Das letzte Axiom der Geometrie.

Von

O. Stolz.

(Vortrag in der Sitzung vom 11. November 1885 mit einem Anhang).

Die Aufstellung geometrischer Systeme, welche vom Euclid'schen abweichen, hat gezeigt, dass die Geometrie eine Erfahrungswissenschaft sei. Bis jetzt wenigstens hat die Entscheidung darüber, welches von diesen Systemen anzunehmen sei, der Beobachtung anheimgestellt werden müssen. Die Art und Weise, wie Euclid oder seine Gewährsmänner die zum Theil sicher auf empirischem Wege gefundenen geometrischen Sätze ableiten, verhüllt freilich den wahren Charakter der Geometrie, so dass man darüber lange im Unklaren geblieben ist. Wir wollen nun aber auseinandersetzen, wie man bei Entwickelung der üblichen Geometrie vorgehen kann, ohne das Gebiet der Thatsachen zu verlassen.

Die Geometrie bedarf nicht allein der Grundbegriffe: Körper, Fläche, Linie, Punkt, Raum von drei Dimensionen, Stetigkeit und starre Beweglichkeit der geometrischen Gebilde; sondern auch der Axiome der Geraden, der Ebene und des Kreises. Damit ist aber das Euclid'sche System noch nicht erreicht, hierzu ist vielmehr noch eine Annahme nothwendig, um deren richtige Formulirung es sich hauptsächlich handelt.

Bei Entwickelung der Geometrie aus den Grundbegriffen und Grundsätzen hat man sich zunächst auf die Figuren zu beschränken, welche in den uns vollständig zugänglichen

Theilen des Raumes sich befinden. Um ihre Eigenschaften handelt es sich ja eigentlich, sie allein können auch Gegenstand der Beobachtung werden, Wir machen daher vor Allem die Annahme, dass die Axiome der Geraden, der Ebene, des Kreises d. h. die Sätze, dass durch zwei Punkte eine Gerade, durch drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, eine Ebene und durch einen Mittelpunkt und eine von ihm ausgehende gerade Strecke in der Ebene ein Kreis bestimmt ist, nur in hinlänglich kleinen Theilen des Raumes Geltung haben. Von einem solchen Raumtheile darf man auch behaupten, dass er durch jedes in ihm enthaltene Stück einer Ebene und dieses selbst wieder durch jede darin verzeichnete Gerade, welche bis an seine Grenzen reicht, zerlegt werde. Dagegen betrachten wir als unzulässig und nichtssagend eine Aeusserung darüber, ob ein Punkt, der sich von einer gegebenen Anfangslage aus auf einer Geraden beständig in einem Sinne fortbewegt, in dieselbe zurückkehren wird oder nicht, d. h. ob die Gerade eine geschlossene Linie ist oder nicht. Die Erfahrung ist ausser Stande, diese Frage zu entscheiden, ebensowenig kann das darüber gefällte Urtheil Gegenstand der geometrischen Anschauung sein. Dass die Gerade eine nichtgeschlossene oder eiue unendliche Linie sei, ist nichts weiter als eine Redensart, an die man allerdings schon seit Euclid gewöhnt ist.

Sieht man also, wie man es thun muss, von der Unendlichkeit der Geraden ab, so bleiben die meisten der Sätze 1—28 des ersten Buches der Euclid'schen Elemente nur für hinlänglich kleine Figuren richtig. Vom 29. Satze dieses Buches an führt Euclid sein System mittelst des als Kreuz der Geometrie berüchtigten elften Axiomes weiter, welches so lautet: „Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, dass die beiden inneren, auf einer Seite der schneidenden Geraden liegenden Winkel zusammen kleiner als zwei rechte sind, so treffen sie hinlänglich verlängert auf eben der Seite der Schneidenden zusammen".

Wir müssen auch diese Annahme als unzulässig bezeichnen. Ob zwei Gerade, die sich in dem zur Verfügung stehenden ebenen Zeichnenfelde nicht schneiden, bei fernerer Verlängerung zusammentreffen oder nicht, kann ebenso wenig durch Beobachtung entschieden werden, als ob die Gerade in sich zurückläuft oder nicht.

Einen Fortschritt über die Euclid'sche Darstellung bedeuten die Elemente der Geometrie des als Philosophen bekannten Ch. v. Wolf. Ihnen liegt, wenn auch der Verfasser darüber sich nicht klar geworden ist, die Voraussetzung zu Grunde, dass die Punkte in der Ebene, welche von einer gegebenen Geraden den nämlichen Abstand haben, eine Gerade bilden. Diese Behauptung kann durch Versuche geprüft und innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler bestätigt werden.

Zweckmässiger ist jedoch die folgende Formulirung des letzten Axioms. „Es gibt mindestens ein Dreieck ABC, in welchem die Winkel zusammen 180° betragen, und zwar brauchen seine Seiten eine gewisse Grenze nicht zu überschreiten, so dass das Dreieck Gegenstand der Beobachtung werden kann". Wir schliessen uns hiermit an Gauss an, der einer Göttinger Tradition zufolge erklärte, seine Ueberzeugung von der Richtigkeit der üblichen Geometrie wurzle darin, dass er die Summe der Winkel in dem Dreiecke: Inselsberg, Brocken, hohen Hagen gleich 180° gefunden habe.

Fügen wir diese Annahme zu den früheren, so erweisen sich die beiden zuletzt erwähnten Euclid'schen Voraussetzungen, die Unendlichkeit der Geraden und das elfte Axiom als nothwendige Folgerungen, womit natürlich sein ganzes Lehrgebäude gewonnen ist. Wir wollen das etwas eingehender ausführen.

Zu diesem Behufe ertheilt man zunächst dem letzten Axiom eine andere Fassung, welche, wenn auch experimentell weniger brauchbar, doch an sich bemerkenswerth ist. „Es gibt in der Ebene mindestens ein Rechteck, d. h. ein Viereck, worin jeder Winkel ein rechter ist". Um aus dem obigen Dreiecke ABC ein Rechteck EFGH abzuleiten, ziehe man eine innerhalb des Dreieckes fallende Höhe — eine solche sei AD — construire die Dreiecke ABE $\cong$ BAD ACF $\cong$ CAD und hierauf das Viereck BCGH $\cong$ CBEF.

Nunmehr ergeben sich ohne Mühe die Sätze der Planimetrie:

1) In jedem Rechtecke sind je zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich. Errichtet man im Mittelpunkte einer Seite desselben eine Senkrechte, so schneidet sie die gegenüberliegende Seite, steht auf ihr senkrecht und halbirt sie.

2) Sind in einem Vierecke drei Winkel rechte und zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich, so ist es ein Rechteck.

3) Errichtet man in einem Punkte M einer Seite AB eines Rechteckes ABCD eine Senkrechte auf AB, so schneidet sie die gegenüberliegende Seite CD — etwa in N —, steht auf ihr senkrecht und es is MN $=$ BC $=$ AD.

4) In jedem rechtwinkligen Dreiecke von hinlänglich kleinen Seiten beträgt die Summe der Winkel zwei rechte.

5) In jedem Dreiecke beträgt die Summe der Winkel zwei rechte.

6) In jedem einfachen n-Eck beträgt die Summe der Winkel $(n-2)\ 180^0$.

7) Liegt ein Punkt nicht auf einer Geraden, so gibt es von ihm ein und nur ein Loth auf die Gerade.

8) Errichtet man in den Punkten einer Geraden Lothe von gleicher Länge, so bilden die Endpunkte derselben eine Gerade, welche auf jedem der Lothe senkrecht steht. Die erste und zweite Gerade heissen zu einander parallel; auch sagt man von ihnen, dass sie die nämliche Richtung haben.

9) Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, dass die beiden inneren, auf einer Seite der schneidenden Geraden liegenden Winkel zusammen 180^0 ausmachen, so sind sie parallel, d. h. haben überall denselben Abstand, schneiden sich also nicht.

10) Werden zwei Gerade, g, h von einer dritten so geschnitten, dass die beiden inneren auf einer Seite der schnei-

denden Geraden liegenden Winkel zusammen kleiner als 180° sind, so schneiden sie sich hinlänglich verlängert auf eben der Seite der Schneidenden in einem Punkte und entfernen sich nach dem Durchschneiden sowohl, als auf der anderen Seite der Schneidenden unbegrenzt von einander.

Aus dem letzten Satze erfahren wir, dass, wenn wir uns die Geraden g, h von ihrem Schnittpunkte aus beliebig weit verlängert denken, sie sich immer mehr und in's Unendliche entfernen; die Gerade ist mithin keine geschlossene Linie, da sonst die Entfernung je zweier Geraden eine gewisse Grenze nicht überschreiten könnte. Aus der Thatsache, aus welcher wir die Euclid'sche Geometrie abgeleitet haben, folgt mithin nothwendig, dass die Gerade unendlich ist. Nur als Corollar hat dieser Satz einen Sinn, während er als Axiom unzulässig ist. Es ergibt sich ferner der allgemeine d. i. auch ausserhalb des erreichbaren Raumes geltende Satz, dass zwei Gerade höchstens einen Punkt gemein haben.

Im Vorbeigehen sei bemerkt, dass aus der obenerwähnten Annahme, die aequidistante Linie zu einer Geraden sei eine Gerade, ebenfalls mit Leichtigkeit die Existenz eines Rechteckes gefolgert werden kann, so dass auch sie auf das geometrische System des Euclid führt.

Die Zulässigkeit der üblichen Geometrie hängt somit von dem experimentellen Nachweise eines Dreieckes mit der Winkelsumme 180° ab. Da es aber unmöglich ist, einen Zahlenwerth durch Beobachtungen genau zu ermitteln — es lässt sich durch die Ausgleichsrechnungen nur eine weiter und weiter getriebene Annäherung an denselben erreichen — so kann die Geometrie das Prädikat „exact" nicht in Anspruch nehmen. Es ist allerdings bisher keine Thatsache bekannt geworden, welche mit der Euclid'schen Lehre im Widerspruche steht. Ausserdem hat diese Geometrie den Vorzug, die einfachste zu sein.

Ersetzen wir jetzt in der That das lezte Axiom der Euclid'schen Geometrie durch eines des folgenden. „Es gibt mindestens ein Dreieck ABC, in welchem die Winkelsumme grösser (bezw. kleiner) als 180° ist und zwar sollen seine Seiten eine gewisse Grenze nicht überschreiten". Daraus ergibt sich dann der Satz, dass in jedem Dreiecke die Winkelsumme grösser (bezw. kleiner) als 180° ist.

Wir brauchen ihn nur für Dreiecke, deren Seiten hinlänglich klein sind, und zwar für rechtwinklige zu beweisen. Dazu leiten wir aus dem Dreiecke ABC dadurch, dass wir eine in's Innere desselben fallende Höhe AD ziehen, ein rechtwinkliges Dreieck her, dessen Winkelsumme grösser (bezw. kleiner) als 180° ist. Das muss von einem der Dreiecke ABD, ACD gelten, denn sonst könnte es auch im Dreiecke ABC nicht der Fall sein. Nunmehr ist lediglich zu zeigen, dass, wenn wir auf der Kathete AB des rechtwinkligen Dreieckes ABC, worin die Summe der beiden spitzen Winkel β γ z. B. grösser als 90° ist, einen Punkt M annehmen, auch die der beiden spitzen Winkel μ ν des rechtwinkligen Dreieckes ACM grösser als 90° ist. Es ist aber leicht einzusehen, dass, wenn M die Strecke AB von der Spitze A des rechten Winkels aus beschreibt, die Summe $\mu + \nu$ beständig in demselben Sinne sich ändert. Wäre dem nämlich nicht so, so müsste es auf AB zwei Punkte M M' geben, wofür die bezüglichen Summen $\mu + \nu$ $\mu' + \nu'$ einander gleich sind. Diese Annahme würde aber auf die Euclid'sche Geometrie zurückführen (11). Folglich muss $\mu + \nu$, da diese Summe bei gehöriger Annäherung von M an A vom Grenzwerthe 90° beliebig wenig abweicht, von 90° bis zu $\beta + \gamma$ beständig wachsen, somit stets 90° übersteigen.

Wenn wir annehmen würden, dass die Winkelsumme in einem, also in jedem Dreiecke 180° übersteigt, so würde daraus mit Nothwendigkeit folgen, dass wir die Gerade als eine in sich zurücklaufende Linie zu betrachten haben. Denn es hat bereits Legendre nachgewiesen, dass, wenn das nicht der Fall ist, die Gerade also unendlich ist, die Winkelsumme im Dreiecke unmöglich grösser als 180° sein kann.

Betrachten wir nun noch die letzte Möglichkeit, dass die

Winkelsumme in einem, also in jedem Dreiecke unter 180° ligt. Daraus ergibt sich unmittelbar die Einzigkeit des Lothes von einem Punkte auf eine jede nicht durch ihn gehende Gerade. Sind in einer Ebene zwei Gerade g, h gegeben und ist von einem Punkte A der ersteren ein Loth AB auf die letztere gefällt, so wächst, während der Punkt M sich auf g von A nach derjenigen Seite von AB entfernt, wo der Winkel zwischen g und AB nicht unter 90° beträgt, sein Abstand MP von h beständig (12). Es gibt somit kein Maximum des Abstandes MP. Ziehen wir von einem Punkte aus zwei Gerade g, h, so kehren sie nicht mehr in ihren Ursprung zurück d. h. die Gerade ist unendlich. Vermittelst der Unendlichkeit der Geraden gelangen wir jetzt zur Raumform von Lobatschewsky. Denn es müssen durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden h mehr als eine Gerade laufen, welche h nicht schneidet. Würden wir nämlich nur eine solche Gerade zulassen, so würden wir laut des früher angeführten elften Axiomes wieder zur Euclid'schen Geometrie geleitet.

Der Aufbau des geometrischen Systemes bis zu den trigonometrischen Formeln gestaltet sich in den Nichteuclid'schen Raumformen schwieriger als in der Euclid'schen. Lobatschewsky und Bolyai lösten die Aufgabe im Grunde dadurch, dass sie in ihrem Raume eine Fläche, die Grenzfläche, nachzuweisen vermochten, auf welcher die Euclid'sche Planimetrie Geltung hat. Wie man in allen Nichteuclid'schen Raumformen auf die nämliche Weise dieses Ziel erreichen kann, hat neuerdings W. Killing in dem kürzlich erschienenen vortrefflichen Werke: „Die nichteuclidischen Raumformen" gezeigt, welches an einigen Stellen dieses Vortrages benutzt worden ist. Die Formeln der Nichteuclid'schen Geometrie weichen um so weniger von denen der üblichen Geometrie ab, je kleiner die betrachteten Figuren sind.

Anhang.

Beweise der mit Nummern versehenen Sätze.

1) Das gegebene Rechteck sei ABCD. Errichtet man im Mittelpunkte E von AB eine Senkrechte auf AB, so kann sie keine der beiden Seiten AD BC schneiden zufolge des Satzes, dass, wenn zwei Lothe auf eine Gerade sich schneiden, das in irgend einem Punkte der Geraden auf diese errichtete Loth durch ihren Schnittpunkt geht. Folglich schneidet das Loth in E die AB gegenüberliegende Seite CD. Findet das im Punkte F statt, so sind die Vierecke AEFD und BEFC vermöge des genannten Satees congruent, woraus der Satz unmittelbar folgt.

2) Ist $\sphericalangle A = B = C = 90^0$, so sind die Dreiecke ABD und CDB congruent, was man ebenfalls mit Hilfe des obenerwähnten Satzes nachweist.

3) Zieht man wie in 1) die Gerade EF, so zerfällt das Rechteck ABCD in zwei Rechtecke. Halbirt man ihre Seiten AE, EB neuerdings, so erhält man vier Rechtecke u. s. f. Hiedurch gelingt es MN in ein Rechteck einzuschliessen, in dem zwei Gegenseiten gleich AD, die beiden anderen so klein sind, als man will. Daraus schliesst man, dass MN = AD ist und somit auf CD senkrecht steht.

4) Man lege das rechtwinklige Dreieck so auf das gegebene Rechteck ABCD, dass der Scheitel des rechten Winkels auf A, die zweite Ecke auf den Punkt M der Strecke AB, die dritte auf den Punkt P von AD fällt. Zieht man MN senkrecht auf AB, so ist nach dem 3. Satz AMND ein Rechteck, desgleichen AMQP, wenn man PQ senkrecht auf AD zieht. Die Dreiecke AMP und QPM sind congruent, folglich beträgt in jedem die Winhelsumme 180^0.

5) Man zerlegt das gegebene Dreieck in solche, deren keine Seite eine gewisse Grenze überschreitet und jedes dieser kleinen Dreiecke durch eine Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke.

8) Errichtet man im Punkte A der Geraden g das Loth AB und in einem anderen Punkte M derselben das Loth $MN = AB$, so sind die Dreiecke AMN und MAB congruent, somit ist $AN = BM$. Also sind auch die Dreiecke ANB und MBN congruent, demnach ist $\sphericalangle ABN = MNB$, somit ein jeder gleich 90^0.

10) Es mögen die Geraden AB, A′B′ durch eine dritte CC′ geschnitten werden und es sei

$$\sphericalangle BCC' + CC'B' < 180^0.$$

Von diesen Winkeln sei der zweite spitz. Dann ziehe man von C das Loth CD′ auf A′B′ und von einem Punkte M von CB ein Loth MP auf CD′. Es gibt nun eine ganze Zahl n, so dass $nCP > CD'$ ist. Denkt man sich CD′ in n gleiche Theile $CE_1 = E_1 E_2 = \ldots = E_{n-1}D'$ getheilt, errichtet in E_1 ein Loth auf CD′, das die Strecke CM in F_1 trifft, und trägt von F_1 aus n—1 der CF_1 gleiche Strecken $CF_1 = F_1 F_2 = F_2 F_3 = \ldots$ auf, so hat F_1 von A′B′ den Abstand $CD' - CE_1$, F_2 den Abstand $CD' - 2CE_1$ .. F_{n-1} den Abstand $CD' - (n-1)CE$, und F_n liegt auf A′B′. Zieht man nämlich $E_2 F_2$ und von F_1 das Perpendikel $F_1 H_1$ auf A′B′, das $E_2 F_2$ in G_2 trifft, so sind die Dreiecke $CE_1 F_1$ und $E_2 E_1 F_1$, sowie $E_2 G_2 F_1$ und $F_2 G_2 F_1$ congruent, also ist auch $F_1 F_1 G_2 E_2$ ein Rechteck, somit $E_1 E_2 = F_1 G_2$, also hat der Punkt F_1 von A′B′ in der That den Abstand $CD' - CE_1$. Verlängert man $F_1 G_2$ um das Stück $G_2 G_3 = F_1 G_2$, zieht $G_3 E_3$ und $G_3 F_3$, so ist nicht allein $E_3 G_3$ senkrecht auf $F_1 G_2$, sondern nach dem soeben Bemerkten auch $G_3 F_3$, so dass die Punkte $E_3 G_3 F_3$ eine Gerade bilden. Das Loth von F_2 auf A′B′ ist gleich $F_1 H_1 - F_1 G_2 = CD' - 2CE_1$ u. s. w.

11) In dem bei A rechtwinkligen Dreiecke AMC seien μ ν die spitzen Winhel und im Dreiecke AM′C, wo M′ auf AM liegt, seien sie μ' ν'. Angenommen, es sei $\mu + \nu = \mu' + \nu'$. Construirt man $\triangle CMN \cong MCA$, $\triangle CM'N' \cong M'CA$, so bilden CN′N eine Gerade. Verlängert man N′M′ um das Stück $M'P = N'M'$, halbirt MM′ in Q, so sind congruent die Dreiecke MQN und M′QP, also bilden die Punkte NQP

eine Gerade. Die Winkel im Dreiecke PNN′ betragen zusammen 180°.

12) Zuerst erinnern wir an den in allen Planimetrien bestehenden Satz: „Errichtet man in zwei Punkten einer Geraden Lothe von gleicher Länge, so bilden sie (falls sie nicht in demselben Punkte enden) mit der Verbindungslinie ihrer Endpunkte gleiche Winkel“. Diese Winkel sind also im Falle, dass die Winkelsumme im Dreiecke kleiner als 180° ist, beide spitz. Ziehen wir von dem Punkte M der Geraden g ein Loth MP auf h, wählen den Punkt M′ auf g so, dass $\sphericalangle M'MP \geqq 90^\circ$ ist, ziehen hierauf M′P′ senkrecht auf h und bezeichnen mit M″ einen Punkt auf der Verlängerung von MM′ über M′ hinaus, so ist, da die Winkelsumme im Vierecke MPP′M′ weniger als 360° beträgt,

$$\sphericalangle M'MP < M''M'P'.$$

Es ist ferner $MP < M'P'$. Trägt man nämlich auf der Geraden P′M′ von P′ aus eine Strecke $P'N = PM$ auf, so muss ihr Endpunkt N noch in die Strecke P′M′ fallen, da der Winkel NMP spitz sein soll.

Zeitschrift/Journal: Berichte des naturwissenschaftlichen-medizinischen Verein Innsbruck

Jahr/Year: 1886

Band/Volume: 15

Autor(en)/Author(s): Stolz Otto

Artikel/Article: Ueber das letzte Axiom der Geometrie. 25-34