Ueber die geometrische Bedeutung der complexen Elemente der analytischen Geometrie.

(Auszug aus dem Vortrage in der Sitzung v. 20. Februar 1890)

von Prof. Dr. O. Stolz.

Genügen zweien algebraischen Gleichungen

$$F(x, y) = 0 \qquad G(x, y) = 0,$$

worin x y cartesianische Coordinaten bedeuten mögen, die Werthe

$$x = \alpha + \beta i \qquad y = \gamma + \delta i \qquad (i = \sqrt{-1}), \qquad (1)$$

so sagt man in der analytischen Geometrie, die Curven $F = 0$ $G = 0$ haben den durch die Coordinaten (1) bestimmten complexen Punkt gemein. Zu den eigentlichen Punkten der Ebene treten also neue Punkte, die complexen, und zwar giebt es zu jedem derselben, wie (1), einen conjugirten, dessen Coordinaten

$$x = \alpha - \beta i \qquad y = \gamma - \delta i$$

sind. Bleibt man, wie es früher üblich war, bei dieser Annahme stehen, so ist der complexe Punkt nicht geometrisch definirt, er lebt bloss in den Formeln. Gegenüber dem reellen Punkte hat er nur einen Schein von Wesenheit. Trotz dieser gespensterhaften Natur ist den complexen Punkten allmälig eine wichtige Rolle in der analytischen Geometrie zugefallen.

Plücker brachte zuerst das Paar conjugirter Strahlen mit einer bestimmten Involution in Verbindung durch die folgende Bemerkung*). Bedeuten t, w reelle lineare Functionem von x y, so sind die conjugirten Ausdrücke

$$p = t - w\,i \qquad q = t + w\,i$$

Wurzeln einer quadratischen Gleichung mit reellen Conffcienten, nämlich der Gleichung

$$z^2 - 2t\,z + (t^2 + w^2) = 0.$$

Dasselbe gilt von den ebenfalls complex-conjugirten Ausdrücken

$$\frac{p}{1 + \alpha\,i} = u - v\,i \qquad \frac{q}{1 - \alpha\,i} = u + v\,i,$$

worin also auch u, v reelle lineare Functionen bedeuten. Aus den letzen Gleichungen ergiebt sich, dass

$$t = u + \alpha\,v \qquad w = v - \alpha\,u$$

und somit

$$u = \frac{t - \alpha\,w}{1 + \alpha^2} \qquad v = \frac{\alpha t + w}{1 + \alpha^2}$$

ist. Die Gleichungen $u = 0$ $v = 0$ d. i.

$$t - \alpha\,w = 0 \qquad \alpha\,t + w = 0 \tag{1a}$$

stellen bei veränderlichem α die einander zugeordneten Strahlen einer Involution dar. — Die vorstehende Bemerkung Plücker's erscheint, wie sie a. a. O. steht, kaum als etwas anderes, als ein geistreicher Einfall; sie gewinnt jedoch wie wir sehen werden, principielle Bedeutung, wenn man sie zur geometrischen Deutung der conjugirten complexen Geraden

$$t + w\,i = 0 \qquad t - w\,i = 0 \tag{2}$$

verwerthet.

Plücker hat sich die Frage nach der geometrischen Bedeutung der complexen Elemente jedoch nicht vorgelegt, sie wurde zuerst von v. Staudt in der synthetischen Geometrie aufgeworfen und vollständig gelöst, indem es ihm gelungen ist, die zwei conjugirten complexen Elemente auf geometrischem Wege von einander zu trennen. Der Vortragende übertrug 1871 die Staudt'schen Definitionen

*) System der analytischen Geometrie 1835 p. 19.

der complexen Elemente in die analytische Geometrie und zwar leistete er das durch ein einheitliches, überraschend einfaches Verfahren*).

Um eine geometrische Darstellung eines complexen Punktes der Ebene zu finden, braucht man sich nur an seinen Ausdruck durch die homogenen Coordinaten zu halten. Führt man an Stelle von x y drei Zahlen x_1 x_2 x_3 durch die Gleichungen

$$x = \frac{x_1}{x_3} \qquad y = \frac{x_2}{x_3}$$

ein, so erscheint jeder Punkt durch das Coordinatentripel x_1 x_2 x_3 bestimmt, wobei die Zahlen x_1 x_2 x_3 jedoch nicht vollkommen bestimmt sind, vielmehr eine jede noch mit einem und demselben Factor multiplicirt merden darf. Durch die Tripel x_1, x_2, 0 erscheinen dann auch die unendlich fernen oder besser uneigentlichen Punkte der Ebene dargestellt.

Legt man sich nun den complexen Punkt

$$\omega x_r = \alpha_r + \beta_r\, i \qquad (r = 1, 2, 3) \tag{3}$$

vor, so wird er auch durch das Wertsystem

$$\omega' x_r = (\varkappa + \lambda\, i)\,(\alpha_r + \beta_r\, i) = (\varkappa\alpha_r - \lambda\beta_r) + (\lambda\alpha_r + \varkappa\beta_r)\, i$$

dargestellt; denn dieses geht aus (3) dadurch hervor, dass jede der Coordinaten $\alpha_r + \beta_r\, i$ mit derselben Zahl $\varkappa + \lambda\, i$ multiplicirt wird. Demnach läst sich der complexe Punkt (3) nicht durch das Paar der reellen Punkte α, β (d. i. der Punkte mit den Coordinaten α_1 α_2 α_3 und β_1 β_2 β_3) darstellen, wol aber durch die Gesammtheit der Paare von reellen Punkten, welche durch die Coordinaten

$$\rho\xi_r = \varkappa\alpha_r - \lambda\beta_r \qquad (r = 1, 2, 3) \tag{4}$$

und

$$\sigma\eta_r = \lambda\alpha_r + \varkappa\beta_r \qquad (r = 1, 2, 3,) \tag{5}$$

bei willkürlichen Werthen von $\varkappa$, λ bestimmt sind. Die aus je einem Punkte (4) und dem zu gehörigen Punkte (5) bestehenden Paare bilden bekanntlich eine Involution

*) Vgl. Mathematische Annalen Bd. IV p. 416—441.

auf der Geraden α β und zwar eine solche ohne reelle Doppelpunkte. Sie gilt uns als die geometrische Definition des complexen Punktes (3) und des ihm conjugirten. Will man aber den ersteren von letzterem isoliren, so muss man sich die Involution in dem durch die Aufeinanderfolge der drei Punkte α, $\alpha + \mu\beta$ $(\mu > 0)$, β bestimmten Sinne beschrieben denken. Hierbei verstehen wir unter dem Punkte $\alpha + \mu\beta$ denjenigen, dessen Coordinaten $\alpha_1 + \mu\beta_1$, $\alpha_2 + \mu\beta_2$, $\alpha_3 + \mu\beta_3$ sind.

Dem complexen Punkte der Ebene steht polar die complexe Gerade derselben gegenüber. Man braucht in (3) — (5) nur die Punktcoordinaten x_r durch die homogenen Liniencoordinaten u_r zu ersetzen, um als geometrische Darstellung zweier conjugirten complexen Geraden einen *involutorischen Strahlbüschel ohne reelle Doppelstrahlen* zu erhalten. Denkt man sich diese complexen Geraden durch die Gleichungen (2) gegeben, so dass t w jetzt lineare homogene Functionen der x_1 x_2 x_3 bezeichnen, so erhält man die beide darstellende Involution einfach dadurch, dass man eine der Gleichungen (2) mit einer willkürlichen Constanten $\varkappa + \lambda i$ multiplicirt und dem Strahle, dessen Gleichung durch Nullsetzung des reellen Bestandtheiles des Productes erhalten wird, denjenigen zuordnet, dessen Gleichung die Nullsetzung des Coefficienten von i liefert. Da

$$(\varkappa + \lambda i) \quad (t + w i) = (\varkappa t - \lambda w) + (\lambda t + \varkappa w) i$$

ist, so besteht demnach die in Rede stehende Involution aus den Strahlenpaaren

$$\varkappa t - \lambda w = 0 \qquad \lambda t + \varkappa w = 0$$

bei willkürlichen $\varkappa$, λ. Sie ist, um insbesondere die Gerade $t + wi = o$ darzustellen, in dem durch die Strahlen

$$t = 0 \qquad t + \mu w = 0 \qquad (\mu > 9) \qquad w = 0$$

definirten Sinne zu beschreiben.

Auf ein dem letzten Ergebnisse ähnliches kann auch die o. mitgetheilte Bemerkung Plückers führen. Da neben den Ausdrüchen $t - w i$, $t + w i$ auch

$$\frac{t - w\,i}{1 + \alpha\,i} \qquad \frac{t + w\,i}{1 - \alpha\,i}$$

complex-conjugirt sind, so wird man zur Deutung der complexen Geraden (2) nicht allein das Paar der reellen Strahlen $t = 0$ $w = 0$ verwenden dürfen, sondern man muss dazu die Gesammtheit aller durch die Gleichungen $u = 0$ $v = 0$ d. i. (1 a) dargestellten Strahlenpaare heranziehen. Dabei sei hervorgehoben, dass auch

$$(t + w\,i)\,(1 + \alpha\,i) = (t - \alpha\,w) + (\alpha\,t + w)\,i$$

ist.

Die im Vorstehenden entwickelte Deutung der complexen Elemente ist nicht die allein mögliche, wohl aber die fruchtbarste. Namentlich vermag die analytische Verwerthung derselben der synthetischen Geometrie, welcher die complexen Elemente oft Schwierigkeiten verursachen, nützliche Dienste zu leisten. Ein ausgezeichnetes Beispiel hierzu bietet die lineale Construction von beliebig vielen Punkten eines durch einen reellen und zwei Paare complex-conjugirter Punkte bestimmten Kegelschnittes, welche der Vortragende auf analytischem Wege gefunden hat. Sie wird von Hrn. F. Spath, welcher einen analytischen und einen synthetischen Beweis zu ihr gegeben hat, in den „Monatsheften für Mathematik und Physik“ veröffentlicht werden.*)

---

*) Vgl. die inzwischen im 1. Jahrgange jener Zeitschrift erschienene Abhandlung desselben: „Lineale Construction von Kegelschnitten aus theilweise imaginären Elementen“.