19. C. Steinbrinck: Ueber die Steighöhe einer capillaren Luft-Wasserkette in Folge verminderten Luftdrucks.

Mit zwei Holzschnitten.

Eingegangen am 18. Mai 1894.

Seitdem sich STRASBURGER in seinem Werk: „Ueber den Bau und die Verrichtungen der Leitungsbahnen" auf Grund zahlreicher Versuche zu der Ansicht bekannt hat, dass bei der Beförderung des Wassers durch den Stamm hoher Gewächse bis zu ihrem Gipfel von der Nothwendigkeit der Betheiligung lebender Zellen nicht die Rede sein könne, da wässerige Flüssigkeiten selbst in getödteten Pflanzentheilen auf den gewöhnlichen Leitungsbahnen in Folge der Transpiration bis zu Höhen von 19—20 *m* gelangten, ist die Frage von Neuem in den Vordergrund getreten, zu welcher Maximalhöhe das Wasser bei Ausschluss des Eingriffs lebender Zellen, unter der Wirkung reinphysikalischer Kräfte, in den Pflanzen eventuell überhaupt emporzudringen vermöchte. Da es nun als ausgemacht erachtet werden kann, dass die Capillarität, sowie der Hub continuirlicher Wasserfäden durch den Luftdruck nicht entfernt bis in die Zweigspitzen hoher Bäume hinaufreichen, so bleibt nur übrig, als treibendes Agens die Luftblasen heranzuziehen, die in grösserer oder geringerer Zahl die Wassersäulen der Pflanzengefässe unterbrechen, bei einer am oberen Ende der Gefässe auftretenden Luftverdünnung sich ausdehnen und so die sie überlagernden Wasserfäden emporschieben. Hinsichtlich dieser hat die Untersuchung naturgemäss nach zwei Richtungen zu erfolgen. Es ist zunächst theoretisch interessant zu erfahren, wie hoch eine solche „JAMIN'sche Kette" durch die Ausdehnung ihrer Luftsäulchen steigen würde, wenn über ihr ein vollständiges Vacuum erzeugt werden könnte. So weitgehende Luftverdünnungen, wie sie hierbei die oberen Blasen der Kette erleiden würden, kommen aber nach den bisherigen Erfahrungen in der Natur nicht vor. Es ist mithin zweitens zu untersuchen, wie gross die Steighöhen solcher Ketten für beliebige, der Natur entsprechende Grade der Druckverminderung ihres Gipfels ausfallen. Da diese Hubhöhen nun ausserdem auch von den Dimensionen der Glieder der Kette abhängen, so würde es erwünscht sein, eine einfache Formel zu besitzen, welche es gestattet, für Ketten beliebiger Dimensionen und für beliebige Grade der Luftverdünnung durch Einsetzen von deren Werthen sofort die gesuchte Höhe zu bestimmen.

In zwei Abhandlungen: „Untersuchungen über das Saftsteigen"[1])

1) Sitzungsberichte der Kgl. Preuss. Akad. d. Wiss. zu Berlin XXXIV, pag. 571.

und „Weitere Ausführungen über die durch Saugung bewirkte Wasserbewegung in der JAMIN'schen Kette“ [1]) hat SCHWENDENER die beregte Frage in Angriff genommen und rechnerische Untersuchungen über den Auftrieb durch die Luftblasen angestellt. In der ersteren sucht er sich mit einer Durchschnittsschätzung zu helfen. In der zweiten schlägt er, ohne sich durch umständliche Rechnungen abschrecken zu lassen, den exacten Weg ein. Er ist jedoch bei der numerischen Ausführung einzelner Beispiele stehen geblieben, die ihm für seinen Zweck — den Nachweis nämlich, dass der Auftrieb seitens der Luftblasen das Deficit der übrigen physikalischen Kräfte nicht decke — völlig ausreichend erschienen. Somit ist denn jeder, der sich über die Tragweite anderer Druckverminderungen bei anders geformten Ketten informiren will, genöthigt, den ganzen Gang der Rechnung zu recapituliren. Bemüht, mir hinsichtlich der Controverse zwischen STRASBURGER und SCHWENDENER ein Urtheil zu bilden, empfand ich diesen Uebelstand sehr lebhaft.

Nun hat aber SCHWENDENER gegen den Schluss seiner letzten Abhandlung eine sehr sinnreiche Idee ausgesprochen, die man nur weiter zu verfolgen braucht, um zu der gewünschten Formel zu gelangen. SCHWENDENER hat nämlich zur Veranschaulichung seiner Resultate eine graphische Darstellung gewählt, die ihn dazu führte, die mühsame Addition von Hunderten oder Tausenden von Brüchen durch eine einfache Integration zu ersetzen. Es ist nur nöthig, diese graphische Darstellung ihres äusseren Gewandes zu entkleiden und, statt mit bestimmten Werthen für die Luftverdünnungen, für die Längen der Kettenglieder u. dergl., mit allgemeinen Zahlen zu operiren, um ein für unsere botanische Frage genügend genaues, allgemein gültiges Resultat zu erhalten.

Wenn ich mir nun gestatte, dasselbe im Folgenden mitzutheilen, so könnte ich, unter Voraussetzung der Bekanntschaft des Lesers mit SCHWENDENER's letzter Abhandlung, an passender Stelle an die Darlegungen derselben anknüpfen. Da aber der der Rechnung vorausgehende physikalische Gedankengang von dem genannten Forscher nur mit wenigen Worten angedeutet ist, so dürfte es sich zum besseren Verständniss empfehlen, die Frage wie eine res integra zu behandeln, damit nicht wiederum der Einwurf erhoben werden könne, als vermöchten „die bei der Capillarität thätigen Molecularkräfte mehr zu leisten“. Hieran dürfte sich passend dann ein Vergleich einzelner, mit Hülfe der Formel gewonnener Resultate mit solchen, die auf dem gewöhnlichen Wege erlangt sind, anschliessen, und an dritter Stelle eine kurze Discussion der allgemeinen Ergebnisse derselben am Platze sein.

---

1) Sitzungsberichte der Berl. Akad. der Wiss. XL, pag. 835ff.

1.

Die Figur 1 stelle ein viele Meter langes pflanzliches Capillarrohr dar, das mit Wasserfäden von gleicher Länge w und mit Luftblasen von der Länge l gefüllt sei[1]). Wenn am Scheitel und am Grunde dieser Kette der normale Atmosphärendruck wirkt[2]), so dürfen wir auch sämmtlichen Luftblasen den Normaldruck zuschreiben. Damit dann die Wassersäulchen getragen werden, wird nur die Krümmung ihres unteren Meniskus ihrer Höhe entsprechend etwas verringert sein müssen. Da sich während der Winterruhe zwischen der in den Bäumen eingeschlossenen und der Aussenluft ein allmählicher Ausgleich vollziehen kann, dürfen wir annehmen, dass sich die pflanzlichen Gefässketten im Frühjahr, wenigstens in den oberen Theilen des Baumes, abgesehen von der Regelmässigkeit der Gliederordnung, in einem ähnlichen Zustande befinden. Die Luftverdünnung am oberen Ende des Rohres wird nun theils dadurch hervorgerufen, dass dort ein Gliederpaar nach dem anderen von dem umgebenden Gewebe aufgenommen wird, theils dadurch, dass sich das Rohr in den wachsenden Spross anfangs protoplasmahaltig fortsetzt und schliesslich seinen lebenden Inhalt verliert. Zunächst kann die Lufttension am Gipfel nicht auf Null fallen, weil die sich ausdehnenden Luftblasen die Wassertheilchen stetig aufwärts schieben; sie muss aber allmählich sinken, falls das untere Ende der Kette sich über dem Bereich des Wurzeldrucks und des capillaren Auftriebs einer continuirlichen Wassersäule befindet, weil sich die Gesammtsumme der Triebkräfte der Luftblasen bei abnehmender Zahl und Spannung derselben vermindert. Die Gipfelverdünnung wird endlich beim Mangel anderweitiger Beihülfe und bei Ausschluss des Luftzutritts von aussen den Werth Null erreichen, wenn trotz genügender Länge der Kette die Spannung jedes einzelnen Luftbläschens nicht mehr hinreicht, das über ihm befindliche Stück der Kette emporzudrängen. Nunmehr ist die Aufwärtsbewegung sistirt.

A

B

C

Fig. 1.

Nehmen wir an, der Verschiebungswiderstand der obersten Wassersäule, in Millimetern gemessen, sei k, so muss die Spannung des unter ihr befindlichen Luftbläschens nunmehr genau bis zum Werthe k

1) Die Längen w und l seien in Millimetern gemessen. Davon, dass die Gefässzüge der Pflanzen stellenweise von Querwänden durchsetzt resp. verengt sind, wird zunächst abgesehen.

2) Dass derselbe in der Höhe um einige Millimeter Quecksilber geringer ist, kann vernachlässigt werden.

gesunken sein. Wäre die Spannungsdifferenz zwischen dem ersten und zweiten Bläschen grösser oder kleiner als k, so würde die Wassersäule, welche sie trennt, in Folge dessen aufwärts oder abwärts geschoben werden; dasselbe gilt für die folgenden. Somit werden die Tensionen der einzelnen Blasen, von oben nach unten gerechnet, in diesem Falle durch die arithmetische Reihe:

$$(1) \qquad k,\ 2k,\ 3k \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots nk$$

dargestellt. Ist $(n-1)$ die Anzahl aller gedehnten Luftblasen, die nunmehr von C bis A das Rohr füllen mögen, so giebt also das letzte Glied der obigen Reihe, $nk = 10000$, die Spannung der unmittelbar darunter folgenden; die Zahl n aller dieser Bläschen ist also gleich $\frac{10\,000}{k}$. Nach dem MARIOTTE'schen Gesetz beträgt nunmehr die Länge der obersten Luftblase $l_1 = \frac{10\,000\,l}{k}$, die der zweiten $l_2 = \frac{10\,000\,l}{2k}$ und so fort. Die der letzten ist gleich l geblieben, sodass die Einzellängen die Reihe bilden:

$$(2) \qquad \frac{10\,000\,l}{k},\ \frac{10\,000\,l}{2k},\ \frac{10\,000\,l}{3k} \ldots\ldots\ldots\ l.$$

Ihre Gesammtlänge L' beträgt also:

$$\text{I.} \quad \frac{10\,000\,l}{k}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots\ldots \frac{1}{\frac{10\,000}{k}}\right) mm.$$

Wird nun die Gesammtlänge der sie überlagernden Wasserfädchen mit W bezeichnet, so ist die Strecke $AC = L' + W$. Reichten diese selben Gliederpaare ursprünglich nur von C bis B, und war L die ursprüngliche Gesammtlänge ihrer Luftbläschen, so ist $BC = L + W$. Die Strecke BA stellt nun die Höhe dar, um welche durch ein Vacuum bei A ein Wassertheilchen in maximo gehoben werden kann. Sie ist aber gleich $AC - BC = L' + W - (L + W)$. Mithin ist die Hubhöhe H durch die Gleichung gegeben:

$$\text{II.} \qquad H = L' - L.$$

Diese Gleichung gilt sinngemäss auch, wenn der Luftdruck am Gipfel nicht auf 0 gesunken ist. In diesem Falle hat auch die oberste Luftblase eine höhere Spannung bewahrt. Sei diese mk, so fallen nunmehr in der Gleichung I. die ersten $(m-1)$ Glieder fort und sie lautet dann:

$$\text{III.} \quad L'_m = \frac{10\,000\,l}{k}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} \ldots\ldots \frac{1}{\frac{10\,000}{k}}\right) mm.$$

Es handelt sich also nun zunächst um die Summation der Klammern in I. und III. Wir halten uns zunächst an die erstere und benutzen zu ihrer Berechnung folgende Construction. Wir denken uns (Fig. 2) auf einer horizontalen Geraden OX in den von O aus gemessenen Entfernungen $1, 2, 3, 4, 5 \ldots\ldots \frac{10\,000}{k}$ bezw. die Lothe von der Länge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots\ldots \frac{k}{10\,000}$ errichtet, so liegen, wie bekannt, deren Endpunkte P_1, P_2, P_3, P_4 etc. auf einer gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten durch OX und deren Loth OY repräsentirt werden.

Auf OX und OY als Coordinatenachsen bezogen lautet die Gleichung dieser Curve $xy = 1$. Wir bezeichnen OA_1, OA_2, OA_3 mit x_1, x_2, $x_3 \ldots$, die Löthe A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3 mit y_1, y_2, y_3. Nach bekannten Lehren der Mathematik ist nun irgend ein von den Ordinaten y_r und und y_s einerseits und von der Hyperbel und der Asymptote OX andererseits eingeschlossenes Flächenstück gleich log nat $\frac{x_r}{x_s}$, bei unserer Construction also gleich log nat $\frac{r}{s}$. Der ganze „Flächenstreifen" von A_1P_1 bis A_4P_4 ist demnach gleich log nat 4, der von A_1P_1 bis zur letzten Ordinate A_nP_n gleich log nat n, das Stück zwischen A_2P_2 und A_6P_6 gleich log nat 3 u. s. w. Hiervon ausgehend, gelangen wir zu einer für unsere Zwecke weitaus genügend scharfen Bestimmung der Summe von einer beliebigen Zahl benachbarter Ordinaten AP, also einer beliebigen Anzahl aufeinander folgender Glieder der Klammer

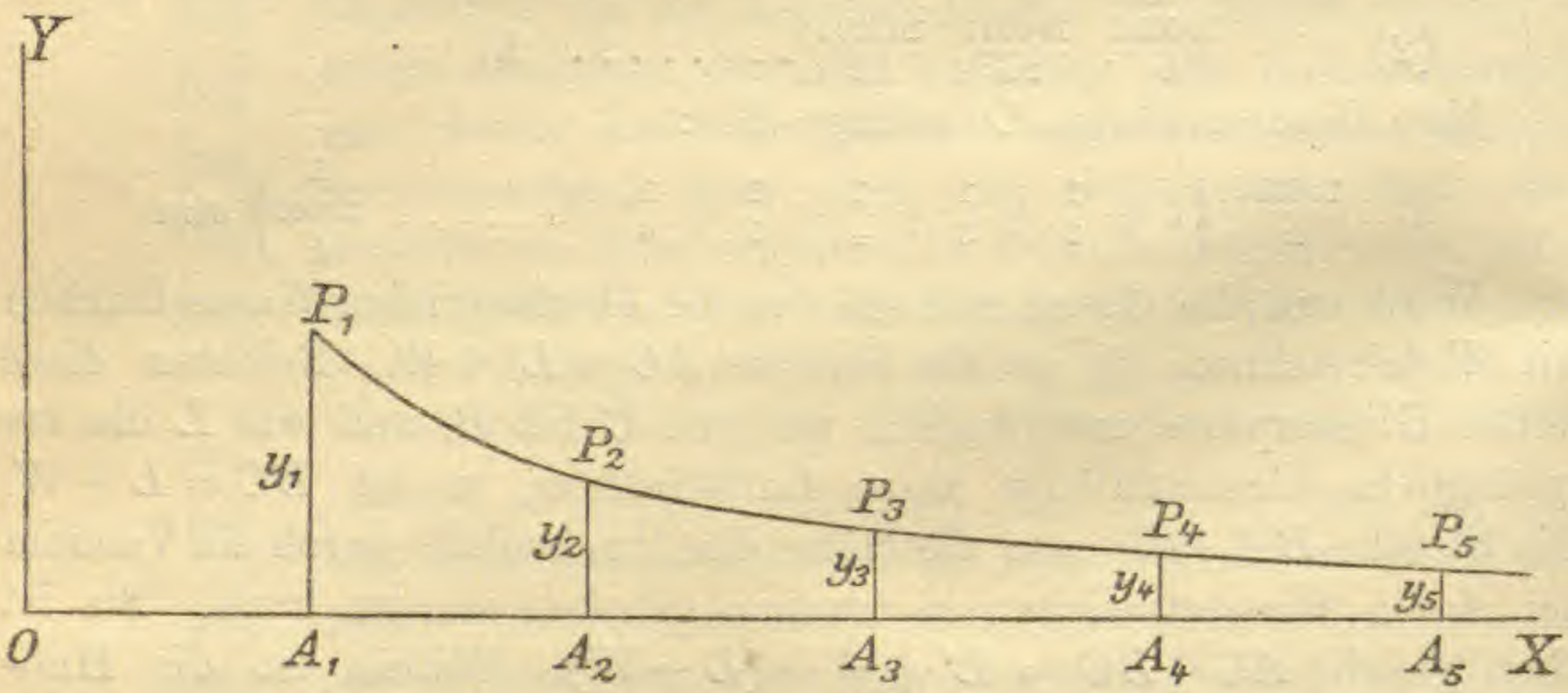

Fig. 2.

von I., indem wir die von zwei benachbarten Ordinaten begrenzten Flächenstücke als Trapeze ansehen. Dann ist das Flächenstück $A_3P_3A_4P_4$ z. B. gleich $\frac{y_3 + y_4}{2}$ und die Summe aller Trapeze von A_1P_1 bis A_nP_n:

$$\Sigma_1^n T = \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2} + \frac{y_3 + y_4}{2} + \ldots\ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}$$

$$= \frac{y_1 + y_n}{2} + y_2 + y_3 + y_4 + \cdots\cdots y_{n-1}.$$

Um die Summe aller Ordinaten von y_1 bis y_n zu erhalten, brauchen wir demnach zu $\Sigma_1^n T$ nur $\frac{y_1 + y_n}{2}$ zu addiren. Da nun $\Sigma_1^n T$ nur wenig von log nat n (d. h. die Summe der Trapeze wenig von dem entsprechenden Flächenstreifen) abweicht, so ergiebt sich für die Klammergrösse in Gleichung I die Summe

IV. $$S_1^n = \text{log nat}\,\frac{10\,000}{k} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{k}{10\,000}\right).$$

Ebenso ist die Klammersumme S_m^n der Gleichung III.

V. $$S_m^n = \log\text{nat}\,\frac{10\,000}{mk} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{k}{10\,000}\right).$$

Endlich gilt auch für ein beliebiges mittleres Stück der Klammerreihe in III., das sich von dem Bruche $\frac{1}{r}$ bis $\frac{1}{s}$ erstreckt, die Beziehung:

VI. $$S_r^s = \log\text{nat}\,\frac{s}{r} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right).$$

Nun beachte man, dass der Logarithmand $\frac{10\,000}{mk}$ der Gleichung V den reciproken Werth des über der Kette[1]) herrschenden Luftdrucks, in Atmosphären ausgedrückt, angiebt. Beträgt der Luftdruck z. B. dort noch $\frac{1}{5}$ Atmosphäre, so ist er gleich 5. Für die Luftverdünnung auf $\frac{1}{p}$ Atmosphäre lässt sich Gleichung V also schreiben:

VII. $$S_p = \log\text{nat}\,p + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{k}{10\,000}\right).$$

Drücken wir hierin noch m vermittelst der Gleichung

(3) $$mk = \frac{10\,000}{p}$$

durch p aus, so geht sie über in

VIII. $$S_p = \log\text{nat}\,p + \frac{k}{20\,000}(p + 1).$$

Dies ist der Werth der Klammer in der Gleichung III. Wird dieser eingesetzt und dann ausmultiplicirt, so lautet diese (wenn L_m^l durch L_p^l ersetzt wird):

IX. $$L_p^l = \left[\frac{10\,000\,l}{k}\log\text{nat}\,p + \frac{l}{2}(p + 1)\right] mm.$$

Dies ist also die Länge der in der Kette noch vorhandenen Luftblasen der Kette, wenn die Luftverdünnung über ihr bis zu $\frac{1}{p}$ Atmosphäre gestiegen ist. Nach Gleichung II ist von ihr die ursprüngliche Gesammtlänge dieser Luftblasen zu subtrahiren, damit die Hubhöhe H resultirt. Die Zahl derselben ist aber gleich der Anzahl der Summanden in der Klammer vor III, also gleich $\frac{10\,000}{k} - m$, somit gemäss (3) gleich $\frac{10\,000}{k} - \frac{10\,000}{pk} = \frac{10\,000}{k}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{10\,000}{k}\left(\frac{p-1}{p}\right)$. Und da ihre Anfangslänge $l\,mm$ betrug, so ist ihre Gesammtlänge:

X. $$L_p = \frac{10\,000\,l}{k}\left(\frac{p-1}{p}\right) mm.$$

Somit ergiebt sich schliesslich aus II, IX und X die Hubhöhe H_p der Kette bei der Druckverminderung auf $\frac{1}{p}$ Atmosphäre:

$$H_p = \left[\frac{10\,000\,l}{k}\left(\log\text{nat}\,p - \frac{p-1}{p}\right) + \frac{l}{2}(p + 1)\right] mm$$

oder

XI. $$H_p = \frac{10\,l}{k}\left(\log\text{nat}\,p - \frac{p-1}{p}\right)\text{Meter} + \frac{l}{2}(p + 1)\text{ Millimeter.}$$

---

1) Genauer: Der in der obersten Luftblase herrschenden Tension, die aber für unsere Rechnung hier unbedenklich mit der oben bezeichneten identificirt werden kann.

Diese Gleichung behält ihre Gültigkeit, auch wenn man die Luftdruckverminderung bis auf Null herabgehen lässt. Nur ist dann zu beachten, dass p eigentlich nicht das Verhältniss des Normaldrucks zum Luftdruck über der Kette, sondern zur Tension der obersten Luftblase angiebt. Um das Maximum (H_{max}) der Hubhöhe zu bestimmen, hat man daher in XI die Grösse $p = \frac{10\,000}{k}$ zu setzen und erhält mit Vernachlässigung kleiner Bruchtheile rund:

$$\text{XII.} \qquad H_{max} = \frac{10\,l}{k} \log \operatorname{nat} \left(\frac{10\,000}{k} - \frac{1}{2}\right) \text{ Meter.}$$

2.

Es wird dem Leser erwünscht sein, sich zunächst ein Urtheil über die vermittelst der gegebenen Formeln zu erzielende numerische Schärfe zu bilden. In SCHWENDENER's letzter Abhandlung finden sich nun folgende auf gewöhnlichem Wege addirte Bruchreihen[1]):

$$\text{a)} \quad \frac{1}{50} + \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \ldots\ldots \frac{1}{100} = 0{,}708164,$$

$$\text{b)} \quad \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \frac{1}{104} + \ldots\ldots \frac{1}{202} = 0{,}700504,$$

$$\text{c)} \quad \frac{1}{203} + \frac{1}{204} + \frac{1}{205} + \frac{1}{206} + \ldots\ldots \frac{1}{406} = 0{,}695540,$$

$$\text{d)} \quad \frac{1}{407} + \frac{1}{408} + \frac{1}{409} + \frac{1}{410} + \ldots\ldots \frac{1}{814} = 0{,}694374,$$

$$\text{e)} \quad \frac{1}{1631} + \frac{1}{1632} + \frac{1}{1633} + \ldots\ldots \frac{1}{1999} = 0{,}203357.$$

Nach unserer Formel VI berechnet sind diese Summen: $S_a = 0{,}70815$, $S_b = 0{,}70058$, $S_c = 0{,}696845$, $S_d = 0{,}69499$, $S_e = 0{,}204036$. Die entsprechenden Rechnungsdifferenzen sind $D_a = 0{,}00001$, $D_b = 0{,}00008$, $D_c = 0{,}0013$, $D_d = 0{,}00062$, $D_e = 0{,}00068$.

Für die Summe der 1951 Brüche von $\frac{1}{50}$ bis $\frac{1}{2000}$ berechnet SCHWENDENER den Werth 3,69444, während unsere Formel ergiebt: $S_{50}^{2000} = \log \operatorname{nat} 40 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{2000}\right) = 0{,}36888 + 0{,}01025 = 3{,}69913$[2]).

Um zu zeigen, dass unsere Formel VI auch Stücke des vorderen Endes der Reihe $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots\right)$ mit einer für unseren Zweck ausreichenden Schärfe summirt, sei bloss noch angegeben, dass sie bei der Summe $\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \ldots\ldots \frac{1}{20}\right)$ nur um 0,00017, bei der kleinsten Summe $\left(1 + \frac{1}{2}\right)$ um 0,05675 hinter dem wahren Werthe zurückbleibt[3]).

Ziehen wir nun auch die Formel XI zur Prüfung heran. Auf

1) l. c. pag. 838.

2) Es erscheint mir noch fraglich, ob SCHWENDENER's Summe 3,69444 nicht etwa durch Vernachlässigung höherer Decimalen zu klein ausgefallen ist.

3) Dass die Formel VI bei der grösseren Krümmung der Curve (Fig. 2) in der Nähe des Scheitels weniger genaue Werthe angiebt, leuchtet ein.

S. 845 und 846 der oben erwähnten Abhandlung SCHWENDENER's findet sich die Hubhöhe einer JAMIN'schen Kette für die Bedingungen berechnet, dass $l = 10$, $k = 5$ und $p = 40$ bezw. 5 ist. Für diese Fälle ergiebt XI:

$$H_{40} = \frac{10 \cdot 10}{5}\left(\log \text{nat } 40 - \frac{39}{40}\right) m + \frac{10}{2} \cdot 41\, mm = 54{,}48\, m.$$

$$H_5 = \frac{10 \cdot 10}{5}\left(\log \text{nat } 5 - \frac{4}{5}\right) m + \frac{10}{2} \cdot 6\, mm = 16{,}22\, m.$$

Der so gefundene Werth H_{40} stimmt mit dem von SCHWENDENER berechneten 54,37 (bezw. 54,27 an anderer Stelle) befriedigend überein. Für den Werth H_5 hat SCHWENDENER statt 16,22 den Werth 8,98 resp. an anderer Stelle 12,24. Es ist aber leicht, sich davon zu überzeugen, dass in der citirten Abhandlung bei diesem Passus ein Versehen vorliegt und die richtige Rechnung ebenfalls über 16 *m* ergeben haben würde.

3.

Als allgemeines Resultat geht aus den Formeln XI und XII zunächst hervor, dass *a*) mit dem sinkenden Luftdruck am Gipfel der Kette, wie selbstverständlich, die Hubhöhe des Wassers rasch wächst, dass sie ferner *b*) für einen bestimmten Grad der Luftverdünnung proportional der ursprünglichen Luftblasenlänge l und *c*) umgekehrt proportional dem Verschiebungswiderstande k ist, jedoch *d*) von der Länge der Wasserglieder der Kette nur insofern abhängt, als diese bei Längenzunahmen, indem sie dadurch ihren Verschiebungswiderstand k erhöhen, die Hubhöhe herabdrücken.

Gehen wir nun, um uns von der numerischen Bedeutung der beiden Formeln für verschiedene Fälle eine Vorstellung zu machen, etwa zuerst von den beiden am Schlusse des vorigen Abschnittes erwähnten Zahlenbeispielen SCHWENDENER's mit Hubhöhen von 54 und 16 *m* aus, indem wir vorerst noch hinzufügen, dass nach XII im selben Fall die maximale Hubhöhe

$$\frac{10 \cdot 10}{5}\left(\log \text{nat } 2000 - \frac{1}{2}\right) m = 20\,(7{,}60091 - 0{,}5) = 142\, m$$

betragen würde, so ist hinsichtlich dieser Beispiele sofort zu vermerken, dass die dort vorausgesetzte Luftblasenlänge von durchweg 10 *mm* in Pflanzen überhaupt nicht vorkommt. Als Maximum derselben fand SCHWENDENER in einem Rothbuchenast ausnahmsweise durchschnittlich 1,96 *mm*, meist aber nur Längen von ca. $^1/_3$ *mm*[1]). In Aesten der Ulme und von Ahornarten ergaben sich ihm[2]) im Durchschnitt 0,1 bis 0,4 *mm*. Setzen wir daher in den obigen Beispielen statt des Werthes von $l = 10$ diejenigen von 1 *mm* und $^1/_3$ *mm* ein, so erniedrigen sich für

1) Untersuchungen über das Saftsteigen. Sitzungsber. der Berl. Akad. der Wiss. XXXIV, pag. 567.

2) Sitzungsber. der Berl. Akad. der Wiss. XL, pag. 843 und 844.

dieselben Luftverdünnungen die Hubhöhen auf den zehnten, resp. dreissigsten Theil, also auf 1,6 resp. 0,5 *m* (bei $^1/_5$ Atmosphäre), auf 5,4 und 1,8 *m* (bei $^1/_{40}$ Atmosphäre) und auf 14,2 bezw. 4,5 *m* (unter dem Vacuum).

Was darauf den Verschiebungswiderstand *k* anbetrifft, von dessen Abmessung bisher in dieser Mittheilung im Allgemeinen noch nicht die Rede war, so bedarf dieser noch einer näheren Besprechung. Wenn man die Grösse *k* einfach gleich der Höhe der Wassersäulen vermehrt um den Reibungswiderstand des in offenen Röhren von gleichbleibender Weite in continuirlichem Faden strömenden Wassers setzen dürfte, so käme man vielleicht zu Werthen der Hubhöhe, die das Deficit der übrigen physikalischen Kräfte bei Dicotylen zu decken vermöchten. Dieser Bemessung von *k* widersprechen aber die Erfahrungsthatsachen. Zunächst steht ja anatomisch fest, dass die Gefässglieder der Pflanze an den Enden stark verengt und die Gefässe vielfach durch Scheidewände getrennt sind[1]. Ferner lehren aber auch die Beobachtungen an künstlichen JAMIN'schen Ketten, dass, aus bisher noch nicht theoretisch klargelegten Ursachen, die Menisken der Wassersäulen, wenn diese eine Weile in Ruhe verharrt haben, einen Widerstand gegen Verschiebungsversuche entwickeln, der, in Millimetern Wasser ausgedrückt, die Höhe der von ihnen begrenzten Wassersäulchen um ein Vielfaches übertreffen kann und mit der Enge der Röhrchen rasch zunimmt. In den oben angezogenen Zahlenbeispielen hat ihn SCHWENDENER mit 5 *mm* pro Meniskenpaar (einschliesslich der Höhe des Wassersäulchens) angesetzt. Bei seinen letzten hierauf bezüglichen Versuchen[2] fand ihn derselbe Forscher in Glasröhren von 0,18 *mm* etwas niedriger, nämlich zu 2 bis 3 *mm*. Vielleicht lässt er sich noch geringer ansetzen, da die Wassersäulchen bei lebhafter Transpiration wohl überhaupt nicht zur Ruhe kommen, sondern in fortschreitender Bewegung begriffen sind, und da man möglicher Weise die Ueberwindung der Anfangswiderstände in einer (während Perioden geringer Verdunstung) zeitweilig stockenden Kette der Temperaturänderung der Luftblasen übertragen darf. Bei Ketten, die gewissermassen noch nicht Zeit gefunden hatten, ihren Beharrungszustand auszubilden, fand ja ZIMMERMANN ihren Widerstand geradezu „ganz verschwindend klein". So erwies sich ihm z. B. in einem Röhrchen von 0,09 *mm* Lumen eine eben gebildete Kette von 126 Gliedern noch beweglich[3]. Mit Recht deutet er in demselben Sinne auch die Thatsache, dass es bei raschem Verfahren gelingt, eine „ganz enorme Anzahl von Luftblasen in eine Capillarröhre hineinzubringen".

---

1) Siehe u. a. STRASBURGER, Histol. Beitr. V: „Ueber das Saftsteigen," pag 50

2) Siehe Sitzungsber. der Berl. Akad. der Wiss. von 1892, pag. 917.

3) ZIMMERMANN, Ueber die JAMIN'sche Kette. Ber. der Deutsch. Bot. Gesellsch. Bd. I, pag. 388

Ob aber bei den verhältnissmässig geringen, in Baumzweigen bisher beobachteten Luftverdünnungen die Einführung kleinerer Werthe von k in die Rechnung genügen würde, um SCHWENDENER's Schluss auf ein bleibendes Deficit der rein physikalischen Kräfte abzuweisen, erscheint mir nach unserer Formel sehr zweifelhaft. Man könnte vielleicht gegen denselben, sowie auch gegen unsere vorliegende Darstellung noch geltend machen, dass ein Umstand, nämlich der durch die Luftverdünnung stark gesteigerte Uebergang von Wassertheilchen der Kette in Dampfform unberücksichtigt geblieben wäre. Aber eine genauere Ueberlegung lehrt, dass dadurch die Hubhöhe des flüssigen Wassers nicht gesteigert werden kann. —

Es sei zum Schluss gestattet, die beiden Hauptformeln unserer Entwickelungen zu wiederholen.

Bei einer Luftblasenlänge von l *mm* (unter Atmosphärendruck gemessen), einem Verschiebungswiderstand der Wassersäulchen von k mm und dem Luftdruck von $\frac{1}{p}$ Atmosphäre am Gipfel der Kette beträgt die Hubhöhe:

$$H_p = \frac{10\,l}{k}\left(\log \text{ nat } p - \frac{p-1}{p}\right) m + \frac{l}{2}\,(p+1)\,mm.$$

Bei völliger Aufhebung des Luftdrucks am Gipfel würde sie sich belaufen auf:

$$H_{max} = \frac{10\,l}{k}\left(\log \text{ nat } \frac{10\,000}{k} - \frac{1}{2}\right) m.$$

20. Dimitrie G. Jonescu: Weitere Untersuchungen über die Blitzschläge in Bäume.

Eingegangen am 24. Mai 1894.

Um einigen mir gemachten Einwürfen gegen meine Untersuchungen über die Ursachen der Blitzschläge in Bäume[1]) resp. gegen die von mir angewandte Untersuchungsmethode zu begegnen, möchte ich meine früheren Mittheilungen durch folgende Betrachtungen ergänzen, die mehr die physikalische Seite der Versuche betreffen. Erörterungen physikalischer Natur sind in jener Arbeit, da dieselbe wesentlich botanischen Inhaltes und für Botaniker in erster Linie bestimmt war, vermieden. Ich hielt die angewandte Methode durch die Ueberlegung hinreichend begründet, dass der Blitz eben doch wohl auch nur ein

1) Jahreshefte des Vereins für vaterländ. Naturkunde in Württemberg, 1893, p. 33 ff.