Zur Theorie der Resultanten

von

E. Netto.

Im ersten Bande meiner Vorlesungen über Algebra habe ich den bis dahin unbewiesenen Satz hergeleitet, dass die Resultante zweier Gleichungen mit einer Unbekannten bei allgemeinen, unbestimmten Coëfficienten irreductibel sei. Ich werde hier die Irreductibilität im Falle beliebig vieler Gleichungen beweisen. Dieses Theorem ist von fundamentaler Wichtigkeit für die Theorie der Elimination. Schläfli hat in seiner bedeutenden Abhandlung: „Über die Resultante eines Systems mehrerer algebraischen Gleichungen" (Wiener Denkschriften 1852; S. 1) die Unteilbarkeit der Resultante als Grundsatz annehmen müssen. Wir werden das Theorem auf dem Wege der strengen Induction ableiten. Dabei ist es interessant, dass die notwendige Annahme seiner Richtigkeit im Bereiche von weniger Variablen an einer Stelle auftritt, an der man sie kaum gesucht hätte, nämlich beim Beweise eines fast selbstverständlich scheinenden Hülfsatzes.

Es sind σ allgemeine Gleichungen mit unbestimmten Coëfficienten

$$(1) \qquad f_\alpha(x, y, \ldots) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \sigma)$$

in den σ Variablen $x, y, \ldots$ gegeben. Die Dimension jedes f_α sei m_α. Wir setzen das Product sämmtlicher Dimensionen

$$m \, . \, . \, m_{\sigma-1} m_\sigma = k.$$

Die Coëfficienten von $f\alpha$ mögen generell mit a_α bezeichnet werden. Jedem der a_α legen wir ein solches Gewicht bei, dass, wenn $x, y, \ldots$ die Gewichte 1 bekommen, f_α isobarisch vom Gewichte m_α wird.

Das Gleichungssystem (1) besitzt k Wurzelsysteme

$x_1, y_1, \ldots; x_2, y_2, \ldots; \ldots; x_k, y_k, \ldots$.

Alle diese kann man durch die Lösung einer einzigen Gleichung erlangen. Setzt man nämlich die Substitution an

$$\omega = \varkappa x + \lambda y + \mu z + \ldots,$$

$$\omega_\alpha = \varkappa x_\alpha + \lambda y_\alpha + \mu z_\alpha + \ldots, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots k),$$

wobei $\varkappa, \lambda, \mu, \ldots$ unbestimmte gewichtlose Parameter sind, dann besteht für ω eine Gleichung k^{ten} Grades.

$$(2) \qquad \rho_0 \cdot \omega^k - \rho_1(\varkappa, \lambda, \ldots) \cdot \omega^{k-1} + \rho_2(\varkappa, \lambda, \ldots) \cdot \omega^{k-2} - \ldots = 0.$$

Hierin sind die Coëfficienten $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots$ ganze Functionen sämtlicher Reihen $a_1, a_2, \ldots a_\sigma$ und zwar sind sie homogen in den a_α vom Grade $\frac{k}{m_\alpha}$; es ist ferner ρ_0 von den Parametern frei, während ρ_μ eine homogene Function μ^{ten} Grades von ihnen ist. Ferner ist ρ_0 isobarisch in den a vom Gewichte o, und ρ_μ vom Gewichte μ. Für allgemeine Functionen ist ρ_0 irreductibel und nicht identisch gleich Null. Das Verschwinden von ρ_0 ist charakteristisch dafür, dass die σ homogenen Gleichungen, die aus (1) entstehen, wenn man nur die Glieder höchster Dimension beibehält, ein gemeinsames Wurzelsystem besitzen, welches von dem banalen $x = o$, $y = o, \ldots$ verschieden ist. ρ_0 ist also die Resultante dieser σ homogenen Gleichungen mit σ Variablen, oder auch von σ nicht homogenen Gleichungen mit $(\sigma - 1)$ Variablen. Wir setzen, was für $\sigma = 2$ fest steht, die Irreductibilität von ρ_0 bei allgemeinen Coëfficienten voraus.

Jede ganze symmetrische Function kann als gebrochene Function der a dargestellt werden, deren Nenner eine Potenz von ρ_0 ist.

Es sei nun eine neue Gleichung $g(x, y, \ldots) = o$ derselben Veränderlichen $x, y, \ldots$ mit den Coëfficienten b gegeben. Die Dimension von g sei n, und den Coëfficienten b mögen solche Gewichte beigelegt werden, dass jedes einzelne Glied von g das gleiche Gewicht n besitzt, wie die Function selbst. Nun bilden wir das Product der Functionalwerte

$$(3) \qquad \Pi\, g(x_\alpha, y_\alpha, \ldots) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots k).$$

Diese Function ist homogen in den b vom Homogeneïtätsgrade k; sie ist isobarisch in den b, x, y, .. vom Gewichte kn;

sie ist symmetrisch in den $x_\alpha, y_\alpha, \ldots$ Die verschiedenen in ihr auftretenden eintypigen symmetrischen Functionen drücken wir als gebrochene Functionen der Coëfficientensysteme $a_1, a_2, \ldots$ aus; nach dem oben Dargelegten tritt dabei eine Potenz $\rho_0{}^\mu$ als Hauptnenner auf. Wir setzen nach Multiplication mit $\rho_0{}^\mu$

(4) $$R(f_1, \ldots f_\sigma; g) = \rho_0{}^\mu \Pi g(x_\alpha, y_\alpha, \ldots).$$

Dieses R nennen wir, obwohl in ihm g noch eine Sonderstellung den f gegenüber einnimmt, die Resultante der Gleichungen (1) und $g = 0$. R ist ganz in den a; da ρ_0 das Gewicht 0 besitzt, so stimmen (3) und (4) in den Gewichten überein, d. h. (4) hat in den $a_1, a_2 \ldots, b$ das Gewicht kn. R ist homogen in den b vom Grade k.

Jetzt ersetzen wir in (4) die Function g durch das Product $g'.g''$ zweier allgemeiner Functionen, deren Gradsumme gleich n ist, dann gilt die Formel

(5) $$R(f_1, \ldots; g'.g'') = R(f_1, \ldots; g')\, R(f_1, \ldots; g'').$$

Zunächst ist nämlich identisch

$$\Pi g'(x_\alpha, y_\alpha, \ldots) g''(x_\alpha, y_\alpha, \ldots) = \Pi g'(x_\alpha, y_\alpha, \ldots) \Pi g''(x_\alpha, y_\alpha, \ldots).$$

Jedes der Producte rechts wird durch Multiplication mit einer passenden Potenz des irreductiblen ρ_0 ganz in den a; wählt man für jede Potenz den Minimalexponenten, so kann sich kein Factor ρ_0 wegheben, weder gegen den zugehörigen, noch gegen den fremden Zähler. Folglich ist das Product der Potenzen auch für die linke Seite der Hauptnenner, und es folgt (5).

Ersetzen wir ferner in (4) eins der f, z. B. f_1 durch das Product $f_1' \, f_1''$ zweier allgemeinen Functionen, deren Gradsumme gleich m_1 ist, so gilt die Formel

(6) $$R(f_1' f_1'', \ldots f_\sigma; g) = R(f_1', \ldots f_\sigma; g)\, R(f_1'', \ldots f_\sigma; g).$$

Die Lösungen $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, \ldots$ teilen sich nämlich in zwei Sorten; in diejenigen $x_\alpha', y_\alpha', \ldots,$ welche $f_1' = 0, f_2 = 0, \ldots f_\sigma = 0$ befriedigen, und in diejenigen $x_\alpha'', y_\alpha'', \ldots,$ welche $f_1'' = 0$, $f_2 = 0, \ldots f_\sigma = 0$ befriedigen. Demnach ist identisch

$$\Pi g(x_\alpha, y_\alpha, \ldots) = \Pi g(x_\alpha', y_\alpha', \ldots) \, \Pi g(x_\alpha'', y_\alpha'', \ldots).$$

Die Coëfficienten von f_1' und f_1'' seien generell mit a_1' bezw. a_1'' bezeichnet. Drückt man dann die beiden Producte rechts als gebrochene Functionen der a_1', a_2, . . bezw. der a_1'', a_2, . . . aus, dann treten zwei Hauptnenner, etwa σ^ε beim ersten und τ^ϑ beim zweiten Producte auf. Es ist klar, dass der Hauptnenner der linken Seite ein Teiler des Products $\sigma^\varepsilon\,\tau^\vartheta$ sein muss. Bedenkt man aber, dass σ und τ irreductibel sind, so dass bei σ kein Factor vorhanden sein kann, der nur die a_1' enthält, und bei τ keiner, der nur die a_1'' enthält; und ferner, dass das erste Product frei von den a_1'', das zweite von den a_1' ist, so folgt, dass kein σ sich gegen den Zähler des zweiten Products wegheben kann, u. s. w., so dass also auch links derselbe Hauptnenner stehen muss. Damit ist die Formel (6) bewiesen.

Mit Hülfe von (5) und (6) können wir die Irreductibilität von R nachweisen.

Gesetzt für ein System der allgemeinen f_α von den Dimensionen m_α gäbe es ein allgemeines g von der Dimension n, für welches R zerlegt werden könnte, so nehmen wir n so klein als möglich an, d. h. wir wählen es so, dass bei Festhaltung der f_α kein allgemeines g von geringerer Dimension als n noch ein reductibles R besitzt. Es sei für diese Festsetzungen

$$(7)\qquad R = R_1 \,.\, R_2,$$

wobei R_1 und R_2 ganz in den a und in den b sind.

Nun setzen wir statt der allgemeinen Function g das Product zweier allgemeinen Functionen g', g'' ein, deren Gradzahlen die Summe n haben. Dabei gehen die Coëfficienten b in bilineare Functionen der neuen Coëfficienten b' und b'' über. Trägt man diese in (7) ein und benutzt (5), so entsteht

$$R_1 \,.\, R_2 = R\,(f_1, \ldots ; g').\; R\,(f_1, \ldots ; g'').$$

Der Annahme nach sind beide Factoren der rechten Seite irreductibel; sie sind folglich einzeln gleich den, nun ebenfalls als irreductibel erkannten Functionen R_1 und R_2. Hierin liegt aber ein Widerspruch. Es enthält nämlich jeder einzelne Factor links beide Coëfficientenreihen b' und b'' in bilinearer Verbindung, so dass nicht etwa die eine fehlen kann. Rechts dagegen enthält der erste Factor nur die b', der zweite nur die b''. Diesem Widerspruch können wir nur dadurch ausweichen, dass wir $n = 1$ nehmen; denn dann ist g nicht mehr in Factoren zerfällbar.

Genau so folgt durch Verwendung von (6), wenn wir nun die Grade $m_2, \ldots m_\sigma$; $n = 1$ festhalten und m_1 so klein als möglich unter Festhaltung der Zerlegungsmöglichkeit für R wählen, dass der Minimalwert von m_1 gleich 1 wird. Gleiches folgt auf demselben Wege für alle m_α.

Ist also überhaupt die Function R für irgend ein System allgemeiner Functionen der Dimensionen $m_1, m_2, \ldots m_\sigma$, n zerlegbar, so gilt der gleiche Satz auch für das R eines allgemeinen Systems linearer Functionen. Dieses R ist die Determinante derselben und als solche irreductibel, wie leicht zu beweisen.

Wir wählen dazu den Inductionsschluss von ν auf $(\nu + 1)$. Für eine Determinante von 2 Elementenreihen ist der Satz klar; er sei bereits für ν Reihen als richtig erkannt. Wir entwickeln die Determinante $(\nu + 1)^{\text{ten}}$ Ordnung, von welcher die Unzerfällbarkeit hergeleitet werden soll, nach den Elementen einer Spalte; da diese Elemente von einander unabhängig sind, so kann eine Zerfällung der Determinante nur dadurch eintreten, dass alle Adjuncten der Elemente der ersten Spalte einen gemeinsamen Teiler besitzen, also, da sie der Voraussetzung nach irreductibel sind, dass sie auch übereinstimmen. Das ist unmöglich, weil je zwei immer eine besondere Elementenzeile haben.

Aus alle dem folgt: Die Resultante allgemeiner Gleichungen ist irreductibel.

Es ist nun noch die Ausnahmestellung von g zu beseitigen. Bisher war sie notwendig, denn die Benutzung der Wurzelsysteme zeigt, dass es durchaus nicht klar ist, man könne g mit einem f_α vertauschen. Bei einer Variablen trat die hier fehlende Factorenzerlegung ein, so dass dabei die Gleichberechtigung von selbst heraustrat. Die Gleiche muss hier bewiesen werden.

Jede auf die eine oder die andere Art aus $f_1, \ldots g$ hergestellte Function R liefert durch ihr Verschwinden die characteristische Bedingung dafür, dass die $(\sigma + 1)$ Gleichungen

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ \ldots f_\sigma = 0,\ g = 0$$

mindestens ein gemeinsames Wurzelsystem besitzen. Verschwindet sonach die eine für irgend ein Wertsystem der Coëfficienten, so verschwindet die andere für dasselbe. Nach einem bekannten Satze stimmen somit beide in ihren irreductiblen Factoren überein, und nach dem oben bewiesenen Satze über ihre Zerfällbarkeit sind sie bis auf einen Zahlenfactor mit einander identisch. Jetzt erst ist der Ausdruck „Resultante des Gleichungssystems“ gerechtfertigt.