Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes

von

O. Stolz.

In der Arbeit über Bolzano [1]) p. 269 habe ich auf eine Lücke hingewiesen, welche in dem Euclid'schen Beweise des Satzes; „Zwei Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser" (Elem. XII. prop. 2. [2])) gefunden werden kann. Diesen Gegenstand will ich nun eingehender besprechen und daran einige allgemeinere Betrachtungen, insbesondere über das System der griechischen Geometrie knüpfen.

1. Es ist schon öfter [3]) hervorgehoben worden, dass Euclid implicite den Grundsatz gebraucht: eine Grösse kann so oft vervielfältigt werden, dass sie jede andere, ihr gleichartige, übertrifft. (Vgl. insbesondere X. prop. 1). Wenn man über ein System von Grössen nicht mehr voraussetzt, als Euclid über die Strecken, so lässt sich der Satz in der That nicht als eine notwendige Folge der Prämissen darstellen. Die genannten Voraussetzungen bestehen darin, dass je zwei Grössen des Systemes vergleichbar seien (d. i. entweder als gleich oder falls dieses nicht zutrifft, die eine von ihnen als die grössere bezeichnet werden kann); dass die Grössen addirt und subtrahirt werden können nach denselben Regeln wie die ganzen absoluten Zahlen und dass jede Grösse in gleiche und mit ihr gleichartige Theile zerlegbar sei.[4]) Nun giebt es aber ein Grössensystem, welches den eben aufgestellten Bedingun-

gen genügt, ohne dass obiger Grundsatz erfüllt ist.[5]) Derselbe ist somit nicht, wie man wohl geglaubt hat, die Bedingung der Gleichartigkeit der betrachteten Grössen.

Es lässt sich aber zeigen, dass der in Rede stehende Grundsatz, der kurz als des Axiom des Archimedes[6]) bezeichnet werden mag, aus der Annahme der Stetigkeit eines Systemes von Grössen hervorgeht, welche die angegebenen Eigenschaften besitzen.

2. Wir setzen nun ein Grössensystem Σ von den folgenden Eigenschaften voraus.

1) Je zwei Grössen des Systemes können entweder als gleich oder ungleich und im letzteren Falle kann die eine von ihnen als die grössere bezeichnet werden.

2) Die Grössen lassen sich addiren wie die natürlichen Zahlen, insbesondere ist die Summe je zweier eine Grösse des Systemes.

3) Falls $A < B$, so existirt im Systeme eine und nur eine Grösse X, so dass $A + X = B$.

4) Zwischen je zwei ungleichen Grössen liegt immer noch eine Grösse des Systemes und es giebt neben jeder Grösse noch eine kleinere, somit keine kleinste. Der letztere Umstand wird kurz dadurch ausgedrückt, dass man dem Systeme Σ die untere Grenze Null verleiht, wobei 0 eine adjungirte uneigentliche Grösse bedeutet.

Wie die Stetigkeit des Grössensystemes Σ zu definiren ist, hat Hr. R. Dedekind gelehrt.[7]) Unsere Aufgabe besteht nun darin, die von ihm entwickelten Ideen genauer auszuführen.

Aus dem Systeme Σ denken wir uns ein System Π_0 zwischen den Grenzen O und B abgesondert, das ohne gerade alle Grössen von Σ zu enthalten, doch noch die obigen Eigenschaften besitzt. Insbesondere sollen zwischen je zwei Grössen $P < Q$ von Π_0 nicht allein unendlich viele Grössen liegen, sondern was aus 3) und 4) unmittelbar folgt, falls R eine Grösse zwischen P und Q bedeutet und D eine gehörig kleine, sonst beliebige Grösse von Π_0, so sollen im

Intervalle (P, Q) auch Grössen S S^1 vorkommen, so dass $R < S < R + D$, $R > S^1 > R - D$. Das System Π_0, sowie jeder Theil Π desselben zwischen Grenzen A', $B' \leqq B$, heisse nach Hrn. G. Cantor überall-dicht zwischen den bezüglichen Grenzen.

Ein Schnitt (Lücke) eines überall-dichten Grössensystemes Π heisst jede Theilung der ihm angehörigen Grössen P in zwei Gruppen von den folgenden Eigenschaften:

1) Jede Grösse P gehört einer und nur einer Gruppe an.

2) Wenn P_1 eine Grösse der ersten Gruppe ist, so auch jede Grösse $P < P_1$; wenn P_2 eine Grösse der zweiten Gruppe ist, so auch jede Grösse $P > P_2$. (Somit ist notwendig $P_1 < P_2$).

3) Ist P_1 eine Grösse der ersten Gruppe, so gehört zu ihr auch eine Grösse, welche P_1 überschreitet und ist P_2 aus der zweiten Gruppe, so befindet sich darin auch eine Grösse $P < P_2$.

Dabei bleibt die Möglichkeit offen, dass die Lücke von Π durch keine Grösse von Σ, durch eine einzige, oder selbst durch mehrere ausgefüllt werden kann; je nachdem in Σ keine, eine oder mehrere Grössen vorhanden sind, die grösser als alle P_1, kleiner als alle P_2 sind.

Nunmehr lautet die Definition der Stetigkeit eines Grössensystemes Σ folgendermassen (l. c. p. 18):

„Das Grössensystem Σ heisst zwischen den Grenzen A und B stetig dann und nur dann, wenn jedem Schritte eines jedem aus ihm herausgehobenen überall-dichten Grössensystemes Π, zu dem auch die Grössen A und B gehören, eine und nur eine Grösse S[8]) entspricht, welche selbstverständlich nicht zu Π gehört und grösser ist als alle Grössen P_1 der ersten, kleiner als alle Grössen P_2 der zweiten Gruppe des Schnittes von Π.“

3. An die vorstehende Definition knüpfen sich mehrere Fragen, insbesondere die folgende. Können im Systeme Π Grössen P gefunden werden, welche an S näher liegen als eine gegebene Grösse D von Π_0, oder was damit überein-

stimmt, giebt es in der ersten Gruppe des Schnittes von Π Grössen Q_1, in der zweiten Grössen Q_2 von der Art, dass $Q_2 - Q_1 < D$ ist? Angenommen es sei wie auch P_1 in der ersten, P_2 in der zweiten Gruppe gewählt werden mag, stets $P_2 - P_1 \geqq D > D'$, denn müssten die Grössen P_1, $P_1 + D'$, $P_1 + 2D' \ldots P_1 + nD'$ sämmtlich zur ersten Gruppe gerechnet werden. Dies ist unmöglich, wenn die Grössen Σ dem Axiome des Archimedes genügen, d. i. wenn falls $P_2 > P_1$ ist ein Vielfaches von D' existirt $pD' > P_2 - P_1$. Es ergibt sich somit die Notwendigkeit zu untersuchen, ob der eben erwähnte Grundsatz aus der Definition der Stetigkeit gefolgert werden könne.

Satz. „Wenn für ein Grössensystem Σ ausser den schon im Eingange von Nr. 2 gemachten Voraussetzungen noch die Stetigkeit festgesetzt wird, so folgt notwendig:

1) die Theilbarkeit jeder Grösse A des Systemes Σ in beliebig viele (n) gleiche Theile, d. i. im Systeme Σ existirt eine Grösse X, so dass $n X = A$;

2) dass das Axiom des Archimedes besteht."

Beweis. Zu 1. Man bemerke zunächst: ist B eine gegebene Grösse von Σ, n eine beliebige natürliche Zahl, so existirt immer eine Grösse Y von der Art, dass $nY < B$. Dies ergibt sich aus den Voraussetzungen in Nr. 2 unmittelbar. Würde man nun annehmen, es sei keine Grösse X vorhanden von der Art, dass $nX = A$ so könnte man im Systeme (O, A) einen Schnitt ausführen, gegen die Voraussetzung der Stetigkeit. In der That ist $P < A$ so ist nP entweder $< A$ oder $> A$. Dadurch werden die Grössen (O, A) in zwei Gruppen P_1, P_2 getheilt; $nP_1 < A$; $nP_2 > A$; welche den oben aufgestellten Bedingungen Genüge leisten. Insbesondere: ist P_1 eine Grösse der ersten Gruppe, so auch $P_1 + Y_1$ woferne nur Y_1 so gewählt wird, dass $nY_1 < A - nP_1$; steht P_2 in der zweiten Gruppe, so auch $P_2 - Y_2$, woferne nur $nY_2 < nP_2 - A$.

Zu 2. Es sei $A < B$. Würden die Reihe wachsender Grössen A, 2A . . . nA . . die Grösse B nicht überschreiten, so müsste sie einen Grenzwerth $C \leqq B$ haben, so dass $C > nA$ aber $C - A < mA$. Darin liegt ein Widerspruch da $C < (m+1) A$ folgen würde.

Es ist nur nachzusehen, ob der hier benutzte Satz (vgl. Dedekind l. c. p. 29): „Wenn M_1 $M_2 \ldots M_n \ldots$ eine unbegrenzte Reihe wachsender Grössen des stetigen Systemes Σ: (O, B) bezeichnet, welche die Grösse B nicht überschreiten, so existirt eine und nur eine Grösse $C \leqq B$ von der Art, dass C grösser ist als alle M_n; dass jedoch zu jeder Grösse D des Systemes eine ganze Zahl m gehört, welche der Bedingung genügt $M_n > C - D$ für $n \geqq m$" — nicht das Axiom des Archimedes voraussetzt. Das ist jedoch nicht der Fall. Der Beweis des Satzes erfordert nämlich, wenn die Existenz einer solchen Grösse C nicht zugestanden würde, die Aufzeigung eines Schnittes des Systemes (O, B). Die erste Gruppe wird gebildet von allen Grössen P_1, die kleiner sind als irgend ein M_n; die zweite von denjenigen P_2, die grösser sind als jedes M_n. Diese beiden Gruppen entsprechen vollkommen den in Nr. 2 aufgestellten Bedingungen, wie leicht ersichtlich ist. So findet man z. B. in der zweiten Gruppe stets eine Grösse $P < P_2$. Denn es darf zufolge Annahme nicht sein bei beliebigem D $M_n > P_2 - D$ für alle hinlänglich grossen Werthe von $n : n \geqq m$; so dass wie gross auch n vorausgesetzt werden mag eine Zahl $r > n$ vorhanden sein muss, wofür $M_r \leqq P_2 - D$. Somit muss es Grössen D geben so beschaffen, dass wenn P beliebig gewählt wird zwischen $P_2 - D$ und P_2, $P > M_r > M_n$ ist. — Und zwar existirt nur eine Grösse. C. Denn hätte C' dieselben Eigenschaften, und wäre $C' > C$ angenommen, so wäre wie klein auch D sein mag $C + D > M_m + D > C'$. Ebensowenig kann $C' < C$ sein. (Vgl. Nr. 5).

Nunmehr folgt auch der Satz: „Das überall-dichte Grössensystem Π_0 enthält Grössen kleiner als jede gegebene Grösse E des stetigen Systemes Σ". Angenommen es seien alle Grössen P von $\Pi_0 \geqq E$ folglich $> E'$. Nun ist leicht einzusehen zufolge der 3. Eigenschaft von Π_0 (vgl. Nr. 2), dass es im Systeme Π_0 Grössen Y giebt von der Art, dass $nY < P$, wie gross auch n sein mag. Gemäss der Voraussetzung wäre nun auch $Y > E'$, folglich $P > nE'$ gegen das Axiom des Archimedes. — Der vorstehende Satz ist identisch mit dem folgenden: „Es seien im Systeme Π_0 (o, B) eine unbegrenzte Reihe wachsender Grössen M_1 $M_2 \ldots M_n \ldots$ gegeben, welche B nicht überschreiten, dieser Grösse aber näher kommen als irgend eine Grösse D von Π_0. Ist nun das Grössensystem Σ im Intervalle (O, B) stetig, so muss jede Grösse S von Σ die kleiner als B und verschieden von den M_n ist, entweder kleiner als M_1 sein oder zwischen zwei aufeinanderfolgenden Grössen M_m und M_{m+1} der obigen Reihe liegen." — In der That, da $D < B - S$ angenommen werden kann, so folgt schliesslich $M_n > B - D > S$. — Für die „Unendlich" gilt keiner der beiden Sätze (P. du Bois-Reymond l. c.).

4. Somit ist erwiesen, dass das Axiom des Archimedes für die Strecken im Sinne der alten Geometrie als Corollar erscheint, wenn man zu den ihnen von Euclid beigelegten Eigenschaften noch die Stetigkeit des Systemes derselben fügt. Soll aber diese Annahme unterbleiben, so müsste der erwähnte Grundsatz für das System der Strecken (sowie auch für das der Winkel) unter die Axiome der Geometrie aufgenommen werden.[9])

5. Versteht man unter „Grössenbegriff" mit H. Grassmann (Lehrbuch der Arithmetik p. 1) einen solchen Begriff, dass je zwei der darunter enthaltenen Objecte entweder als gleich oder als ungleich erklärt werden können, so lassen sich Dinge derselben Art nur dann als Grössen ansehen, wenn ein Verfahren angegeben wird, nach welchem die Vergleichung von irgend zwei derselben durchgeführt werden soll. Die griechischen Geometer schlugen hinsichtlich der Raumgebilde (Strecken, Flächenräume, Körper) gerade den umgekehrten Weg ein. Ihnen steht die Vergleichbarkeit von je zwei gleichartigen derselben von vorneherein fest d. h., ohne dass die Möglichkeit

der Vergleichung auf geometrischem Wege nachgewiesen zu werden brauchte.[10]) Ausserdem legen sie den Raumgrössen die Eigenschaften 2)—4) in Nr. 2 bei, ferner die Theilbarkeit einer jeden in gleiche und mit ihr gleichartige Theile[11]) und die im Axiome des Archimedes ausgesprochene Eigenschaft.

Für eine solche Darstellung sind Euclid's Axiome 1—9 sämmtlich unentbehrlich. Sein 8. und 9. Axiom geben zwar die geometrische Erklärung specieller Fälle der Gleichheit und Ungleichheit von Raumgebilden (welche bezüglich der Strecken und Winkel allgemein ausreichen), aber man sucht bei Euclid vergebens eine solche, in Betreff zweier gleichen Flächenräume und Körper, die nicht gleich und ähnlich sind. Um seine Darstellung der Sätze über die gleichen Polygone in obigem Sinne zu verbessern, hat man bekanntlich von der Definition auszugehen: Gleich sind zwei Zellen (d. i. von je einer einfachen geschlossenen Linie begrenzte Flächen), wenn sie entweder gleich und ähnlich sind, oder aus Theilen bestehen, die gleich und ähnlich sind.[12]) Da eine geradlinig- und eine krummlinig-begrenzte Zelle „weder congruent noch in congruente Flächentheile zerfällbar sind, so ist es, von dem hier angegebenen Standpunkte aus, insoferne man den Begriff der Gleichheit in dessen geometrischer Klarheit und Bestimmtheit erhalten will, nicht wohl abzusehen, auf welche Weise sich jemals eine Vergleichung zwischen beiden Gattungen von Flächen, dem Begriffe der Notwendigkeit nach, werde zu Stande bringen lassen.“[13]) Hier giebt es eben keinen anderen Ausweg, als den Flächeninhalt der letzteren Zelle mit Hilfe von Infinitesimalbetrachtungen zu definiren.

Wesentlich davon verschieden musste das Verfahren der Griechen sich gestalten. Nachdem durch die Axiome 8. und 9. die Vergleichung vom räumlichen Grössen in gewissen Fällen anschaulich gelehrt ist, wird vermöge der übrigen Axiome rein dialektisch die Vergleichung in einigen Fällen erzielt, die nicht unter die erstgenannten Axiome unterzubringen sind. Diese Methode reicht jedoch nicht weit;

es musste daher ein neues Mittel ersonnen werden, das allerdings von dem Alten nicht ausdrücklich als der leitende Gedanke erklärt ist.

Die Griechen geben vielmehr zu den von ihnen gefundenen Sätzen über die Quadratur krummlinig-begrenzter Zellen stets indirecte Beweise. Die Schwierigkeit, die man manchmal in denselben gefunden hat, verschwindet bei näherer Betrachtung. Sie lassen sich nämlich sämmtlich auf folgenden Satz zurückführen: „Zwei geometrische Grössen A, B sind einander gleich, falls sich zeigen lässt, dass bei der Annahme $A>B$ der Unterschied $A-B$, und bei der Annahme $A<B$ der Unterschied $B-A$ kleiner wäre als jede mit A, B gleichartige Grösse."[14]) Es ist dies der einzige Ausweg, den die Alten einschlagen konnten.

Die Benützung dieses Satzes wird ermöglicht durch das Axiom von Archimedes. Dasselbe lässt sich, wenn es für die Strecken festgesetzt ist, für zwei beliebige Zellen A, B wenigstens in der Euclid'schen Geometrie leicht nachweisen, wie mir Hr. Dantscher v. Kollesberg mittheilt. Ist $A<B$, so construire man ein Quadrat E, ganz innerhalb A gelegen, und lege soviele (p) Quadrate E nebeneinander, bis B vollständig bedeckt ist. Dann ist $pA>B$.

6. Geht man das 5. Buch von Euclid's Elementen durch, so wird man finden, dass gesagt wird, ein Verhältniss haben irgend zwei Grössen eines Systemes von Grössen, welche sich untereinander vergleichen, wie die absoluten Zahlen addiren, subtrahiren, theilen lassen und dem Axiome des Archimedes genügen (Vgl. Elem. V. def. 4, prop. 8). Dabei müssen also auch die Summe und Differenz zweier Grössen, sowie jeder als möglich geltende aliquote Theil einer solchen wieder Grössen des Systemes bilden. Zufolge der Annahmen, welche nach Nr. 5 die Griechen über die geometrischen Grössen gemacht haben, sind sie sonach berechtigt, von dem Verhältnisse je zweier gleichartiger unter denselben zu sprechen. Wenn man aber diese Voraussetzungen nicht machen will, so ist schon der Nachweis nicht mehr möglich, dass zwei

Kreisflächen K, K′ ein Verhältniss haben. Denn im Systeme der Kreisflächen lässt sich zwar die Vergleichung unmittelbar herstellen; aber es geht nicht an, die Fläche K+K′, welche durch Aneinanderlegen beider Kreise entsteht, auf geometrischem Wege in einen Kreis zu verwandeln oder auch nur mit einem beliebigen Kreise zu vergleichen.[15])

Es ist ein Verdienst R. Simson's, des trefflichen Kenners der alten Geometrie, die Darstellung Euclid's im 5. Buche mit vollem Verständnisse gewürdigt zu haben. Mit ihm stimmt Hankel überein.[16]) Für Euclid hat die Frage, was das Verhältnis zweier Grössen sei, keinen Sinn; er setzt nur fest, unter welcher Bedingung der Ausdruck: „A steht in demselben Verhältnisse zu B, wie C zu D" gebraucht werden soll. Daher giebt es für ihn nicht ἰσότης τῶν λόγων (Gleichheit), sondern ταυτότης (Dieselbigkeit). Dadurch treten „Grössen" und „Verhältnisse" in einen für die alte Geometrie charakteristischen Gegensatz, der ihre Darstellung ziemlich schwerfällig gemacht hat.

Wenn wir aber den in Nr. 5 aufgestellten Grössenbegriff gebrauchen, so können wir auch die „Verhältnisse" als Grössen auffassen. Zunächst ist uns die Nebeneinanderstellung zweier gleichartiger geometrischen Grössen A, B mit Beachtung ihrer Aufeinanderfolge ein Gedanken-Object, das wir ihre Beziehung nennen mögen. Dann stellen mir durch Definitionen, die an sich willkürlich sind (wenn sie nur gewissen formalen Bedingungen Genüge leisten), die Vergleichbarkeit der „Verhältnisse" her und machen sie dadurch zu Grössen. Bedienen wir uns hierzu der Erklärungen Elem. V. Def. 6, 7; so ergeben sich die Sätze des 5. Buches; hätten wir aber z. B. festgesetzt, es soll $(A : B) >, =, <$ sein als $(C ; D)$, falls $A + D >, =, <$ ist als $B + C$, so würden wir zur Theorie der „arithmetischen Verhältnisse" gelangen, welche aber, da sie nichts Neues liefert, als eine dialektische Spielerei erscheint.

Voreilig ist es, die „Verhältnisse" nun, nachdem sie zu Grössen gemacht sind, sofort als absolute Zahlen im Sinne der Arithmetik zu erklären — ein Verfahren, dessen sich schon Newton bedient, um diese Zahlen zu definiren (Arithmetica universalis 1732 pag. 4). Indem nach V. Def. 6 die Verhältnisse zweier commensurablen Grössenpaare $A=aE$ $B=bE$; $C=cF$ $D=dF$ gleich sind, falls die Quotienten $a:b=c:d$, so können diese Verhältnisse der rationalen Zahl $a:b$ zugeordnet oder gleich gesetzt werden. Nun steht es allerdings frei, auch das Verhältnis zweier incommensurabelen Grössen eine Zahl zu nennen; aber aus dem Vorstehenden lasst sich über die Eigenschaften dieser Zahlen nichts entnehmen.

Man hat daher zuerst nachzuweisen, dass die Verhältnisse alle Eigenschaften der absoluten Zahlen besitzen, d. i. die vier Species nach den für die ganzen positiven Zahlen geltenden Gesetzen zulassen. Mit Hilfe der von Euclid a. a. O. gegebenen Begriffe und Sätze lässt sich dies wohl leicht machen; aber es darf nicht unterbleiben, wenn man auf dem von Newton benutzten Wege die absoluten Zahlen in die Arithmetik einführen will.

7. Der Beweis, den Euclid zum 2. Satze des XII. B. seiner Elemente beibringt, wurde in neuerer Zeit wieder eingehend besprochen; doch ist hierbei ein Umstand unbeachtet geblieben, der nach dem Zeugnisse des Jesuiten Claudius Richardus der Aufmerksamkeit älterer Erklärer Euclid's nicht entgieng.[17]) Der in Rede stehende Satz lässt sich, sowie der 5., 11., 12., 18. Satz desselben Buches, als specieller Fall des folgenden Auffassen: „Wenn die wachsenden Grössen $P_1, P_2 \ldots P_n \ldots$ einer Grösse K; die wachsenden Grössen $P_1', P'_2 \ldots P'_n \ldots$ einer Grösse K' beliebig nahe kommen und dabei die Verhältnisse $P_1 : P'_1$, $P_2 : P'_2 \ldots P_n : P'_n \ldots$ demselben Verhältnisse $A : A'$ gleich sind, so ist auch $K : K' = A : A'$." Nach der Methode der Alten wird der Satz indirect bewiesen. Wären die Verhältnisse $K : K'$ und $A : A'$ nicht einander gleich, so müsste es eine mit K, K' gleichartige Grösse X geben, so dass $K : X = A : A'$. Und nun wird gezeigt, dass X weder grösser noch kleiner

als K' sein kann.[18]) — Die Existenz der Grösse X kann aber wenigstens im Allgemeinen, nicht dargethan werden; man steht also vor einem neuen Axiom.[19]) Die Geometrie der Alten hätte sich dasselbe allerdings ersparen können; denn es lässt sich unmittelbar zeigen, dass das Verhältnis K : K' weder grösser noch kleiner sein kann als das Verhältnis A : A'.[20])

8. Wirft man die Frage auf, was die Gleichheit zweier Raumgebilde für die Anschauung zu bedeuten habe, so wird man in den Meisterwerken der griechischen Geometrie vergebens nach einer Antwort suchen. Nach Euclid. XII. prop. 5—7 sind Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe einander gleich. Da nun solche Pyramiden bis auf den heutigen Tag nicht in gleiche und ähnliche Theile zerlegt werden konnten, so bleibt keine andere Antwort auf obige Frage übrig, als dass ihnen gleiche Zahlen zugeordnet werden können. Bei den Griechen, denen nur die rationalen Zahlen bekannt sind, wird man sie jedoch nicht finden. Der Uebergang von der rein dialektischen Darstellung der Griechen zu unserer wahrhaft geometrischen Auffassung, im Alterthume selbst in der geometrischen Praxis bereits durchgeführt (man denke an die Sehnentafeln des Ptolemäus) hat sich gleichwohl sehr langsam vollzogen. Es dürfte wohl erst Legendre gewesen sein, der ihn abgeschlossen hat, indem er im III. Buche seiner Elemente der Geometrie den Grundsatz aufstellte, dass die geometrischen Grössen sich durch Zahlen ausdrücken lassen.[21]) Auch Bolzano legte denselben seinen geometrischen Arbeiten zu Grunde. Wir wissen nun, in wie weit dieser Grundsatz berechtigt ist: er kann nur ausgesprochen werden über ein stetiges Grössensystem, d. i. ein System von Grössen, das neben den im Eingange von Nr. 2 aufgeführten Eigenschaften noch die der Stetigkeit besitzt. Es wäre aber voreilig, ihn auch zu gebrauchen für die Bogen einer krummen Linie. — Liegt eine arithmetische Theorie der irrationalen Zahlen vor, wie wir sie durch die Bemühungen der Herren Dedekind,

Heine, G. Cantor, Weierstrass besitzen und ausserdem die Definition eines stetigen Grössensystemes; so kann der Legendre'sche Grundsatz natürlich durch einen Beweis erhärtet werden.

Innsbruck, am 6. Mai 1882.

Anmerkungen.

1) Vgl. Mathematische Annalen Bd. XVIII p. 255. Allein stehende Seitenangaben beziehen sich auf diesen Band der Annalen.

2) Euclid's Elemente sind nach der Ausgabe von Peyrard citirt.

3) Vgl. des unvergleichlichen Archimedis Kunstbücher .... in das Hochdeutsche übersetzt von Joh. Christoph. Sturmius. Nürnberg 1670. p. 8. — Hankel Zur Geschichte der Mathematik 1874. p. 122. — Archimedes Werke übersetzt v. Nizze p. 44.

4) Hankel Theorie der complexen Zahlensysteme 1867. p. 48.

5) Es ist das von Hrn. P. du Bois-Reymond aufgestellte und eingehend untersuchte System der Unendlich der reellen Functionen. (Vgl. insbesondere Math. Annalen B. XI p. 147). Zur Beleuchtung des Folgenden mögen nachstehende Bemerkungen über dasselbe hier wiedergegeben werden. Jeder reeller Function $f(x)$ die für lim $x=+\infty$ den Grenzwerth $+\infty$ hat, wird eine Grösse (s. Nr. 5) zugeordnet, die ihr Unendlich heisst und für unserem Zweck (und nur für diesen) mit $\mathfrak{U}(f)$ bezeichnet werden möge. Man sagt $\mathfrak{U}(f)=\mathfrak{U}(f_1)$ wenn $\lim [f(x):f_1(x)]$ für lim $x=+\infty$ existiert und weder 0 noch $+\infty$ ist; $\mathfrak{U}(f)>\mathfrak{U}(f_1)$, wenn derselbe Grenzwerth $+\infty$, $\mathfrak{U}(f)<\mathfrak{U}(f_1)$, wenn er 0 ist. Als untere Grenze dieses Grössensystemes wird die uneigentliche Grösse $\mathfrak{U}(1)$ eingeführt, die auch mit 0 bezeichnet werden kann. Unter $\mathfrak{U}(f)+\mathfrak{U}(f_1)$ wird $\mathfrak{U}(ff_1)$, unter $\mathfrak{U}(f)-\mathfrak{U}(f_1)$, falls $\mathfrak{U}(f)>\mathfrak{U}(f_1)$ ist, $\mathfrak{U}(f:f_1)$ verstanden. Demnach hat man $n\mathfrak{U}(f)=\mathfrak{U}(f^n)$; $\frac{1}{n}\mathfrak{U}(f)=\mathfrak{U}(\sqrt[n]{f})$. Die „Unendlich" entsprechen somit allen im Texte aufgestellten Bedingungen. — Da lim. $(e^x:x^n)=+\infty$ für lim. $x=+\infty$, wie gross auch die ganze Zahl n sein mag, so ist $\mathfrak{U}(x)<\mathfrak{U}(e^x)$, aber es giebt keine ganze positive Zahl p, so dass $p\mathfrak{U}(x)>\mathfrak{U}(e^x)$ ist.

6) Archimedes sagt in der Einleitung zur Schrift de quad. parabolae ausdrücklich, dass den in Rede stehenden Grundsatz schon frühere Geometer benützten. Dazu gehört, wie aus dem Anfange des I. B. von der Kugel und dem Cylinder hervorgeht, unzweifelhaft Eudoxus. Wahrscheinlich ist er noch älter; vgl. M. Cantor Gesch. d. Mathematik I. p. 209.

7) Stetigkeit und irrationale Zahlen. Braunschweig 1872.

8) Von besonderer Wichtigkeit ist die Forderung, dass jedem Schnitte nur eine Grösse zugeordnet sei. Im Systeme der „Unendlich“, welche „eine unbegrenztfach unendliche Anzahl von Individuen bilden“ (P. du Bois-Reymond l. c. p. 152), giebt es Schnitte, denen unzählig viele Grössen entsprechen. So stellen die Grössen $\mathfrak{U}(x^{\mu})$ — $0 < \mu < 1$ — einer- — und die Grössen $\mathfrak{U}(x^{\nu})$ — $\nu > 1$ — andererseits die Gruppen eines Schnittes dar, dem aber nicht allein die Grösse $\mathfrak{U}(x)$ entspricht, sondern auch alle Grössen $\mathfrak{U}(g_n)$, wo

$$g_n = x^{\frac{l_n(x)}{1+l_n(x)}} \qquad (n \geqq 2).$$

Für diese von Hrn. du Bois-Reymond a. a. O. angegebene Function, worin $l_n(x)$ anstatt $l\,l \ldots lx$ (n—mal) gesetzt ist, ergiebt sich in der That

$$\operatorname*{Lim.}_{x=+\infty} \frac{g_n(x)}{x^{\mu}} = 0 \text{ oder } +\infty, \text{ je nachdem } \mu > \text{ oder } < 1.$$

Und es ist ferner für lim. $x = +\infty$

$$\text{Lim.} \frac{g_n(x)}{x} = 0 \qquad \text{lim.} \frac{g_m(x)}{g_n(x)} = +\infty \quad (m < n).$$

9) Es scheint mir sicher zu sein, dass Archimedes den oft erwähnten Satz als Axiom bezeichnet hat, weil er ihn aus seinen Voraussetzungen über die geometrischen Grössen nicht abzuleiten vermochte. Wie ich bereits p. 269 anmerkte, folgt er nicht aus den in Nr. 2 angegebenen Eigenschaften 1)—4) eines Grössensystemes Σ, sondern bildet neben ihnen eine nothwendige Voraussetzung über ein solches Grössensystem, das Hr. P. du Bois-Reymond in seinem neuen Werke „die allgemeine Functionentheorie“ treffend ein „lineares“ nennt. Es ist offenbar, dass diese Ansicht gerade durch die Bekanntschaft mit dem Systeme der „Unendlich“ begründet wird. Ich sehe die von Hrn. du Bois-Reymond entdeckte Unterscheidung zwischen linearen und nicht-linearen Grössen als einen fundamentalen Gedanken an und habe ihn demgemäss (sowie auch die übrigen in diesem Aufsatze entwickelten Ansichten) für meine Vorlesungen über allgemeine Arithmetik in W. S. 1881/2 benutzt.

[10]) Dieselbe Voraussetzung macht Hrn. de Tilly's erstes Axiom der Geometrie. (Mémoires de Bordeaux 2 sér. T. III. p. 3).

[11]) Genau genommen wird allerdings nur die Theilbarkeit durch 2 gefordert, wie aus Euclid. X. prop. 1, Archimedes de quadratura parabolae prop. 20 etc. hervorgeht.

[12]) P. Gerwien hat gezeigt (Crelle J. X. p. 229), dass zwei Dreiecke mit gleichen Grundlinien und Höhen in Stücke zerschnitten werden können, welche bezüglich gleich und ähnlich sind. Einfacher hat Duhamel (vgl. des Methodes dans les sciences de raisonnement II p. 445) die Lehre von den gleichen Polygonen in der Ebene dargestellt. Er bemerkt ausdrücklich, dass bei Zugrundelegung der im Texte erwähnten Definition das 3. und 7. Axiom, welche Euclid im Beweise der Sätze Elem. I 35—38 benützt, nicht mehr zulässig seien. Die in diesen Axiomen ausgesprochenen Sätze erscheinen vielmehr als Folgerungen, nachdem die Vergleichbarkeit aller geradlinig begrenzten Zellen in obigem Sinne nachgewiesen ist, was übrigens auch von Duhamel nicht vollständig geleistet wurde. Hierzu ist noch zu zeigen, dass die in Euclid. Elem. I. prop. 43 als gleichbezeichneten Parallelogramme sich auch in gleiche und ähnliche Stücke zerlegen lassen. Solche erhält man, wenn man die zweite Diegonale desjenigen Parallelogrammes, in welchem die ersteren liegen, zieht und zu ihr durch die gemeinsame Ecke ebenderselben eine Parallele.

[13]) Die angeführten Worte stehen in der Abhandlung von E. H. Dirksen: »Ueber die Anwendung der Analysis auf die Rectification der Curven etc.« (Abh. der kgl. Academie zu Berlin aus dem Jahre 1833), indess bezogen auf eine ebene und krumme Fläche. Wie mir scheint, passen sie auch auf zwei beliebige ebene Zellen z. B. auf einen Kreis und ein Quadrat. Erscheint es, wie a. a. O. p. 128 ausgeführt ist, notwendig, vor Allem die Länge einer krummen Linie als Zahl zu definieren, so wird man dieselbe Forderung auch gegenüber den ebenen Zellen aufstellen müssen und den Inhalt einer solchen nicht als das geometrische Verhältnis ihrer Grösse zu der Grösse eines Quadrates, dessen Seite der Längeneinheit gleich ist, definiren können, wie es a. a. O. p. 141 geschieht. — Der Bogen CC' wird hier so definirt, wie p. 273; jedoch beschränkt sich Dirksen durchaus auf die Annahme der gleichen Theilung des Intervalles $a'-a : \delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_n = (a'-a) : n$. Auch, fehlt wenigstens im Sinne von p. 259, der Nachweiss, dass für $\lim n = +\infty$ ein Grenzwerth vorhanden sei. (Vgl. auch L. Ballauff: über die mathematischen Definitionen und Axiome. Programm Varel 1879).

[14]) Vgl. Encyclopédie. Art. Exhaustion. Wenn Hankel (a. a. O. p. 126) bemerkt: „Von einer Exhaustionsmethode zu sprechen ist sonach insoferne kaum zulässig, als die Alten niemals ihr Verfahren der Quadratur und Kubatur unter einem allgemeineren Gesichtspunkte .... dargestellt u. s. w.“; so hat er allerdings Recht. Aber man sollte auch nicht unterlassen hervorzuheben, dass aus dem im Texte angeführten Satze und der Theorie der Verhältnisse in Euclid's V. B., welche den Alten den Gebrauch irrationaler Zahlen erspart, ihr geometrisches System consequent und methodisch sich entwickeln lässt. Man wird ferner zugeben, dass auf diesem Standpunkte die Darstellung im Wesentlichen nicht anders ausfallen konnte, abgerechnet den Beweis des in Nr. 7 erwähnten Satzes.

[15]) Der Versuch scheitert immer an der Unmöglichkeit der Vergleichung gewisser Flächen, mag man die Kreisflächen mit den geradlinigen Zellen zu einem Grössensysteme zusammenfassen, oder sie für sich als solches betrachten oder endlich sie zu einem Systeme vereinigen mit den Kreisringen und den durch sich berührende Kreise gebildeten Flächen. Demnach lassen sich auch die Kreisflächen für sich betrachtet, zufolge der in Nr. 2 aufgestellten Definition nicht unmittelbar als stetiges Grössensystem auffassen.

[16]) Vgl. R. Simson The elements of Euclid etc. 3. Edition 1767 und Hankel zur Geschichte der Mathematik p. 389.

[17]) Vgl. Duhamel l. c. II. p. 384, Hankel l. c. p. 123 und Euclidis elementorum geometricorum libros XIII ... illustravit .. Cl. R. Antverpiae 1645 p. 143.

[18]) Hierzu kann auch der in Nr. 5 erwähnte Satz dienen.

[19]) Dass in einem stetigen Grössensysteme zu K eine Grösse X gehört, ist durch die Methode der Schnitte nachweisbar.

[20]) Bezeichnet D eine beliebige Grösse, so gehört nach Voraussetzung dazu eine Zahl m, so dass für $n > m$

$$P_n < K < P_n + D \qquad P'_n < K' < P'_n + D \qquad (a)$$

Würde angenommen $(K : K') > (A : A')$; so müsste (Euclid V, Def. 7) mindestens ein Paar ganzer Zahlen p, p' existiren, so dass zugleich $pK > p'K'$ $pA \leqq p'A'$, woraus wegen $P_n : P'_n = A : A'$ folgen würde $pP_n \leqq p'P'_n$ (V. Def. 5), wo $n = 1, 2, \ldots$ sein kann, Zufolge (a) hat man nun für $n > m$

$$pK < p'P'_n + pD < p'K' + pD \text{ d. i, } pK - p'K' < pD.$$

Und da pD ebenfalls eine beliebig kleine Grösse darstellt, so kann unmöglich $pK > p'K'$ sein. Somit kann $(K : K')$ nicht grösser als $(A : A')$ sein; ebensowenig $(K' : K) > (A' : A)$ d. i.

$(K : K') < (A : A')$; folglich ist $K : K' = A : A'$. — Dieser aus der Theorie der Verhältnisse nach Eudoxus abgeleitete Beweis des in Rede stehenden Satzes scheint Hankel entgangen zu sein (Vgl. l. c. p. 124 Note). Man kann sich übrigens oben auf die Annahme $pA < p'A'$ beschränken.

[21]) Ich kann mich der Ansicht von Hankel (Theorie d. complexen Zahlensysteme p. 66) nicht anschliessen, der Legendre's Vorgang ein ὕστερον πρότερον nennt; sondern glaube vielmehr, dass derselbe, indem er den endgiltigen Bruch mit der Geometrie der Alten bedeutet, einen wesentlichen Fortschritt der Geometrie darstellt. Die französischen Geometer, wie die Hrn. Rouché und Comberousse, thun daher wohl daran, diese Errungenschaft ihres grossen Landsmannes festzuhalten.

Zeitschrift/Journal: Berichte des naturwissenschaftlichen-medizinischen Verein Innsbruck

Jahr/Year: 1882

Band/Volume: 12

Autor(en)/Author(s): Stolz Otto

Artikel/Article: Beiträge zur Arthropoden-Fauna Tirols. 74-89