Die unendlich kleinen Grössen.

Von O. Stolz.

(Vortrag in der Sitzung vom 12. December 1883 mit einigen Zusätzen.)

Bossut erzählt in seinem Essai sur l'histoire générale des mathématiques, er habe Fontaine um Aufklärung über einige Sätze der Infinitesimalrechnung gebeten und von ihm die Antwort erhalten: „Nehmen Sie die unendlich Kleinen als eine Hypothese an, studiren Sie die Anwendung der Rechnung und der Glaube wird Ihnen kommen[1]". Manchen wird es befremden, dass auch in der Mathematik die Kraft des Glaubens angerufen wird. Es muss das aber wirklich nöthig sein; denn seit der Einführung der unendlich kleinen Grössen durch Newton und Leibniz hat die Infinitesimalrechnung theils Anerkennung gefunden, theils Widerspruch erregt. Gegenwärtig scheint sich der Streit über dieselbe mehr und mehr zu ihrem Nachtheil zu wenden, ja bereits in diesem Sinne entschieden zu sein. Denn wenn es ohne irgend eine Schwierigkeit möglich ist, die höhere Analysis mit ihren Anwendungen auf die Geometrie und Mechanik ohne Gebrauch des unendlich Kleinen vorzutragen, so muss diese Erfindung vorläufig als entbehrlich erscheinen. Eine solche Wahrnehmung

---

[1]) Vgl. Bossut, Versuch einer allgemeinen Geschichte der Mathematik, deutsch von Reimer 1804 II. p. 272. Bertrand (Calcul différentiel p. XXII) schreibt die Aeusserung D'Alembert zu.

enthebt uns jedoch nicht der Pflicht, über den wahren Sinn der quantitates infinitesimae nachzudenken d. h. die Frage uns vorzulegen, ob sie überhaupt in der Mathematik zulässig seien, wenn ihnen auch eine fundamentale Bedeutung nicht mehr beigelegt werden kann. Ja, wir können uns der angeregten Untersuchung gar nicht entschlagen gegenüber der Thatsache, dass seit zwei Jahrhunderten mit den unendlich kleinen Grössen gerechnet wird und zwar so, wie mit den reellen Zahlen.

Bevor wir zu dieser Untersuchung übergehen, wollen wir kurz andeuten, wie man unter der Voraussetzung, dass die Lehre von den reellen Zahlen völlig abgeschlossen sei, die Differentialrechnung ohne Hilfe des unendlich Kleinern entwickelt. Wir folgen hierbei dem von Cauchy angegebenen Verfahren. Es sei für alle Werthe von x im Intervalle $(a - d,\ a + d)$ eine Function $f(x)$ eindeutig definirt und stetig. In vielen Fällen wird es dann möglich sein, den Unterschied $f(a + h) - f(a)$, so lange nur h dem absoluten Betrage nach unter d liegt, auf die folgende Form zu bringen

$$f(a + h) - f(a) = [a_1 + \rho(h)]\, h,$$

worin a_1 eine von der Veränderlichen h unabhängige Zahl, $\rho(h)$ eine Function von h bedeutet, welche bei unbeschränktem Abnehmen von h dem Grenzwerthe Null sich nähert. Die der Function $\rho(h)$ hier beigelegte Eigenschaft ist ein kurzer Ausdruck für die folgende arithmetische Thatsache, die wir jetzt ein für alle Male feststellen. „Zu jeder gegebenen, sonst willkürlichen positiven Zahl ε gehört eine positive Zahl δ, so dass für alle Werthe von h, die absolut genommen kleiner als δ sind, der absolute Betrag von $\rho(h)$ kleiner ist als ε". — Nunmehr heisst a_1 der Differentialquotient und $a_1 h$ des Differential $df(x)$ von $f(x)$ für den Werth $x = a$[1]. Existirt für alle Werthe von x im Intervalle $(a - d,\ a + d)$ ein Differentialquotient von $f(x)$, welcher die eindeutige Function

[1]) Vgl. Moigno Leçons de calcul différentiel etc. d'après les methodes de M. A. F. Cauchy I. p. 7.

$f'(x)$ bildet, und findet man die der obigen analoge Entwickelung

$$f'(a+h) - a_1 = [a_2 + \rho(h)]\, h,$$

so heisst a_2 der zweite Differentialquotient und $a_2 h^2$ das zweite Differential $d^2 f(x)$ von $f(x)$ für den Werth $x = a$[1]. Auch die letztere Bezeichnung lässt sich leicht rechtfertigen; denn es besteht unter den angegebenen Voraussetzungen die Entwickelung

$$f(a+h) - f(a) = a_1\, h + [\tfrac{1}{2} a_2 + \rho_1 (h)]\, h^2,$$

worin bei $\lim h = o$ $\lim \rho_1 (h) = o$[2]. Daraus ergibt sich noch

$$\Delta^2 f(a) = a_2\, h^2 + h^2 \sigma_1 (h),$$

worin $\lim \sigma_1 (h) = o$ bei $\lim h = o$. U. s. f. Endlich heisse die der unabhängigen Veränderlichen x ertheilte Aenderung h, als solche natürlich von Null verschieden, das Differential dx dieser selbst, so dass ihre höheren Differentiale sämmtlich Null sind. — Umständlicher gestaltet sich die Definition der vollständigen Differentiale von Functionen von zwei oder mehr unabhängigen Veränderlichen[3].

Mit den soeben entwickelten Begriffen reicht man in der höheren Analysis aus. Man bedarf neben den reellen Zahlen keiner neuen Grössenart. Wir wollen aber nun zeigen, auf welche Weise man zu einer solchen im Sinne der Infinitesimalrechnung gelangen kann.

---

[1]) Moigno a. a. O. I. p. 23.

[2]) Moigno a. a. O. I. p. 57.

[3]) Wenn für ein Wertsystem $x = a$ $y = b$ endliche partielle Differentialquotienten von $f(x, y)$ nach x und y existiren: $\frac{df}{da}$, $\frac{df}{db}$ und wenn sich der Unterschied $f(a+h, b+k)$ auf die Form bringen lässt

$$f(a+h, b+k) - f(a+b) = h\left(\frac{df}{da} + \rho\right) + k\left(\frac{df}{db} + \sigma\right),$$

worin ρ, σ Functionen von h, k bedeuten, genügend der Bedingung

$$\lim_{\substack{h=o\\ k=o}} \rho = o, \qquad \lim_{\substack{h=o\\ k=o}} \sigma = o:$$

so nennt man $h\,\frac{df}{da} + k\,\frac{df}{db}$ das vollständige Differential von $f(x, y)$ für das Wertsystem $x = a$, $y = b$. U. s. f.

Dass die quantitates infinitesimae von den extensiven Grössen, beziehungsweise von den diese darstellenden reellen Zahlen wesentlich verschieden seien, wird von allen ihren Anhängern zugegeben. Sie gerathen aber in Verlegenheit, wenn man von ihnen eine erschöpfende, über jene negative Bestimmung hinausgehende Definition der neuen Grössen verlangt. Leibniz versteht unter dx elementum id est incrementum vel decrementum (momentaneum) ipsius quantitatis x (continue) crescentis[1]. dx ist demnach identisch mit Newton's älterem „momentum" einer Veränderlichen (Fluent)[2]. Darauf erwiderte Berkeley[3]: Die Einbildungskraft vermöge die Momente in statu nascenti, ehe sie endliche Theilchen werden, nicht zu begreifen. Ebenso wenig könne sie eine unendlich kleine Grösse d. h. eine, die unendlich kleiner wäre als irgend eine sinnlich-wahrnehmbare Grösse, sich vorstellen. Eine solche müsste aber das Moment sein, da es ein mittleres zwischen endlicher Grösse und Null nicht gebe. — Dieselben Einwürfe bleiben in Kraft, wenn wir „unendlich klein" durch „kleiner als jede angebbare Grösse (quovis dabili minor)" umschreiben. — Es ist somit nur folgerichtig, wenn Euler[4] jede unendlich kleine Grösse als Null erklärt. Wenn er aber fortfährt: obgleich je zwei Nullen einander gleich seien, so könne ihr geometrisches Verhältniss (d. h. ihr Quotient) von dem Verhältnisse der Gleichheit verschieden sein; so verfällt er in einen logischen Fehler. Denn er behauptet, dass es unter diesen Grössen solche gebe, welche zugleich als gleich und als ungleich zu betrachten seien. Die Differentiale dx, dy führt Euler in der folgenden Weise ein. Er ertheilt der unab-

---

1) Leibnitz Werke hrsgeg. von Pertz. 3. Folge. VII. p. 222.

2) Ist x eine Function der Zeit, $\dot{x}$ die Geschwindigkeit zur Zeit t, o die Aenderung der Zeit, so wird $\dot{x}o$ als Moment bezeichnet. Das Moment ist somit nicht die wirkliche Aenderung der Function in der Zeit o.

3) Berkeley im „Analyst" nach Baumann, die Lehren von Raum etc. II. p. 436 ff.

4) Euler Differentialrechnung deutsch von Michelsen I. § 83 ff., p. 310 und § 112 f.

hängigen Veränderlichen x die Aenderung ω, wodurch die Function y den Werth

$$y^1 = y + P\omega + Q\omega^2 + \ldots\ldots$$

bekomme; hierauf denkt er sich ω unendlich klein und nennt ω das Differential von x, $P\omega$ das von y. — Wenn wir jedoch dabei bleiben, unter ω eine veränderliche Zahl, die beliebig kleiner Werthe fähig ist (ohne jedoch zu verschwinden), zu verstehen; so gelangen wir im Wesentlichen zu der früher erwähnten Darstellung der Differentialrechnung, die nur insofern zu verbessern war, als y^1 nicht immer die soeben erwähnte Entwickelung zulässt.

Wollen wir aber ein neues Grössensystem aufstellen, so müssen wir, da die vorstehenden Definitionen uns theils im Unklaren lassen, theils in Widersprüche verwickeln, zu einem anderen Verfahren greifen. Schon die Griechen lehren uns eine Methode, nach welcher neue Grössen in die Mathematik eingeführt werden können. Euclid hat sie uns im 5. Buche seiner Elemente aufbewahrt, welchem eine Schrift des Platonikers Eudoxus zu Grunde liegen soll. Machen wir uns in Kürze klar, in welcher Weise dort der Begriff des Verhältnisses entwickelt und ausgebildet wird. Je zweien gleichartigen Grössen (z. B. Strecken), die in eine bestimmte Aufeinanderfolge A, B gebracht sind, wird ein neues Object zugeordnet, welches das Verhältniss von A zu B heisst und mit (A : B) bezeichnet wird. Dieses Ding ist noch ohne Eigenschaften, kann also erhalten und erhält solche zuerst durch die Definitionen V 5, 7, die festsetzen, welche Verhältnisse einander gleich und welches von zwei nichtgleichen das grössere heissen soll. Die Definitionen sind an sich willkürlich, nur müssen sie so gewählt sein, dass wenn vermöge der ersten $(A:B) = (C:D)$, $(C:D) = (E:F)$ heissen, zufolge eben derselben auch $(A:B) = (E:F)$ sein muss; und wenn nach ihnen zu sagen ist $(A:B) > (C:D)$, $(C:D) > (E:F)$, immer zufolge der zweiten $(A:B) > (E:F)$ sein muss. Sind nun diese Bedingungen erfüllt, so ist eine neue Art von Grössen gewonnen d. h. als zulässig erklärt[1]). Es würde leicht sein, über Euclid hinausgehend, den „Verhältnissen" weitere Eigenschaften in der Weise beizulegen, dass man mit ihnen genau so rechnen kann, wie mit den absoluten Zahlen[2]).

Wesentlich an diesem Verfahren, neue Begriffe zu bilden, ist folgendes. Man setzt ein eigenschaftloses Ding, das zuerst nichts anderes ist, als ein Name oder Zeichen für eine bestimmte Thatsache oder Vorstellung und legt demselben, was bei seiner Unbestimmtheit keinem Anstande begegnet, in logischer Ordnung verschiedene Prädicate bei, die für bereits vorhandene Ideen eine Bedeutung haben und hinsichtlich der neuen einander nicht widersprechen dürfen[3]). Damit sind wir der Nothwendigkeit enthoben, in der Spitze einer neuen Theorie eine erschöpfende Definition der von ihr betrachteten Objecte zu stellen[4]). — In unserem Falle gehen wir von der Thatsache aus, dass es Functionen f(x) einer reellen Veränderlichen x giebt, die dadurch dass x einem bestimmten Werthe sich nähert, dem Werthe Null unbeschränkt sich nähern. Wir sagen weiter, dass durch jede derselben ein neues Ding gesetzt sei, „das unendlich Kleine von f(x)", welches wir mit u(f) bezeichnen wollen, indem wir das Zeichen df(x) zufolge der Eingangs vorgeführten Auseinandersetzung bereits als vergriffen betrachten. Nun handelt es sich darum, dem neuen Dinge ordnungsmässig verständliche Prädicate zu

---

[1]) Ich nenne die Euclid'sche Definition z. B. der gleichen Verhältnisse willkürlich, weil ihre Nothwendigkeit sich nicht erweisen lässt. Wie so man dazu gelangt, lässt sich leicht begreiflich machen. Mehr als die Zulässigkeit der neuen Grössen soll auch nicht verlangt werden. Zur Definition des grösseren Dinges ist die im Texte angegebene Bedingung nicht immer hinreichend. Vgl. Math. Ann. XXII. p. 505.

[2]) Man erkläre als Summe der Verhältnisse (A : M), (B : M) das Verhältniss (A + B : M), als Product zweier Verhältnisse das aus ihnen zusammengesetzte im Sinne von Euclid VI. Def. 5.

[3]) Vgl. G. Cantor. Math. Annalen XXI. p. 589.

[4]) So kann man in der That in die Arithmetik einführen die negativen rationalen Zahlen, die irrationalen Zahlen, die gemeinen complexen Zahlen.

geben. Dabei ist aber mit der gehörigen Vorsicht vorzugehen und namentlich zu vermeiden, dass irgend ein ihm beigelegtes Prädicat erst durch ein nachträglich hinzutretendes erklärt werde. Wenn wir z. B. sagen würden, zwei unendlich Kleine $u(f)$, $u(f_1)$ sind einander gleich, wenn ihr geometrisches Verhältniss im Sinne der Alten gleich dem Verhältnisse der Gleichheit ist, so würde das nicht logisch sein; denn die Verhältnisslehre der Alten lässt sich nur anwenden auf Grössen (und zwar lineare) d. i. auf solche Objecte, die man schon untereinander vergleichen kann[1]). Ebensowenig würde es angehen zu sagen $u(f) = u(f_1)$, wenn der Quotient $u(f) : u(f_1) = 1$ ist. Was heisst denn hier „dividiren"? Selbst in der formalen Arithmethik geht der Division eine Multiplication voraus und den vier Species zusammengenommen die soeben erwähnte Voraussetzung der Vergleichbarkeit der neuen Dinge untereinander.

Gestützt auf das Beispiel der Alten müssen wir fordern, dass vor Allem bestimmte Regeln für die Vergleichung der unendlich kleinen Grössen angegeben werden. Von diesem Standpunkte aus scheint nun die folgende Theorie am nächsten zu liegen.

Es sei für die veränderliche x ein bestimmter Bereich $(a, a + d)$ in der Art festgesetzt, dass x vorgeschriebene Werthe annimmt, die dem constanten Werthe a sich beständig in demselben Sinne nähern und ihm beliebig nahe kommen können z. B. $\lim. x = a + 0$ d. h. zu jeder positiven Zahl δ lässt sich ein Werth von x angeben: x^1, so dass $a < x^1 < a + \delta$. Ferner sei gegeben ein System von Functionen $f(x)$, deren jede bei dem in Rede stehenden Grenzübergang der unabhängigen Veränderlichen x den Grenzwerth 0 hat (vgl. p. 22), dabei aber beständig positiv ist. Wir nehmen ferner an, dass jede rationale Function von beliebig,

[1]) Diese Bemerkung wurde schon von Berkeley gemacht. Vgl. Baumann l. c. p. 444. — Ueber lineare Grössen. Vgl. diese Berichte XII. p. 86. Math. Ann. XXI. p. 506.

aber endlich vielen Functionen unseres Systemes bei dem festgesetzten Grenzübergang lim. $x = a + 0$ einen Grenzwerth besitze, der aber auch $+\infty$ oder $-\infty$ sein kann. Diese letzte Voraussetzung ist wieder rein arithmetischer Natur, indem die Formel

$$\lim_{x = a + 0} F(x) = B$$

nur eine abgekürzte Schreibweise bildet für die folgende Eigenschaft der Function $F(x)$: „Jeder positiven Zahl ε kann eine positive Zahl δ zugeordnet werden, so dass wenn man unter den der Veränderlichen x zugetheilten Werthen irgend einen herausgreift, welcher der Relation genügt $a < x < a + \delta$, immer die Differenz $F(x) - B$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als ε ist“. Dabei ist selbstverständlich unter B eine endliche Zahl gemeint. lim. $F(x) = +\infty$ bei lim. $x = a + 0$, würde bedeuten, dass jeder positiven Zahl G ein positives δ entspricht, so dass für die hier in Betracht kommenden x, wofür $a < x < a + \delta$, $F(x) > G$ ist[1]. —

Nun treten die folgenden Definitionen ein.

Def. 1) Jeder Function $f(x)$ unseres Systemes wird ein neues Object zugeordnet: $u(f)$.

Def. 2) Es sei $u(f) = u(f_1)$, wenn lim. $(f : f_1) = 1$.

Def. 3) Es sei $u(f) > u(f_1)$, wenn lim. $(f : f_1)$ grösser als 1 ($+\infty$ eingeschlossen); und $u(f) < u(f_1)$, wenn lim. $(f : f_1)$ kleiner als 1 (Null eingeschlossen)[2].

Ein Blick auf die Gleichung

$$\frac{f}{f_2} = \frac{f}{f_1} \cdot \frac{f_1}{f_2}$$

zeigt, dass die oben erwähnten formalen Bedingungen erfüllt sind.

Ist lim. $f =$ lim. $f_1 = 0$, so ist lim. $(f + f_1) = 0$ und $f + f_1 > 0$.

---

[1]) Im Folgenden bedeute der Kürze wegen das Zeichen lim. vor einer Function von x, dass die Veränderliche x dem so eben festgesetzten Grenzübergange unterworfen sei.

[2]) Die 2. und 3. Definition sind in ähnlichem Sinne von Hrn. P. du Bois-Reymond gebraucht worden (Borchardt J. LXX. p. 27).

Wir erklären

Def. 4) $\mathfrak{u}(f+f_1)$ als die Summe von $\mathfrak{u}(f)$ und $\mathfrak{u}(f_1)$:

$$\mathfrak{u}(f+f_1)=\mathfrak{u}(f)+\mathfrak{u}(f_1).$$

Darin liegt zunächst kein Verstoss gegen die Gesetze der Addition in der allgemeinen Arithmetik, denn es ist

1) $\mathfrak{u}(f)+\mathfrak{u}(f_1)=\mathfrak{u}(f_1)+\mathfrak{u}(f)$.

2) $[\mathfrak{u}(f)+\mathfrak{u}(f_1)]+\mathfrak{u}(f_2)=\mathfrak{u}(f)+[\mathfrak{u}(f_1)+\mathfrak{u}(f_2)]$.

3) neben $\mathfrak{u}(f_1)=\mathfrak{u}(f_2)$, $\mathfrak{u}(f)+\mathfrak{u}(f_1)=\mathfrak{u}(f)+\mathfrak{u}(f_2)$.

Die letzte Gleichung folgt aus der Formel

$$\frac{f+f_1}{f+f_2}=\left(\frac{f}{f_1}+1\right):\left(\frac{f}{f_1}+\frac{f_2}{f_1}\right)=\left(1+\frac{f_1}{f}\right):\left(1+\frac{f_2}{f}\right), \quad \text{(a)}$$

welche zeigt, dass in jedem Falle

$$\lim.\frac{f+f_1}{f+f_2}=1.$$

Aus den Gleichungen 1—3 folgen bekanntlich alle Additionsregeln mit Ausnahme der Ungleichungen. Hinsichtlich der letzteren finden wir aber hier

4) „$\mathfrak{u}(f)+\mathfrak{u}(f_1)>$ oder $=\mathfrak{u}(f)$, je nachdem $\lim.(f_1:f)$ nicht Null oder Null ist“.

5) „Wenn $\mathfrak{u}(f_1)>\mathfrak{u}(f_2)$, so ist $\mathfrak{u}(f)+\mathfrak{u}(f_1)\geqq\mathfrak{u}(f)+\mathfrak{u}(f_2)$. Das Zeichen $=$ steht nur dann, wenn

$$\lim.\frac{f_1}{f}=\lim.\frac{f_2}{f}=0\text{“}. \quad \text{(b)}$$

Das zweite Glied der Formel (a) zeigt nämlich, dass

$$\lim.\frac{f+f_1}{f+f_2}>1$$

wenn $\lim.(f:f_1)$ nicht $+\infty$. Dasselbe gilt auch noch, wie aus dem dritten Gliede in (a) sich ergiebt, wenn $\lim.(f_1:f)=0$, $\lim.(f_2:f)>0$. Nur wenn die Relation (b) besteht, so findet man

$$\lim.\frac{f+f_1}{f+f_2}=1.$$

Satz. „Im Falle dass $\mathfrak{u}(f)>\mathfrak{u}(f_1)$, hat die Gleichung

$$\mathfrak{u}(f_1)+\mathfrak{x}=\mathfrak{u}(f) \quad \text{(c)}$$

eine und nur eine Lösung $\mathfrak{x}=\mathfrak{u}(f-f_1)$ und zwar ist sie kleiner als $\mathfrak{u}(f)$“.

Dass diese Grösse der Gleichung (c) genügt, ist unmittelbar ersichtlich. Ist aber $u(g)$ eine Grösse $\leqslant u(f-f_1)$, so ist $u(f_1)+u(g) \leqslant u(f)$. Denn wäre $u(f_1)+u(g)=u(f_1)+u(f-f_1)$, so müsste sein

$$\lim. \frac{f-f_1}{f_1}=1,$$

was hier ausgeschlossen ist, da $\lim. (f:f_1) > 1$ ist.

Nunmehr gelten für die neuen Grössen die Regeln der allgemeinen Arithmetik über das Rechnen mit Summen und Differenzen, hinsichtlich der letzteren auch die Ungleichungen, wie man leicht ableiten kann. Es ist also neben $u(f) > u(f_1) > u(f_2)$

6) $u(f)-u(f_2) > u(f_1)-u(f_2)$,

7) $u(f)-u(f_2) > u(f)-u(f_1)$.

Aus der Gleichung $u(f)+u(f_1)=u(f)$, welche nur voraussetzt $\lim. (f_1:f)=0$, könnte man für die Differenz $u(f)-u(f)$ den Werth $u(f_1)$ ableiten. Sie ist jedoch unbestimmt, weil man auch $u(f)-u(f)=u(f_2)$ setzen kann, wenn wieder $\lim. (f_2:f)=0$, und dabei keineswegs $u(f_1)=u(f_2)$ zu sein braucht. Da die Resultate der vier Species **eindeutig** sein müssen, so ist jede Differenz $u(f)-u(f)$ **unzulässig**[1]).

Sowie man $u(f)+u(f)+\ldots$ n-mal d. i. $u(nf)$ als das n-fache von $u(f)$ erklären kann, so umgekehrt $u\left(\frac{f}{n}\right)$ als den n-ten Theil von $u(f)$. Dabei ergibt sich, dass wenn $u(f_1) < u(f)$, nicht immer eine natürliche Zahl p existiert, so dass $p\,u(f_1) > u(f)$. Denn ist $\lim. (f_1:f)=0$, so ist $\lim. (pf_1:f)=0$, was auch p sein mag.

Wenn $\lim. f=\lim. f_1=0$, so ist auch $\lim. ff_1=0$ und $ff_1 > 0$.

Def. 5) Das unendlich kleine $u(ff_1)$ sei das **Product** von $u(f)$ mit $u(f_1)$: $u(ff_1)=u(f).\,u(f_1)$.

---

1) Aus demselben Grunde wird der Quotient $0:0$ in der Arithmetik verworfen.

Dabei ist leicht nachzuweisen, dass sämmtliche Regeln über die Multiplication der absoluten Zahlen auch für die unendlich kleinen Grössen gelten. Es bestehen nämlich die Relationen

1) $u(f).\ u(f_1) = u(f_1).\ u(f)$.

2) $[u(f).\ u(f_1)].\ u(f_2) = u(f).\ [u(f_1).\ u(f_2)]$.

3) $u(f).\ [u(f_1) + u(f_2)] = u(f).\ u(f_1) + u(f).\ u(f_2)$.

4) Aus $u(f) = u(f_1)$ folgt $u(f).\ u(f_2) = u(f_1).\ u(f_2)$.

5) Aus $u(f) > u(f_1)$ folgt $u(f).\ u(f_2) > u(f_1).\ u(f_2)$.

Die Gleichung $u(f_1).\ u(g) = u(f)$ hat eine (und dann stets nur eine) Lösung, bloss wenn lim. $(f:f_1)$ Null ist, denn nun kann man setzen $u(g) = u(f:f_1)$ . . . . (d)

Die Division der unendlich kleinen Grössen ist somit nicht unbedingt möglich. Sowie man aber das System der natürlichen Zahlen durch die absoluten gebrochenen Zahlen erweitert, damit die Division in dem neuen Grössensysteme ausnahmslos möglich sei; so kann man auch hier festsetzen, dass in dem Falle, wo lim. $(f:f_1)$ eine positive Zahl oder $+\infty$ ist, ein von den u-Grössen verschiedenes, sonst zunächst eigenschaftloses Ding $u(f):u(f_1)$ existire, das der Gleichung $u(f_1).\ [u(f):u(f_1)] = u(f)$ Genüge leistet. (Def. 6.)

Das Verfahren, nach welchem den neuen Quotienten ordnungsmässig die zutreffenden Prädicate verliehen werden, ist in dem folgenden Satze der formalen Arithmetik[1]) enthalten, der auch bei Einführung der verschiedenen Zahlenarten in die allgemeine Arithmetik benützt werden kann.

„Es sei ein beliebiges Grössensystem (I) a, b. c, d . . . gegeben[2]). Je zweien derselben a, b (sowie auch dem Paare a, a) lasse sich eindeutig eine andere Grösse der Reihe c zuordnen, die wir als Resultat einer eindeutigen Verknüpfung (Thesis) bezeichnen wollen: c = a. b. Wir nehmen an: 1) dass

---

[1]) Ein Theil des Satzes findet sich bei Hankel (Theorie der complexen Zahlensysteme p. 27), welcher jedoch die Euclid'sche Strenge nicht völlig durchführte.

[2]) Ueber den Grössenbegriff vgl. diese Berichte XII. p. 79, Math. Annalen XXII. p. 505.

wenn $a = a'$ $b = b'$, $a.b = a'.b'$ und wenn $c = c'$, auch $c' = a.b$ sei; 2) dass die Thesis associativ und commutativ sei, wozu bekanntlich hinreicht das Bestehen der Gleichungen

$$(a.b).c = a.(b.c), \quad a.b = b.a;$$

3) dass wenn der Gleichung $x.b = b.x = a$ keine der Grössen (I) genügt, stets ein und nur ein darunter nicht vorhandenes Ding, das mit $a:b$ bezeichnet werde, existire, wofür

$$(a:b).\ b = b.\ (a:b) = a.$$

Um die neuen Objecte, welche die Reihe (II) bilden mögen, zu Grössen zu machen, werde 4) festgesetzt: es sei $a:b = a':b'$ dann und nur dann, wenn $a.b' = a'.b$[1]. Endlich 5) werde die Verknüpfung der neuen Grössen mit den ursprünglichen und unter sich in folgender Art erklärt

$$(a:b).\ c = c.\ (a:b) = a.c:b \quad (a:b).\ (c:d) = a.c:b.d,$$

wobei das Ergebniss auch durch jede ihm gleiche Grösse ersetzt werden kann".

„Dieses vorausgesetzt, mögen α, β, γ . . . irgend welche Grössen des durch Vereinigung der Systeme (I) (II) gebildeten neuen Systemes (III) bezeichnen. Die Verknüpfung ist nun ausnahmslos associativ und commutativ und es besteht der Satz: „Aus $\alpha = \beta$ folgt $\alpha.\gamma = \beta.\gamma$". Es existiert ferner im Systeme (III) stets eine und nur eine Grösse ξ, so dass $\xi.\beta = \beta.\xi = \alpha$".

Zusatz. „Fügt man unter Voraussetzung, dass unter je zwei ungleichen Grössen des Systemes (I) eine als die grössere erklärt sei und dass der Satz gelte: „Neben $a > b$ ist $a.c > b.c$", hinzu, dass unter den Grössen (II) $a:b \gtreqless a':b'$ sein soll, je nachdem $a.b' \gtreqless a'.b$ und $a:b \gtreqless c$ zugleich mit $a \gtreqless b.c$; so folgt der allgemeine Satz: „Neben $\alpha > \beta$ ist $\alpha.\gamma > \beta.\gamma$".

Wenden wir diesen Satz auf unseren Fall an, so werden wir zunächst festsetzen (Def. 7), dass die neuen Grössen

---

[1]) Diese Definition setzt voraus, dass die Gleichung $a.b' = a'.b$ gilt, wenn $a:b$ und $a':b'$ gleiche Grössen der ursprünglichen Reihe sind, was leicht zu zeigen ist Aehnliches gilt von den Definitionen im Zusatze.

$u(f):u(f_1)$, $u(f_2):u(f_3)$ dann und nur dann einander gleich heissen, wenn

$$u(f).u(f_3)=u(f_1).\ u(f_2) \text{ d. i. } \lim. \frac{f f_3}{f_1 f_2}=+1. \quad \text{(e)}$$

Ist aber der soeben erwähnte Grenzwerth $>$ oder $<$ 1, so soll beziehentlich $u(f):u(f_1)>$ oder $<u(f_2):u(f_3)$ sein. Es soll ferner die neue Grösse $u(f):u(f_1)$ grösser sein als jede Grösse $u(f_2)$, was aus der allgemeinen Vorschrift folgt; denn es ist $u(f)>u(f_1)\,u(f_2)$ wegen $\lim\ (f:f_1\ f_2)=+\infty$. — Die Bedingung (e) kann falls $\lim\ (f:f_1)$ weder 0 noch $+\infty$ ist, in die Form $\lim(f:f_1)=\lim(f_2:f_3)$ gebracht werden. Wenn $\lim(f:f_1)=0$ oder $+\infty$, so muss auch $\lim(f_2:f_3)$ bez. 0 oder $+\infty$ sein; allein das würde nicht hinreichen, damit die Relation (e) besteht. Die neuen Producte sind zu bilden nach den Regeln (Def. 8):

$$[u(f):u(f_1)].\ u(f_2)=u(ff_2):u(f_1)$$
$$[u(f):u(f_1)].\ [u(f_2):u(f_3)]=u(f f_2):u(f_1\ f_3).$$

Es steht nichts im Wege, die Grösse $u(f):u(f_1)$, wenn $\lim\ (f:f_1)$ einen endlichen positiven Werth besitzt, mit dieser absoluten Zahl zu identificiren: $u(f):u(f_1)=\lim\ (f:f_1)$. Nunmehr wird die Erweiterung des Systemes der Grössen $u(f)$ gebildet durch die absoluten Zahlen (selbstverständlich ohne Null) und die Grössen $u(f):u(f_1)$, worin $\lim\ (f:f_1)=+\infty$ ist.

Damit ist im neuen Grössensysteme die Addition zum Theil schon gegeben. Was die Addition der absoluten Zahlen und der Grössen $u(f)$ betrifft, so erinnern wir uns an die Formel

$$[u(f):u(f_1)]+u(f_2)=u(f+f_1\ f_2):u(f_1),$$

welche nach Def. 4 und Gl. (d) richtig ist im Falle, dass $\lim\ (f:f_1)=0$, also $u(f):u(f_1)=u(f:f_1)$ ist. Wir wollen nun annehmen (Def. 9), dass die Formel auch gelte, wenn $u(f):u(f_1)$ eine Grösse der neuen Art also $\lim\ (f:f_1)>0$ ist. Da nun

$$\lim \frac{f+f_1 f_2}{f_1}.\ \frac{f_1}{f}=\lim\left[1+\frac{f_1}{f}f_2\right]=1,$$

so folgt $u(f+f_1\ f_2):u(f_1)=u(f):u(f_1)$ und somit die Regel

$$[\mathfrak{u}(f):\mathfrak{u}(f_1)]+\mathfrak{u}(f_2)=\mathfrak{u}(f):\mathfrak{u}(f_1). \quad (f)$$

Für die Addition zweier Grössen der neuen Art setzen wir allgemein fest

$$[\mathfrak{u}(f):\mathfrak{u}(f_1)]+[\mathfrak{u}(f_2):\mathfrak{u}(f_1)]=\mathfrak{u}(f+f_2):\mathfrak{u}(f_1)$$

$$[\mathfrak{u}(f):\mathfrak{u}(f_1)]+[\mathfrak{u}(f_2):\mathfrak{u}(f_3)]=\mathfrak{u}(f\,f_3+f_1\,f_2):\mathfrak{u}(f_1\,f_3);$$

Formeln die gewiss Geltung haben, falls die darin vorkommenden Quotienten sich auf Grössen der ersten Art zurückführen lassen.

Mit diesen Regeln erhält man eine ähnliche Addition wie die im Systeme der Grössen $\mathfrak{u}(f)$; wovon man sich durch eine besondere Untersuchung über die oben angeführten Additionssätze 1)—5) zu überzeugen hat. Man wird auch leicht finden, dass die Gleichung $\beta+\xi=\alpha$ — unter α, β Grössen des erweiterten Systemes verstanden — stets eine und nur eine Auflösung hat, wenn $\alpha>\beta$. Wie die Formel (f) zeigt, so hat die Gleichung $\alpha+\xi=\alpha$, wenn α eine Grösse der neuen Art $\mathfrak{u}(f):\mathfrak{u}(f_1)$ bedeutet, unzählige Auflösungen; denn man kann für ξ jede Grösse $\mathfrak{u}(f)$ setzen. Demnach ist auch die Differenz $\alpha-\alpha$ unzulässig. Für die Differenzen $\alpha-\beta$ $(\alpha>\beta)$ gelten wieder die Sätze 6) und 7) (p. 30).

Man könnte glauben, dass durch nochmalige Anwendung des allgemeinen Satzes p. 31 das bisher erhaltene Grössensystem eine neue, den negativen Zahlen analoge Erweiterung erfahren werde. Das ist jedoch nicht der Fall. Sowie die Differenzen $\alpha-\alpha$, mag α eine Grösse der ersten oder zweiten Art bedeuten, wegen ihrer Unbestimmtheit als unzulässig erklärt worden sind, so müssen auch alle jene Differenzen ausgeschlossen werden, welche beim Gebrauche der Regeln $(\alpha-\beta)+\gamma=(\alpha+\gamma)-\beta$, $(\alpha-\beta)+(\gamma-\delta)=(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)$ bereits als unmöglich erkannte Resultate liefern würden[1].

---

[1]) Das ist der Grund, warum neben den reellen Zahlen der Quotient $a:0$ auch dann unbrauchbar ist, wenn a nicht Null ist. Nach dem im Texte p. 31 angeführten Satze müsste, wenn $a:0$ eine neugesetzte Grösse sein soll, die Formel bestehen $(a:0).\ 0=a.\ 0:0=0:0$, die aber zu verwerfen ist.

Solche würden aber durch jede Differenz $\alpha - \beta$, worin $\alpha < \beta$, erzeugt vermöge der Formel

$$(\alpha - \beta) + (\beta - \alpha) = (\alpha + \beta) - (\alpha + \beta).$$

Die vorstehende Untersuchung hat zu folgendem Ergebniss geführt: Unter Voraussetzung eines Systems von Functionen f(x) kann man zwei Reihen von Grössen definiren, mit denen man, abgesehen von einigen Ungleichungen, gerade so rechnen kann, wie mit den absoluten Zahlen, welche selbst zu dem aus den beiden Reihen gebildeten Grössensysteme gehören. Dasselbe ist jedoch nicht so bequem zu gebrauchen, wie etwa die Euclid'schen Verhältnisse. Während man den Grössen eines jeden linearen Systemes Verhältnisse beilegen kann, so lässt sich, wenigstens nach dem gegenwärtigen Stande der Theorie der reellen Functionen, unser Functionensystem nicht explicite definiren. Die in dem Intervalle (a, a + d) monotonen Functionen bilden jedenfalls kein System von den geforderten Eigenschaften[1]).

Der soeben vorgeführte Versuch, unendlich kleine Grössen aufzustellen, ist natürlich keineswegs der einzig mögliche. Im Anschlusse an die von Hrn. P. du Bois-Reymond in seinem Infinitärcalcul gebrauchten Definitionen ergibt sich vielmehr sofort eine zweite Theorie. Es sei gegeben ein System von Functionen f(x), deren jede nur positive Werthe und bei dem früher festgesetzten Grenzübergange z. B. lim $x = a + 0$ den Grenzwerth 0 hat. Ferner sei angenommen, dass jede Function

$$f_1(x)^{\mu_1} f_2(x)^{\mu_2} \ldots . f_n(x)^{\mu_n},$$

worin die $\mu_1, \ldots . \mu_n$ beliebige rationale Zahlen sein können, bei lim $x = a + 0$ einen Grenzwerth besitze. Wir sagen dann, u(f) soll gleich, grösser oder kleiner als u(f_1) sein, je nach-

1) Selbst der Quotient zweier monotonen Functionen von x, welche bei einem bestimmten Grenzübergange von x beide den Grenzwerth O haben, kann dabei ohne Grenzwerth sein; vgl. Math. Annalen XIV. p. 232.

dem lim $(f:f_1)$ eine positive endliche Zahl, $+\infty$ oder 0 ist. Als die Summe $u(f)+u(f_1)$ betrachten wir jetzt $u(ff_1)$, woraus sich leicht ergibt, dass im Systeme $u(f)$ genau dieselbe Addition und Subtraction besteht wie für die absoluten Zahlen[1]). Eine Multiplication ist für dieses System von unendlich kleinen Grössen bisher nicht aufgestellt worden. — Auch hinsichtlich des hier zu Grunde gelegten Functionensystemes gilt die Bemerkung, dass eine explicite Definition desselben bisher nicht zu Stande gebracht worden ist.

Wie Eingangs erwähnt, bedarf man des unendlich Kleinen in der Differential- und Integralrechnung gar nicht. Schon bei Cauchy dient dieses Wort nur zur Abkürzung — eine unendlich kleine Grösse ist eine Veränderliche, die sich dem Grenzwerthe Null nähert[2]) — und könnte ohne eine Lücke zu hinterlassen, völlig unterdrückt werden. Cauchy's Darstellung, die gegenwärtig fast überall angenommen ist, ist zwar nicht unanfechtbar; allein die daran angebrachten Verbesserungen bilden nur eine genauere, zum Theil von ihm selbst anerkannte Formulirung seiner Ideen. In dieser Beziehung ist also von irgend welcher Art unendlich kleiner Grössen nichts mehr zu erwarten. Ob die im Vorstehenden entwickelten Theorien derselben dennoch eine Bedeutung für die Mathematik haben, ist vorderhand nicht mit Sicherheit zu entscheiden. Noch weniger lässt sich angeben, ob nicht etwa eine andere, mehr leistende Theorie an ihre Stelle gesetzt werden könne.

---

[1]) Das zweite System von unendlich kleinen Grössen ist durchaus analog jenem Systeme von Unendlich, worüber ich berichtete in diesen Berichten XII. p. 85 und Math. Annalen XXII. p. 506.

[2]) Vgl. Cauchy Cours d'Analyse p. 26.

Die unendlich kleinen Grössen.

(Fortsetzung.)

Von O. Stolz.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 12. November 1884.)

Das in dem vorstehenden Artikel aufgestellte erste System von unendlich kleinen Grössen $\mathfrak{u}(f)$, welche mit Benutzung einer von Newton eingeführten Bezeichnung[1]) hinfort die Momente der Functionen $f(x)$ heissen mögen, erregt unser Interesse dadurch, dass das Rechnen mit ihnen in der Hauptsache nach denselben Regeln vor sich geht, wie das mit den absoluten Zahlen und nur an einigen Stellen davon abweicht. Was die Addition der Momente betrifft, so unterscheidet sie sich von der der absoluten Zahlen nur in den Regeln 4) und 5) auf p. 29 [2]). Dagegen gilt der Satz: „Wenn $\mathfrak{u}(f) > \mathfrak{u}(g)$ $\mathfrak{u}(f_1) > \mathfrak{u}(g_1)$, so ist $\mathfrak{u}(f) + \mathfrak{u}(f_1) > \mathfrak{u}(g) + \mathfrak{u}(g_1)$". Er würde nämlich nur dann nicht bestehen, wenn

$$\mathfrak{u}(f) + \mathfrak{u}(g) = \mathfrak{u}(f_1) + \mathfrak{u}(g) = \mathfrak{u}(f_1) + \mathfrak{u}(g_1)$$

sein könnte, was aber die unmögliche Voraussetzung

$$\lim (f_1 : g) = 0 \quad \lim (g : f_1) = 0 \text{ einschliesst.}$$

Die in den Subtractionsregeln vorkommenden Differenzen müssen sämmtlich möglich sein, es darf also darin nicht $\mathfrak{u}(f) - \mathfrak{u}(f)$ erscheinen. Will man diese Sätze vollstän-

---

1) Vgl. Philosophiae nat. princ. math. Lib. II. Lemma 2.

2) Die beim Beweise des 5. Satzes gemachte Annahme: „lim. $(f_1 : f) = 0$, lim $(f_2 : f) > 0$" ist überflüssig, indem wenn $\mathfrak{u}(f_1) > \mathfrak{u}(f_2)$, aus der ersteren Gleichung nur lim. $(f_2 : f) = 0$ folgen kann.

dig aussprechen, so ist in der angegebenen Beziehung noch eine besondere Untersuchung nöthig, welche wir jetzt vornehmen wollen.

1) „Neben $u(f)=u(f_1)$, $u(g)=u(g_1)$ und $u(f)>u(g)$ ist $u(f)-u(g)=u(f_1)-u(g_1)$“.

2) „Aus $u(f)+u(g)=u(f_1)+u(g)$ folgt $u(f)=u(f_1)$, falls nicht $\lim(f:g)=0$. Dann ist auch $\lim(f_1:g)=0$ und die Gleichung besagt nichts weiter als $u(g)=u(g)$.“ — Setzt man $\frac{f_1+g}{f+g}=w$, so dass $\lim w=1$,

so hat man

$$\frac{f_1}{g}=w\left(\frac{f}{g}+1\right)-1,$$

woraus ersichtlich ist, dass je nachdem $\lim(f:g)$ positiv oder Null, auch $\lim(f_1:g)$ positiv oder Null ist.

3) „Aus $u(f)-u(g)=u(f_1)-u(g_1)$ $(u(f)>u(g), u(f_1)>u(g_1))$ folgt, wenn $u(g)=u(g_1)$ ist, $u(f)=u(f_1)$ und wenn $u(f)=u(f_1)$ ist, $u(g)=u(g_1)$“. — Um den zweiten Theil zu erweisen, bemerke man, dass wegen $u(f)=u(f_1)$

$$[u(f)-u(g)]+u(g)=[u(f_1)-u(g_1)]+u(g_1).$$

Da $\lim[g:(f-g)]=\lim\left[1:\left(\frac{f}{g}-1\right)\right]$ wegen $\lim(f:g)>1$ nicht Null sein kann, so tritt der 2. Satz in Kraft“.

4) „Je nachdem $u(f)$ gleich, grösser oder kleiner als $u(g)-u(h)$ $(u(g)>u(h))$, ist $u(f)+u(h)$ gleich, grösser oder kleiner als $u(g)$ und umgekehrt“. — Ist z. B. $u(f)>u(g)-u(h)$, so muss $u(f)+u(h)>u(g)$ sein, da

$$\lim[(g-h):h]=\lim(g:h)-1,$$

also wegen $u(g)>u(h)$ nicht Null ist.

5) „Je nachdem $u(f)-u(g)$ $(u(f)>u(g))$ gleich, grösser oder kleiner als $u(f_1)-u(g_1)$ $(u(f_1)>u(g_1))$, ist $u(f)+u(g_1)$ gleich, grösser oder kleiner als $u(f_1)+u(g)$ und umgekehrt“. — Ist z. B. $u(f)-u(g)>u(f_1)-u(g_1)$ und man addirt beiderseits $u(g)+u(g_1)$, so handelt es sich um die Grenzwerthe von

$$u = \frac{f-g}{g+g_1} = \frac{\frac{f}{g}-1}{1+\frac{g_1}{g}} \quad u_1 = \frac{f_1-g_1}{g+g_1} = \frac{\frac{f_1}{g_1}-1}{\frac{g}{g_1}+1}$$

Da lim $(f:g)$ und lim $(f_1:g_1)$ grösser als 1 sind, so ist, wenn lim $(g_1:g)$ nicht $+\infty$ ist, lim u nicht Null, und wenn lim $(g:g_1)=0$, lim u_1 nicht Null.

6) und 7) Die schon auf p. 30 angeführten Ungleichungen 6) und 7), welche indirect zu beweisen sind. Aus ihnen folgt sofort

8) „Wenn $u(f) > u(f_1) > u(g_1) > u(g)$, so ist $u(f) - u(g) > u(f_1) - u(g_1)$".

9) „Es ist $[u(f)+u(g)]-u(g)=u(f)$, wenn lim $(f:g)$ nicht Null ist. — Ist lim $(f:g)=0$, so hat die Formel keinen Sinn mehr". — Denn es muss $u(f)+u(g)>u(g)$ sein, was nur unter der angegebenen Bedingung eintritt.

10) „$u(f)-[u(f)-u(g)]=u(g)$, wenn nur $u(f)>u(g)$". — Denn es ist $u(f)>u(f-g)$, da $f:(f-g)=1:\left(1-\frac{g}{f}\right)$, also lim $[f:(f-g)]>1$ ist.

11) „Es ist $[u(f)+u(h)]-[u(f_1)+u(h)]=u(f)-u(f_1)$, wenn $u(f+h)>u(f_1+h)$; dagegen umgekehrt $u(f)-u(f_1)$ gleich der links stehenden Differenz, wenn neben $u(f)>u(f_1)$ nicht lim $(f:h)=$ lim $(f_1:h)=0$, in welchem Falle die letztere Differenz sinnlos wird." — Wenn $u(f)+u(h)>u(f_1)+u(h)$ (a), so sei $[u(f)+u(h)]-[u(f_1)+u(h)]=x$, so dass $[x+u(f_1)]+u(h)=u(f)+u(h)$. Nun ist hier $u(f)+u(h)>u(h)$, also nach dem 9. Satze $x+u(f_1)=u(f)$. Es muss aber $u(f)>u(f_1)$ sein. Denn wenn $u(f_1)+u(h)>u(h)$, so dass lim $(f_1:h)$ nicht 0 ist, so folgt das aus (a) nach dem 6. Satze. Wenn aber lim $(f_1:h)=0$ ist, so kann doch lim $(f:h)$ nicht 0 sein, somit folgt aus

$$\frac{f}{f_1} = \frac{f}{h} : \frac{f_1}{h}$$

lim $(f:f_1)=+\infty$. Also ist $x=u(f)-u(f_1)$. — Die Umkehrung der Gleichung ergibt sich jetzt unmittelbar, da unter der angegebenen Bedingung auch $u(f)+u(h) > u(f_1)+u(h)$.

12) „Es ist $[u(f)-u(h)]-[u(f_1)-u(h)] = u(f)-u(f_1)$, wenn $u(f) > u(h)$ $u(f_1) > u(h)$ $u(f)-u(h) > u(f_1)-u(h)$ und umgekehrt die rechte Seite der linken gleich, wenn $u(f) > u(f_1) > u(h)$". — Der zweite Theil folgt unmittelbar aus dem ersten des vorigen Satzes, wenn man $u(f)$, $u(f_1)$ daselbst bezw. durch $u(f)-u(h)$, $u(f_1)-u(h)$ ersetzt. Der erste Theil folgt aus dem zweiten dieses Satzes auf die nämliche Art; denn es ist nun $\lim [(f-h):h] = \lim \frac{f}{h} - 1$, also positiv.

13) „Wenn $u(f) > u(g)$, so ist

$$[u(f)-u(g)]+u(h) = [u(f)+u(h)]-u(g)$$

und umgekehrt"[1]).

14) „Wenn $u(f) > u(g)$ und $u(f)-u(g) > u(h)$, so hat man

$$[u(f)-u(g)]-u(h) = u(f)-[u(g)+u(h)].$$

Umgekehrt gilt die Gleichung, wenn $u(f) > u(g)+u(h)$ und $u(f) > u(g)$". Bezeichnet man die linke Seite der Gleichung mit x, so hat man $x+[u(g)+u(h)] = u(f)$.

Aus $u(f)-u(g) > u(h)$ folgt $u(f) > u(g)+u(h)$, da $\lim \frac{f-g}{g} = \lim \frac{f}{g} - 1$ nicht 0 sein kann. Somit ist $x = u(f)-[u(g)+u(h)]$. — Bei Umkehrung der Gleichung muss sich aus den beiden Voraussetzungeu stets ergeben, dass $u(f)-u(g) > u(h)$. Das folgt aus $u(f) > u(g)+u(h)$ vermöge des 6. Satzes, wenn nur $u(g)+u(h) > u(g)$. Wenn aber $u(g)+u(h) = u(g)$ d. i. $\lim (h:g) = 0$, so schliesst man hier aus der Gleichung

$$\frac{f-g}{h} = \frac{g}{h}\left(\frac{f}{g}-1\right),$$

dass $\lim [(f-g):h] = +\infty$, also wieder $u(f)-u(g) > u(h)$.

---

[1]) Bezeichnet man die linke Seite der Gleichung mit x, so folgt $x+u(g) = u(f)+u(h)$, worin in der That $u(f)+u(h) \geqq u(f) > u(g)$.

15) „Wenn $u(g) > u(h)$ $u(f) > u(g) - u(h)$, so hat man $u(f) - [u(g) - u(h)] = [u(f) + u(h)] - u(g)$.
Umgekehrt gilt die Gleichung, falls $u(f) + u(h) > u(g)$ und $u(g) > u(h)$". — Bezeichnet man die linke Seite der Gleichung mit x, so hat man $x + [u(g) - u(h)] = u(f)$, $x + u(g) = u(f) + u(h)$. Es ist aber vermöge $u(f) > u(g) - u(h)$ $u(f) + u(h) > u(g)$, da

$$\lim \frac{g-h}{h} = \lim \frac{g}{h} - 1$$

nicht Null sein kann. Demnach folgt $x = [u(f) + u(h)] - u(g)$. — Bezüglich der Umkehrung braucht man nur auf die Relationen

$$u(f) + u(h) > u(g) > u(h)$$

den 6. Satz anzuwenden.

16) „Wenn $u(f) > u(g)$ $u(f_1) > u(g_1)$, so hat man

$$[u(f) - u(g)] + [u(f_1) - u(g_1)] = [u(f) + u(f_1)] - [u(g) + u(g_1)]\text{“}.$$

Bezeichnet man die linke Seite der Gleichung mit x, so hat man

$$x + [u(g) + u(g_1)] = u(f) + u(f_1)$$

und da zufolge eines Satzes auf p. 37 hier

$$u(f) + u(f_1) > u(g) + u(g_1)$$

ist,

$$x = [u(f) + u(f_1)] - [u(g) + u(g_1)].$$

17) „Wenn $u(f) > u(g)$ $u(f_1) > u(g_1)$ $u(f) - u(g) > u(f_1) - u(g_1)$, so hat man

$$[u(f) - u(g)] - [u(f_1) - u(g_1)] = [u(f) + u(g_1)] - - [u(f_1) + u(g)]\text{“}.$$

Es sei die linke Seite der Gleichung x, so findet man

$$x + [u(f_1) - u(g_1)] = u(f) - u(g)$$

und hieraus durch beiderseitige Addition von $u(g) + u(g_1)$

$$x + [u(f_1) + u(g)] = u(f) + u(g_1).$$

Da schon in 5) gezeigt ist, dass hier $u(f) + u(g_1) > u(f_1) + u(g)$ sein muss, so folgt

$$x = [u(f) + u(g_1)] - [u(f_1) + u(g)].$$

So hat sich denn ergeben, dass die Sätze 1)—17), auf welchen das Rechnen mit Aggregaten beruht, auch für die Momente gelten, gewisse Ausnahmen in 2), 9), 11) abgerechnet.

Die Multiplication der Momente verläuft ganz so wie bei den absoluten Zahlen, ebenso die Division, soweit die Quotienten möglich sind. Um sie in allen Fällen ausführbar erscheinen zu lassen, haben wir p. 33 neue Grössen eingeführt, welche mit $u(f):u(f_1)$ bezeichnet werden. Und zwar ist es geschehen im Falle, dass $\lim (f:f_1)$ eine positive Zahl oder $+\infty$ sei. Bedeutet φ den Quotienten $f:f_1$, so kann die neue Grösse auch mit $u(\varphi)$ bezeichnet werden, ohne dass irgend eine Unsicherheit möglich ist. Wir finden sodann nach e) p. 33, dass $u(\varphi)=u(\varphi_1)$, wenn $\lim. (\varphi:\varphi_1)=1$, so dass die Bedingung der Gleichheit zweier unter den neuen Grössen dieselbe ist, wie im Systeme der Momente der Functionen f(x). Analog ist $u(\varphi) \gtrless u(\varphi_1)$, je nachdem $\lim (\varphi:\varphi_1)$ grösser oder kleiner als 1 ist.

Hinsichtlich der Multiplication und Division gelten im erweiterten Systeme der Momente dieselben Regeln wie für die absoluten Zahlen. Bei der Addition und Subtraction treten die oben erwähnten Ausnahmen, aber auch keine anderen auf. Dies lässt sich in Kürze folgendermassen darthun.

Die Summe irgend zweier Grössen des erweiterten Systemes $u(\varphi)+u(\varphi_1)$ lässt sich nach den p. 33 aufgestellten Definitionen auf die Form $u(\varphi+\varphi_1)$ bringen. Man hat nun zunächst, wenn $\lim (\varphi:\varphi_1)=1$, also $u(\varphi)=u(\varphi_1)$ ist, $u(\varphi+\psi)=u(\varphi_1+\psi)$, d. i.

$$u(\varphi)+u(\psi)=u(\varphi_1)+u(\psi).$$

Um die Grössen $u(\varphi)+u(\varphi)$, $u(\varphi_1)+u(\psi)$ zu vergleichen, braucht man dem Gesagten zufolge nur zu betrachten den Quotienten

$$F=\frac{\varphi+\psi}{\varphi_1+\psi}=\left(1+\frac{\psi}{\varphi}\right):\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}+\frac{\psi}{\varphi}\right)$$
$$=\left(\frac{\varphi}{\psi}+1\right):\left(\frac{\varphi_1}{\psi}+1\right).$$

Hieraus folgt, mag lim $(\psi:\varphi)$ endlich oder lim $(\varphi:\psi)=0$ (somit auch lim $(\varphi_1:\psi)=0)$ sein, stets lim $F=1$. — Aus der nämlichen Gleichung schliesst man, dass neben $u(\varphi)>u(\varphi_1)$ $u(\varphi)+u(\psi)\geqq u(\varphi_1)+u(\psi)$, worin das Zeichen $=$ nur erscheint, wenn lim $(\varphi:\psi)=$ lim $(\varphi_1:\psi)=0$. Denn den zuletzt erwähnten Fall ausgeschlossen, ist lim $F>1$. — Aus

$$\frac{\varphi+\psi}{\varphi}=1+\frac{\psi}{\varphi}$$

folgt ferner auch hier, dass $u(\varphi)+u(\psi)\geqq u(\varphi)$, je nachdem lim $(\psi:\varphi)$ ungleich oder gleich Null ist.

Nunmehr ergibt sich wie auf p. 30 der Satz: Die Gleichung

$$u(\psi)+x=u(\varphi)$$

hat die eine und nur die eine Lösung $x=u(\varphi-\psi)$, falls $u(\varphi)>u(\psi)$. Wenn $u(\varphi)<u(\psi)$, so hat sie keine Lösung, und wenn $u(\varphi)=u(\psi)$, so unzählig viele". Man hat hiebei noch zu beachten, dass wenn $\varphi=f:f_1$, $\psi=g:g_1$, im ersten Falle lim $(fg_1-f_1g)=+0$, was aus

$$fg_1-f_1g=f_1g\left[\frac{fg_1}{f_1g}-1\right]$$

wegen lim $(fg_1:f_1g)>1$ hervorgeht. Es existirt demnach im erweiterten Systeme die Grösse $u(fg_1-f_1g):u(f_1g_1)$, d. i. $u(\varphi-\psi)$.

Aus den angeführten Sätzen folgen, wie im Vorstehenden gezeigt wurde, die übrigen Additions- und Subtractionregeln.

Mit den Grössen des aus den Momenten der Functionen $f(x)$, den absoluten Zahlen und den Quotienten $u(f):u(f_1)$, worin lim $(f:f_1)=+\infty$, bestehenden Systeme kann man abgesehen von einigen Additions- und Subtractionssätzen, namentlich Ungleichungen, so rechnen, wie mit den absoluten Zahlen[1]).

[1]) So ist die Angabe auf p. 35 zu berichtigen. Ausserdem wolle man folgende Versehen verbessern: p. 25 Z. 15 v. u. l. gleichartigen linearen Grössen; p. 26 Z. 13 st. in der l. an die; p. 30 Z. 5 st. 1 l. 0; p. 36 Z. 1 st. $+\infty$ oder 0 l. 0 oder $+\infty$. p. 32 Z. 5 ist zu 3) noch zuzufügen: Der Gleichung $x\,.\,b=a$ genügt entweder eine und nur eine oder gar keine Grösse des Systemes (I).