Zur Collineation der Grundgebilde zweiter Stufe.

Die Frage, ob und wie zwei beliebige collineare Grundgebilde zweiter Stufe durch fortgesetztes Projicieren und Schneiden auseinander abgeleitet werden können, ist noch wenig in Erwägung gezogen worden. Es genügt den Fall zweier collinearer ebener Systeme zu betrachten. Zunächst soll untersucht werden, unter welchen Umständen zwei solche Systeme Σ und Σ', in zwei verschiedenen Ebenen E und E', perspectivisch zu einem und demselben dritten ebenen Systeme Σ'' sind, dessen Träger mit E'' bezeichnet werde.

Wenn Σ und Σ'' perspectivisch sind, so gehen die Verbindungsgeraden je zweier entsprechender Punkte P und P'' durch einen und denselben Punkt O, das Centrum der Projection; ebenso gehen, wenn Σ'' auch zu Σ' perspectivisch ist, die sämmtlichen Geraden P'P'', welche einen Punht P' von Σ' mit dem ihm entsprechenden P'' in Σ'' verbinden, durch einen und denselben Punkt O'.

Um somit unter der Voranssetzung, dass Σ und Σ' perspectivisch zu Σ'' sind, zu irgend einem Punkte P von Σ den entsprechenden P' in Σ' zu konstruieren, hat man den Schnittpunkt P'' der Geraden OP und der Ebene E'' mit dem Centrum O' durch eine Gerade zu verbinden;

der Schnittpunkt dieser Geraden $O'P''$ mit der Ebene E' ist der gesuchte Punkt P'. Fällt nun insbesondere P in den Schnittpunkt $EE'E''$ der drei Ebenen E, E' und E'', so fallen offenbar auch P'' und P' mit ihm zusammen, d. h. also:

I. Die Systeme Σ und Σ', welche perspectivisch zu einem und demselben ebenen Systeme Σ'' sind, haben nothwendig einen Punkt entsprechend gemein.

Zwei collineare ebene Systeme können demnach im Allgemeinen nicht zu einem und demselben dritten Systeme in perspectivische Beziehung gesetzt werden; es ist vielmehr dazu erforderlich, dass sie wenigstens einen Punkt entsprechend gemein haben, und soll nun gleich gezeigt werden, wie unter dieser Voraussetzung Systeme Σ'' gefunden werden können, welche sowohl zu Σ als zu Σ' perspectivisch sind.

Bezeichnet man die Schnittlinie der Ebenen E und E' als eine Gerade von Σ mit c, als eine Gerade von Σ' mit d' und die entsprechenden Geraden in Σ' beziehungsweise in Σ mit c' und d, so fällt, wenn Σ und Σ' einen Punkt entsprechend gemein haben, ein Punkt von c mit seinem entsprechenden, der nothwendig ein Punkt von c' ist, zusammen, folglich ist der Schnittpunkt der Geraden c und c' ein sich selbst entsprechender Punkt.

Dasselbe gilt vom Schnittpunkte der Geraden d und d'.

Haben die Systeme Σ und Σ' nur einen Punkt entsprechend gemein, so fallen demnach die Punkte cc' und dd' in einen zusammen. Haben aber Σ und Σ' mehr als einen Punkt entsprechend gemein, so fällt c' mit c und d' mit d zusammen. Die Schnittlinie der Ebenen E und E' ist alsdann der Träger zweier projectivischer Punktreihen; dieselben haben zwei reelle oder imaginäre Doppelpunkte, die beiden sich selbst entsprechenden Punkte von

Σ und Σ', oder sie haben alle Punkte entsprechend gemein, wenn nämlich Σ und Σ' sich in perspectivischer Lage befinden.

Es möge nun zunächst der Fall betrachtet werden, dass die Systeme Σ und Σ' perspectivisch zu Σ'' sind und nur einen Punkt entsprechend gemein haben. Sind dann A, A′, A″ die Schnittpunkte der Geraden OO′, welche die beiden Projectionscentra verbindet, mit den Ebenen E, E′, E″, so erhellt sofort, dass A und A′ ein Paar entsprecheuder Punkte von Σ und Σ' sind, und dass sich je zwei entsprechende Strahlen der projectivischen Strahlbüschel aus den Scheiteln A und A′ auf der Schnittlinie der Ebenen E und E′ schneiden müssen.

Aus dieser Bemerkung ergibt sich die Construction der Punkte A und A′, wenn in zwei verschiedenen Ebenen zwei beliebige collineare ebene Systeme Σ und Σ' gegeben sind, welche nur einen Punkt entsprechend gemein haben.

Bezeichnet man die unendlich fernen Geraden in Σ und Σ' mit u und v′, die ihnen entsprechenden Geraden — die sog. Fluchtlinien, — in Σ' und Σ mit h′ und g, so gilt Folgendes.

Der Geraden durch A und den Schnittpunkt gd entspricht die Gerade durch A′ und den unendlich fernen Punkt von d′, also die Parallele durch A′ zur Schnittlinie c, d′, ebenso entspricht umgekehrt der Geraden durch A′ und den Schnittpunkt c′h′ die Parallele durch A zu c, d′. Die Punkte A und A′ müssen also beziehungsweise auf den Parallelen aus den Punkten dg und c′h′ zur Schnittlinie EE′ liegen.

Ferner entspricht dem Strahle aus A nach dem Schnittpunkte cg der Strahl aus A′ parallel zu c′; diese beiden Strahlen müssen sich, wie oben erwähnt wurde, auf der Schnittlinie EE′ treffen, folglich muss A′ auf der Parallelen zu c′ aus dem Punkte cg liegen und ebenso A auf der Parallelen zu d aus dem Punkte d′h′.

Damit ist in Σ der Punkt A als Schnittpunkt der Geraden (cu, gd) und (du, d'h') gegeben, in Σ' der Punkt A' als Schnittpunkt der Geraden (d'v', c'h') und (cg, c'v'); da aber die Geraden (du, d'h') und (cg, c'v') nicht entsprechende Gerade in Σ und Σ' sind, so muss noch gezeigt werden, dass die so definierten Punkte A und A' ein Paar entsprechender Punkte in Σ und Σ' sind, und ferner, dass jedes Paar entsprechender Strahlen durch A und A' sich auf der Geraden EE' treffen.

Zu dem Ende betrachte man die Punktreihen R und R' auf c und d', welche die Schnitte der Geraden EE' mit den projectivischen Parallelstrahlenbüscheln aus den den Scheiteln gu und h'v' sind.

Dem Strahle g in Σ entspricht in Σ' die unendlich ferne Gerade v', folglich ist der Punkt cg der Gegenpunkt in der Punktreihe R und ebenso d'h' der Gegenpunkt in R'.

Der sich selbst entsprechende Punkt cd, welcher mit c'd' zusammenfällt, ist offenbar ein Doppelpunkt ϑ_1 der Reihen R und R'; dieselben haben somit noch einen zweiten reellen Doppelpunkt ϑ_2, welcher mit cd symmetrisch zum Halbierungspunkte M der Strecke [cg, d'h'] liegt.

Zieht man nun die Geraden $A\vartheta_2$ und $A'\vartheta_2$, so ist leicht zu sehen, dass dieselben beziehungsweise parallel zu g und h' sind und damit zugleich gezeigt, dass die Punkte A und A' die oben gestellten Forderungen erfüllen.

Denn es erscheinen jetzt A und A' als die Schnittpunkte von Paaren entsprechender Geraden in Σ und Σ', nämlich der Paare (gd, cu) und (v'd', c'h') einerseits, (ϑ_2, gu) und (ϑ_2, h'v') andererseits und ausserdem schneiden sich drei Paare entsprechender Strahlen der Büschel aus A und A' auf EE', nämlich die Paare: (A, gd) und (A', v'd'), (A, cd) und (A', c'd'), $A\vartheta_2$ und $A'\vartheta_2$.

Um nun ein System Σ'' zu finden, welches sowohl zu Σ als Σ' perspectivisch ist, wähle man auf der Geraden AA' zwei beliebige Punkte O und O' so, dass O nicht in E, O' nicht in E' liegt; alsdann lässt sich zeigen, dass die projectivischen Strahlenbündel $O\Sigma$ und $O'\Sigma'$, welche aus den Centren O und O' die ebenen Systeme Σ und Σ' projicieren, perspectivisch liegen, d. h. je zwei entsprechende Strahlen sich in einem Punkte ein- und derselben Ebene E'' schneiden.

Die Ebenen Oc und O'c' schneiden sich in einer Geraden c'', welche durch den sich selbst entsprechenden Punkt cd oder c'd' der Systeme Σ und Σ' geht, desgleichen die Ebenen Od und O'd' in einer Geraden d'', welche ebenfalls durch cd hindurchgeht. Die beiden Geraden c'' und d'' liegen daher in einer Ebene E'' und es lässt sich zeigen, dass je zwei entsprechende Strahlen OP und O'P' sich in einem Punkte P'' von E'' schneiden.

Bezeichnet man nämlich die Schnittpunkte der Geraden AP mit den Linien c und g mit γ und δ, so sind die entsprechenden Punkte γ' und δ' in Σ' auf der Geraden A'P' unmittelbar gegeben; δ' fällt mit γ zusammen, γ' ist der Schnittpunkt der Geraden A'δ' und c'. Man erhält daher im Schnittpunkte der Geraden Oδ und O'δ', welche die Schnittlinien der Ebenen Od und O'd' mit der Ebene OO'$\gamma\delta'$ sind, einen Punkt $\mathfrak{D}''$ von d'' und ebenso im Schnittpunkte der Geraden Oγ und O'γ', welche die Schnittlinien der Ebenen Oc und O'c' mit der Ebene OO'$\gamma\delta'$ sind, einen Punkt $\mathfrak{C}''$ von c''. Verbindet man diese beiden Punkte mit dem Punkte cc', so hat man damit die Geraden c'' und d'' verzeichnet.

Es sei bemerkt, dass die Gerade $\gamma'\delta$ die Directionsaxe der projectivischen Punktreihen auf den Geraden Aδ und A'δ' ist.

Um daher zu einem Punkte P auf Aδ den entsprechenden P' auf A'δ' zu finden, hat man nur den Schnittpunkt der Geraden A'P und $\gamma'\delta$ mit A zu verbinden; letztere Gerade schneidet die Gerade A'δ' im gesuchten Punkte P′. Die Strahlenbüschel aus O und O′, welche die projectivischen Punktreihen auf den Geraden A𝔡 und A′𝔡′ projicieren, sind perspectivisch, weil sie den Strahl OO′ entsprechend gemein haben; somit ist die Gerade ℭ″𝔇″ in der Ebene E″ ihr perspectivischer Durchschnitt und P″ als ein Punkt desselben auch nothwendig ein Punkt von E″.

Damit ist gezeigt:

II. Wenn zwei collineare ebene Systeme (in verschiedenen Ebenen) einen (und nur einen) Punkt entsprechend gemein haben, so können sie in mannigfacher Weise in perspectivische Beziehung zu einem und demselben dritten ebenen Systeme gesetzt werden.

Verlegt man insbesondere O nach A′ und O′ nach A, so fallen die Geraden c″ und d″ beziehungsweise mit c′ und d zusammen, die Ebene E″ somit mit der Ebend c′d; diese Ebene ist das Analogon zur Directionsaxe zweier projectivischer Punktreihen und könnte daher wohl als Directionsebene bezeichnet werden.

Anstatt auf der oben construierten Geraden AA′ die Punkte O (mit Ausschluss von A) und O′ (mit Ausschluss von A′) willkürlich anzunehmen, kann man auch von vorneherein die Ebene E″ durch den sich selbst entsprechenden Punkt cc′ beliebig annehmen, nur so, dass sie nicht durch die Schnittlinie EE′ hindurchgeht.

Bezeichnet man dann die Geraden EE″ mit c″, E′E″ mit d″, so ergeben die Schnittpunkte der Ebenen c′c″ und d′d″ mit der Geraden AA′ die zugehörigen Projectionscentra O und O′.

Die angegebene Construction der Punkte A und A′ verliert ihre Bedeutung, wenn die Systeme Σ und Σ′ mehr als einen Punkt entsprechend gemein haben, weil dann c′ und d mit c und d′ zusammenfallen. In dem Falle, wo Σ und Σ′ zwei (aber nicht mehr) reelle Punkte gemein haben, welche mit A, A' und B, B' bezeichnet werden mögen, ist Folgendes zu bemerken.

Sind Σ und Σ' perspectivisch zu einem dritten Systeme Σ'', so ist vor Allem klar, dass die Ebene E'', der Träger von Σ'', nicht beide sich selbst entsprechenden Punkte A, A' und B, B' enthalten kann, weil sonst alle Punkte der Geraden EE' sich selbst entsprechende Punkte von Σ und Σ' wären; nach I. muss sie aber einen dieser beiden Punkte, z. B. B, B' enthalten.

Die collineare Beziehung der Ebenen E und E' aufeinander ist dann bestimmt, wenn ausserhalb der Geraden EE' noch zwei weitere Paare von entsprechenden Punkten, etwa C, C' und D, D' festgelegt sind.

Sind O und O' wieder die Projectionscentra, aus welchen projiciert Σ und Σ' auf E'' Σ'' ergeben, so geht die Gerade OO' sicher durch den Punkt A, A', da OA und O'A' die Ebene E'' in einem und demselben Punkte A'' treffen müssen, und liegen die Linienpaare OC und O'C', OD und O'D' beziehungsweise in den Ebenen ACC' und ADD'.

Umgekehrt liegen daher die Projectionscentra O und O' nothwendig in der Schnittlinie a der Ebenen ACC' und ADD'.

Um diese Gerade a zu verzeichnen, kann man z. B. die Ebene BCC' benützen, welche die Ebene ACC' in der Geraden CC' und die Ebene ADD' in derjenigen Geraden schneidet, welche die Schnittpunkte (BC, AD) und (B'C', A'D') verbindet. Die Schnittlinien der Ebene BCC' mit den Ebenen ACC' und ADD' ergeben in ihrem Schnittpunkte offenbar einen Punkt der gesuchten Linie, von welcher ausserdem der Punkt A, A' gegeben ist.

Wählt man nun auf der Geraden a zwei beliebige Punkte O und O' — nur von A, A' verschieden — und projiciert etwa Σ aus O, Σ' aus O', so schneiden sich die Geraden OC und O'C', welche beide der Ebene ACC' angehören, in einem Punkte C'', ebenso die Geraden OD und O'D' der Ebene ADD' in einem Punkte D''.

Legt man dann durch die drei Punkte B,B', C'', D'' eine Ebene E'' — als ein Punkt derselben sei B, B' mit B'' bezeichnet — so schneidet die Gerade OO' diese Ebene in einem Punkte A'', der leicht construiert werden kann.

Verbindet man nämlich den Schnittpunkt Δ der Geraden CD und C''D'' mit B'', so erhält man die Schnittlinie t der Ebenen E und E'' und ebenso in der Geraden, welche den Schnittpunkt Δ' von C'D' und C''D'' mit B'' verbindet, die Schnittlinie t' der Ebenen E' und E''.

Ferner ergeben die Schnittpunkte von AC mit t und A'C' mit t' in ihrer Verbindungsgeraden die Schnittlinie g der Ebene ACC' mit E'' und ebenso die Schnittpunkte von AD und t und A'D' und t' in ihrer Verbindungsgeraden die Schnittlinie d der Ebenen ADD' und E''.

Der Punkt gd ist somit als gemeinsamer Punkt der Ebenen ACC', ADD' und E'' der gesuchte Schnittpunkt Schnittpunkt A'' der Geraden OO' mit E''.

Bezeichnet man nun die Projection von Σ aus O auf E'' mit Σ'', die von Σ' aus O' auf E'' mit Σ_1'', so sind Σ'' und Σ_1'' zwei collineare ebene Systeme auf demselben Träger E'' vereinigt, welche vier unabhängige Punkte A'', B'', C'', D'' entsprechend gemein haben; die beiden Ssysteme sind daher identisch, Σ'' ist sowohl zu Σ als zu Σ' perspectivisch.

Ebenso hätte man die Ebene E'' durch A, A' legen können und hätte alsdann als Ort von O und O' die Schnittlinie b der Ebenen BCC' und BDD' erhalten.

Anstatt auf der vorhin construierten Geraden a die Punkte O und O' anzunehmen, kann man auch durch B, B' eine beliebige Ebene E'' legen, welche nicht durch A, A' geht. Bezeichnet man die Schnittlinien derselben mit den Ebenen E und E' durch t und t', den Schnittpunkt von CD und t mit Δ, den von C'D' und t' mit Δ', so schneidet die Ebene $CD\Delta\Delta'$ die Gerade a im Projectionscentrum O für Σ, die Ebene $C'D'\Delta\Delta'$ die Gerade a im Projectionscentrum O' für Σ'.

Σ aus O und Σ' aus O' auf E'' projicirt, ergebeu ein und dasselbe System Σ''. Damit ist gezeigt:

III. Zwei collineare ebene Systeme, (in verschiedenen Ebenen), welche zwei (aber nicht mehr) reelle Punkte entsprechend gemein haben, können in mannigfacher Weise in perspectivische Beziehung zu einem und demselben dritten ebenen Systeme gebracht werden.

Es bleibt jetzt noch der bisher ausgeschlossene Fall zu betrachten, dass die collinearen Systeme Σ und Σ' in derselben Ebene E vereinigt liegen.

Dann haben dieselben bekanntlich stets (mindestens) einen reellen Punkt Γ, Γ' und eine reelle Gerade γ, γ' entsprechend gemein, und lässt sich zeigen, dass die beiden Systeme Σ und Σ' ebenfalls in mannigfacher Weise in perspectivische Beziehung zu einem und demselben System Σ'' gebracht werden können.

Der Fall, dass Σ und Σ' selbst schon in perspectivischer Lage sind, bleibt natürlich ausgeschlossen.

Die collineare Beziehung zwischen den Systemen Σ und Σ' ist vollkommen bestimmt, wenn ausser den sich selbst entsprechenden Elementen Γ, Γ' und γ, γ' noch zwei Paare entsprechender Punkte A, A' und B, B' (welche nicht auf einer Geraden liegen) oder noch zwei Paare entsprechender Gerader a, a' und b, b', welche nicht durch einen Punkt gehen, und zwar unabhängig von Γ, Γ' und γ, γ' angenommen werden.

Im ersten Falle z. B. kann man, um ein System Σ'' zu erhalten, welches sowoht zu Σ als Σ' in perspectivischer Beziehung steht, so verfahren.

Man wählt auf γ, γ' zwei Punkte $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ unabhängig von A, B, A', B' und Γ, Γ'.

Der Schnittpunkt der Geraden 𝔈A und 𝔈'A' sei mit A'', der der Geraden 𝔈B und 𝔈'B' mit B'' bezeichnet; die Gerade, welche Γ, Γ' mit dem Schnittpunkte (AB, A''B'') verbindet, mit 𝔠 und die Verbindungsgerade von Γ, Γ' und dem Schnittpunkte (A'B', A''B'') mit 𝔠'.

Bezeichnet man dann das System, welches jetzt aus Σ durch die Collineation hervorgeht, von welcher 𝔈, 𝔠 Centrum und Axe, A, A'' oder B, B'' ein Paar entsprechender Punkte sind, mit Σ'', das System, welches aus Σ' durch die Collineation entsteht, von welcher 𝔈', 𝔠' Centrum und Axe, A', A'' oder B', B'' ein Paar entsprechender Punkte sind, mit Σ_1'', ferner Γ, Γ' als Punkt von Σ'' und Σ''_1, mit Γ'', γ, γ' als Gerade von Σ'' und Σ''_1 mit γ'', so ist leicht zu sehen, dass die Systeme Σ'' und Σ''_1 identisch sind, da sie drei unabhängige Punkte, nämlich A'', B'', Γ'' und ausserhalb der Verbindungsgeraden derselben noch die Gerade γ'' entsprechend gemein haben.

Damit ist gezeigt, dass zwei in derselben Ebene liegende collineare ebene Systeme in mannigfacher Weise in perspectivische Beziehung zu einem dritten Systeme in derselben Ebene gebracht werden können.

Man kann somit jetzt den Satz aussprechen:

IV. Zwei collineare ebene Systeme, welche einen reellen Punkt entsprechend gemein haben, können in mannigfacher Weise durch zweimalige centrische Collineation auseinander abgeleitet werden.

Dabei ist vorausgesetzt, dass die Systeme sich nicht schon in perspectivischer Beziehung befinden, in welchem Falle jedes der beiden Systeme aus dem andern durch eine centrische Collineation abgeleitet werden kann.

Es liegt jetzt wohl sehr nahe, dass auch zwei collineare ebene Systeme Σ und Σ' (in verschiedenen Ebenen E und E'), welche keinen Punkt entsprechend gemein haben, in mannigfacher Weise durch dreimaliges Projicieren und Schneiden auseinander abgeleitet werden können. Man braucht ja nur etwa aus Σ' ein System Σ_1 abzuleiten, welches mit Σ einen Punkt entsprechend gemein hat, und zwar in folgender Weise: Sind P und P′ ein Paar entsprechender Punkte in Σ und Σ', so lege man durch P eine Ebene E_1 und wähle auf der Geraden PP′ einen von P und P′ verschiedenen Punkt O′.

Projiciert man dann das System Σ' aus dem Centrum O′ auf die Ebene E_1, so erhält man ein System Σ_1, welches mit Σ den Punkt P entsprechend gemein hat, und aus welchem daher, wie oben gezeigt wurde, durch zweimaliges Projicieren und Schneiden das System Σ abgeleitet werden kann.

Dieselbe Construction kann man offenbar auch auf zwei collineare Systeme Σ und Σ' in einer und derselben Ebene anwenden, wenn man die Aufsuchung der sich selbst entsprechenden Elemente Γ, Γ' und γ, γ' vermeiden will.

Dieses Verfahren findet sich übrigens auch schon in F. Aschieri's Geometria projettiva, 2da ed. Milano, 1888, Ulrico Hoepli, pag. 264 angegeben.

Das Resultat der Untersuchung lässt sich somit in dem Satze aussprechen:

Zwei collineare ebene Systeme (in verschiedenen Ebenen), welche keinen Punkt entsprechend gemein haben, können in mannigfacher Weise durch dreimaliges Projicieren und Schneiden aus einander abgeleitet werden.

Damit ist die Frage auch für irgend zwei collineare Grundgebilde zweiter Stufe erledigt.

Innsbruck im April 1889.

V. Dantscher v. Kollesberg.