Bemerkung zur Theorie der irrationalen Zahlen.

Wenn man von einer unbegrenzten Folge von positiven rationalen Zahlen a_1, a_2, ... weiss, dass es (positive rationale) Zahlen g gibt, welche grösser sind als die Summe aus jeder beliebigen endlichen Anzahl von Zahlen a_r der Folge*), so kann man daraus unmittelbar den bekannten wichtigen Satz erschliessen:

Ist ε eine beliebig klein anzunehmende positive (rationale) Zahl, so muss es eine Anzahl $\mathfrak{m}$ geben von der Beschaffenheit, dass

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+r} < \varepsilon$$

ist für jede Anzahl r, sobald $m \geqq \mathfrak{m}$ ist.

Diesen Schluss zu begründen ist der Zweck der vorliegenden Notiz.

Gäbe es in der That zu dem vorgelegten ε eine solche Anzahl $\mathfrak{m}$ nicht, so hiesse diess doch nichts Anderes, als die Summe $a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+\mu}$ überschreitet für jede noch so grosse Anzahl m den Werth ε, sobald nur μ eine gehörig grosse Anzahl n erreicht hat.

Es gäbe somit sicher auch Anzahlen n_1, n_2, ... $n_\varkappa$. für welche die Umgleichungen erfüllt wären:

$$a_1 + a_2 \ldots + a_{1+n_1} > \varepsilon$$

$$a_{1+n_1+1} + a_{1+n_1+2} + \ldots + a_{1+n_1+n_2} > \varepsilon$$

*) Diese Eigenschaft einer Folge hat Herr Weiertrass (als das Kriterium der Endlichkeit) seiner Theorie zu Grunde gelegt. Vorlesungen im S. S. 1872.

$$a_{1+n_1+\ldots+n_{\varkappa-1}+1}+a_{1+n_1+\ldots+n_{\varkappa-1}+2}+\ldots+\\+a_{1+n_1+\ldots+n_{\varkappa}}>\varepsilon$$

wobei $\varkappa$ eine beliebige Anzahl bedeutet.

Daraus erkennt man aber sofort, dass es dann für die betrachtete Folge keine Zahl g geben könnte, wie sie Eingangs charakterisiert ist; denn wie klein auch ε sein mag, die Anzahl $\varkappa$ kann stets so gross genommen werden, dass $\varkappa\varepsilon > g$ ist,

dann wäre aber eben

$$a_1+a_2+\ldots+a_{1+n_1+n_2+\ldots+n_{\varkappa}}>g,$$

was nach der gemachten Voraussetzung über die Folge der Zahlen a_r unmöglich ist*).

Als eine Anwendung dieses Satzes möge das Verfahren erörtert werden, durch welches ermittelt werden kann, wie oft ein genauer Theil $\frac{1}{q^{\varkappa}}$ der Einheit in $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ enthalten ist, wobei q und $\varkappa$ Anzahlen bezeichnen, $q>1$, $\varkappa \geqq 0$. Zunächst nimmt man die Anzahl m_1 so gross, dass

$$a_{m_1+1}+\ldots+a_{m_1+n}<\frac{1}{q^{\varkappa+1}}$$

ist für jede Anzahl n.

Dann ist $\sum_{\nu=m_1+1}^{\infty} a_\nu = \frac{\gamma_1}{q^{\varkappa+1}}$, $0<\gamma_1 \leqq 1$.

Nun kann genau angegeben werden, wie oft $\frac{1}{q^{\varkappa+1}}$ in der rationalen Zahl $\sum_{\nu=1}^{m_1} a_\nu$ enthalten ist; es ergibt sich eine Darstellung $\sum_{\nu=1}^{m_1} a_\nu = \frac{b_1}{q^{\varkappa+1}} + \frac{\beta_1}{q^{\varkappa+1}}$, b_1 eine Anzahl, $0 \leqq \beta_1 < 1$. Bringt man jetzt b_1 auf die Form $b_1 = c_\varkappa q + g_1$, so

*) Wie mir mitgetheilt wird, hat diese Schlussweise auch Herr J. Tannery im § 24 seines jüngst erschienenen Buches: Introduction à la théorie des fonctions d'une variable (Paris 1886), welches mir leider bisher nicht zugänglich war, angewandt. Januar 1887.

dass die Anzahl $g_1 < q$ ist, so erhält man:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = \frac{c_\varkappa}{q^\varkappa} + \frac{g_1 + \beta_1 + \gamma_1}{q^{\varkappa+1}}$$

Ist somit $g_1 < q-1$, so weiss man, da $\beta_1 + \gamma_1 < 2$ ist, dass $\frac{1}{q^\varkappa}$ $c_\varkappa$ mal in $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ enthalten ist.

Ist aber $g_1 = q-1$, so weiss man nur, dass

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu < \frac{c_\varkappa + 1}{q^\varkappa} + \frac{1}{q^{\varkappa+1}} \text{ ist,}$$

es bleibt aber unentschieden, ob $\frac{1}{q^\varkappa}$ $c_\varkappa$ mal oder $(c_\varkappa + 1)$mal in $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ enthalten ist.

Diess zu entscheiden nehme man die Anzahl $m_2 > m_1$ so gross, dass $a_{m_2+1} + \ldots + a_{m_2+n} < \frac{1}{q^{\varkappa+2}}$ ist für jede Anzahl n. Dann ist $\sum_{\nu=m_2+1}^{\infty} a_\nu = \frac{\gamma_2}{q^{\varkappa+2}}$, $0 < \gamma_2 \leqq 1$.

Es kann leicht ermittelt werden, wie oft $\frac{1}{q^{\varkappa+2}}$ in der rationalen Zahl $\frac{\beta_1}{q^{\varkappa+1}} + \sum_{\nu=m_1+1}^{m_2} a_\nu < \frac{2}{q^{\varkappa+1}}$ enthalten ist und ergibt sich dabei eine Darstellung

$\frac{\beta_1}{q^{\varkappa+1}} + \sum_{\nu=m_1+1}^{m_2} a_\nu = \frac{b_2}{q^{\varkappa+2}} + \frac{\beta_2}{q^{\varkappa+2}}$, wobei b_2 eine Anzahl bezeichnet $< 2q$, $0 \leqq \beta_2 < 1$ ist.

Bringt mann b_2 auf die Form $b_2 = f_2 q + g_2$, wobei $f_2 \leqq 1$, $g_2 < q$ ist, so erhält man:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = \frac{c_\varkappa}{q^\varkappa} + \frac{q-1+f_2}{q^{\varkappa+1}} + \frac{g_2 + \beta_2 + \gamma_2}{q^{\varkappa+2}}$$

und bemerkt: Die gesuchte Entscheidung ist erreicht, wenn

$f_2=1$ ist, dann ist $\frac{1}{q^\varkappa}(c_\varkappa+1)$mal in $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ enthalten; ferner, wenn $f_2=0$ und $g_2<q-1$ ist, dann ist $\frac{1}{q^\varkappa}$ $c_\varkappa$ mal enthalten; sie ist aber nicht erreicht, wenn $f_2=0$ und $g_2=q-1$ ist, dann weiss man nur, dass

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu < \frac{c_\varkappa+1}{q^\varkappa} + \frac{1}{q^{\varkappa+2}}$$

ist, es bleibt aber unentschieden, ob $\frac{1}{q^\varkappa} c_\varkappa$ mal oder $(c_\varkappa+1)$ mal in $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ enthalten ist.

Nun kann man allerdings das eben beschriebene Verfahren neuerdings zur Anwendung bringen; eine Anzahl $m_3>m_2$ so gross nehmen, dass

$$a_{m_3+1} + \ldots + a_{m_3+n} < \frac{1}{q^{\varkappa+3}}$$

ist für jede Anzahl n u. s. w.

Es kann aber auch dann wieder der Fall $f_3=0$, $g_3==q-1$ eintreten, d. h. keine Entscheidung erlangt werden. In dem Ausnahmsfalle, wo sich bei fortgesetzter Anwendung des Verfahrens jedesmal $f_i=0$, $g_i=q-1$ ergibt, ist es daher auf diesem Wege unmöglich zu entscheiden, ob $\frac{1}{q^\varkappa}$ in $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ $c_\varkappa$ mal oder $(c_\varkappa+1)$mal enthalten ist.

Man kann allerdings bemerken, dass dann

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = \frac{c_\varkappa}{q^\varkappa} + \frac{q-1}{q^{\varkappa+1}} + \frac{q-1}{q^{\varkappa+2}} + \ldots \text{ in inf.} = \frac{c_\varkappa+1}{q^\varkappa} \text{ ist,}$$

aber es ist doch nicht zu vergessen, dass die Entscheidung, ob dieser Fall eintrete oder nicht, mit den angegebenen

Mitteln nicht erzwungen werden kann, ganz abgesehen von den Schwierigkeiten, welche in besonderen Fällen die Bestimmung der Anzahlen m_1, m_2 . . . bieten mag.

Graz im November 1885*).

Victor Dantscher von Kollesberg.

---

*) Das Manusscript des obigen Aufsatzes wurde dem Vereine am 17. Jänner 1887 übergeben. Das Bureau.