# Ueber die Partialbruchzerlegung der Function $e^{az} : (e^z - 1)$

von

O. Stolz.

Im 29. Bande der Schlömilch'schen Zeitschrift (S. 45 f.) hat Herr Worpitzky die obige Function für reelle Werthe von a nach dem Cauchy'schen Verfahren in Partialbrüche entwickelt, indem er den Grenzwerth des Integrales

$$J_n = \int\limits_{K_n} \frac{e^{ax}}{e^x - 1} \cdot \frac{dx}{x - z},$$

wo $K_n$ den im positiven Sinne durchlaufenen Kreis

$$x = R_n e^{\varphi\iota} = u + vi \quad (2n\pi < R_n < 2n\pi + 2\pi)$$

bedeutet, bei $\lim n = +\infty$ bestimmte. Hierbei bezeichnet $R_n$ einen bestimmten Werth zwischen den angegebenen Grenzen z. B. $R_n = 2n\pi + \pi$. Dieses Verfahren, welches Herrn Worpitzky rasch zu interessanten Resultaten führt, bietet für mich noch eine Schwierigkeit, die bei ähnlichen Gelegenheiten häufig auftritt, dar. Bringen wir $J_n$ auf die Form

$$J_n = \int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \frac{e^{au+avi}}{e^{u+vi} - 1} \, \frac{d\varphi}{1 - \frac{z}{x}} + \int\limits_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \cdots$$

und lassen a einen positiven ächten Bruch sein, so ist zunächst zu zeigen, dass das erste Integral bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth 0 hat. Da die Function hinter

$\int$ für alle Werthe von $\varphi$ ausser $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ bei lim $n = +\infty$ zur 0 convergirt, so zerlegt man das Intervall in drei: $(-\frac{1}{2}\pi,\ -\frac{1}{2}\pi+\delta)$, $(-\frac{1}{2}\pi+\delta,\ \frac{1}{2}\pi-\delta)$, $(\frac{1}{2}\pi-\delta,\ \frac{1}{2}\pi)$. Dass bei constantem n das dem ersten und das dem dritten Intervalle entsprechende zugleich mit $\delta$ unendlich klein werden, springt in die Augen; allein das genügt nicht zum angestrebten Zwecke. Es müsste vielmehr gezeigt werden, dass jedes der Integrale gleichmässig für alle Werthe des Index n: $n = 1, 2 \ldots$ zugleich mit $\delta$ unendlich klein wird. Da der Nachweis dieses Satzes nicht einfach zu sein scheint, so habe ich es vorgezogen, die Ergebnisse von Worpitzky auf dem von Briot und Bouquet (Théorie des fonct. ellipt. p. 281) vorgeschlagenen Wege abzuleiten, was ohne Schwierigkeit angeht. Derselbe benutzt den folgenden Satz: „Es sei f(x) eine eindeutige analytische Function, im Endlichen durchaus vom Charakter der rationalen Functionen, und es seien $K_1\ K_2 \ldots K_n \ldots$ solche Curven, dass wenn nur n gross genug ist, alle Punkte von $K_n$ einen Abstand vom Nullpunkte haben, der grösser als eine beliebig vorgegebene Zahl $\Delta$ ist. Lassen sich diese Curven so wählen, dass $|f(x)|$ in jedem ihrer Punkte eine endliche Zahl nicht übersteigt, so ist

$$\lim_{n=+\infty} \left\{ \int \frac{f(x)}{x-z}\,dx - \int \frac{f(x)}{x}\,dx \right\} = 0.\text{“} \tag{1}$$

Im Falle der Function

$$f(x) = e^{ax} : (e^x - 1) \tag{2}$$

kann man als Curve $K_n$ betrachten ein Quadrat, dessen Seiten parallel zu den Coordinatenaxen sind und durch die Punkte $\pm(2n+1)\pi$, $\pm(2n+1)\pi i$ gehen. Die beiden zur reellen Axe parallelen Seiten werden durch die Gleichung

$$x = \xi \pm (2n+1)\pi i \quad (-(2n+1)\pi \leqq \xi \leqq (2n+1)\pi), \tag{3}$$

die zur imaginären Axe parallelen durch die Gleichung

$$x = \pm(2n+1)\pi + \eta i \quad (-(2n+1)\pi \leqq \eta \leqq (2n+1)\pi) \tag{4}$$

dargestellt. Ersetzt man x in (2) durch die Ausdrücke (3), (4), so sieht man sofort, dass es eine solche Zahl $\gamma$ gibt, dass $|f(x)| < \gamma$ ist, was n auch sein mag.

Es ist nun leicht zu zeigen, dass

$$\lim_{n=+\infty} \int_{K_n} \frac{e^{ax}}{e^x-1} \cdot \frac{dx}{x} = 0 \tag{5}$$

ist, woraus nach (1) die Formel

$$\lim_{n=+\infty} \int_{K_n} \frac{e^{ax}}{e^x-1} : \frac{dx}{x-z} = 0$$

folgt, welche bekanntlich zur Zerlegung der Funktion (2) in Partialbrüche, d. i. zu der für alle Werthe von $z$ ausser den von der Form $z=2n\pi i$ geltenden Gleichung

$$\frac{e^{az}}{e^z-1} = \frac{1}{z} + \sum_1^\infty {}_n \frac{2z\cos 2na\pi - 4n\pi \sin 2na\pi}{z^2+4n^2\pi^2} \tag{6}$$

führt. — Wenn das Integral (5) in die Integrale längs der Seiten des Quadrates $K_n$ getheilt wird, so erhält man vier Integrale, deren jedes bei $\lim n=+\infty$ zur Null convergirt. In der That ist der absolute Betrag des einer jeden der Seiten (3) entsprechenden Integrales kleiner als

$$\int_{-(2n+1)\pi}^{+(2n+1)\pi} \frac{e^{a\xi}}{e^\xi+1} \cdot \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2+(2n+1)^2\pi^2}} < \frac{1}{(2n+1)\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{a\xi}\,d\xi}{e^\xi+1};$$

Der absolute Betrag des zu derjenigen unter den Seiten (4), welcher das obere Zeichen entspricht, gehörigen Integrales ist kleiner als

$$\frac{e^{(2n+1)\pi a}}{e^{(2n+1)\pi}-1} \int_{-(2n+1)\pi}^{+(2n+1)\pi} \frac{d\eta}{\sqrt{(2n+1)^2\pi^2+\eta^2}} =$$

$$\frac{e^{(2n+1)\pi a}}{e^{(2n+1)\pi}-1}\, l\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right);$$

endlich der absolute Betrag des zur anderen der Seiten (4) gehörigen Integrales kleiner als

$$\frac{e^{-(2n+1)\pi a}}{1-e^{-(2n+1)\pi}}\, l\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

Um die Function $e^{az} : (e^z-1)$ nach dem von Herrn

Mittag-Leffler angegebenen Verfahren (vgl. Hermite Cours II. ed. p. 83) in eine Reihe nach rationalen Functionen von z zu entwickeln, bemerke man, dass

$$\frac{e^{az}}{e^z-1} = \frac{e^{za n\pi i}}{z-2n\pi i} \mathfrak{P}(z-zn\pi i)$$

ist und bei reellen Werthen von a die unendliche Reihe $\sum \frac{e^{2an\pi i}}{(2n\pi i)^2}$ absolut convergirt. Man erhält demnech

$$\frac{e^{az}}{e^z-1} = \frac{1}{z} + \sum_{+\infty}^{-\infty}{}'_n \; e^{2an\pi i} \left\{ \frac{1}{z-2n\pi i} + \frac{1}{2n\pi i} \right\} + G(z), \quad (7)$$

wo G (z) eine ganze rationale oder transcendente Function und der Accent bei $\Sigma$ bedeutet, dass n den Werth 0 nicht erhalten soll. Mit Hilfe der Gleichung (6) ergibt sich

$$G(z) = a - \tfrac{1}{2} \quad (0 < a < 1).$$

Diese Formel gilt auch für $a = 0$ und 1. Mittelst der von Herrn Worpitzky entwickelten Formeln lässt sich die Function G(z) auch, falls a in (7) einen reellen Werth ausserhalb des Intervalles (0, 1) erhält, leicht bestimmen.

Hat a einen complexen Werth, so convergirt die Reihe

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n \; e^{2an\pi i} \left( \frac{C}{2n\pi i} \right)^{n+1}$$

absolut, was C auch sein mag. Man darf daher setzen

$$\frac{e^{az}}{e^z-1} = \frac{1}{z} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_n \; e^{2an\pi i} \left\{ \frac{1}{z-2n\pi i} + \frac{1}{2n\pi i} + \frac{z}{(2n\pi i)^2} + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{z^{n-1}}{(2n\pi i)^n} \right\} + G(z).$$

Die beständig convergente Reihe G(z) lässt sich dadurch ermitteln, dass man beide Seiten dieser Gleichung nach ganzen Potenzen von z entwickelt.