

## Bemerkung über einen Satz des Hrn. E. Picard.

Von O. Stolz.

In der Constructionsebene der complexen Variabeln  $x = \xi + \eta i$  sei vom Nullpunkte aus mit einem Radius  $\rho_0 < 1$  ein Kreis  $C_0$  verzeichnet. Für irgend einen Punkt  $x_0$  innerhalb desselben, der jedoch vom Nullpunkte verschieden ist, sei ein Functionenelement  $P(x | x_0)$  gegeben, aus welchem sich auf jedem innerhalb  $C_0$  verlaufendem Wege, welcher den Anfangspunkt nicht berührt, für den Endpunkt ein neues Functionenelement ableiten lasse. Dadurch wird für alle Punkte  $x$  innerhalb  $C_0$  ausgenommen  $x = 0$  eine analytische Function  $f(x)$  defnirt, die im Allgemeinen vieldeutig sein wird, und in der Umgebung jeder solchen Stelle  $(x, y)$  den Character einer ganzen Function besitzt.

Setzt man

$$x = E\left(\frac{1}{x'}\right) \quad x' = \xi' + \eta' i,$$

— unter  $E(x)$  die Exponentialreihe verstanden — so entspricht jedem Kreise  $C$  der  $x'$  — Ebene, der von einem Punkte  $x' = \frac{1}{2} \alpha$  der  $\xi'$  — Axe durch den Nullpunkt  $x' = 0$  gelegt ist, in der  $x$  — Ebene ein Kreis  $C$ , dessen Mittelpunkt der Punkt  $x = 0$  ist. Wird nämlich der Kreis  $C'$  durch die Gleichung

$$(1) \quad x' = \frac{\alpha}{1 + \tau i}$$

dargestellt, wobei die reelle Veränderliche  $\tau$  von  $-\infty$  durch alle Werthe bis zu  $\tau = +\infty$  übergeht, so ergibt sich als entsprechende Curve der  $x$  — Ebene

$$(2) \quad x = E \left( \frac{1}{\alpha} \right) \left\{ \cos \frac{\tau}{\alpha} + i \sin \frac{\tau}{\alpha} \right\}$$

d. i. ein Kreis  $C$ , dessen Mittelpunkt des Punkt  $x = o$  und dessen Radius  $\rho = E \left( \frac{1}{\alpha} \right)$  ist. Und man erkennt, dass allen Punkten von (1), deren Parameter  $\tau$  sich um ganze Vielfache von  $2\pi$  unterscheiden, ein und derselbe Punkt von (2) zugeordnet sei\*). Ist in (1)  $\alpha = 1: \bar{\rho}_0$ , worin der Nenner der reellen Logarithmus von  $\rho_0$  bezeichnet, so folgt  $\rho = \rho_0$ . Durchläuft  $\alpha$  die reellen Zahlen von  $1: \bar{\rho}_0$  bis 0, so nimmt  $\rho$  von  $\rho_0$  bis 0 ab. Den Punkten innerhalb des Kreises  $C'_0$ , dessen Mittelpunkt  $x' = 1: 2\bar{\rho}_0$  ist, entsprechen somit die Punkte innerhalb  $C_0$ . Dem Punkte  $x = o$  entspricht kein Punkt der  $x'$  — Ebene, ebenso wenig als dem Punkte  $x' = o$  ein Punkt der  $x$  — Ebene zugeordnet ist.

Dem eben erwähnten Punkte  $x = 1: 2\bar{\rho}_0$  entspricht der Punkt  $x = \rho_0^2$ , der innerhalb des Kreises  $C^0$  liegt.

Die analytische Function  $f(x)$  kann somit durch das Element  $P(x | \rho_0^2)$  erzeugt werden. Diese nach ganzen positiven Potenzen von  $x - \rho_0^2$  fortschreitende Reihe lässt sich in eine nach ganzen positiven Potenzen von  $x' - \frac{1}{2\bar{\rho}_0}$  fortschreitende Reihe verwandeln. In der That, bedeutet a überhaupt eine endliche, von 0 verschiedene Zahl und  $a'$  irgend einen der Werthe von  $1: \bar{a}$ , so lässt sich jede nach ganzen positiven Potenzen von  $x - a$  fortschreitende Reihe mit Hülfe der aus  $x = E \left( \frac{1}{x'} \right)$  folgenden Entwicklung

---

\*) Bezeichnet  $\bar{a}$  denjenigen natürlichen Logarithmus der beliebigen Zahl  $a$ , dessen imaginärer Theil einen zwischen  $-\pi$  und  $+\pi$  gelegenen Coefficienten hat, so dass der allgemeine Logarithmus  $\bar{a}$  durch  $\bar{a} + 2k\pi i$  dargestellt wird, so liegen die  $a$  entsprechenden Punkte  $a'$  der  $x'$  — Ebene auf dem Kreise

$$x' = \frac{1}{\bar{a} + 2\tau\pi i}$$

dessen Mittelpunkt ebenfalls auf der  $\xi'$  — Axe liegt.

$$x - a = a \left\{ - \frac{x' - a'}{a'^2} + \left( \frac{1}{a'^3} + \frac{1}{2a'^4} \right) (x' - a')^2 + \dots \right\}$$

in eine solche nach Potenzen von  $x' - a'$  fortschreitende Reihe verwandeln.

Auf diese Weise folgt aus  $P(x | \rho_0^2)$  das Element einer analytischen Function  $F(x')$ :

$$(3) \quad P' \left( x' \middle| \frac{1}{2l\rho_0} \right) = f_0(\rho_0^2) + n \sum_1^{\infty} A_n \left( x' - \frac{1}{2l\rho_0} \right)^n,$$

worin unter  $f_0(\rho_0^2)$  ein bestimmter der Werthe  $f(\rho_0^2)$  zu verstehen ist. Es lässt sich nun leicht zeigen, dass der Convergencekreis der vorstehenden Reihe mit dem Kreise  $C'_0$  zusammen fällt.

Zunächst bemerke man, dass sich aus dem Functionenelement (3) auf allen Wegen innerhalb  $C'_0$ , neue Functionenelemente ableiten lassen, dann jeder derselben entspricht einem Wege innerhalb  $C_0$ , der nicht durch den Punkt  $x = a$  geht. Die aus dem Elemente (3) entspringende Function verliert somit den Charakter einer ganzen Function in keinem Punkte innerhalb  $C'_0$ , demnach kann nach einem Satze des Herrn Weierstrass der Convergencekreis der Reihe (3) nicht innerhalb  $C'_0$  liegen.

Bevor man zur ursprünglichen Variablen  $x$  zurückkehrt, wobei  $x' = 1 : lx$  zu setzen ist, muss untersucht werden, welche Werthe die durch das Element (3) definirte Function  $F(x')$  für solche Punkte innerhalb  $C'_0$  liefert, die einem und demselben Punkte  $a$  der  $x -$  Ebene innerhalb  $C_0$  entsprechen. Hierbei ergibt sich der Satz, dass  $F(x')$  für dieselben die verschiedenen Werthe annimmt, welche  $f(x)$  für  $x = a$  erhält. Nach den Principien der Functionentheorie des Herrn Weierstrass lässt sich derselbe auf folgende Art beweisen.

Es seien  $a_1 = 1 : la$  und  $a_2$  ein davon verschiedener Werth der Formel  $1 : la$ . Man verbinde  $a_2$  mit dem Mittelpunkt des Kreises  $C'_0$  zunächst durch einen ganz innerhalb  $C'_0$  verlaufenden Weg  $w_1$ , der durch keinen Punkt  $x' = 1 : la$



bestimmten Werthe von  $x$  die verschiedenen Werthe von  $lx$  die für  $f(x)$  unter den angegebenen Bedingungen möglichen Werthe.

Dieser Satz wurde von Herrn E. Picard gegeben (vgl. Bulletin de la Soc. Math. de France VII p. 102 und Compt. rend. LXXXVIII p. 853). Es schien mir jedoch wünschenswerth durch eine genauere Untersuchung festzustellen, in welcher Weise die vorstehende Entwicklung die verschiedenen Werthe der vieldeutigen Function  $f(x)$  darstellt.

Innsbruck 28. November 1880.

---

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Berichte des naturwissenschaftlichen-medizinischen Verein Innsbruck](#)

Jahr/Year: 1881

Band/Volume: [11](#)

Autor(en)/Author(s): Stolz Otto

Artikel/Article: [Bemerkung über einen Satz des Hrn. E. Picard. 27-31](#)