Bemerkung zur Definition eines primitiven Periodenpaares einer doppelt-periodischen Function.

Sind $P' = a' + b'i$ und $P'' = a'' + b''i$ zwei Perioden einer Funktion $\varphi(u)$ (die nicht für alle Werthe von u einen und denselben Werth haben soll), für welche die Determinante $A = a'b'' - a''b'$ von Null verschieden ist, so besteht zwischen diesen Grössen und jeder weiteren Periode P von $\varphi(u)$, wie Jacobi*) gezeigt hat, eine Relation von der Form

$$mP + m'P' + m''P'' = 0 \qquad (1$$

in welcher m, m′, m″ reelle ganze Zahlen bezeichnen, welche nicht alle drei einen von 1 verschiedenen gemeinsamen Theiler haben.

Ist f der grösste gemeinsame Theiler von m′ und m″, n′ und n″ ein Paar ganzer Zahlen, für welche $n'm'' - n''m' = f$ ist, so ist auch $\frac{P}{f}$ eine Periode und lassen sich P, P′ und P″ ganzzahlig durch die beiden Perioden $\frac{P}{f}$ und und $n'P'' - n''P'$ ausdrücken.

Die Determinante $\begin{vmatrix} -\frac{m'a' + m''a''}{fm} & -\frac{m'b' + m''b''}{fm} \\ -n''a' + n'a'' & -n''b' + n'b'' \end{vmatrix}$ aus den

*) De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur. Ges. Werke, herausgegeben v. K. Weierstrass Bd. II. Art. 1—3.

Coordinaten dieser beiden letzteren Perioden hat den Werth $\frac{A}{m}$.

Hierauf gründet sich nun der Schluss*): Gibt es unter den unendlich vielen Perioden von $\varphi(u)$ kein Paar P_1, P_2, welches eine von Null verschiedene Determinante seiner Coordinaten hat, deren absoluter Betrag kleiner als $|A|$ ist, so muss $m = \pm 1$ sein, d. h, es muss sich jede Periode P von $\varphi(u)$ nach (1 ganzzahlig durch P' und P'' in der Form $m'P' + m''P''$ darstellen lassen, oder es ist, mit anderen Worten, P' und P'' ein primitives Periodenpaar.

Um also von diesem Standpunkte aus die Existenz primitiver Periodenpaare zu beweisen, hat man zu zeigen, dass es Periodenpaare $\mathfrak{P}_1 = a_1 + b_1 i$, $\mathfrak{P}_2 = a_2 + b_2 i$ gibt, deren Determinante $\mathfrak{D} = a_1 b_2 - a_2 b_1$ von Null verschieden und so beschaffen ist, dass für jedes andere Periodenpaar $\Pi_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$, $\Pi_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$, dessen Determinante $\Delta = \alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2$, von Null verschieden ist, $|\mathfrak{D}| \leqq |\Delta|$ ist.

Diesen Nachweis zu geben ist der Zweck der vorliegenden Notiz.

Zunächst sei bemerkt: Ebenso wie Jacobi gezeigt hat, dass $\frac{P}{f}$ eine Periode von $\varphi(u)$ ist, wenn in (1 m' und m'' den grössten gemeinschaftlichen Theiler f haben, kann auch gezeigt werden, dass $\frac{P'}{f'}$ und $\frac{P''}{f''}$ Perioden sind, wenn f' und f'' die grössten gemeinsamen Theiler der Zahlenpaare m, m'' und m, m' bezeichnen.

Sind daher in (1 P' und P'' einzeln primitive Perioden von $\varphi(u)$, d. h. solche, von welchen kein genauer Theil selbst eine Periode ist, so sind m' und m'' prim zu m; ist m' oder m'' gleich 0, so ist $m = 1$. Haben P' und P'' diese Eigenschaft nicht, so können auf den geraden Strecken vom Nullpunkte O nach den Punkten P' und P'' nach der Voraus-

*) Königsberger, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen etc. p. 330 ff.

setzung, dass $\varphi(u)$ nicht constant ist, nur eine endliche Anzahl von Periodenpunkten liegen. Ist dann auf $OP' \overline{P}'$ der dem Nullpunkte zunächst liegende Periodenpunkt, auf OP'' $\overline{P}''$, so sind die Quotienten $\frac{P'}{\overline{P}'}$ und $\frac{P''}{\overline{P}''}$ rationale reelle Zahlen (Jacobi, l. c. Art. 1.). Drückt man dann in (1 P' und P'' durch $\overline{P}'$ und $\overline{P}''$ aus, so ergibt sich eine Relation derselben Form

$$\overline{m}\ \overline{P} + \overline{m}'\ \overline{P}' + \overline{m}''\ \overline{P}'' = 0,$$

in welcher nun $\overline{P}'$ und $\overline{P}''$ primitive Perioden sind.

Ich kann daher auch annehmen, dass schon P' und P'' primitive Perioden sind.

Dies vorausgesetzt, überzeugt man sich nun leicht, dass in der Formel (1 m nur eine endliche Anzahl verschiedener ganzzahliger Werthe annehmen kann, da in jeder endlichen Umgebung des Nullpunktes nur eine endliche Anzahl von Periodenpunkten vorhanden sein können.

Sind nämlich $\frac{n'P' + n''P''}{n}$ und $\frac{r'P' + r''P''}{r}$ zwei Perioden von $\varphi(u)$, n und r zwei von 1 und untereinander verschiedene Werthe von m, welche als positive angenommen werden können, so lassen sich aus diesen Perioden durch Hinzufügung passend gewählter Vielfacher von P' und P'' zwei Perioden $\frac{\nu'P' + \nu''P''}{n}$ und $\frac{\rho'P' + \rho''P''}{r}$ ableiten, für welche $\left|\frac{\nu'}{n}\right|$, $\left|\frac{\nu''}{n}\right|$, $\left|\frac{\rho'}{r}\right|$ und $\left|\frac{\rho''}{r}\right| < \frac{1}{2}$ sind.

Dieselben sind sicher von einander verschieden (denn ihre Gleichheit würde, da $|A| > O$ ist, die Gleichheiten

$$n\rho' = r\nu' \text{ und } n\rho'' = r\nu''$$

erfordern, welche aber offenbar mit den gemachten Voraussetzungen unverträglich sind) und ihr absoluter Betrag ist kleiner als die grössere von den Zahlen $|P'|$ und $|P''|$.

Würden also bei der Darstellung der Perioden von $\varphi(u)$ durch die Formel (1 unendlich viele verschiedene Werthe von m auftreten, so gäbe es innerhalb jedes Kreises um den Nullpunkt, der die Punkte P′ und P″ in seinem Innern oder Umfange enthält, auch unendlich viele verschiedene Perioden, was nach der Voraussetzung, dass $\varphi(u)$ nicht constant ist, unmöglich ist.

Unter den endlich vielen Werthen, welche m annehmen kann, gibt es einen grössten, der mit $\mathfrak{m}$ bezeichnet sein mag, und es lässt sich weiter behaupten, dass jeder Werth, den m annehmen kann, ein Divisor von $\mathfrak{m}$ sein muss. (Dabei setze ich natürlich voraus, dass $\mathfrak{m} > 1$ ist, d. h. dass nicht schon P′ und P″ ein primitives Periodenpaar sind).

Es gibt nämlich eine Periode $\frac{\mathfrak{m}' P' + \mathfrak{m}'' P''}{\mathfrak{m}}$, in welcher $\mathfrak{m}'$ und $\mathfrak{m}''$ prim sind zu $\mathfrak{m}$.

Ist $\frac{\mathfrak{n}' P' + \mathfrak{n}'' P''}{\mathfrak{n}}$ $(\mathfrak{n} > 1)$ irgend eine andere Periode von $\varphi(u)$, so ist auch z. B. die Summe dieser beiden, also $\frac{(\mathfrak{m}'\mathfrak{n} + \mathfrak{n}'\mathfrak{m}) P' + (\mathfrak{m}''\mathfrak{n} + \mathfrak{n}''\mathfrak{m}) P''}{\mathfrak{m}\mathfrak{n}}$ eine Periode; nachdem aber $\mathfrak{m}$ der grösste Werth ist, den der Nenner annehmen kann, so müssen die Coefficienten von P′ und P″ im Zähler und somit, da $\mathfrak{n}'$ und $\mathfrak{n}''$ prim zu $\mathfrak{n}$ sind, auch $\mathfrak{m}$ durch $\mathfrak{n}$ theilbar sein.

Nachdem dieses festgestellt ist, lässt sich jedes Periodenpaar $\Pi_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$ $\Pi_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$ von $\varphi(u)$, für welches die Determinante $\Delta = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ von O verschieden ist, darstellen durch die Formeln

$$\Pi_1 = \frac{\mu'_1 P' + \mu''_1 P''}{\mathfrak{m}} \qquad \Pi_2 = \frac{\mu'_2 P' + \mu''_2 P''}{\mathfrak{m}} \tag{2}$$

wobei $\Delta = \frac{\mu'_1\mu''_2 - \mu''_1\mu'_2}{\mathfrak{m}^2} A$ ist, also $\mu'_1\mu''_2 - \mu''_1\mu'_2$ zugleich mit Δ von O verschieden ist und natürlich nicht ausgeschlossen ist, dass gemeinsame Faktoren von μ'_1 und μ''_1, beziehungsweise von μ'_2 und μ''_2 in $\mathfrak{m}$ enthalten sind.

Löst man die vorstehenden Gleichungen (2 nach P′ und P″ auf, so folgt:

$$(\mu'_1\mu''_2 - \mu''_1\mu'_2) P' = \mathfrak{m}(\mu''_2\Pi_1 - \mu''_1\Pi_2)$$
$$(\mu'_1\mu''_2 - \mu''_1\mu'_2) P'' = \mathfrak{m}(-\mu'_2\Pi_1 + \mu'_1\Pi_2);$$

also muss, da P' und P'' primitive Perioden von $\varphi(u)$ sind, $\mu'_1\mu''_2-\mu''_1\mu'_2$ durch $\mathfrak{m}$ theilbar sein oder

$$\mu'_1\mu''_2-\mu''_1\mu'_2=k\mathfrak{m}$$

sein, wobei k eine ganze Zahl bezeichnet.

Damit wird aber $\Delta=\frac{k}{\mathfrak{m}}A$. Wenn man also ein Periodenpaar $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ angeben kann, für welches $k=1$ ist, so ist in der That gezeigt, dass für die Grössen $|\Delta|$ ein Minimum $|\mathfrak{D}|$ existiert und zwar den Werth $\frac{|A|}{\mathfrak{m}}$ hat.

Zwei derartige Perirdenpaare sind aber in der That sofort aufzuzeigen.

Nach der Erklärung von $\mathfrak{m}$ und den Voraussetzungen über P' und P'' gibt es, wie bereits erwähnt wurde, Perioden von der Form $\frac{\mathfrak{m}'P'+\mathfrak{m}''P''}{\mathfrak{m}}$, in welchen $\mathfrak{m}'$ und $\mathfrak{m}''$ prim zu $\mathfrak{m}$ sind; demnach gibt es Zahlenpaare $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}''$, für welche

$$\mathfrak{p}\mathfrak{m}+\mathfrak{p}'\mathfrak{m}'=1 \qquad \mathfrak{q}\mathfrak{m}+\mathfrak{q}''\mathfrak{m}''=1 \text{ ist.}$$

Bildet man damit die Perioden

$$\mathfrak{p}'\,\frac{\mathfrak{m}'P'+\mathfrak{m}''P''}{\mathfrak{m}}+\mathfrak{p}\,P'=\frac{P'+\mathfrak{p}'\mathfrak{m}''P''}{\mathfrak{m}} \text{ und}$$

$$\mathfrak{q}''\,\frac{\mathfrak{m}'P'+\mathfrak{m}''P''}{\mathfrak{m}}+\mathfrak{q}\,P''=\frac{\mathfrak{q}''\mathfrak{m}'P'+P''}{\mathfrak{m}},$$

so sind offenbar

$$\frac{P'+\mathfrak{p}'\mathfrak{m}''P''}{\mathfrak{m}},\ P'' \text{ und } P',\ \frac{\mathfrak{q}''\mathfrak{m}'P'+P''}{\mathfrak{m}}$$

Periodenpaare der verlangten Art, weil für sie

$$\mu'_1\mu''_2-\mu''_1\mu'_2=\mathfrak{m} \text{ ist.}$$

Wie aus einem solchen Paare beliebig viele andere derselben Art abgeleitet werden können, braucht hier nicht weiter erörtert zu werden.

Graz, November 1885.

Victor Dantscher v. Kollesberg.