Zur Theorie der Elimination.

Von **E. Netto.**

Für die analytische Geometrie ist der Satz von grosser Wichtigkeit, dass, wenn ein k-facher Punkt einer Curve mit einem l-fachen einer anderen zusammenfällt, dieser Punkt als $(k.l)$-facher Schnittpunkt beider Curven zu zählen ist; und ebenso, dass, wenn ein k-facher Punkt einer Fläche, ein l-facher einer zweiten und ein m-facher einer dritten Fläche zusammenfallen, dieser Punkt als $(k.l.m)$-facher Schnittpunkt der drei Gebilde zu zählen ist. Ich will für den allgemeinen Satz, aus welchem die beiden angegebenen fliessen, einen strengen arithmetischen Beweis geben, der als Voraussetzungen nur die einfachsten Begriffe über Resultantenbildung in Anspruch nimmt.

Ich bedarf dazu einiger Vorbereitungen.

Wir wollen annehmen, jedem Summanden einer Summe sei ein beliebiges Gewicht beigelegt worden. Unter dem unteren Grenzgewicht oder kürzer, (da wir mit anderen in der Folge nicht zu thun haben), unter dem Grenzgewichte (G. G.) wollen wir ein Gewicht verstehen, unter welches kein Gewicht eines der Summanden sinken kann; die genaueste Bestimmung des G. G. beruht also in der Angabe des niedrigsten, wirklich vorkommenden Gewichtes bei den Summanden. Der Einfachheit halber beschränken wir uns von vorn herein auf nicht negative Gewichte und G. G. Bezeichnen wir nun mit $g_1, g_2, \ldots g_n$ die G. G. einer Reihe von einander unabhängiger Grössen $u_1, u_2, \ldots u_n$, wobei die u so angeordnet sind, dass kein folgendes g grösser ist als ein vorhergehendes, dann haben

$S(u_1), S(u_1 u_2), \ldots$ die G. G. $g_1, g_1 + g_2, \ldots .$

Dabei bedeuten die S symmetrische Functionen, deren Leitglied durch das Argument gegeben ist. Es folgt, dass die Coëfficienten von $(u - u_1)(u - u_2)\ldots(u - u_n) = u^n - au^{n-1} + bu^{n-2} - \ldots = 0$ der Reihe nach die G. G. $\gamma_1 = g_1$, $\gamma_2 = g_1 + g_2, \ldots$ haben. Dieser Satz lässt sich umkehren. Hat a das G. G. γ_1, so muss, da $a = S(u_1)$ ist, γ_1 das kleinste G. G. eines der von einander unabhängigen u sein; da $b = S(u_1 u_2)$ ist, muss, wenn b das G. G. γ_2 hat, $(\gamma_2 - \gamma_1)$ das nächst grössere G. G. eines zweiten der u sein, u. s. w. Wird somit eine symmetrische Function

$$S(u_1^k\, u_2^l\, u_3^m \ldots u_n^p) \qquad (k \geqq l \geqq m \geqq \ldots \geqq p)$$

im Anschluss an die letzte Gleichung gebildet, so ist das G. G. dieser Function gleich

$$k \cdot \gamma_1 + l \cdot (\gamma_2 - \gamma_1) + m \cdot (\gamma_3 - \gamma_2) + \ldots + p \cdot (\gamma_n - \gamma_{n-1}).$$

Von diesen allgemeinen Sätzen wollen wir nun Anwendungen machen. Es seien die beiden Gleichungen

$$(1)\ \ f(x) = a_r\, x^r + a_{r-1}\, x^{r-1} + \ldots + a_\rho\, x^\rho + a_{\rho-1}\, x^{\rho-1} + \ldots + a_0 = 0$$

$$(2)\ \ g(x) = b_s\, x^s + b_{s-1}\, x^{s-1} + \ldots + b_\sigma\, x^\sigma + b_{\sigma-1}\, x^{\sigma-1} + \ldots + b_0 = 0$$

gegeben. Wir erteilen den $a_r, \ldots a_\rho$; $b_s, \ldots b_\sigma$ die G. G. 0, allen folgenden Coëfficienten a_k, b_k die G. G. k, so dass ins Besondere a_0 das G. G. ρ, und b_0 das G. G. σ hat. Dann haben ρ der Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_r$ von (1) das G. G. 1, und die übrigen das G. G. 0; und es hat ferner die symmetrische Function

$$(3)\ \ S(x_1^{p1}\, x_2^{p2} \ldots x_r^{pr}) \text{ das G. G. } (p_{r-\rho+1} + p_{r-\rho+2} + \ldots + p_r).$$

Wir bilden nun die Resultante von (1) und (2)

$$(4)\ \ g(x_1)\, g(x_2) \ldots g(x_r) = [b_s x_1^s + b_{s-1}\, x_1^{s-1} + \ldots + b_\sigma\, x_1^\sigma + \ldots + b_0] \ldots\ldots$$

und suchen für sie das G. G. zu bestimmen. Die einzelnen Summanden des ausgeführten Produktes haben die Form

$$(5)\qquad b_\alpha\, b_\beta\, b_\gamma \ldots S(x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \ldots).$$

Die Summanden der einzelnen Factoren rechts in (4) zerlegen wir in zwei Teile; die ersten erstrecken sich vom Anfangsgliede $b_s\, x_1^s$ bis zu $b_\sigma\, x^\sigma$, die zweiten von da bis zu Ende. Diese Einteilung sei in jedem Factor durchgeführt. Tritt nun in einen Summanden von der Form (5) ein Glied der ersten Art ein (etwa $\alpha > \sigma$), so wird sein G. G. sicher nicht vermehrt, wenn man dieses Glied durch das entsprechende $b_\sigma x_1^\sigma$ ersetzt; denn das alte wie das neue b haben das G. G. Null, und der Exponent von x_1, der nach

(3) möglicherweise beim G. G. mitbestimmend auftritt, vermindert sich. Kommt ferner ein Glied der zweiten Art in (5) vor (etwa $\beta > \sigma$), so wird das G. G. des Summanden sicher nicht vermehrt, wenn auch dieses Glied durch das entsprechende $b_\sigma x_2^\sigma$ ersetzt wird. Denn der Exponent von x_2 der möglicherweise mitbestimmend wirkt, wird nur um so viele Einheiten erhöht, als das G. G. des b, welches sicher Einfluss besitzt, sich vermindert. Daraus folgt, dass

$$b^r S(x_1 x_2 \ldots x_r)^\sigma$$

das niedrigste G. G. unter allen möglichen Ausdrücken (5) hat; d. h. es ist $\rho\sigma$ das G. G. der Resultante.

Unsere allgemeinen Annahmen über die G. G. werden durch die folgenden Festsetzungen nicht gestört. Wir nehmen

$$a_\varkappa = a_{\varkappa 0} + a_{\varkappa 1} y + \ldots + a_{\varkappa, r-\varkappa} y^{r-\varkappa} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots r),$$

$$b_\varkappa = b_{\varkappa 0} + b_{\varkappa 1} y + \ldots + b_{\varkappa, s-\varkappa} y^{s-\varkappa} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots s),$$

schreiben statt f und g jetzt

$$(6) \quad f(x, y) = \Sigma a_{\varkappa\lambda} x^\varkappa y^\lambda \qquad (\varkappa + \lambda = 0, 1, \ldots r)$$

$$(7) \quad g(x, y) = \Sigma b_{\varkappa\lambda} x^\varkappa y^\lambda \qquad (\varkappa + \lambda = 0, 1, \ldots s),$$

geben dem y das Gewicht 1, allen $a_{\varkappa\lambda}$ $(\varkappa + \lambda \geqq \rho)$ und $b_{\varkappa\lambda}$ $(\varkappa + \lambda \geqq \sigma)$ die G. G. Null; jedem $a_{\varkappa\lambda}$ $(\varkappa + \lambda < \sigma)$ das G. G. $(\rho - \varkappa - \lambda)$ und jedem $b_{\varkappa\lambda}$ $(\varkappa + \lambda < \sigma)$ das G. G. $(\sigma - \varkappa - \lambda)$.

Dann besitzt die Eliminante von (6) und (7), welche als ganze Function von y auftritt, nach den obigen Resultaten (in den Coëfficienten und in y zusammengerechnet) das G. G. $\rho\sigma$. Dasselbe bleibt gültig, wenn wir vermittels der Liouville'schen Substitution, in der u_1, u_2 beliebige Parameter bedeuten,

$$(8) \quad \omega = u_1 x + u_2 y$$

ω statt x in (6) und (7) einführen, und dann y eliminiren. Setzen wir die Eliminantengleichung

$$\omega^{rs} + A_1 \omega^{rs-1} + \ldots + A_{\rho\sigma} \omega^{\rho\sigma} + A_{\rho\sigma+1} \omega^{\rho\sigma-1} + \ldots + A_{rs} = 0,$$

so folgt, dass $\rho\sigma$ der Wurzeln ω das G. G. 1 und die anderen das G. G. 0 haben. Gehen wir mittels (8) zu den x, y zurück, so finden wir, dass beide Coordinaten für $\rho\sigma$ der Wurzeln (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \ldots (x_{rs}, y_{rs})$ das G. G. 1 haben, während bei den anderen die G. G. 0 auftreten. Folglich hat

$$(9) \quad S(x_1^{p_1} y_1^{q_1} x_2^{p_2} y_2^{q_2} \ldots) \qquad (p_1 + q_1 > p_2 + q_2 > \ldots)$$

das G. G.

$$(10) \quad (p_{rs-\rho\sigma+1} + q_{rs-\rho\sigma+1}) + \ldots + (p_{rs} + q_{rs}).$$

Wir wollen hier bemerken, dass wir für den Fall von zwei Variablen das zu beweisende Thurem bereits als richtig erkannt haben, und zwar in der Form: Erteilt man in (6) und (7) den Coëfficienten solche G. G., dass bei den Gewichten 1 für x und y das G. G. von f gleich ρ und das von g gleich σ wird, dann haben die Coordinaten von $\rho\sigma$ der Wurzeln des Systems $f = 0$, $g = 0$ die G. G. 1.

Wir nehmen jetzt zu (6) und (7) noch eine dritte Gleichung hinzu

$$(11) \quad h(x, y) = \Sigma c_{\varkappa\lambda} x^{\varkappa} y^{\lambda} \qquad (\varkappa + \lambda = 0, 1, \ldots t)$$

und geben den $c_{\varkappa\lambda}$ $(\varkappa + \lambda \geqq \tau)$ die G. G. 0 und den $c_{\varkappa\lambda}$ $(\varkappa + \lambda < \tau)$ die G. G. $(\tau - \varkappa - \lambda)$. Dann bilden wir wieder die Resultante

$$(12) \quad h(x_1, y_1) \cdot h(x_2, y_2) \ldots h(x_{rs}, y_{rs})$$

und verfahren, um ihr G. G. zu berechnen, genau wie im vorigen Falle bei zwei Gleichungen. Wir teilen also die Glieder von (11) in zwei Teile, deren erster alle die enthält, bei denen $\varkappa + \lambda \geqq \tau$ ist. Tritt in einem Summanden

$$c_{\alpha\beta} c_{\gamma\delta} \ldots S(x_1^{\alpha} y_1^{\beta} \cdot x_2^{\gamma} y_2^{\delta} \ldots)$$

von (12) ein Summand des ersten Teiles auf, so kann man ihn ohne Erhöhung des G. G. durch einen solchen ersetzen, bei dem $\varkappa + \lambda = \tau$ ist. Das Gleiche tritt, aus denselben Gründen wie oben, bei einem Summanden des zweiten Teiles auf; so folgt, dass

$$c_{\varkappa\lambda}^{rs} (x_1 x_2 \ldots x_{rs})^{\varkappa} (y_1 y_2 \ldots y_{rs})^{\lambda} \qquad (\varkappa + \lambda = \tau)$$

das G. G. liefert. Dies ist also nach (9) und (10) $\rho\sigma(\varkappa + \lambda) = \rho\sigma\tau$.

Unsere allgemeinen Annahmen über die G. G. werden durch die folgenden Festsetzungen nicht gestört. Wir nehmen

$$a_{\varkappa\lambda} = a_{\varkappa\lambda 0} + a_{\varkappa\lambda 1} z + a_{\varkappa\lambda 2} z^2 + \ldots + a_{\varkappa\lambda,\, r-\varkappa-\lambda} z^{r-\varkappa-\lambda}$$
$$b_{\varkappa\lambda} = b_{\varkappa\lambda 0} + b_{\varkappa\lambda 1} z + b_{\varkappa\lambda 2} z^2 + \ldots + b_{\varkappa\lambda,\, s-\varkappa-\lambda} z^{s-\varkappa-\lambda}$$
$$c_{\varkappa\lambda} = c_{\varkappa\lambda 0} + c_{\varkappa\lambda 1} z + c_{\varkappa\lambda 2} z^2 + \ldots + c_{\varkappa\lambda,\, t-\varkappa-\lambda} z^{t-\varkappa-\lambda}$$

schreiben statt f, g, h jetzt

$$f(x, y, z) = \Sigma a_{\varkappa\lambda\mu} x^{\varkappa} y^{\lambda} z^{\mu} \qquad (\varkappa + \lambda + \mu = 0, 1, \ldots r)$$
$$(12) \quad g(x, y, z) = \Sigma b_{\varkappa\lambda\mu} x^{\varkappa} y^{\lambda} z^{\mu} \qquad (\varkappa + \lambda + \mu = 0, 1, \ldots s)$$
$$h(x, y, z) = \Sigma c_{\varkappa\lambda\mu} x^{\varkappa} y^{\lambda} z^{\mu} \qquad (\varkappa + \lambda + \mu = 0, 1, \ldots t)$$

und geben den $a_{\varkappa\lambda\mu}$ das G. G. $\rho - (\varkappa + \lambda + \mu)$ oder 0, je nachdem die erste Differenz positiv oder nicht positiv ist; und ähnlich verfahren wir mit den $b_{\varkappa\lambda\mu}$, $c_{\varkappa\lambda\mu}$ und $\sigma - (\varkappa + \lambda + \mu)$ bezw.

$\tau-(\varkappa+\lambda+\mu)$. Ferner soll z das G. G. 1 haben. Dann hat nach unserem obigen Resultate die Eliminante R(z) das G. G. $\rho\sigma\tau$. Dasselbe bleibt bestehen, wenn wir vermittels der Liouville-schen Substitution

$$\omega = u_1x + u_2y + u_3z$$

an Stelle von z in (12) ω einführen und dann die Eliminante $R(\omega)$ bilden. Daraus folgt dann wie oben, dass $\rho\sigma\tau$ der Wurzeln des Systems (12) in allen drei Coordinaten die G. G. 1 besitzen. Folglich gelten, entsprechend modificirt, die obigen Sätze über symmetrische Functionen u. s. w.

In derselben Weise können wir zu mehr Variablen aufsteigen, indem immer nur die verwendeten Schlüsse wiederholt werden. Unsere Methode zeigt uns also die Gültigkeit des allgemeinen Satzes: Geben wir den Variablen z_1, z_2, ... z_n in den Gleichungen

$$(13) \quad f_\lambda(z_1, z_2, \ldots z_m) = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots m)$$

die Gewichte 1 und den Coëfficienten solche G. G., dass jedes f_λ das G. G. ρ_λ erhält, dann haben $(\rho_1 . \rho_2 \ldots \rho_m)$ der Wurzeln des Systems (13) in ihren m Coordinaten das G. G. 1.

Von diesem allgemeinen Satze machen wir eine Anwendung, indem wir alle diejenigen Coëfficienten in jedem f_λ gleich Null setzen, deren zugehörige Potenz-Produkte geringere Dimension haben als ρ_λ beträgt. Die übrigen Coëfficienten nehmen wir als constant mit dem Gewichte 0 an. Tragen wir wieder statt z_m

$$\omega = u_1z_1 + u_2z_2 + \ldots + u_mz_m$$

ein und berechnen die Eliminante $R(\omega)$, so ist ihr G. G. auch $\rho_1\rho_2 \ldots \rho_m$; da aber alle hier vorkommenden Coëfficienten ganze Functionen unserer Constanten sind, so ist dies nur möglich, wenn Glieder ω^λ, bei denen $\lambda < (\rho_1\rho_2 \ldots \rho_m)$ ist, überhaupt nicht auftreten. Das zeigt: Ist (0, 0, ... 0) eine ρ_λ-fache Wurzel von $f_\lambda = 0$ $(\lambda = 1, 2, \ldots m)$, dann ist (0, 0, ... 0) eine $(\rho_1\rho_2 \ldots \rho_m)$-fache Wurzel des Gleichungs-Systems (13).

Durch diesen Satz haben wir nur eine untere Grenze für die Multiplicität angegeben. Es lassen sich aber sofort Fälle construiren, für welche diese Grenze auch nicht überschritten wird. Dazu reicht es z. B. aus, jedes f_λ nur von der einen Variablen z_λ abhängig zu machen und dafür zu sorgen, dass $z_\lambda = 0$ genau eine ρ_λ-fache Wurzel von $f_\lambda = o$ wird. In diesem Falle kann offenbar keine höhere Multiplicität erreicht werden, als die oben angegebene. Daraus schliessen wir: das obige Theorem giebt im allgemeinen Falle die wahre Multiplicität.

Was von dem besonderen Punkte $(0, 0, \ldots 0)$ bewiesen wurde, gilt, wie man durch Coordinatenverschiebung erkennt, für jeden beliebigen Punkt $(q_1, q_2, \ldots q_m)$, so dass wir sagen können: Ist $(q_1, q_2, \ldots q_m)$ eine ρ_λ-fache Wurzel der Gleichung $f_\lambda = 0$ $(\lambda = 1, 2, \ldots m)$, dann ist $(q_1, q_2, \ldots q_m)$ im allgemeinen Falle genau eine $(\rho_1 \, \rho_2 \ldots \rho\ )$-fache Wurzel des Systems (13).