Bemerkung über einen Satz des Hrn. E. Picard.

Von **O. Stolz.**

In der Constructionsebene der complexen Variabeln $x = \xi + \eta i$ sei vom Nullpunkte aus mit einem Radius $\rho_0 < 1$ ein Kreis C_0 verzeichnet. Für irgend einen Punkt x_0 innerhalb desselben, der jedoch vom Nullpunkte verschieden ist, sei ein Functionenelement $P(x \mid xo)$ gegeben, aus welchem sich auf jedem innerhalb C_0 verlaufendem Wege, welcher den Anfangspunkt nicht berührt, für den Endpunkt ein neues Functionenelement ableiten lasse. Dadurch wird für alle Punkte $\acute{x}$ innerhalb C_0 ausgenommen $x = o$ eine analytische Function $f(x)$ definirt, die im Allgemeinen vieldeutig sein wird, und in der Umgebung jeder solchen Stelle $(\acute{x}, \acute{y})$ den Character einer ganzen Function besitzt.

Setzt man

$$x = E\left(\frac{1}{x'}\right) \quad x' = \xi' + \eta' i,$$

— unter $E(x)$ die Exponentialreihe verstanden — so entspricht jedem Kreise C der x' — Ebene, der von einem Punkte $x' = \frac{1}{2}\alpha$ der ξ' — Axe durch den Nullpunkt $x' = o$ gelegt ist, in der x — Ebene ein Kreis C, dessen Mittelpunkt der Punkt $x = o$ ist. Wird nämlich der Kreis C' durch die Gleichung

$$(1) \qquad x' = \frac{\alpha}{1 + \tau i}$$

dargestellt, wobei die reelle Veränderliche τ von $-\infty$ durch alle Werthe bis zu $\tau = +\infty$ übergeht, so ergiebt sich als entsprechende Curve der x — Ebene

(2) $$x = E\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left\{\cos\frac{\tau}{\alpha} + i \sin\frac{\tau}{\alpha}\right\}$$

d. i. ein Kreis C, dessen Mittelpunkt des Punkt $x = o$ und dessen Radius $\rho = E\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ ist. Und man erkennt, dass allen Punkten von (1), deren Paramenter τ sich um ganze Vielfache von 2π unterscheiden, ein und derselbe Punkt von (2) zugeordnet sei *). Ist in (1) $\alpha = 1 : \bar{l}\rho_0$, worin der Nenner der reellen Logarithmus von ρ_0 bezeichnet, so folgt $\rho = \rho_0$. Durchläuft α die reellen Zahlen von $1 : \bar{l}\rho_0$ bis 0, so nimmt ρ von ρ_0 bis 0 ab. Den Punkten innerhalb des Kreises C'_0, dessen Mittelpunkt $x' = 1 : 2\bar{l}\rho_0$ ist, entsprechen somit die Punkte innerhalb C_0. Dem Punkte $x = o$ entspricht kein Punkt der x' — Ebene, ebenso wenig als dem Punkte $x' = o$ ein Punkt der x — Ebene zugeordnet ist.

Dem eben erwähnten Punkte $x = 1 : 2\bar{l}\rho_0$ entspricht der Punkt $x = \rho_0^2$, der innerhalb des Kreises C^0 liegt.

Die analytische Function f (x) kann somit durch das Element $P(x \mid \rho_0^2)$ erzeugt werden. Diese nach ganzen positiven Potenzen von $x - \rho_0^2$ fortschreitende Reihe lässt sich in eine nach ganzen positiven Potenzen von $x' - \frac{1}{2\bar{l}\rho_0}$ fortschreitende Reihe verwandeln. In der That, bedeutet a überhaupt eine endliche, von 0 verschiedene Zahl und a' irgend einen der Werthe von $1 : la$, so lässt sich jede nach ganzen positiven Potenzen von $x - a$ fortschreitende Reihe mit Hülfe der aus $x = E\left(\frac{1}{x'}\right)$ folgenden Entwickelung

---

*) Bezeichnet $\bar{l}a$ denjenigen natürlichen Logarithmus der beliebigen Zahl a, dessen imaginärer Theil einen zwischen $-\pi$ und $+\pi$ gelegenen Coefficienten hat, so dass der allgemeine Logarithmus la durch $\bar{l}a + 2k\pi i$ dargestellt wird, so liegen die a entsprechenden Punkte a' der x' — Ebene auf dem Kreise

$$x' = \frac{1}{\bar{l}a + 2\tau\pi i},$$

dessen Mittelpunkt ebenfalls auf der ξ' — Axe liegt.

$$x - a = a\left\{-\frac{x'-a'}{a'^2} + \left(\frac{1}{a'^3} + \frac{1}{2a'^4}\right)(x'-a')^2 + .-\right\}$$

in eine solche nach Potenzen von $x' - a'$ fortschreitende Reihe verwandeln.

Auf diese Weise folgt aus $P\ (x \mid \rho_0{}^2)$ das Element einer analytische Function $F\ (x')$:

$$(3) \quad P'\left(x' \,\middle|\, \frac{1}{2\bar{l}\rho_0}\right) = f_0\ (\rho_0{}^2) + {}_n\sum_1^{\infty} An\left(x' - \frac{1}{2\bar{l}\rho_0}\right)^n,$$

worin unter $f_0\ (\rho_0{}^2)$ ein bestimmter der Werthe $f\ (\rho_0{}^2)$ zu verstehen ist. Es lässt sich nun leicht zeigen, dass der Convergenzkreis der vorstehenden Reihe mit dem Kreise C'_0 zusammen fällt.

Zunächst bemerke man, dass sich aus dem Functionenelement (3) auf allen Wegen innerhalb C'_0, neue Functionenelemente ableiten lassen, dann jeder derselben entspricht einem Wege innerhalb C_0, der nicht durch den Punkt $x = o$ geht. Die aus dem Elemente (3) entspringende Function verliert somit den Charakter einer ganzen Funetion in keinem Puokte innerhalb C'_0, demnach kann nach einem Satze des Herrn Weierstrass der Convergenzkreis der Reihe (3) nicht innerhalb C'_0 liegen.

Bevor man zur ursprünglichen Variabeln x zurückkehrt, wobei $x' = 1 : lx$ zu setzen ist, muss untersucht werden, welche Werthe die durch das Element (3) definirte Function $F\ (x')$ für solche Punkte innerhalb C'_0 liefert, die einem und demselben Punkte a der x — Ebene innerhalb C_0 entsprechen. Hierbei ergiebt sich der Satz, dass $F\ (x')$ für dieselben die verschiedenen Werthe annimmt, welche $f\ (x)$ für $x = a$ erhält. Nach den Principien der Functionentheorie des Herrn Weierstrass lässt sich derselbe auf folgende Art beweisen.

Es seien $a_1 = 1 : \bar{l}a$ und a_2 ein davon verschiedener Werth der Formel $1 : la$. Man verbinde a_2 mit dem Mittelpunkt des Kreises C'_0 zunächst durch einen ganz innerhalb C'_0 vorlaufenden Weg w_1, der durch keinen Punkt $x' = 1 : la$

führt, hierauf durch einen solchen w_2, der durch a_1 geht, ohne einen weiteren der Punkte $x' = 1 : la$ zu berühren. Auf beiden Wegen ergibt sich aus dem Elemente (3) dasselbe Funtionenelement $P'(x' \mid a_2)$. Der Theil $a_1\, a_2$ von $w_2 : l'$ entspricht aber einer in a geschlossenen Linie l der x — Ebene, vollständig innerhalb C_0 gelegen.

Ist $a_2 = 1 : (\bar{l}a + 2k\pi i)$, so beträgt die Anzahl der Windungen von l um den Punkt x = o*) genau k. Diese Zahl wird nämlich angegeben durch das bestimmte Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(l)} \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(l')} \frac{dx'}{x'^2} = \frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right\} = k,$$

wie man durch die Substitution $x = E\left(\frac{1}{x'}\right)$ unmittelbar findet. Die aus dem erzeugenden Element $P(x \mid \rho_0{}^2)$ folgenden Functionenelemente $P(x \mid a)$ von $f(x)$ sind aber vollständig durch die genannte Zahl bestimmt. Ihnen entsprechend unterscheiden sich somit die Functionenelemente $P'(x' \mid a_1)$ und $P'(x' \mid a_2)$.

Man erhält demnach aus (3) die Entwickelung

$$f(x) = f_0(\rho_0{}^2) + {}_n\sum_1^{\infty} An\left(\frac{1}{lx} - \frac{1}{2l\rho_0}\right)^n,$$

convergent für alle Punkte innerhalb des Kreises C_0, ausgenommen x = o, und zwar liefern zu einem

*) Zieht man von einem Punkte 0 einen Halbstrahl g in's Unendliche, nennt diejenige Seite desselben, nach welcher der Halbstrahl $\hat{gn} = + 90^0$ fällt, die positive und schreibt für jeden der Schnittpunkte von l mit g, in welchen diese Linie, in einem bestimmten Sinne (wie oben) beschrieben, von der negativen auf die positive Seite von g tritt, + 1, für jeden der übrigen — 1; so heisst nach Herrn Weierstrass die Summe der so erhaltenen Zahlen, die von der Wahl von g nicht abhängt, die Anzahl der Windungen der geschlossenen Linie l in Beziehung auf den Punkt 0.

bestimmten Werthe von x die verschiedenen Werthe von lx die für f (x) unter den angegebenen Bedingungen möglichen Werthe.

Dieser Satz wurde von Herrn E. Picard gegeben (vgl. Bulletin de la Soc. Math. de France VII p. 102 und Compt. rend. LXXXVIII p. 853). Es schien mir jedoch wünschenswerth durch eine genauere Untersuchung festzustellen, in welcher Weise die vorstehende Entwickelung die verschiedenen Werthe der vieldeutigen Function f (x) darstellt.

Innsbruck 28. November 1880.