

Zur analytischen Darstellung der Wurzeln algebraischer Gleichungen.

Es sei

$F(x; u_1, \dots, u_n) = x^n + u_1 x^{n-1} + \dots + u_n = 0$ (1)
die betrachtete Gleichung; u_1, \dots, u_n bezeichnen n von einander unabhängige Veränderliche, welche jeden beliebigen reellen oder complexen Werth annehmen können. Die Gesamtheit aller dieser Werthesysteme heisst eine $2n$ fache Mannigfaltigkeit; ein spezielles Werthesystem

$$u_1 = a_1, \dots, u_n = a_n$$

wird als die Stelle a bezeichnet.

Nach dem Fundamentalsatze der Algebra hat die Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (2)$$

wenn a eine endliche Stelle ist, n endliche Wurzeln, die

mit x_1, \dots, x_n bezeichnet werden mögen. Unter diesen n Werthen kommen gleiche dann und nur dann vor, wenn die Discriminante $D(u_1, \dots, u_n)$ der Gleichung (1) an der Stelle a den Werth 0 erhält.

Um nun die Wurzeln der Gleichung (1) in der Umgebung der Stelle a zu betrachten, setze ich

$$x = x_a + \xi \quad u_1 = a_1 + \alpha_1, \dots, u_n = a_n + \alpha_n$$

und erhalte aus der Entwicklung von $F(x_a + \xi; a_1 + \alpha_1, \dots, a_n + \alpha_n)$ uoch Potenzen von $\xi, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Gleichung:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\xi + \left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\right)\alpha_1 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial u_n}\right)\alpha_n + \dots = 0, \quad (3)$$

in welcher die partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial u^n}$ mit Klammern versehen sind, um damit auszudrücken, dass nach der Differentiation $x = x_a, u_1 = a_1, \dots, u_n = a_n$ zu setzen ist.

Ist nun $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$, der Coefficient von ξ , von Null verschieden, oder mit anderen Worten, ist x_a eine einfache Wurzel der Gleichung (2), so gibt es eine nach ganzen positiven Potenzen der Veränderlichen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ fortschreitende Potenzreihe $\mathfrak{P}_v(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, welche sicher convergiert, so lange die absoluten Beträge $|\alpha_1|, \dots, |\alpha_n|$ eine gewisse, von Null verschiedene positive Zahl ρ nicht überschreiten und für ξ in die Gleichung (3) eingeführt, dieselbe erfüllt.

Die Begründung dafür ist in dem „Vorbereitungssatz“ enthalten, welchen Weierstrass in den Abhandlungen aus der Functionenlehre, Berlin 1886, p. 107 ff., mitgeteilt hat.

Ist somit $|D(a_1, \dots, a_n)| > 0$, in welchem Falle die Stelle a als eine reguläre bezeichnet wird, so gibt es n verschiedene Potenzreihen

$\mathfrak{P}_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \dots, \mathfrak{P}_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, welche die n Wurzeln der Gleichung (1) in einer hinreichend kleinen Umgebung der Stelle a darstellen.

Die Glieder der ersten Dimension der Reihe $\mathfrak{P}_v(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ werden aus (3) unmittelbar erhalten, indem man die linke Seite nach Einführung von

$$\xi = \sum^{(v)} c_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} \alpha_1^{\lambda_1} \alpha_2^{\lambda_2} \dots \alpha_n^{\lambda_n}$$

$$\lambda_1 = 0.1.2 \dots \infty, \quad \lambda_2 = 0.1.2 \dots \infty, \dots, \quad \lambda_n = 0.1.2 \dots \infty$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n > 0$$

auf die Glieder 1. Dimension beschränkt.

Die Reihe hat somit die Form:

$$\mathfrak{P}_v(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)} \alpha_1 - \dots - \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial u_n}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)} \alpha_n + \dots \quad (4)$$

Beschränkt man sodann die linke Seite von (3) auf die Glieder 2. Dimension, so ergeben sich die Coefficienten

$$c_{\lambda_1}, \dots, c_{\lambda_n}$$

in welchem $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 2$ ist u. s. w.

Dabei ist wohl zu beachten, dass die Entwicklung dieser Potenzreihen die Kenntnis der n Wurzeln der Gleichung (2) voraussetzt; man wird daher mit Recht die Frage aufwerfen, was ist durch die vorangehende Betrachtung für die analytische Darstellung der Wurzeln der Gleichung (1) an irgend einer Stelle u gewonnen?

Die Beantwortung dieser Frage, welche der Zweck dieses Aufsatzes ist, besteht in Folgendem:

Ist $u_1 = b_1, \dots, u_n = b_n$ eine von der Stelle a verschiedene reguläre Stelle b , also $|D(b_1, \dots, b_n)| > 0$, so werden, wie eben gezeigt worden ist, die Wurzeln der Gleichung (1) in einer hinreichend kleinen Umgebung der Stelle b durch n Potenzreihen

$$\begin{aligned} & \mathfrak{D}_1(u_1 - b_1, u_2 - b_2, \dots, u_n - b_n), \\ & \dots \mathfrak{D}_n(u_1 - b_1, u_2 - b_2, \dots, u_n - b_n) \end{aligned}$$

dargestellt.

Wenn sich nun zeigen lässt, dass diese Potenzreihen durch den bekannten Process der Fortsetzung aus den Potenzreihen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_n$ erhalten werden können, so lässt sich daraus in der That eine Methode ableiten (die allerdings zunächst nur ein theoretisches Interesse bietet), um zu einer analytischen Darstellung der Wurzeln der Gleichung (1) an jeder regulären Stelle u zu gelangen. Dieselbe besteht darin,

dass man für die Wurzeln x_1, \dots, x_n irgend welche n von einander verschiedene Zahlen r_1, r_2, \dots, r_n nimmt; alsdann sind die Coefficienten a_1, \dots, a_n der Gleichung (2) durch die bekannten elementarsymmetrischen Functionen der Grössen r_1, \dots, r_n bestimmt, es ist

$$\begin{aligned} a_1 &= -(r_1 + r_2 + \dots + r_n) & a_2 &= r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + \\ & & & + r_{n-1} r_n, \dots \\ \dots a_n &= (-1)^n r_1 r_2 \dots r_n \end{aligned}$$

An einer so gewählten regulären Stelle a sind somit auch die n Potenzzeichen

$$\begin{aligned} & \mathfrak{P}_1(u_1 - a_1, u_2 - a_2, \dots, u_n - a_n), \dots \\ & \dots \mathfrak{P}_n(u_1 - a_1, u_2 - a_2, \dots, u_n - a_n). \end{aligned}$$

welche die Wurzeln der Gleichung (1 in der Umgebung der Stelle a darstellen, vollkommen gegeben, und handelt es sich somit nur darum, zu zeigen, dass aus diesen Potenzreihen die Potenzreihen $\mathfrak{Q}_1, \dots, \mathfrak{Q}_n$ durch Fortsetzung erhalten werden können.

Hiezu ist zunächst erforderlich, einen stetigen Uebergang von der Stelle a zur Stelle b anzugeben, auf welchem keine singuläre Stelle d. h. kein Punkt des Gebildes von $2n-2$ Dimensionen $D(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$ liegt.

Von dem einfachsten Uebergange von a nach b , wie er durch die Gleichungen:

$$u_1 = a_1 + (b_1 - a_1)t, \dots, u_n = a_n + (b_n - a_n)t$$

dargestellt wird, wenn die reelle Veränderliche t das Intervall $0 \leq t \leq 1$ durchläuft, kann diess im Allgemeinen nicht behauptet werden, denn es gibt offenbar von a verschiedene reguläre Stellen b , für welche die Gleichung

$$D(a_1 + (b_1 - a_1)t, \dots, a_n + (b_n - a_n)t) = 0$$

eine reelle Wnrzel im Intervalle $0 \leq t \leq 1$ hat.

Wohl aber lässt sich zeigen, dass man der Veränderlichen λ stets unendlich viele solche Werthe geben kann, dass auf dem Wege

$$u_1 = a_1 + c_1 t, \dots$$

$$u_{n-1} = a_{n-1} + c_{n-1}t, u_n = a_n + (c_n + \lambda)t - \lambda t^2 \quad (5)$$

$$c_\nu = b_\nu - a_\nu \quad (\nu = 1.2. \dots n) \quad 0 \leq t \leq 1$$

keine singuläre Stelle liegt, d. h. die Gleichung

$$D(a_1 + c_1 t, \dots, a_{n-1} + c_{n-1}t, a_n + (c_n + \lambda)t - \lambda t^2) = 0 \quad (6)$$

keine reelle Wurzel im Intervalle $0 \leq t \leq 1$ hat.

Um diese Behauptung zu begründen, denke ich mir die linke Seite der Gleichung (6 nach Potenzen von t geordnet in der Form:

$$C_0(\lambda)t^m + C_1(\lambda)t^{m-1} + \dots + C_m = 0 \quad (7)$$

Berücksichtigt man die Glieder $(-1)^{n-1}(n-1)^{n-1} u_1^n u_n^{n-1}$ und $n^n u_n^{n-1}$ von $D(u_1, \dots, u_n)$, so ersieht man leicht, dass $m=3n-4$ ist (worauf es übrigens hier nicht ankommt) und dass $C_0(\lambda), \dots, C_{m-1}(\lambda)$ ganze Functionen von λ sind, deren Grad höchstens $n-1$ ist und deren Coefficienten ganze ganzzahlige Functionen der Grössen $a_1, a_2, \dots, a_n; c_1, c_2, \dots, c_n$ sind.

$C_0(\lambda)$ insbesondere ist vom Grade $n-2$, $C_0(\lambda)+C_1(\lambda)+\dots+C_{m-1}(\lambda)$ und C_m sind von λ unabhängig.

Hätte nun die Gleichung (7 für jeden Werth von λ eine reelle Wurzel im Intervalle $0 \leq t \leq 1$, so müssten die beiden Gleichungen, die sich ergeben, wenn man die linke Seite der Gleichung (6 nach Einführung von

$$\lambda = \lambda' + i\lambda'' \quad a_v = a_v' + ia_v'' \quad c_v = c_v' + ic_v'' \\ v = 1.2. \dots n$$

auf die Form

$$G(\lambda', \lambda'', t) + iH(\lambda', \lambda'', t)$$

bringt (wobei G und H reelle ganze Functionen der reellen Veränderlichen λ', λ'', t sind), somit die beiden Gleichungen $G(\lambda', \lambda'', t) = A_0(\lambda', \lambda'')t^m + A_1(\lambda', \lambda'')t^{m-1} + \dots + A_m = 0$ (8) $H(\lambda', \lambda'', t) = B_0(\lambda', \lambda'')t^m + B_1(\lambda', \lambda'')t^{m-1} + \dots + B_m = 0$, (9) in welchen A_m und B_m von λ', λ'' unabhängig sind und nicht beide zugleich verschwinden können, ebenso wie die Summen

$$A_0(\lambda', \lambda'') + A_1(\lambda', \lambda'') + \dots + A_{m-1}(\lambda', \lambda'') + A_m \text{ und} \\ B_0(\lambda', \lambda'') + B_1(\lambda', \lambda'') + \dots + B_{m-1}(\lambda', \lambda'') + B_m,$$

für jedes reelle Werthepaar λ', λ'' eine reelle Wurzel t im Intervalle $0 \leq t \leq 1$ gemeinsam haben.

Wenn man daher den reellen Veränderlichen λ', λ'' solche Werthe $\bar{\lambda}', \bar{\lambda}''$ geben kann, für welche die beiden Gleichungen (8 und (9 überhaupt keine gemeinsame Wurzel haben, so hat für einen solchen Werth $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}' + i\bar{\lambda}''$ die Gleichung (6 sicher keine reelle Wurzel im Intervalle $0 \leq t \leq 1$ und wird somit durch die Gleichungen (5 für $\lambda = \bar{\lambda}$ ein stetiger Uebergang von der Stelle a nach der Stelle b dargestellt, auf dem keine singuläre Stelle liegt.

Diess ist aber immer und zwar auf unendlich mannigfaltige Art möglich, wenn nur die Resultante nach t der beiden Functionen $G(\lambda', \lambda'', t)$ und $H(\lambda', \lambda'', t)$ nicht identisch verschwindet, d. h. für alle Werthepaare λ', λ'' den Werth Null hat.

Dass dieser Umstand nicht eintritt, lässt sich, wie folgt, erkennen:

Zerlegt man die Functionen $G(\lambda', \lambda'', t)$ und $H(\lambda', \lambda'' t)$ in ihre irreductiblen Factoren

$$G = G_1^{m_1} G_2^{m_2} \dots G_p^{m_p}$$

$$H = H_1^{n_1} H_2^{n_2} \dots H_q^{n_q}$$

in der Art, wie dies Herr Kronecker im 94. Bande, p. 344 ff., des von ihm und Herru Weierstrass redigierten Journals gezeigt hat, so kann keiner dieser Factoren von t unabhängig sein, d. h. nur die Veränderlichen λ' und λ'' enthalten, weil die Grössen A_m und B_m von λ' und λ'' unabhängig sind.

Die Resultante von G und H zerfällt dabei in Factoren, welche sämmtlich Resultanten irgend einer Function G_p und einer Function H_q sind, und kann offenbar nicht identisch verschwinden, wenn nicht wenigstens eine dieser letzteren Resultanten identisch verschwindet.

Wenn aber die Resultante von G_p und H_q identisch verschwindet, so folgt daraus nothwendig, dass die beiden Functionen G_p und H_q bis auf einen von den Veränderlichen λ', λ'', t unabhängigen Factor selbst identisch sind, denn es besteht dann eine Identität von der Form:

$$h_q(\lambda', \lambda'', t) G_p(\lambda', \lambda'', t) - g_p(\lambda', \lambda'', t) H_q(\lambda', \lambda'', t) = 0,$$

wobei, wenn μ_p und ν_q die Grade der Functionen G_p und H_q in t bezeichnen, der Grad von h_q in t $\nu_q - 1$, der von g_p $\mu_p - 1$ ist, und g_p und h_q ganze Functionen von λ', λ'', t sind.

Die Resultante nach t der Functionen $G(\lambda', \lambda'', t)$ und $H(\lambda', \lambda'', t)$ verschwindet somit nur dann identisch, wenn diese beiden Functionen einen gemeinsamen Factor $\Theta(\lambda', \lambda'', t)$ haben, der eine ganze Euncticn von λ', λ'', t ist, von der wir wissen,

dass sie nicht von t unabhängig sein kann, weil A_{in} und B_{in} von λ' , λ'' unabhängig sind.

Es lässt sich auch leicht zeigen, dass $\Theta(\lambda', \lambda'', t)$ nicht von λ' und λ'' unabhängig sein kann.

Wäre nämlich diess der Fall, so gäbe es Werthe von t , die Wurzeln der Gleichung $\Theta=0$, für welche

$D(a_1 + c_1 t, \dots, a_{n-1} + c_{n-1} t, a_n + (c_n + \lambda)t - \lambda t^2)$ den Werth 0 erhält, welchen Werth man auch dem λ geben mag. Betrachtet man aber die Entwicklung der vorstehenden Discriminante nach Potenzen von λ :

$$D(a_1 + c_1 t, \dots, a_{n-1} + c_{n-1} t, a_n + (c_n + \lambda)t - \lambda t^2) = (10) \\ (D) + \lambda t(1-t) \left(\frac{\partial D}{\partial u_n} \right) + \frac{1}{2!} \lambda^2 t^2 (1-t)^2 \left(\frac{\partial^2 D}{\partial u_n^2} \right) + \dots \\ + \frac{1}{(n-1)!} \lambda^{n-1} t^{n-1} (1-t)^{n-1} \left(\frac{\partial^{n-1} D}{\partial u_n^{n-1}} \right),$$

wobei durch die Einklammerung von $D \frac{\partial D}{\partial u_n}$ u. s. w. wieder

angedeutet ist, dass in den Functionen $D(u_1, u_2, \dots, u_n)$,

$\frac{\partial D(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_n}$ u. s. w. $u_1 = a_1 + c_1 t, \dots, u_n = a_n + c_n t$

zu setzen ist, so erkennt man, dass ein solcher Werth von

t nur 0 oder 1 sein kann, da $\frac{\partial^{n-1} D}{\partial u_n^{n-1}} = (n-1)! n^n$ ist. Die

Werthe 0 und 1 von t sind aber ausgeschlossen durch die Annahmen, dass a und b reguläre Stellen sind, d. h.

$$|D(a_1, \dots, a_n)| > 0 \text{ und } |D(b_1, \dots, b_n)| > 0.$$

Ein gemeinsamer Factor $\Theta(\lambda', \lambda'', t)$ der Functionen $G(\lambda', \lambda'', t)$ und $H(\lambda', \lambda'', t)$ ist somit eine ganze Function von λ', λ'', t , deren Grad in t und mindestens in einer der beiden Veränderlichen λ' und λ'' von 0 verschieden ist. Einen solchen gemeinsamen Factor können aber die Functionen G und H nicht haben.

Wäre nämlich

$$G(\lambda', \lambda'', t) = g(\lambda', \lambda'', t) \Theta(\lambda', \lambda'', t)$$

$$H(\lambda', \lambda'', t) = h(\lambda', \lambda'', t) \Theta(\lambda', \lambda'', t),$$

wobei g und h ganze Functionen von λ', λ'', t bezeichnen, so würde daraus folgen:

$$D(a_1 + c_1 t, \dots a_{n-1} + c_{n-1} t, a_n + (c_n + \lambda)t - \lambda t^2) = \quad (11) \\ [g(\lambda', \lambda'', t) + i h(\lambda' \lambda'', t)] \Theta(\lambda', \lambda'', t)$$

und gäbe es somit für jeden speciellen Werth t_0 von t , für welchen nur $\Theta(\lambda', \lambda'', t_0)$ nicht von λ' und λ'' unabhängig ist, (und solche Werthe t_0 gibt es sicher beliebig viele, da $\Theta(\lambda', \lambda'', t)$ nicht von λ' und λ'' unabhängig ist) unendlich viele Werthesysteme λ'_0, λ''_0 und somit auch unendlich viele Werthe $\lambda_0 = \lambda'_0 + i \lambda''_0$, für welche die Gleichung

$$D(a_1 + c_1 t_0, \dots a_{n-1} + c_{n-1} t_0, a_n + (c_n + \lambda)t_0 - \lambda t_0^2) = 0$$

deren Grad in λ gleich $n-1$ ist, erfüllt wäre.

Offenbar gilt diess auch dann, wenn die Function $\Theta(\lambda', \lambda'', t_0)$ nur eine der beiden Veränderlichen λ', λ'' enthält, z. B. λ' ; dann gibt es allerdings nur eine endliche Anzahl von Wurzeln der Gleichung $\Theta(\lambda', \lambda'', t_0) = 0$, aber jede derselben kann mit jedem beliebigen Werthe von λ'' combinirt werden.

Daraus würde folgen, dass für $t = t_0$ auf der rechten Seite der Gleichung (10) die sämmtlichen Coefficienten der Potenzen von λ verschwinden müssen; dass es aber solche Werthe t_0 nicht gibt, wurde bereits bemerkt.

Damit ist nun in der That, wie ich glaube, zur völligen Evidenz gebracht, dass es unendlich viele Werthe $\bar{\lambda}$ von λ gibt, für welche die Resultante nach t der Functionen $G(\lambda', \lambda'', t)$ und $H(\lambda', \lambda'', t)$ einen von 0 verschiedenen Werth erhält, für welche somit sicher die Gleichung (6) keine reelle Wurzel hat, so dass auf dem Wege von a nach b der für $\lambda = \bar{\lambda}$ durch die Gleichungen (5) dargestellt wird, keine singuläre Stelle liegt.

Es bleibt jetzt noch zu zeigen, dass auf jedem solchen Wege aus einer Potenzreihe $\mathfrak{P}_v(u_1 - a_1, \dots u_n - a_n)$, welche in einer gewissen Umgebung der Stelle a convergirt und eine Wurzel der Gleichung (1) darstellt, durch Fortsetzung eine Potenzreihe $\bar{\mathfrak{Q}}_v(u_1 - b_1, \dots u_n - b_n)$ abgeleitet werden kann, welche in einer hinreichend kleinen Umgebung der Stelle b

convergiert und in derselben eine Wurzel der Gleichung (1) darstellt.

Dabei möge noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass der Uebergang von a nach b , der durch die Gleichungen (5) dargestellt wird, wohl zu unterscheiden ist von der Gesamtheit der Stellen, welche in den Formeln

$$u_1 = a_1 + c_1 t_1, \dots u_{n-1} = a_{n-1} + c_{n-1} t_{n-1} \\ u_n = a_n + (c_n + \lambda) t_n - \lambda t_n^2$$

enthalten sind, wenn t_1, \dots, t_n von einander unabhängige reelle Veränderliche sind, deren jede das Intervall $(0, 1)$ durchläuft.

Bei dem hier betrachteten Uebergange von a nach b entspricht jedem Punkte einer der Strecken a_ν, b_ν ($\nu=1, 2 \dots n$) ein ganz bestimmter Punkt auf jeder der übrigen Strecken a_{ν_1}, b_{ν_1} , wofern c_ν und c_{ν_1} von 0 verschieden sind.

Um nun die Möglichkeit der Fortsetzung festzustellen, sei Folgendes bemerkt.

Ist t' eine Zahl im Intervalle $0 \leq t' \leq 1$, so ist, wenn

$$u_1' = a_1 + c_1 t', \dots u_{n-1}' = a_{n-1} + c_{n-1} t' \\ u_n' = a_n + (c_n + \bar{\lambda}) t' - \bar{\lambda} t'^2$$

gesetzt wird, $|D(u_1', \dots, u_n')| > 0$.

Sind h_1, \dots, h_n von einander unabhängige complexe Veränderliche, so wird durch die Formeln

$$u_1 = u_1' + h_1, \dots u_n = u_n' + h_n$$

eine Umgebung der Stelle u' „vom Radius r “ dargestellt — nach einem von H. Weierstrass in den Vorlesungen, S. S. 1872 gebrauchten Ausdrucke — wenn

$$|h_1| < r, \dots |h_n| < r \text{ ist.}$$

Es lässt sich nun eine positive Zahl r so klein angeben, dass in der Umgebung jeder Stelle u' — d. h. für alle Werthe von t' im Intervalle $0 \leq t' \leq 1$ — vom Radius r , keine singuläre Stelle liegt.

In der Entwicklung

$$D(u_1' + h_1, \dots, u_n' + h_n) = D(u_1', \dots, u_n') + h_1 \left(\frac{\partial D}{\partial u_1} \right)' + \dots$$

$$+ h_n \left(\frac{\partial D}{\partial u_n} \right)' + \dots + \frac{1}{x_1! \dots x_n!} h_1^{x_1} \dots h_n^{x_n} \left(\frac{\partial^{x_1 + \dots + x_n} D}{\partial h_1^{x_1} \dots \partial h_n^{x_n}} \right)' + \dots (x_1 + \dots + x_n \leq 2n = 2)$$

in welcher durch die accentuirteten Klammern angedeutet werden soll, dass in den betreffenden partiellen Ableitungen der Function $D(u_1, \dots, u_n)$ $u_1 = u'_1, \dots, u_n = u'_n$ zu setzen ist, ist das Anfangsglied $D(u'_1, \dots, u'_n)$ eine ganze Function von t' und für alle in Betracht kommenden Werthe von t' von 0 verschieden. Es gibt daher für $D(u'_1, \dots, u'_n)$ im Intervalle $0 \leq t' \leq 1$ ein von Null verschiedenes Minimum m .

Ebenso gibt es für die absoluten Beträge der ganzen Functionen $\frac{1}{x_1! \dots x_n!} \left(\frac{\partial^{x_1 + \dots + x_n} D}{\partial u_1^{x_1} \dots \partial u_n^{x_n}} \right)'$ von t' im Intervalle $0 \leq t' \leq 1$ ein endliches Maximum \mathfrak{M} .

Beschränkt man somit die absoluten Beträge von h_1, h_2, \dots, h_n so, dass

$$m > \mathfrak{M} [(|h_1| + \dots + |h_n|) + (|h_1| + \dots + |h_n|)^2 + \dots],$$

was sicher erreicht ist, wenn man für $r = \frac{1}{n} \frac{m}{\mathfrak{M} + m}$

$|h_1| < r, \dots, |h_n| < r$ macht, so kann man in der That behaupten, dass in der Umgebung vom Radius r einer jeden Stelle u' keine singuläre Stelle liegt.

Diess vorausgeschickt erkennt man die Möglichkeit der Fortsetzung durch folgende Ueberlegung.

Um auf dem betrachteten Wege von a nach b eine Stelle u'' so nahe an u' zu bestimmen, dass u'' in der Umgebung vom Radius r der Stelle u' liegt, hat man, wenn $u''_1 = a_1 + c_1(t' + t), \dots$

$$u''_{n-1} = a_{n-1} + c_{n-1}(t' + t)$$

$$u''_n = a_n + (c_n + \bar{\lambda})(t' + t) - \bar{\lambda}(t' + t)^2$$

gesetzt wird, die positive Zahl t so klein anzunehmen, dass

$$|c_1|t < r, \dots, |c_{n-1}|t < r, \quad |c_n + (1 - 2t - t)\bar{\lambda}|t < r$$

ist. Die letzte Forderung ist für alle Werthe von t' sicher erfüllt, wenn $[|c_n + (1 + t)\bar{\lambda}|]t < r$ gemacht wird; für die-

jenigen Grössen c_v , welche gleich 0 sind, sind diese Bedingungen von selbst erfüllt ($v < n$).

Nunmehr kann man als erste vermittelnde Stelle für die Transformation der Reihe $\mathfrak{P}_v(u_1 - a_1, \dots, u_n - a_n)$, welche nach einem bekannten Satze sicher in der Umgebung vom Radius r der Stelle a convergiert, die Stelle a' , deren Coordinanten

$$\begin{aligned} a'_1 &= a_1 + c_1 t, \dots, a'_{n-1} = a_{n-1} + c_{n-1} t, \\ a'_n &= a_n + (c_n + \bar{\lambda}) t - \bar{\lambda} t^2 \end{aligned}$$

sind, wählen.

Setzt man dann in $\mathfrak{P}_v u_v - a_v = (u_v - a'_v) + (a'_v - a_v)$ $v=1, 2, \dots, n$, so lässt sich das Resultat in eine Potenzreihe $\mathfrak{P}_v^{(1)}(u_1 - a'_1, u_2 - a'_2, \dots, u_n - a'_n)$ verwandeln, von der man weiss, dass sie sicher in der Umgebung der Stelle a' vom Radius r convergiert und eine Wurzel der Gleichung

$$F(x; u_1 \dots u_n) = 0$$

darstellt.

Stellt man nämlich $F(\mathfrak{P}_v; u_1, \dots, u_n)$ als eine Potenzreihe $P_v(u_1 - a_1, \dots, u_n - a_n)$ dar und wendet auf diese dieselbe Transformation an, durch welche \mathfrak{P}_v in $\mathfrak{P}_v^{(1)}$ übergeht, so erhält man eine Potenzreihe $P_v^{(1)}(u_1 - a'_1, \dots, u_n - a'_n)$, welche in der Umgebung der Stelle a' vom Radius r sicher convergiert und den Werth 0 hat. Diese Reihe ist aber nach dem Vorgange bei der Transformation identisch mit derjenigen, welche sich ergibt, wenn man $F(\mathfrak{P}_v^{(1)}, u_1, \dots, u_n)$ als Potenzreihe von $u_1 - a'_1, \dots, u_n - a'_n$ darstellt.

Liegt nun die Stelle b bereits in der Umgebung der Stelle a' vom Radius r , so ist das Ziel erreicht; ist diess nicht der Fall, so wird man eine zweite vermittelnde Stelle a'' mit den Coordinaten

$$\begin{aligned} a''_1 &= a'_1 + c_1 t, \dots, a''_{n-1} = a'_{n-1} + c_{n-1} t, a''_n = a'_n + \\ & [c_n + (1 - 3t)\bar{\lambda}] t \end{aligned}$$

wählen.

Setzt man dann wiederum in $\mathfrak{P}_v^{(1)} u_v - a'_v = (u_v - a''_v) + (a''_v - a'_v)$, so ergibt sich eine Potenzreihe $\mathfrak{P}_v^{(2)}(u_1 - a''_1, \dots, u_n - a''_n)$, welche sicher in der Umgebung der Stelle a''

vom Radius r convergiert und eine Wurzel der Gleichung $F(x; u_1, \dots, u_n) = 0$ in derselben darstellt.

In dieser Art kann man nun offenbar fortfahren, bis man zu einer vermittelnden Stelle a mit den Coordinaten

$$a_1 = a_1 + c_1 \kappa t, \dots, a_{n-1} = a_{n-1} + c_{n-1} \kappa t$$

$$a_n = a_n + (c_n + \bar{\lambda}) \kappa t - \bar{\lambda} (\kappa t)^2$$

gelangt, von der man behaupten kann, dass die zu erreichende Stelle b sicher in der Umgebung vom Radius r der Stelle a liegt.

Diess tritt offenbar dann gewiss ein, wenn $0 \leq 1 - \kappa t < t$ geworden ist, oder $\frac{1}{t} - 1 < \kappa \leq \frac{1}{t}$ ist, also κ die grösste ganze Zahl erreicht hat, welche in $\frac{1}{t}$ enthalten ist.

Es ist somit in der That möglich, auf dem angegebenen Wege von a nach b aus den Potenzreihen

$\mathfrak{P}_1(u_1 - a_1, \dots, u_n - a_n), \dots, \mathfrak{P}_n(u_1 - a_1, \dots, u_n - a_n)$
Potenzreihen

$\bar{\mathfrak{Q}}_1(u_1 - b_1, \dots, u_n - b_n), \dots, \bar{\mathfrak{Q}}_n(u_1 - b_1, \dots, u_n - b_n)$
abzuleiten, welche in der Umgebung der Stelle b vom Radius r sicher convergieren und der Gleichung $F(x; u_1, \dots, u_n) = 0$ in derselben genügen.

Da aus diesen letzteren Reihen umgekehrt auch wieder die Reihen $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n$ abgeleitet werden können, so sind die Reihen $\bar{\mathfrak{Q}}_1, \dots, \bar{\mathfrak{Q}}_n$ von einander verschieden, somit mit den Reihen $\mathfrak{Q}_1, \dots, \mathfrak{Q}_n$, durch welche in der Umgebung der Stelle b die n Wurzeln der Gleichung $F(x; u_1, \dots, u_n) = 0$ dargestellt werden, in irgend einer Ordnung identisch.

Um von dem hier benützten Uebergange von a nach b ein geometrisches Bild zu geben, stellt man jede der Veränderlichen u_1, \dots, u_n in einer eigenen Zahlenebene in gewohnter Weise dar.

Dann werden die Wege der Veränderlichen u_1, \dots, u_{n-1}

durch die geradlinigen Strecken $a_1 b_1, \dots, a_{n-1} b_{n-1}$ dargestellt; fällt der Punkt b_v mit a_v zusammen, so reduciert sich die Strecke $a_v b_v$ eben auf den Punkt a_v .

Der Weg, den die Veränderliche u_n von a_n nach b_n beschreibt, ist, wenn $|a_n - b_n| > 0$ ist, ein parabolischer Bogen, der durch die Punkte $a_n, a_n + \frac{c_n}{2} + \frac{\bar{\lambda}}{4}, b_n$ hindurchgeht; der Punkt $a_n + \frac{c_n}{2} + \frac{\bar{\lambda}}{4}$ ist der Pol der Sehne $a_n b_n$.

Ist $a_n = b_n$, so reduciert er sich auf die hin und zurück zu durchlaufende geradlinige Strecke vom Punkte a_n nach dem Punkte $a_n + \frac{\bar{\lambda}}{4}$.

Dass sich noch mannigfaltig andere Wege mit denselben wesentlichen Eigenschaften angeben lassen, bedarf wohl kaum der Erwähnung.

Graz im December 1886.

Victor Dantscher von Kollesberg.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Berichte des naturwissenschaftlichen-medizinischen Verein Innsbruck](#)

Jahr/Year: 1887

Band/Volume: [17](#)

Autor(en)/Author(s): Dantscher v. Kollesberg R.

Artikel/Article: [Zur analytischen Darstellung der Wurzeln algebraischer Gleichungen. 6-18](#)