© Naturwiss.-med. Ver. Innsbruck; download unter www.biologiezentrum.at

Bemerkungen zur Integral-Rechnung.

Von O. Stolz in Innsbruck.

I. Ueber Doppelintegrale und Differentialquotienten einfacher bestimmter Integrale nach einem veränderlichen Parameter.

1. Es werden hier Doppelintegrale mit constanten Grenzen

$$\int_a^b \int_{a'}^{b'} f(x, y)\, dx\, dy$$

betrachtet. Wenn die Function $f(x, y)$, die man sich als reelle oder complexe Function der reellen Veränderlichen x, y denken kann, innerhalb und an den Grenzen des Integrations-Gebietes endlich und stetig ist und dieses Gebiet selbst ganz im Endlichen liegt, so haben die Integrale

$$\int_a^b dx \int_{a'}^{b'} f(x, y)\, dy \qquad \int_{a'}^{b'} dy \int_a^b f(x, y)\, dx \qquad (1)$$

bekanntlich denselben Wert. Trifft aber eine der angegebenen Bedingungen nicht mehr zu, so können diese Ausdrücke verschiedene Grenzwerte bedeuten. Es giebt jedoch einen allgemeinen Fall, in welchem dieselben den nämlichen Wert besitzen.

© Naturwiss.-med. Ver. Innsbruck; download unter www.biologiezentrum.at

1. Satz: „Ist das Integral

$$\int_a^b f(x, y)\, dx = \Psi(y)$$

(bei beliebigen Grenzen) in dem endlichen Intervalle $y = a'$ bis $y = b'$ und an diesen Grenzen eine stetige Function von y, so ist

$$\int_{a'}^{b'} dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_{a'}^{b'} f(x, y)\, dy, \qquad (2)$$

da nun auch rechte Seite dieser Gleichung eine endliche bestimmte Grösse darstellt."

Beim Beweise dieses Satzes sind drei Fälle zu unterscheiden.

a) Die Function $f(x, y)$ sei in den endlichen Punkten des Integrations-Gebietes durchaus endlich und stetig in Beziehung auf x und y. Dann hat man nur den Fall, dass das Intervall $b - a$ unendlich ist, näher zu untersuchen. Es sei z. B. b unendlich. Bezeichnet c eine beliebig grosse, aber endliche Zahl, so ist immer noch

$$(3) \quad \int_{a'}^{b'} dy \int_a^c f(x, y)\, dx = \int_a^c dx \int_{a'}^{b'} f(x, y)\, dy.$$

Diese Gleichung gilt auch noch für $\operatorname{Lim} c = \infty$, falls nur ihre linke Seite sich einer bestimmten Grenze nähert. Es besagt dieses eben, dass der Grenzwert auf der rechten Seite von (2) existirt. Links kann man einsetzen

$$(4) \qquad \int_a^c f(x, y)\, dx = \Psi(y) + \rho(c, y),$$

wo nach Voraussetzung die Grösse $\rho(c, y)$ ihrem absoluten Betrage nach beim unbeschränkten Wachsen von c unendlich klein wird.

© Naturwiss.-med. Ver. Innsbruck; download unter www.biologiezentrum.at

Analytisch ausgedrückt: es ist immer

$$|\rho(c, y)| < \varepsilon \qquad \text{wenn nur} \quad |c| > \omega$$

genommen wird. Dabei bezeichnet ε eine beliebig kleine vorgegebene positive Zahl. Die Grösse ω hängt ausser von ε auch von y ab und wird daher besser durch $\omega(y)$ dargestellt.

Wenn man nun annehmen dürfte, dass die positive Grösse $\omega(y)$, während y das Intervall a′ bis b′ durchläuft, eine endliche obere Grenze ω_0 habe, so könnte man aus der Gleichung

$$\int_{a'}^{b'} dy \int_{a}^{c} f(x, y)\, dx = \int_{a'}^{b'} \Psi(y)\, dy + \int_{a'}^{b'} \rho(c, y)\, dy$$

sofort schliessen, dass

$$\lim_{c = \infty} \int_{a'}^{b'} dy \int_{a}^{c} f(x, y)\, dx = \int_{a'}^{b'} dy \int_{a}^{b} f(x, y)\, dx.$$

Denn ich brauchte nur c so anzunehmen, dass $|c| > \omega_0$, so wäre das zweite Glied seinem absoluten Betrage nach sicher $< \varepsilon . |b' - a'|$ d. i. beliebig klein.

Diese Annahme, an sich keineswegs selbstverständlich, wie zuerst in ähnlichen Fällen von Weierstrass bemerkt wurde — ist hier in der That zulässig. Man braucht nur zu zeigen, dass $\omega(y)$ sich mit y stetig ändert; denn dieses vorausgesetzt, erreicht $\omega(y)$ — ebenfalls nach einem Satze von Weierstrass — seine obere Grenze selbst; dieselbe kann also nicht unendlich sein.

Der Nachweis der Stetigkeit von $\omega(y)$ in Bezug auf y scheint direct nicht leicht zu führen; dagegen erkennt man sofort, dass die Annahme einer Stetigkeits-Unterbrechung in dem vorliegenden Falle überhaubt unzulässig sei. Denn würde eine *solche* bei dem Werte $y = c'$ stattfinden — so könnten Werte von c gefunden werden, so dass $|\rho(c, c')| < \varepsilon$ dagegen $|\rho(c, c' + \gamma)| > \varepsilon$ wie klein auch γ angenommen würde d. i. die Function $|\rho(c, y)|$ wäre selbst unstetig.

© Naturwiss.-med. Ver. Innsbruck; download unter www.biologiezentrum.at

Dieses widerspricht aber der Gleichung (4), welche zeigt, dass $\rho(c, y)$ also auch $|\rho(c, y)|$ für jeden bestimmten Wert von c ein stetige Function von y sei.

b) Die Function f x, y) werde längs eines Stückes der von den Punkten (b, a′) und (b, b′) begrenzten Strecke unstetig oder unendlich; wobei jetzt b als endlich angenommen ist, während a ganz beliebig gelassen wird. Nun gelten unter den hier bestehenden Voraussetzungen wieder die Gleichungen (3) und (4), wenn nur c eine zwischen a und b gelegene Zahl bedeutet, so nahe an b gewählt, als man will. Und es kann der obige Schluss wörtlich wiederholt werden; — denn die untere Grenze für die positive Grösse $\delta(y)$. welche so definirt ist, dass für alle der Bedingung $|c-b| < \delta(y)$ genügenden Werte von c $|\rho(c, y)| < \varepsilon$ sei, — kann als von Null verschieden betrachtet werden.

c) Endlich kann bezüglich $f(x, y)$ angenommen werden, dass sie in einer endlichen Anzahl von Punkten und zur y - Axe parallelen Strecken innerhalb des Integrationsgebietes unstetig sei. Dann hat man nur das Intervall a bis b entsprechend zu zerlegen. Für die Partial-Doppelintegrale gilt immer die Gleichung (2).

Anmerkung. Dass die Stetigkeit von $\Psi(y)$ an den Grenzen $y = a'$ und $y = b'$ nicht allein hinreichende, sondern auch, allgemein zu reden, nothwendige Bedingung des vorstehenden Satzes sei, zeigt schon das bekannte Beispiel von Moigno:

$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2} dx$ und $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2} dy$ sind verschieden. Es hört eben die Stetigkeit von $\int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2} dx$ für $y = 0$ auf, indem das Integral unendlich wird.

© Naturwiss.-med. Ver. Innsbruck; download unter www.biologiezentrum.at

2. Aus dem oben gegebenen Satze fliesst unmittelbar der folgende

Satz. „Angenommen die reelle Grösse u werde auf ein solches Intervall beschränkt, dass innerhalb und an den Grenzen desselben die Integrale zwischen von u unabhängigen Grenzen

$$\int_a^b f(x, u)\, dx = \Phi(u) \qquad \int_a^b \frac{d f(x, u)}{d u}\, du = \Psi(u)$$

nicht allein endlich und bestimmt, sondern das letztere auch stetig sei in Beziehung auf u; — dann existirt ein Differentialquotient von $\Phi(u)$ in Beziehung u und es ist

$$\Phi'(u) = \Psi(u)\text{“}$$

Denn ist u_0 bis u_1 ein beliebiges Intervall, welches in den eben bezeichneten enthalten ist, so hat man nach Nr. 1

$$\int_{u_0}^{u_1} \Psi(u)\, du = \int_a^b dx \int_{u_0}^{u_1} \frac{d f(x, u)}{du}\, du = \Phi(u_1) - \Phi(u_0),$$

also $\Phi'(u_1) = \Psi(u_1)$, da $\Psi(u)$ endlich und stetig bei $u = u_1$.

Anmerkung. Ist die Function $\Psi(u)$ bekannt, so hat man nach diesem Satze

$$\Phi(u) = \int \Psi(u)\, du + \text{Const.}\,.$$

Die Bestimmung dieser Constanten gestaltet sich am einfachsten, wenn für einen besonderen Wert u_0 von u das entsprechende $\Phi(u)$ ermittelt werden kann. Dieses Verfahren setzt jedoch voraus, — was gewöhnlich ausser Acht gelassen ist — dass das Integral $\int_a^b f(x, u)\, dx$ bei $u = u_0$ stetig sei.

© Naturwiss.-med. Ver. Innsbruck; download unter www.biologiezentrum.at

3. Dem Satze in Nr. 1 kann noch der folgende angeschlossen werden.

2. Satz. „Ist in dem Integrale.

$$\int_a^b f(x, y)\, dx = \Psi(y),$$

welches für endliche Werte von y stetig sein soll, das Intervall b—a endlich, so besteht die Gleichung (2) auch noch im Falle eines unendlichen Intervalles b′—a′, wenn nur die rechte Seite derselben als endlich und bestimmt vorausgesetzt wird."

Es sei z. B. b′ unendlich. Wir gehen nun aus von

$$\int_{a'}^{\infty} f(x, y)\, dy = \Phi(x).$$

Wäre dieses im Intervalle a bis b und an den Grenzen desselben stetig, so hätte man wieder den Fall des ersten Satzes. Es kann aber dieses Integral auch unstetig sein in Bezug auf x. Es genügt anzunehmen, dass die Unstetigkeit an einer der Grenzen z. B. für x = b eintrete. — Nun sei c zwischen a und b genommen, c′ eine sehr grosse positive Zahl. Man hat dann nach dem ersten Satze:

$$\int_{a'}^{c'} dy \int_a^c f(x,y)\, dx = \int_a^c dx \int_{a'}^{c'} f(x, y)\, dy.$$

Hier setze man

$$\int_a^c f(x,y)\, dx = \Psi(y) + \rho(c, y),$$

$$\int_{a'}^{c'} f(x, y)\, dy = \Phi(x) + \nu(x, c'); \qquad (5)$$

wodurch sich ergiebt

© Naturwiss.-med. Ver. Innsbruck; download unter www.biologiezentrum.at

$$\int_{a'}^{c'} \Psi(y)\,dy + \int_{a'}^{c'} p(c, y)\,dy = \int_{a}^{c} \Phi(x)\,dx + \int_{a}^{c} \nu(x, c')\,dx. \qquad (6)$$

Lässt man zuerst c gegen b convergiren, während c′ fest bleibt, so verschwindet der zweite Theil links, da y noch immer endlich ist.

Somit folgt gemäss Voraussetzung

$$\int_{a'}^{c'} \Psi(y)\,dy = \int_{a}^{b} \Phi(x).\,dx + \int_{a}^{b} \nu(x, c')\,dx.$$

Allerdings ist $\nu(x, c')$ für $x = b$ nicht mehr definirt, aber das Integral $\int_{a}^{b} \nu(x, c')\,dx$ bleibt nach der Bedeutung von $\nu(x, c')$ in (5) doch angebbar.

Indem also die Endlichkeit dieses Integrales feststeht, so kann man setzen

$$\int_{a}^{b} \nu(x, c')\,dx = \nu(\xi, c').\,(b-a),$$

wo ξ einen mittleren Wert zwischen a und b bezeichnet, verschieden von b.

Wird nun der zweite Grenzübergang: $\text{Lim}\ c' = \infty$ ausgeführt, so wird $\nu(\xi, c')$ nach Voraussetzung beliebig klein; daher findet man aus (6)

$$\int_{a'}^{\infty} \Psi(y)\,dy = \int_{a}^{b} \Phi(x).\,dx. \quad \text{q. e. d.}$$

© Naturwiss.-med. Ver. Innsbruck; download unter www.biologiezentrum.at

Man bemerkt leicht, dass dieser Satz für unendliche Intervalle b—a nicht mehr allgemein gilt, z. B.

$$\int_1^\infty dy \int_1^\infty \frac{y^2 - x^2}{(y^2+x^2)^2} dx = -\frac{\pi}{4}, \quad \int_1^\infty dx \int_1^\infty \frac{y^2 - x^2}{(y^2+x^2)^2} dy = \frac{\pi}{4}.$$

II. Ueber die gleichmässige Convergenz von Reihen, deren Glieder von einer reellen Veränderlichen abhängen.

1. Im Folgenden wird der Versuch gemacht, einen Satz zu zeigen, der von Heine als ungewiss bezeichnet wurde. (Borchardt. J. LXXI p. 353)

Satz. „Wenn die convergente Reihe $\sum_0^\infty {}_r \varphi_r(x)$ die Eigenschaft besitzt, dass in einem endlichen Intervalle $x = a$ bis $x = b$, diese Grenzen eingeschlossen, nicht bloss alle Functionen $\varphi_r(x)$, sondern auch die Summa $f(x)$ der Reihe sich stetig mit x ändert, so convergirt die Reihe im genannten Intervalle in gleichem Grade."

Dabei können die $\varphi_r(x)$ reelle oder complexe Functionen der reellen Veränderlichen x sein.

Die Convergenz von $\Sigma \varphi_r$ ist schlechtweg zu nehmen, d. h. im Allgemeinen nur bestehend bei der gegebenen Aufeinanderfolge der Glieder.

Die gleichmässige Convergenz einer Reihe $\Sigma \varphi_r$ im Intervalle $x = a$ bis $x = b$ besteht darin, dass die ganze Zahl $m(x)$, welche dadurch definirt ist, dass für alle

$$n > m(x) \qquad \left| \sum_{n+1}^{\infty} {}_r \varphi_r(x) \right| < \varepsilon \qquad \text{(a)}$$

bleibt, eine endliche obere Grenze hat, während

© Naturwiss.-med. Ver. Innsbruck; download unter www.biologiezentrum.at

x das genannte Intervall durchläuft. ε bezeichnet, wie immer, eine beliebige vorgegebene Zahl.

Dass dieses unter den hier gemachten Voraussetzungen wirklich zutreffe, wird auf folgende Weise gezeigt.

Da f(x) im Intervalle a bis b in Bezug auf x stetig ist, so giebt es zu jedem x innerhalb desselben eine von Null verschiedene Zahl δ von der Art, dass für alle ξ, welche der Bedingung genügen

$$|\xi| < \delta, \qquad |f(x+\xi) - f(x)| < \varepsilon \qquad \text{(b)}$$

ist. Um δ vollständig zu bestimmen, nimmt man an, dass es ξ gebe vom absoluten Betrage $\geqq \delta$, welche

$$|f(x+\xi) - f(x)| \geqq \varepsilon$$

machen. Bei der Stetigkeit von $f(x+\xi) - f(x)$ in Beziehung auf ξ müssen die Zeichen $\geqq$ in diesen Ungleichungen als simultan betrachtet werden.

Nun betrachte man die Partialsummen

$$\sigma_n(x) = \sum_0^n r\,\varphi r(x),$$

welche ebenfalls stetige Funktionen von x sind, wie gross auch n sein mag. Man kann daher hier eine Zahl δ_n definiren auf ganz dieselbe Weise, wie eben δ. — Dann lässt sich zeigen, dass für Lim $n = \infty$ Lim $\delta_n = \delta$ sei.

Der Beweis wird indirect geführt, indem man nachweist, dass n immer so gross angenommen werden könne, dass δ_n sich unmöglich um eine endliche Grösse von δ unterscheiden könne.

Es sei erstens $\delta_n < \delta$. Dann folgt notwendig, dass es eine Grösse δ' zwischen δ_n und δ gebe, so dass

$$\left| \sum_0^n r \left\{ \varphi r(x \pm \delta') - \varphi r(x) \right\} \right| > \varepsilon.$$

Das Doppelzeichen vor δ' ist hier im Allgemeinen alternative zu verstehen. Zwischen den beiden Seiten dieser Ungleichung kann man sich eine Zahl $\varepsilon' > \varepsilon$ eingeschaltet

© Naturwiss.-med. Ver. Innsbruck; download unter www.biologiezentrum.at

denken. Bemerkt man dann, dass vermöge der Convergenz der Reihe $\sum_{0}^{\infty} {}_r \left\{ \varphi_r (x \pm \delta') - \varphi_r (x) \right\}$ der Rest

$$\left| \sum_{n+1}^{\infty} {}_r \left\{ \varphi_r (x \pm \delta') - \varphi_r (x) \right\} \right| < \varepsilon' - \varepsilon$$

wird, wenn nur n über einer bestimmten, von x, $\pm \delta'$ und $\varepsilon' - \varepsilon$ abhängigen Zahl m' liegt, — so würde sich ergeben

$$| f(x \pm \delta') - f(x) | > \varepsilon' - (\varepsilon' - \varepsilon)$$

d. i. $> \varepsilon$, was offenbar einen Widerspruch enthält.

Würde zweitens $\delta_n > \delta$ angenommen, so müsste es eine Zahl δ'' zwischen δ_n und δ geben, so dass

$$| f(x \pm \delta'') - f(x) | > \varepsilon,$$

daher auch $> \varepsilon''$, wenn dieses $> \varepsilon$. Nimmt man $n > m''$ (welches obigem m' entspricht), so könnte man schliessen

$$| \sigma_n (x \pm \delta'') - \sigma_n (x) | > \varepsilon'' - (\varepsilon'' - \varepsilon)$$

d. i. $> \varepsilon$, was ebenfalls ein Widerspruch.

Wenn nun $\lim\limits_{n=\infty} \delta_n = \delta$, so ist für alle $n > N$ $|\delta_n - \delta| < k$, wo k eine beliebige vorgegebene Grösse. Somit hat man für

$n > N \quad |\xi| \leqq \delta - k \quad |\sigma_n (x + \xi) - \sigma_n (x)| < \varepsilon,$

also nach (b) jedenfalls

$$\left| \sum_{n+1}^{\infty} {}_r \varphi_r (x + \xi) - \sum_{n+1}^{\infty} {}_r \varphi_r (x) \right| < 2 \varepsilon. \qquad (c)$$

Die Zahl N hängt (ausser von k) nur von x ab, ähnlich wie m(x) oben. Bezeichnet M die grössere der Zahlen N und m(x), so folgt aus (a) und (c), dass im Interfalle $\xi = -\delta + k$ bis $\xi = \delta - k$

$$\left| \sum_{n+1}^{\infty} {}_r \varphi_r (x + \xi) \right| < 3 \varepsilon,$$

wenn nur $n > M$ vorausgesetzt wird.

Während x das Intervall a bis b durchläuft, hat die

© Naturwiss.-med. Ver. Innsbruck; download unter www.biologiezentrum.at

Grösse δ bekanntlich eine von Null verschiedene untere Grenze Δ. Theilt man das Intervall b—a in Theile, deren jeder kleiner als 2Δ ist, so erhält man für den Mittelpunkt eines jeden dieser Theile ein bestimmtes M. Da die Anzahl dieser Zahlen M eine endliche ist so hat man nur die grösste derselben M^0 zu nehmen um sicher zu sein, dass im ganzen Intervalle a bis b für alle $n > M^0$

$$\left| \sum_{n+r}^{\infty} r \, \varphi r \, (x) \right| < 3 \, \varepsilon.$$

was zu beweisen war.

2. Die Wichtigkeit des vorstehenden Lehrsatzes leuchtet von selbst ein: er erleichtert den Gebrauch von unendlichen Reihen in der Integralrechnung wesentlich. Wenn $\Sigma r \, \varphi r \, (x) = f(x)$ im Intervalle $x = a$ bis $x = b$, diese Grenzen eingeschlossen, eine stetige Function von x ist, so hat man stets — wie aus der gleichmässigen Convergenz der Reihe unmittelbar folgt —

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sum_0^{\infty} r \int_a^b \varphi r \, (x). \, dx. \qquad (d)$$

Hört an einer der Grenzen z. B. bei $x = b$ die Stetigkeit von $f(x)$ auf, so muss in dieser Gleichung b durch einen innerhalb des Intervalles liegenden Wert c ersetzt und hierauf lim $c = b$ genommen werden. Dabei geht die linke Seite sicher in $\int_a^b fx \, dx$ über, wenn dieses Integral existirt. Rechts aber darf $\sum_0^{\infty} r \cdot \int_a^b \varphi r \, (x) \, dx$ — die Convergenz dieser Reihe vorausgesetzt — nur gesetzt werden, wenn das Integral $\sum_0^{\infty} r \int_a^c \varphi r \, (x) \, dx$ für $c = b$ stetig ist. Ist

© Naturwiss.-med. Ver. Innsbruck; download unter www.biologiezentrum.at

aber diese Stetigkeit erwiesen, so folgt daraus sowohl die Existenz des Integrales $\int_a^b f(x)\,dx$ als auch die Gleichung (d).

Man erhält ferner noch folgenden Satz, der bisher, wie es scheint, noch nicht bewiesen worden ist:

Satz. „Ist $f(x) = \Sigma \varphi_r(x)$ im Intervalle a bis b mit Einschluss dieser Grenzen stetig; ist ferner die Reihe $\Sigma \varphi'_r(x)$ in demselben Intervalle convergent und hat sie eine stetige Summe — letzteres mit Ausschluss einer endlichen Anzahl von speziellen Werten von x; so hat man, diese Stellen ausgenommen, überall

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = \sum_0^\infty r\,\varphi'_r(x).“$$

Der Beweis ergiebt sich unmittelbar, indem man $\Sigma \varphi'_r(x)$ über Strecken integrirt, welche ganz innerhalb je eines der Theile liegen, in welche das Intervall a bis b durch die Unstetigkeitsstellen von $\Sigma \varphi'_r(x)$ zerfällt. Es gehört aber hierher noch die Bemerkung, dass alle Unstetigkeitsstellen von $\Sigma \varphi_r(x)$ solche Stellen sein müssen, in welchen die gleichmässige Convergenz von $\Sigma \varphi'_r(x)$ jedenfalls, vielleicht auch die Convergenz selbst, aufhört. Denn soweit $\Sigma \varphi'_r(x)$ stetig ist, ist nach dem Vorstehenden $\Sigma \varphi_r(x)$ jedenfalls auch stetig. Es kann ja

$$\sum \varphi_r(x) = \int_a^x dx \sum \varphi'_r(x). + \text{Const.}$$

gesetzt werden.

3. Es ergiebt sich nun eine wesentliche Eigenschaft der trigonometrischen Reihen:

$$\tfrac{1}{2} A_0 + A_1 + A_2 + \ldots, \qquad \text{(a)}$$

wo $A_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

© Naturwiss.-med. Ver. Innsbruck; download unter www.biologiezentrum.at

Satz. „Hat die trigonometrische Reihe (a) zwischen $x = -\pi$ und $x = +\pi$ mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Punkten c eine Summe $f(x)$, die mit x sich stetig ändert, so ist die Reihe

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2} a_0 x + \sum_1^\infty {}_n \frac{a_n \sin nx - b_n \cos nx}{n} \qquad (b)$$

eine stetige Function von x durch das ganze Intervall von $-\pi$ und $+\pi$ mit Einschluss dieser Grenzen, falls nur das Integral

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx$$

existirt.*)

Somit wird das Integral von $f(x)$ über jedes beliebige Intervall gefunden durch Integration der Glieder von (a).“

Es seien c, c′ zwei aufeinanderfolgende Ausnahme-Punkte im Intervalle $-\pi$ bis $+\pi$. $\varphi(x)$ ist innerhalb des Intervalles c bis c′ sicher stetig; ferner ist

$$\frac{d\varphi}{dx} = f(x).$$

Da mithin, wenn a, x im Intervalle c bis c′ liegen,

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \int_a^x f(x).\, dx$$

ist, so folgt, dass sich $\varphi(c + \alpha)$ und $\varphi(c' - \alpha)$ bei unbe-

*) Im Sinne von Riemann (Darstellbarkeit etc, p. 18). Bezeichnen c_1 c_2 .... cr die ausgeschlossenen Punkte, so muss die Summe

$$\int_{-\pi}^{c_1 - \delta_1} fx\, dx + \sum_1^{r-1} {}_s \int_{cs+\varepsilon s}^{cs+1 - \delta s+1} fx\, dx + \int_{cr+\varepsilon r}^{+\pi} fx\, dx$$

sich einer endlichen und bestimmten Grenze nähern, wenn alle Grössen δ und ε unabhängig von einander gegen Null convergiren.

© Naturwiss.-med. Ver. Innsbruck; download unter www.biologiezentrum.at

grenzter Abnahme des positiven α endlichen Grenzen nähern, welche mit $\varphi(c+0)$ und $\varphi(c'-0)$ bezeichnet werden mögen.

Nach dem zweiten Lehrsatze von Riemann (Ueber die Darstellbarbeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe p. 29) folgt, wie schon G. Ascoli (Mathematische Annalen VI. p. 237) bemerkt hat, unmittelbar, dass

$$\varphi(c-0) = \varphi(c+0)$$

sein müsse. Denn wäre $\varphi(c+0) - \varphi(c-0)$ nicht Null, so könnte unmöglich

$$\frac{F(x+2\alpha) - 2Fx + F(c-\alpha)}{\alpha}$$

mit α verschwinden. Hier bezeichnet, wie bei Riemann a. a. O., $F(x)$ die durch zweimalige unbestimmte Integration der einzelnen Glieder aus $f(x)$ hervorgehende Reihe

$$F(x) = \frac{1}{4} a_0 x^2 - \frac{A_1}{1^2} - \frac{A_2}{2^2} - \frac{A_3}{3^2} - \ldots.$$

Wenn nun auch $\varphi(c-o)$ und $\varphi(c+o)$ zusammenfallen in einen Wert γ, so kann doch keineswegs sofort geschlossen werden, dass die Reihensumme (b) d. i. $\varphi(c) = \gamma$ sei. Hierzu gehört vielmehr noch ein Satz von Ascoli (a. a. O. p. 239): „In den ausgeschlossenen Punkten c hat eine trigonometrische Reihe wie (a), wenn sie überhaupt convergirt, die Summe

$$\operatorname{Lim} \frac{1}{2}\left\{ f(c-\alpha) + f(c+\alpha) \right\} \qquad (\alpha = o)".$$

Dabei ist es nicht notwendig, dass $f(c-\alpha)$ und $f(c+\alpha)$ für sich einer bestimmten Grenze zustreben. — Den Beweis dieses Satzes können wir hier in folgender Art geben, wobei wir den Einwand vermeiden, dass der von Hrn. Ascoli a. a. O. zweimal gebrauchte Mittelwert Θ verschiedene Bedeutung haben kann. Nach dem Satze von Nr. 2 hat man mit Ausnahme der Punkte c überall

$$\frac{dF(x)}{dx} = \varphi(x) \qquad \frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x);$$

somit

© Naturwiss.-med. Ver. Innsbruck; download unter www.biologiezentrum.at

$$F(c+\alpha+\beta) = F(c+\alpha) + \beta\,\varphi(c+\alpha) + \frac{\beta^2}{2}\left\{ f(c+\alpha) + \rho(\alpha, \beta)\right\}$$

$$F(c-\alpha-\beta) = F(c-\alpha) - \beta\,\varphi(c-\alpha) + \frac{\beta^2}{2}\left\{ f(c-\alpha) + \rho(-\alpha, -\beta)\right\}$$

Hier denken wir aus α, β beide positiv. Nun folgt

$$F(c+\alpha+\beta) + F(c-\alpha-\beta) = F(c+\alpha) + F(c-\alpha) + \beta\,(\varphi(c+\alpha) - \varphi(c-\alpha)) + \beta^2\left\{\frac{f(c+\alpha)+f(c-\alpha)}{2} + \frac{\rho+\bar{\rho}}{2}\right\}.$$

Und hieraus für Lim $\alpha = o$ bei nicht verschwindenden β

$$\frac{F(c+\beta) - 2F(c) + F(c-\beta)}{\beta^2} = \lim_{\alpha=o}\left\{\frac{f(c+\alpha)+f(c-\alpha)}{2} + \frac{\rho+\bar{\rho}}{2}\right\}.$$

Beim Grenzübergange Lim $\beta = o$ wird jetzt nach dem ersten Lehrsatze von Riemann (a. a. O. p. 26) geschlossen

$$f(c) = \lim_{\alpha=o} \frac{f(c+\alpha) + f(c-\alpha)}{2},$$

denn $\frac{\rho+\bar{\rho}}{2}$ wird mit β bei beliebigem α unendlich klein. Es existirt somit der rechts stehende Grenzwert und er ist gleich der Summe der Reihe (a).

Wenden wir diesen Satz auf die Reihe (b) an, so folgt, falls dieselbe in dem Punkte c überhaupt convergirt, für ihre Summe

$$\varphi(c) = \varphi(c-o) = \varphi(c+o) = \gamma.$$

Dieses gilt natürlich auch für die Punkte $x = \pm\pi$, wenn dieselben zu den ausgeschlossenen gehören sollten.

Um das Verhalten der Summe der Reihe (b) in den ausgeschlossenen Punkten c mit Sicherheit beurtheilen zu können, ist nach dem Vorstehenden noch der Nachweis notwendig, dass die Reihe für diese singulären Werte

© Naturwiss.-med. Ver. Innsbruck; download unter www.biologiezentrum.at

von x wirklich convergire. Es lässt sich dieses auf folgende Art zeigen.

Betrachten wir die Function $\Psi(x)$, welche in allen Punkten ausser den c mit

$$\varphi(x) - \tfrac{1}{2} a_0 x = \sum_1^{\infty} n \frac{a_n \sin nx - b_n \cos nx}{n} \quad (c)$$

übereinstimmt, in diesen letzteren aber den bezüglichen Wert $\gamma - \tfrac{1}{2} a_0 c$ annimmt. Diese Function ist mithin stetig im ganzen Intervalle $-\pi$ — bis $+\pi$ mit Einschluss dieser Grenzen. Da dieselbe in allen Punkten ausser den c die Abtheilung $f(x) - \tfrac{1}{2} a_0$ besitzt, somit die Differenz $f(x+\alpha) - f(x)$ mindestens von der Ordnung α ist, so lässt $\Psi(x)$ nach einem Satze von Lipschitz (Borchardt. J. LXIII. p. 308) die Fourier'sche Entwickelung zu. Wegen der Stetigkeit von $\Psi(x)$ im ganzen Intervalle $-\pi$ bis $+\pi$ ist die Summe der entsprechenden Fourier'schen Reihe überall gleich $\Psi(x)$. Nach einem Satze von G. Cantor (a. a. O. LXXII. p. 139) muss diese Fourier'sche Reihe mit (c) identisch sein. Somit convergirt (b) auch in den ausgeschlossenen Punkten.

Das Vorstehende zusammengefasst liefert das Ergebniss, dass die Reihe (b) in allen Punkten des Intervalles $-\pi$ bis $+\pi$ stetig sei, womit der am Eingange der Nr. aufgestellte Satz erwiesen ist.

4. Wenn eine trigonometrische Reihe, deren Summe mit Ausnahme einzelner Punkte stetig ist, durch unbestimmte Integration der Glieder eine Reihe liefert, die in einigen dieser Punkte eine Unstetigkeit aufweiset, so wird man schliessen, dass das Integral der genannten Summe, ausgedehnt über das Intervall $-\pi$ bis $+\pi$, nicht angebbar sei. Dies tritt z. B. ein bei der Sinusreihe

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{\log. 2} + \frac{\sin 3x}{\log. 3} + \ldots, \quad (d)$$

indem die Reihe

$$\varphi(x) = -\frac{\cos 2x}{2 \log. 2} - \frac{\cos 3x}{3 \log. 3} - \ldots$$

© Naturwiss.-med. Ver. Innsbruck; download unter www.biologiezentrum.at

für $x = o$ eine unendliche Summe hat. Da nach Nr. 2 mit Ausnahme von $x = o$

$$\frac{d\,\varphi(x)}{dx} = f(x),$$

so nähert sich $f(x)$ bei unbeschränkter Abnahme des Argumentes x der Grenze $+\infty$, ohne dieselbe jedoch zu erreichen. Nach dem Bemerkten muss nun

$$\int_{o}^{\pi} f(x)\,dx$$

unendlich sein.

Beiläufig möge noch erwähnt sein, dass auch die Reihe (d) eine Fourier'sche ist. Es ist dies einer jener Fälle, wo die Fourier'sche Sinus-Entwickelung gilt für eine für $x = o$ unendliche Function, die zwischen o und π nicht integrirt werden kann.

5. Aus den Sätzen von Nr. 2 und 3 folgt ein Satz, der im Wesentlichen mit dem von Ascoli (a. a. O. p. 231) übereinstimmt. „Lässt sich eine Function $f(x)$, die mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Punkten c stetig ist, im Intervalle $-\pi$ bis $+\pi$ in eine trigonometrische Reihe (a) *entwickeln, deren Summe mit ihr übereinstimmt, die Punkte* c abgerechnet; so muss dieses die Fourier'sche Reihe sein.

Dabei ist aber noch vorausgesetzt, dass das Integral

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(t).\,dt$$

endlich und bestimmt sei."

Um zu beweisen, dass

$$\text{(e)} \qquad \pi A_m = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t), \cos m\,(t - x)\,dt \quad (m = 0, 1, 2 \ldots)$$

sei, multiplicire man die Reihe (a) mit $\cos m\,(x - t)\,dx$ und

© Naturwiss.-med. Ver. Innsbruck; download unter www.biologiezentrum.at

integrire unbestimmt die einzelnen Glieder. Dadurch erhält man die Reihe

$$\cos m(x-t) \sum_n \frac{n(a_n \sin nx - b_n \cos nx)}{n^2 - m^2}$$

$$- m \sin m(x-t) \sum_n \frac{A_n}{n^2 - m^2}, \qquad (f)$$

wo n alle ganzen Zahlen von O bis ∞ durchläuft mit Ausnahme der Zahl m. Diese Reihe ändert sich aber stetig mit x im Intervalle von $-\pi$ bis $+\pi$, diese Grenzen eingeschlossen. Da der zweite Theil augenscheinlich für alle Werte von x gleichmässig convergirt,*) so hat man nur den ersten zu betrachten, welcher durch die Substitution

$$\frac{n}{n^2 - m^2} = \frac{1}{n} + \frac{m^2}{n(n^2 - m^2)}$$

in eine für alle Werte von x gleichmässig convergente Reihe und die Reihe (c) zerfällt, von der bereits bekannt ist, dass sie im genannten Intervalle durchaus stetig. Man darf also behaupten, dass das Integral

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) . \cos m(x-t)\, dx$$

existirt und gleich πA_m ist.

Will man von der eben benützten Eigenschaft der Reihe $\varphi(x)$ keinen Gebrauch machen, so kann man auch so verfahren. Man bemerkt, dass die Reihe (c) eine Fourier'sche sein müsse; denn bildet man dafür den Ausdruck (f), so findet man

$$- \cos m(x-t) \sum_n \frac{A_n}{n^2 - m^2}$$

$$- \sin m(x-t) \sum_n \frac{a_n \sin nx - b_n \cos nx}{n(n^2 - m^2)},$$

somit eine für alle Werte von x gleichmässig convergente Reihe. Demnach ergiebt sich die Formel

*) Dieses setzt voraus, dass die Coefficienten a_n, b_n in's Unendliche abnehmen. Dies ergibt sich aus einem Satze von G. Cantor (Borchardt. J. LXXIII. p. 294.)

© Naturwiss.-med. Ver. Innsbruck; download unter www.biologiezentrum.at

$$\pi . \frac{a_m \sin mx - b_m \cos mx}{m}$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} (\varphi(t) - \tfrac{1}{2} a_0 t) \cos m(t-x)\, dt,$$

woraus durch partielle Integration wegen $\varphi(c-o) = \varphi(c+o)$ und $\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(t)$ $(t \lessgtr c)$ folgt

$$\pi \frac{a_n \sin mx - b_n \cos mx}{m} - \frac{(-1)^m \sin mx}{m} . \pi a_0 =$$

$$\frac{(-1)^m \sin mx}{m} \left\{ \varphi(\pi - o) - \varphi(-\pi + o) \right\}$$

$$- \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) . \sin m(t-x)\, dt.$$

Weiss man nun (s. u.), dass

$$\pi a_0 = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) . dt = \varphi(\pi - o) - \varphi(-\pi + o) \quad (g)$$

so erhält man unmittelbar die beiden Theile der Gleichung (e).

G. Ascoli hat den vorstehenden Satz auch ohne Benützung des Satzes von Nr. 2 bewiesen. Dann muss man auf die Reihe

$$F(x) - \tfrac{1}{4} a_0 x^2 = - A_1 - \frac{A_2}{2^2} - \frac{A_3}{3^2} - \ldots$$

zurückgehen, deren gleichmässige Convergenz für alle Werte von x unmittelbar einleuchtet. Diese Reihe ist somit sicher eine Fourier'sche; man hat also

$$- \frac{\pi A_m}{m^2} = \int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ F(t) - \tfrac{1}{4} a_0 t^2 \right\} \cos m(t-x)\, dt$$

$$(m = 1, 2 \ldots \infty).$$

Da F (t) für alle Werte von t stetig und mit Ausnahme der Punkte c die Ableitung $\varphi(t)$ besitzt, von welcher be-

© Naturwiss.-med. Ver. Innsbruck; download unter www.biologiezentrum.at

kannt ist, dass $\varphi(c-o) = \varphi(c+o)$; da ferner $\varphi(t)$ mit Ausschluss der c die Ableitung $f(t)$ hat, so kann in dieser Gleichung die partielle Integration zweimal angewandt werden. Daraus folgt die Existenz der Integrale in Gl. (e) und diese selbst, wenn noch der Wert von a_0 ermittelt werden kann. Denselben bestimmt Ascoli (a. a. O. p. 238) durch zweimalige Differenzirung der Identität

$$F(t) = \frac{a_0 t^2}{4} + \left\{F(t) - \frac{a_0 t^2}{4}\right\}.$$

Dabei ergiebt sich, mit Ausschluss der Punkte c

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \frac{d}{dt}\left(\varphi(t) - \frac{a_0 t}{2}\right).$$

Integrirt man diese Formel zwischen $-\pi$ und $+\pi$, so verschwindet der 2. Theil wegen $\varphi(\pi - o) = \varphi(\pi + o)$; — denn daraus folgt, dass die Reihe (c) für $\pi - o$ und $\pi + o$, somit auch für $\pi - o$ und $-\pi + o$ dieselben Grenzwerte liefert. Es erscheint also die Gleichung (g).

6. Ueber die Summe der Reihe (a) in den ausgeschlossenen Punkten c ist bereits in Nr. 3 ein Satz von Ascoli bemerkt. Es würde nun nahe liegen, denselben umzukehren: „Existirt der Grenzwert

$$\lim \frac{f(c-\alpha) + f(c+\alpha)}{2} \text{ für } \alpha = o$$

so convergirt die Reihe (a) für $x = c$.“ Der Beweis dieses Satzes scheint schwierig zu sein, wenn man $f(x)$ nicht weiter beschränken will, als es bisher geschehen ist. In solchen Fällen, wo die Ermittelung der Summe der Fourier'schen Reihe auf die Sätze von Dirichlet und Lipschitz zurückgeführt werden kann, ergiebt er sich unmittelbar.

Innsbruck, 24. Dezember 1874.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Berichte des naturwissenschaftlichen-medizinischen Verein Innsbruck

Jahr/Year: 1875

Band/Volume: 5

Autor(en)/Author(s): Stolz Otto

Artikel/Article: Bemerkungen zur Integral-Rechnung. 24-43