781	0,2146	0,0007	0,1303
16	1600	0,1928	0,0005	0,1359

Summe	Abweichungen des Fadens an der Oberfläche	
	z	$\frac{zzz}{15}$
0,3770	0,3735	0,0035
0,3864	0,3827	0,0037
0,3943	0,3904	0,0039
0,4007	0,3966	0,0041
0,4055	0,4012	0,0043
0,4087	0,4043	0,0044
0,4103	0,4062	0,0045
0,4102	0,4058	0,0044
0,4084	0,4040	0,0044
0,4049	0,4006	0,0043
0,3996	0,3955	0,0041
0,3925	0,3886	0,0039
0,3836	0,3800	0,0036
0,3728	0,3695	0,0033
0,3601	0,3571	0,0030
0,3456	0,3429	0,0027
0,3292	0,3269	0,0023

Wir wollen nun annehmen, daß die in der siebenten Reihe unter z angeführten Zahlen diejenigen Abweichungen sind, welche an der Oberfläche des Flußes beobachtet worden, und daß sonach außer diesen Zahlen nichts bekannt sey, als das Quadrat der Geschwindigkeit an der Oberfläche des Flußes CC = 3100, der Durchmesser der Kugel 2 m = 26 Linien = $\frac{13}{72}$ Fuß, und der Durchmesser des Fadens f = $\frac{1}{10}$ Linie = $\frac{1}{1440}$ Fuß. Aus diesen Zahlen folgt $\frac{fH}{\pi mm} = \frac{8H}{790}$, und für die Tiefe H = 1 Fuß die Abweichung der Kugel im Wasser $b = z - \frac{8H}{790}\left(\frac{A+b}{2A}\right)\left(\frac{15}{15+zz+b(z+b)}\right)$ Weil aber in dieser geringen Tiefe im zweiten Gliede die Abweichung b = A gesetzt werden kann, so erhalten wir b = 0,3827 — 0,00985 = 0,37285; welches mit 0,3728 in der dritten Reihe vollkommen übereinstimmt.

Für die Tiefe H = 2 Fuß ist beinahe b′ = 2 b − A = 0,3722 und wenn dieser Werth in die Gleichung $b' = z - \frac{fH.}{\pi mm}\left(\frac{A+4b+b'}{6A}\right)\left(\frac{15}{15+zz+b'(z+b')}\right)$ statt b′ gesetzt wird, so erhalten wir b′ = 0,3904 — 0,01965 = 0,37075; welches abermals mit 0,3707 in der dritten Reihe bis auf 4 Dezimalstellen übereinstimmt.

Für die Tiefe $H = 3$ Fuß folgt aus der Gleichheit der zweiten Differenzen $b'' = A - 3b + 3b' = 0{,}3672$, und wenn dieser Werth statt b'' in der Gleichung $b'' = z - \frac{f H.}{\pi m m} \left(\frac{A + 3b + 3b' + b''}{8 A}\right) \left(\frac{15}{15 + zz + b''(z + b'')}\right)$ substituirt wird, so erhalten wir die Abweichung in der dritten Tiefe $b'' = 0{,}3966 - 0{,}2935 = 0{,}36725$; welches mit $0{,}3672$ in der dritten Reihe abermals genau übereinstimmt.

Für die Tiefe $H = 4$ Fuß ergibt sich aus den erhaltenen vier Abweichungen $A = 0{,}3735$; $b = 0{,}37285$; $b' = 0{,}37075$; $b'' = 0{,}36725$, die beinahe Abweichung in der vierten Tiefe $b''' = 0{,}3624$; sonach ist die mittlere Abweichung $M = \frac{A + 2b + 2b' + 2b'' + b'''}{8} = 0{,}36970$; folglich ist die genaue Abweichung $b''' = 0{,}4012 - 0{,}03895 = 0{,}36225$ u. s. w.

46. Diese kurze und bis auf vier Dezimalstellen genaue Rechnung findet statt, wenn bei der Construkzion des Pendels nach §. 30 dafür gesorgt worden, daß die Abweichungen a und z nicht über $0{,}560$ steigen.

Da $0{,}560 = \text{tang. } 29^\circ\ 15'$, so erhellet, daß wir zu den Geschwindigkeitsmessungen keines Quadranten, sondern nur eines Sektors von 30 Graden bedürfen. Es ist schon oben §. 2 bemerkt worden, daß es der Rechnung zuträglicher sey, statt der Winkel α, λ u. s. w. vielmehr ihre Tangenten oder die Abweichungen a, z, u. s. w. zu beobachten; hieraus folgt, daß es vortheilhafter sey, statt eines Kreisbogens sich vielmehr eines rechten Winkels oder eines sogenannten Winkelmaßes zu bedienen. Die Größe der Schenkel dieses rechten Winkels hängt von der Genauigkeit ab, mit welcher die Geschwindigkeiten gemessen werden sollen. Wollten wir z. B. die Geschwindigkeiten bis auf ein Zehntausendtheilchen ihrer Größe genau haben, so wird der Radius oder die Höhe des Instruments eine solche Größe erhalten müssen, daß man noch zehntausend Theilchen daran erkennen kann. Wollten wir z. B. die Gränze des Sehens mit freien Augen auf $\frac{1}{12}$ Linie setzen, so würde der Radius oder die Höhe des lothrechten Schenkels 10000 Punkte oder beinahe 7 Fuß, sonach die Länge des horizontalen Schenkels $3\frac{1}{3}$ Fuß betragen müssen. Bei dem Gebrauche kürzerer Schenkel würde ein Vergrößerungsglas, Transversallinien, oder eine andere mikrometrische Vorrichtung nöthig seyn.

Zur Erkenntniß des senkrechten und horizontalen Standes der beiden Schenkel dienen Wasserwagen (niveaux à bulle d'air) welche auf den horizontalen

Schenkel dorthin zu setzen seyn werden, wo die meisten Geschwindigkeiten zu beobachten sind; damit man beide Beobachtungen nämlich des senkrechten und horizontalen Standes der Schenkel, und der horizontalen Abweichung des Pendels vereinigen könne, sonach das Instrument nur einen Beobachter nöthig haben möge.

46. Durch diese Bemerkungen erhält das hydrometrische Pendel nebst der (§. 1) bemerkten Einfachheit in seiner Verfertigung noch eine Genauigkeit und Empfindlichkeit, wovon den übrigen von HH. Eitelwein, Brünings, Kästner, Karsten u. a. beschriebenen Geschwindigkeitsmessern entweder die eine oder die andere, oder auch beide mangeln. Bei Untersuchungen über die Aenderungen der Geschwindigkeit auf bestimmten Tiefen, und über die (§. 25) bemerkte Wellenbewegung unter der Oberfläche des Wassers wird das Pendel vorzügliche Dienste leisten, indem die Unruhe oder die Schwankungen des Pendels nach beiden Seiten von seinem mittlern Stande die veränderliche Geschwindigkeit an einer und derselben Stelle offenbar anzeigen. Da man gegenwärtig damit beschäftigt ist, die Theorie der Bewegung des Wassers in Flüssen dadurch zu erweitern, indem man die bei der Bewegung des Wassers durch Röhren beobachteten Widerstände und ihre Gesetze auch

bei der Bewegung des Wassers in Flüssen in Anwendung zu bringen sucht, so erhellet aus dem Umstande, daß die Widerstände nur auf dem Grundbette anzutreffen sind, sonach die Bewegung des Wassers auf den höhern Schichten und an der Oberfläche nur aus der wechselseitigen Mittheilung abgeleitet werden kann, die Nothwendigkeit, vorläufig über diese Gesetze die nöthige Aufklärung zu erhalten; wozu in den §§. 18, 19, 25 und 26 ein Versuch geliefert worden ist.

Tab. zum Hydrom. Pendel.