ZUR LEHRE VON DER DREHUNG DER ERDE

von

E. Zinner.

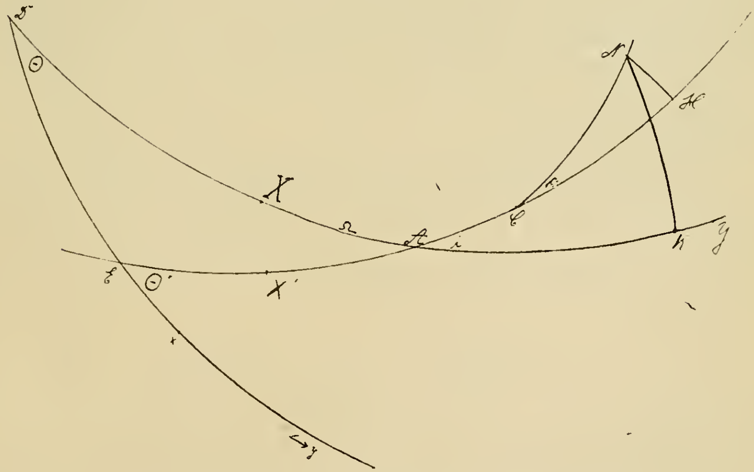
Mit 1 Textfigur.

Druck von J. M. REINDL (Bamberger Tagblatt-Verlag).

Zur Lehre von der Drehung der Erde.

Bei einer Untersuchung über die Drehung der Erde handelt es sich in erster Linie um die Berechnung der Eulerschen Winkel ψ, Θ und φ, die die Lage des beweglichen Äquators zu einer im Raume festen Ebene bestimmen.

Stelle die Ebene X Y (siehe Figur) die Ekliptik zur Zeit 1850,0 und die Ebene x y den Äquator zur Zeit t



dar. Bezeichnen wir mit X den Frühjahrstagundnachtgleichenpunkt des Jahres 1850, so ist ψ der entgegengesetzt zu der Richtung X Y gezählte Winkel zwischen X und dem absteigenden Knoten D des beweglichen Äquators. Wir nennen Θ den von der festen Ekliptik und dem beweglichen Äquator gebildeten Winkel XDE und φ den in der Richtung x y gezählten Winkel zwischen der im

Körper festen x Achse und der den Erdmittelpunkt mit D verbindenden Graden. In der Schrift „Eine neue Methode zur Behandlung des Rotationsproblems“* hat Professor Charlier zur Behandlung dieses Gegenstandes die neuen Veränderlichen α_i und u_i eingeführt, die folgende Bedeutung haben.

$\frac{\alpha_2}{C}$ = Rotationsgeschwindigkeit des Körpers um die Zentralachse

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \cos \Theta_0 \qquad - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \cos \varepsilon ,$$

wo Θ_0 und ε die Winkel sind, die die Zentralachse mit der im Körper festen z Achse und der im Raume festen Z Achse bildet.

$u_1 - 90^0$ = Länge der Zentralachse auf der im Körper festen x y Ebene.

$u_2 + 180^0$ = Winkel zwischen der durch die Zentralachse und die im Raume festen Z Achse und der durch die Zentralachse und der im Körper festen Z Achse gelegten Ebene.

$u_3 + 90^0$ = Länge der Zentralachse auf der im Raume festen X Y Ebene.

Die drei Eulerschen Winkel hängen mit diesen Veränderlichen durch die folgenden Gleichungen zusammen:

$$(1) \quad \varphi = - u_1 - u_2 + \Sigma (-1)^{s+1} \frac{1}{s} \varkappa_1^s \sin su_2$$
$$+ \Sigma (-1)^{s+1} \frac{1}{s} \varkappa_2^s \sin su_2 ,$$

$$(1^*) \quad \psi = - u_3 - \Sigma (-1)^{s+1} \frac{1}{s} \varkappa_1^s \sin su_2$$
$$+ \Sigma (-1)^{s+1} \frac{1}{s} \varkappa_2^s \sin su_2 ,$$

wo

$$\varkappa_1 = - \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{tg} \frac{\Theta_0}{2} \qquad \varkappa_2 = \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{tg} \frac{\Theta_0}{2} ,$$

* Meddelande från Lunds astronomiska observatorium Nr. 31.

und

(I**) $\cos\Theta = \cos\varepsilon\cos\Theta_0 - \sin\varepsilon\sin\Theta_0\cos u_2$.

Die Veränderlichen α_i und u_i sind kanonische Veränderliche, und es bestehen zwischen ihnen die folgenden Gleichungen

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\delta H}{\delta u_1} \qquad \frac{du_1}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta\alpha_1}$$

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{\delta H}{\delta u_2} \qquad \frac{du_2}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta\alpha_2}$$

$$\frac{d\alpha_3}{dt} = \frac{\delta H}{\delta u_3} \qquad \frac{du_3}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta\alpha_3},$$

wo H gleich T—U oder gleich der Differenz zwischen der lebendigen Kraft des sich drehenden Körpers und dem Potential der äußeren Kräfte ist. Die Erde sei ein starres Drehungsellipsoid mit den nach der Größe geordneten Trägheitsmomenten A, B, C und den drei Hauptträgheitsachsen x, y, z. Die störenden Körper seien die Sonne und der Mond. Dann hat H den folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned} H = {} & \frac{\alpha_2^2}{2C} + \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{2C} k_1 \sin^2 u_1 + \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{2C} k_2 \cos^2 u_1 \\ (2) \qquad & - \frac{3}{2}\frac{m_1}{r_1^3}\Big[k_1 A \cos^2\alpha_1 + k_2 B \cos^2\beta_1\Big] \\ & - \frac{3}{2}\frac{m_2}{r_2^3}\Big[k_1 A \cos^2\alpha_2 + k_2 B \cos^2\beta_2\Big]_1 \end{aligned}$$

wo

$$k_1 = \frac{C-A}{A} \qquad k_2 = \frac{C-B}{B}$$

sind und m_1 bez. m_2 die Masse von Sonne bez. Mond und α bez. β den Winkel zwischen dem radius vektor r des störenden Körpers und den Hauptträgheitsachsen x bez. y darstellen. Die Größen $\cos^2\alpha$ und $\cos^2\beta$ sind in Meddelande från Lunds astronomiska observatorium Nro. 33 als Funktionen der neuen Veränderlichen gegeben. Wie der Ausdruck für das Potential zeigt, hängt der Einfluß der störenden Körper auf die Drehung der Erde von ihrer Masse und Entfernung von der Erde ab, was uns berechtigt, den Einfluß der Planeten auf die Drehung der Erde nicht zu berücksichtigen.

In erster Näherung kann man A mit B zusammenfallen lassen. Dann wird H

$$H = \frac{\alpha_2{}^2}{2\,C} + \frac{\alpha_2{}^2 - \alpha_1{}^2}{2\,C}\,k_1 - \frac{3}{2}\,\frac{m_1}{r_1{}^3}\left(k_1\,A - k_1\,A\cos^2\gamma_1\right)$$

$$(3) \qquad - \frac{3}{2}\,\frac{m_2}{r_2{}^3}\left(k_1\,A - k_1\,A\cos^2\gamma_2\right)$$

$$= \frac{\alpha_2{}^2}{2\,C} + \frac{\alpha_2{}^2 - \alpha_1{}^2}{2\,C}\,k_1 + U_1$$

wo

$$U_1 = \frac{3}{2}\,\frac{m_1}{r_1{}^3}\,k_1\,A\cos^2\gamma_1 + \frac{3}{2}\,\frac{m_2}{r_2{}^3}\,k_1\,A\cos^2\gamma_2$$

Der von den Veränderlichen unabhängige Teil des Potentials kann weggelassen werden.

Da H die Veränderliche u_1 nicht enthält, so ist

$$\alpha_1 = \text{konstant.}$$

Zur Bestimmung von α_2 suchen wir zuerst die Größe U_1 zu berechnen. Bezeichnet man mit ϱ_1 und ϱ_2 die mittleren Entfernungen der Sonne und des Mondes von der Erde und setzt

$$\frac{m_1}{\varrho_1{}^3} = n_1{}^2 \qquad \text{und} \qquad \lambda = \frac{m_2}{m_1}\,\frac{\varrho_1{}^3}{\varrho_2{}^3},$$

so wird

$$U = \frac{3}{2}A\,.\,k_1\,n_1{}^2\left[\left(\frac{\varrho_1}{r_1}\right)^3\cos^2\gamma_1 + \lambda\left(\frac{\varrho_2}{r_2}\right)^3\cos^2\gamma_2\right]$$

$$= \frac{3}{2}\,A.k_1\,(1+\lambda)\,n_1{}^2$$

und, wenn man die Bezeichnuug $\omega = \frac{\alpha_2}{C}$ einführt,

$$\frac{U}{T} = 3\,k_1\,(1+\lambda)\left(\frac{n_1}{\omega}\right)^2 < \frac{1}{400\,000}$$

Wir können aber in erster Näherung den Einfluß des störenden Körpers vernachlässigen. Dann ergibt sich

$$\alpha_2 = \text{konst.}$$

Also ist infolge $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \text{konst.}$ der Winkel zwischen der Zentralachse und der im Körper festen kleinsten Hauptträgheitsachse z unveränderlich. Der Abstand der Zentralachse von der jeweiligen Drehungsachse ist nach Charliers Untersuchung sehr gering. Da nun die Beobachtungen über die Polschwankungen zeigen, daß der Winkel zwischen der Figurachse und der jeweiligen Drehungsachse höchstens 0,"3 beträgt, so weicht der Wert des Winkels Θ_0 nicht viel davon ab. Man kann also

$$\cos \Theta_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 1 \qquad \sin \Theta_0 = 0$$

setzen.

Für u_2 erhält man unter vorläufiger Vernachlässigung von U_1

$$\frac{d u_2}{dt} = - \frac{\alpha_2}{C} - \frac{\alpha_2}{C} k_1$$

$$u_2 = - \omega (1 + k_1) t + \text{const.}$$

Setzt man diesen Wert von u_2 in den Ausdruck* für $\cos^2\gamma$ ein, so wird infolge der Integration die Größe $(1 + k_1)$ in den Nenner kommen. Zugleich sieht man aber, daß alle Glieder in $\cos^2\gamma$, in denen u_2 als Argument steht, in ihren Argumenten $\sin \Theta_0$ oder $\sin^2 \Theta_0$, also völlig zu vernachlässigende Größen, enthalten. Daher ist für $A = B$ die Größe ω unveränderlich und der von der Erde in der Zeit t beschriebene Winkel gleich ω t + konst.

Für u_1 erhält man

$$\frac{du_1}{dt} = + \frac{\alpha_1}{C} k_1 - \frac{\delta U_1}{\delta \alpha_1},$$

folglich

$$u_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \omega k_1 t - \int \frac{\delta U_1}{\delta \alpha_1}$$

Es war

$$u_2 = - \omega (1 + k_1) t - \int \frac{\delta U_1}{\delta \alpha_2}$$

Der Winkel φ berechnet sich daraus unter Vernachlässigung der periodischen Glieder in φ

$$\varphi = - u_1 - u_2 = \text{konst.} + \omega t + \int \left(\frac{\delta U_1}{\delta \alpha_1} + \frac{\delta U_1}{\delta \alpha_2} \right)$$

* Meddelande 33.

Betrachtet man nun die Koeffizienten der einzelnen Glieder in U_1, so zeigt sich, daß, falls nach der Differentiation $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 1$ gesetzt wird,

$$\frac{\delta U_1}{\delta \alpha_1} + \frac{\delta U_1}{\delta \alpha_2} = - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \cdot \frac{\delta U_1}{\delta \alpha_3} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \frac{du_3}{dt}$$

und daher

$$\varphi = \text{const} + \omega\, t + \int \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \frac{du_3}{dt}$$

ist.

Es bleiben als einzige Veränderliche nur α_3 und u_3 übrig. Da T diese Größen nicht enthält, so ist

$$\frac{d\alpha_3}{dt} = \frac{\delta U_1}{\delta u_3} \qquad \frac{du_3}{dt} = - \frac{\delta U_1}{\delta \alpha_3}$$

Vernachlässigt man in U_1 alle mit $\sin \Theta_0$ oder $\sin^2 \Theta_0$ multiplizierten Glieder und setzt in den Koeffizienten der übrigbleibenden Glieder $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 1$, so erhält man

$$\begin{aligned}
U_1 = \frac{3}{2}\, n_1^2 \,.\, k_1 \,.\, t \Bigg\{ \left(\frac{\varrho_1}{r_1}\right)^3 \Bigg[&- \frac{1}{2} \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2} \left(\frac{x_1^2}{r_1^2} + \frac{y_1^2}{r_1^2}\right) \\
&- \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right) \left(\frac{x_1^2}{r_1^2} - \frac{y_1^2}{r_1^2}\right) \cos 2\, u_3 + \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2} \cdot \frac{z_1^2}{r_1^2} \\
&- \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right) \frac{2 x_1\, y_1}{r_1^2} \sin 2\, u_3 \\
&+ 2 \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \sqrt{1 - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}} \left(\frac{x_1\, z_1}{r_1^2} \sin u_3 - \frac{y_1\, z_1}{r_1^2} \cos u_3\right) \Bigg] \\
+ \lambda \left(\frac{\varrho_2}{r_2}\right)^3 \Bigg[&- \frac{1}{2} \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2} \left(\frac{x_2^2}{r_2^2} + \frac{y_2^2}{r_2^2}\right) \\
&- \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right) \left(\frac{x_2^2}{r_2^2} - \frac{y_2^2}{r_2^2}\right) \cos 2\, u_3 + \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2} \frac{z_2^2}{r_2^2} \\
&- \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right) \frac{2 x_2\, y_2}{r_2^2} \sin 2\, u_3 \\
&+ 2 \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \sqrt{1 - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}} \left(\frac{x_2\, z_2}{r_2^2} \sin u_3 - \frac{y_2\, z_2}{r_2^2} \cos u_3\right) \Bigg] \Bigg\}
\end{aligned} \tag{4}$$

Die Größen x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 stellen die Koordinaten der Sonne und des Mondes dar. Sie sollen zuerst berechnet werden.

Stelle in der Figur die Ebene E A H die Ekliptik zur Zeit t und C N die Mondbahn dar. Die Länge X A des aufsteigenden Knotens der beweglichen Ekliptik auf der festen von X aus gerechnet möge mit ☊, der Winkel Y A H zwischen der festen und der beweglichen Ekliptik mit i und der Winkel H C N zwischen der beweglichen Ekliptik und der Mondbahn mit c bezeichnet werden. Der Mond stehe in N.

Wenn X K = l_2 und K N = d_2 gesetzt sind, so ist

$$(5)\qquad \begin{aligned} \frac{x_2}{r_2} &= \cos d_2 \cos l_2 = \cos d_2 \cos (l_2 - ☊) \cos ☊ \\ &\quad - \cos d_2 \sin (l_2 - ☊) \sin ☊ \\ \frac{y_2}{r_2} &= \cos d_2 \sin l_2 = \cos d_2 \sin (l_2 - ☊) \cos ☊ \\ &\quad + \cos d_2 \cos (l_2 - ☊) \sin ☊ \\ \frac{z_2}{r_2} &= \sin d_2. \end{aligned}$$

Setzt man weiter

$$X\ A + A\ H = \lambda_2 \quad \text{und} \quad N\ H = \beta_2,$$

so erhält man durch Vergleichung folgende Gleichungen

$$(6)\qquad \begin{aligned} \cos d_2 \cos (l_2 - ☊) &= \cos \beta_2 \cos (\lambda_2 - ☊) \\ \cos d_2 \sin (l_2 - ☊) &= \cos \beta_2 \sin (\lambda_2 - ☊) \cos i \\ &\quad - \sin \beta_2 \sin i \\ \sin d_2 &= \cos \beta_2 \sin (\lambda_2 - ☊) \sin i \\ &\quad + \sin \beta_2 \cos i \end{aligned}$$

Aus dem Dreieck H C N erhält man nach Einführung der Größe v_2 = X A + A C + C N die Gleichungen

$$\begin{aligned} \cos \beta_2 \cos (\lambda_2 - N) &= \cos (v_2 - N) \\ \cos \beta_2 \sin (\lambda_2 - N) &= \sin (v_2 - N) \cos c \\ \sin \beta_2 &= \sin (v_2 - N) \sin c\ , \end{aligned}$$

aus denen folgt

$$\cos \beta_2 \cos (\lambda_2 - ☊) = \cos (v_2 - ☊) \cos^2 \frac{c}{2} + \sin^2 \frac{c}{2} \cos (v_2 + ☊ - 2\,N)$$

$$\cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - \Omega) = \cos^2\frac{c}{2}\sin(v_2 - \Omega)$$
$$- \sin^2\frac{c}{2}\sin(v_2 + \Omega - 2\,N)$$
$$\sin\beta_2 = \sin c \sin(v_2 - N).$$

Diese Gleichungen werden in (6) eingesetzt. Es ergibt sich nach Vernachlässigung von sin i sin c u. A.

$$\cos d_2 \cos(l_2 - \Omega) = \cos^2\frac{c}{2}\cos(v_2 - \Omega)$$
$$+ \sin^2\frac{c}{2}\cos(v_2 + \Omega - 2\,N)$$

$$\text{(7)} \quad \cos d_2 \sin(l_2 - \Omega) = \cos^2\frac{c}{2}\sin(v_2 - \Omega)$$
$$- \sin^2\frac{c}{2}\sin(v_2 + \Omega - 2\,N)$$

$$\sin d_2 = \sin i \cos^2\frac{c}{2}\sin(v_2 - \Omega)$$
$$+ \cos i \sin c \sin(v_2 - N)$$

In U_1 kommen die Größen $\frac{x_2^2}{r_2^2} + \frac{y_2^2}{r_2^2}$, $\frac{z_2^2}{r_2^2}$, $\left(\frac{x_2^2}{r_2^2} - \frac{y_2^2}{r_2^2}\right)\cos 2\,u_2 + \frac{2\,x_2\,y_2}{r_2^2}\sin 2\,u_3$ und $\frac{x_2\;z_2}{r_2^2}\sin u_3 - \frac{y_2\;z_2}{r_2^2}\cos u_3$ vor. Diese sollen durch die Ausdrücke (5) für $\frac{x_2}{r_2}$, $\frac{y_2}{r_2}$ und $\frac{z_2}{r_2}$ ausgedrückt werden. Dies gibt

$$\frac{x_2^2}{r_2^2} + \frac{y_2^2}{r_2^2} = 1 - \sin^2 d_2$$

$$\frac{z_2^2}{r_2^2} = \sin^2 d_2$$

$$\left(\frac{x_2^2}{r_2^2} - \frac{y_2^2}{r_2^2}\right)\cos 2\,u_3 + \frac{2x_2\,y_2}{r_2^2}\sin 2\,u_3 =$$
$$\cos^2 d_2 \cos(2l_2 - 2\,\Omega)\cos(2\,\Omega - 2\,u_3)$$
$$- \cos^2 d_2 \sin(2\,l_2 - 2\,\Omega)\sin(2\,\Omega - 2\,u_3)$$

$$\frac{x_2\;z_2}{r_2^2}\sin u_3 - \frac{y_2\;z_2}{r_2^2}\cos u_3 =$$
$$- \cos d_2 \cos(l_2 - \Omega)\sin d_2 \sin(\Omega - u_3)$$
$$- \cos d_2 \sin(l_2 - \Omega)\sin d_2 \cos(\Omega - u_3).$$

Durch Einsetzen von (7) in diese Formeln ergibt sich unter Vernachlässigung der mit $\sin^3 \frac{c}{2}$, $\sin^4 \frac{c}{2}$, $\sin^2 i$, $\sin i \sin c$ und $\sin i \sin^2 \frac{c}{2}$ multiplizierten Grössen

$$\frac{x_2^2}{r_2^2} + \frac{y_2^2}{r_2^2} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 c \cos^2 i + \frac{1}{2} \sin^2 c \cos^2 i \cos (2 v_2 - 2 N)$$

$$\frac{z_2^2}{r_2^2} = \frac{1}{2} \sin^2 c \cos^2 i - \frac{1}{2} \sin^2 c \cos^2 i \cos (2 v_2 - 2 N)$$

$$\left(\frac{x_2^2}{r_2^2} - \frac{y_2^2}{r_2^2}\right) \cos 2 u_3 + \frac{2 x_2 y_2}{r_2^2} \sin 2 u_3 =$$

$$\cos^4 \frac{c}{2} \cos (2 v_2 - 2 u_3)$$

$$(8) \qquad + 2 \sin^2 \frac{c}{2} \cos^2 \frac{c}{2} \cos (2 N - 2 u_3)$$

$$\frac{x_2 z_2}{r_2^2} \sin u_3 - \frac{y_2 z_2}{r_2^2} \cos u_3 =$$

$$- \sin i \cos^4 \frac{c}{2} \cos (2 v_2 - \Omega - u_3)$$

$$+ \sin c \cos^4 \frac{c}{2} \cos (\Omega - u_3)$$

$$- \cos i \sin c \cos^2 \frac{c}{2} \cos (2 v_2 - N - u_3)$$

$$+ \cos i \sin c \cos^2 \frac{c}{2} \cos (N - u_3).$$

Die entsprechenden Ausdrücke für die Sonnenkoordinaten erhält man, indem man c gleich Null setzt.

Es erübrigt noch, in dem Ausdrucke $\cos^4 \frac{c}{2} \cos (2 v_2 - 2 u_3)$ auf die nicht kreisförmige Bahn des Mondes bez. der Sonne Rücksicht zu nehmen.

Bezeichnet man mit $n_2 t + \mu_2$ die mittlere Länge des Mondes in seiner Bahn und mit ω_2 die Länge seines Perihels, beide von X aus gerechnet, und nennt die Excentrizität der Mondbahn e_2, so ist

$$v_2 = n_2 t + \mu_2 + 2 e_2 \sin (n_2 t + \mu_2 - \omega_2) + \frac{5}{4} e_2^2 \sin (2 n_2 t + 2 \mu_2 - 2 \omega_2)$$

(9) $$\cos (2 v_2 - 2 u_3) = (1 - 4 e_1^2) \cos (2 n_2 t + 2 \mu_2 - 2 u_3) - 2 e_2 \cos (n_2 t + \mu_2 + \omega_2 - 2 u_3) + 2 e_2 \cos (3 n_2 t + 3 \mu_2 - \omega - 2 u_3) + \frac{13}{4} e_2^2 \cos (4 n_2 t + 4 \mu_2 - 2 \omega_2 - 2 u_3) + \frac{3}{4} e_2^2 \cos (2 \omega_2 + 2 u_3)$$

Die ekliptische Bewegung gibt

(10) $$\left(\frac{\varrho_2}{r_2}\right)^3 = 1 + \frac{3}{2} e_2^2 + 3 e_2 \cos (n_2 t + \mu_2 - \omega_2) + \frac{9}{2} e_2^2 \cos (2 n_2 t + 2 \mu_2 - 2 \omega_2) \quad .$$

Für $\left(\frac{\varrho_2}{r_2}\right)^3 \cos (2 v_2 - 2 u_3)$ erhält man also

(11) $$\left(\frac{\varrho_2}{r_2}\right)^3 \cos (2 v_2 - 2 u_3) = (1 - \frac{5}{2} e_2^2) \cos (2 n_2 t + 2\mu_2 - 2 u_3) - \frac{e_2}{2} \cos (n_2 t + \mu_2 + \omega_2 - 2 u_3) + \frac{7}{2} e_2 \cos (3 n_2 t + 3 \mu_2 - \omega - 2 u_3) + \frac{17}{2} e_2^2 \cos (4 n_2 t + 4 \mu_2 - 2 u_2 - 2 u_3)$$

und einen ähnlichen Ausdruck für das Sonnenglied $\left(\frac{\varrho_1}{r_1}\right)^3 \cos (2 v_1 - 2 u_3)$.

Für die übrigen Glieder in (8) kann man $\left(\frac{\varrho_2}{r_2}\right)^3$ gleich 1 annehmen. Drückt man $\frac{\sin}{\cos} i$ und $\frac{\sin}{\cos} c$ durch Reihen aus und vernachlässigt c^3, $i c$, i^2 und höhere Potenzen, so bekommt U_1, wenn man die Ausdrücke (8) in das Potential einsetzt, folgendes Aussehen

$$
\begin{aligned}
U_1 = \frac{3}{2} n_1{}^2 k_1 A \Big\{ & -\frac{1}{2}\frac{\alpha_3{}^2}{\alpha_2{}^2}\left[1 + \frac{3}{2} e_1{}^2 + 3 e_1 \cos(n_1 t + \mu_1 - \omega_1)\right] \\
& - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha_3{}^2}{\alpha_2{}^2}\right)\Big[\cos(2\, n_1\, t + 2\,\mu_1 - 2\, u_3) \\
& - \frac{1}{2}\, e_1 \cos(n_1\, t + \mu_1 + \omega_1 - 2\, u_3)\Big] \\
& - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\sqrt{1 - \frac{\alpha_3{}^2}{\alpha_2{}^2}}\; i \cos(\Omega - u_3)\Big\} \\
+ \frac{3}{2} n_1{}^2 k_1 A \lambda \Big\{ & -\frac{1}{2}\frac{\alpha_3{}^2}{\alpha_2{}^2}\Big[1 - \frac{3}{2} c^2 + \frac{3}{2}\, e_2{}^2 \\
& + 3 e_2 \cos(n_2\, t + \mu_2 - \omega_2) \\
& + \frac{3}{2}\, c^2 \cos(2\, v_2 - 2\, N)\Big] \\
& - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha_3{}^2}{\alpha_2{}^2}\right)\Big[\cos(2 n_2\, t + 2\,\mu_1 - 2 u_3) \\
& - \frac{1}{2}\, e_2 \cos(n_2\, t + \mu_2 + \omega_2 - 2\, u_3)\Big] \\
& - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\sqrt{1 - \frac{\alpha_3{}^2}{\alpha_2{}^2}}\; i \cos(\Omega - u_3) \\
& - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\sqrt{1 - \frac{\alpha_3{}^2}{\alpha_2{}^2}}\; c \cos(N - u_3) \\
& - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\alpha_3{}^2}{\alpha_2{}^2}\right) c^2 \cos(2\, N - 2\, u_3)\Big\},
\end{aligned} \tag{12}
$$

wobei die Größen $\frac{3}{2}\, n_1{}^2\, \lambda\, k_1\, t \sin i \cos\frac{4c}{2} \cos(2 v_2 - \Omega - u_3)$ und $\frac{3}{2}\, n_1{}^3\, \lambda\, k_1\, t\, \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\sqrt{1 - \frac{\alpha_3{}^2}{\alpha_2{}^2}} \cos i \sin c \cos^2\frac{c}{2} \cos(2 v_2 - N - u_3)$ und außerdem einige mit e^2 multiplizierte vernachlässigt wurden.

Ehe dieser Ausdruck für U_1 zur Berechnung von α_3 und u_3 benützt wird, ist noch zu untersuchen, welche Größen noch zu U_1 hinzukämen, wenn A von B verschieden ist.

Die periodischen Glieder in U haben die Argumente $h\; u_2 \pm i\; u_1 + j\; u_3$, wo den h, i und j die Werte 0, 1 oder 2 zukommen. Sieht man von den Konstanten ab, so kann man $u_1 = \omega\, k_1\, t$, $u_2 = -\, w\, (1 + k_1)\, t$ und

$u_3 = -\alpha$ t setzen. Durch die Integration kommen die Koeffizienten von t in den Nenner. In der folgenden Uebersicht sind die Koeffizienten der verschiedenen Argumente in U nach der Integration gegeben. Die Koeffizienten sind weder mit $\frac{3}{2} n_1^2 k_1 A$ oder $\frac{3}{2} n_1^2 k_1 A \lambda$, noch mit den resp. Sonnen- oder Mondkoordinaten multipliziert. Der Einfachheit wegen wurde $-\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \cos \varepsilon$ gesetzt, wo $\varepsilon = 23^0\ 27{,}'5$ ist.

u_2	$\frac{1}{4\,\omega\,(1 + k_1)} \sin \Theta_0 \cos \Theta_0 \sin 2\,\varepsilon$
$2\,u_2$	$\frac{1}{16\,\omega\,(1 + k_1)} \sin^2 \Theta_0 \sin^2 \varepsilon$
$2\,u_1$	$\frac{1}{16\,w\,.\,k_1} \sin^2 \Theta_0\,(3 \cos^2 \varepsilon - 1)$
$2\,u_3$	$\frac{1}{16\,a}\,(3 \cos^2 \Theta_0 - 1) \sin^2 \varepsilon$
$u_2 + 2\,u_1$	$\frac{1}{4\,\omega\,(1 - k_1)} \sin \Theta_0 \cos^2 \frac{\Theta_0}{2} \sin 2\,\varepsilon$
$u_2 - 2\,u_1$	$\frac{1}{4\,\omega\,(1 + 3\,k_1)} \sin \Theta_0 \sin^2 \frac{\Theta_0}{2} \sin 2\,\varepsilon$
$u_2 + 2\,u_3$	$\frac{1}{2\omega(1 + k_1) + 4a} \sin \Theta_0 \cos \Theta_0 \sin \varepsilon \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}$
$u_2 - 2\,u_3$	$\frac{1}{2\omega(1 + k_1) - 4a} \sin \Theta_0 \cos \Theta_0 \sin \varepsilon \cos^2 \frac{\varepsilon}{2}$
$2\,u_2 + 2\,u_1$	$\frac{1}{8\,\omega} \cos^4 \frac{\Theta_0}{2} \sin^2 \varepsilon$
$2\,u_2 - 2\,u_1$	$\frac{1}{8\,\omega\,(1 + 2\,k_1)} \sin^4 \frac{\Theta_0}{2} \sin^2 \varepsilon$
$2\,u_2 + 2\,u_3$	$\frac{1}{8\omega(1 + k_1) + 8a} \sin^2 \Theta_0 \sin^4 \frac{\varepsilon}{2}$
$2\,u_2 - 2\,u_3$	$\frac{1}{8\omega(1 - k_1) - 8a} \sin^2 \Theta_0 \cos^4 \frac{\varepsilon}{2}$
$2\,u_1 + 2\,u_3$	$\frac{3}{32\omega\,k_1 - 32\,a} \sin^2 \Theta_0 \sin^2 \varepsilon$

$2u_1 - 2u_3$	$\frac{3}{32\omega k_1 + 32a} \sin^2 \Theta_0 \sin^2 \varepsilon$
$u_2 + 2u_1 + 2u_3$	$\frac{1}{2\omega(1-k_1)+4a} \sin \Theta_0 \cos^2 \frac{\Theta_0}{2} \sin \varepsilon \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}$
$u_2 + 2u_1 - 2u_3$	$\frac{1}{2\omega(1-k_1)-4a} \sin \Theta_0 \cos^2 \frac{\Theta_0}{2} \sin \varepsilon \cos^2 \frac{\varepsilon}{2}$
$u_2 - 2u_1 + 2u_3$	$\frac{1}{2\omega(1-3k_1)+4a} \sin \Theta_0 \sin^2 \frac{\Theta_0}{2} \sin \varepsilon \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}$
$u_2 - 2u_1 - 2u_3$	$\frac{1}{2\omega(1+3k_1)-4a} \sin \Theta_0 \sin^2 \frac{\Theta_0}{2} \sin \varepsilon \cos^2 \frac{\varepsilon}{2}$
$2u_2 + 2u_1 + 2u_3$	$\frac{1}{4\omega + 4a} \cos^4 \frac{\Theta_0}{2} \sin^4 \frac{\varepsilon}{2}$
$2u_2 + 2u_1 - 2u_3$	$\frac{1}{4\omega - 4a} \cos^4 \frac{\Theta_0}{2} \cos^4 \frac{\varepsilon}{2}$
$2u_2 - 2u_1 + 2u_3$	$\frac{1}{4\omega(1+k_1)+4a} \sin^4 \frac{\Theta_0}{2} \sin^4 \frac{\varepsilon}{2}$
$2u_2 - 2u_1 - 2u_3$	$\frac{1}{4\omega(1+k_1)-4a} \sin^4 \frac{\Theta_0}{2} \cos^4 \frac{\varepsilon}{2}$
(13) u_3	$\frac{1}{4\alpha} (1 - 3\cos^2 \Theta_0) \sin 2\varepsilon$
$u_2 + u_3$	$\frac{1}{2\omega(1+k_1)+2a} \sin \Theta_0 \cos \Theta_0 (1 + \cos \varepsilon - 2\cos^2 \varepsilon)$
$u_2 - u_3$	$\frac{1}{2\omega(1+k_1)-2a} \sin \Theta_0 \cos \Theta_0 (1 - \cos \varepsilon - 2\cos^2 \varepsilon)$
$u_2 + 2u_1 + u_3$	$\frac{1}{2\omega(1-k_1)+2a} \sin \Theta_0 \cos^2 \frac{\Theta_0}{2} (1 + \cos \varepsilon - 2\cos^2 \varepsilon)$
$u_2 + 2u_1 - u_3$	$\frac{1}{2\omega(1-k_1)-2a} \sin \Theta_0 \cos^2 \frac{\Theta_0}{2} (1 - \cos \varepsilon - 2\cos^2 \varepsilon)$
$u_2 - 2u_1 + u_3$	$\frac{1}{2\omega(1+3k_1)+2a} \sin \Theta_0 \sin^2 \frac{\Theta_0}{2} (1 + \cos \varepsilon - 2\cos^2 \varepsilon)$
$u_2 - 2u_1 - u_3$	$\frac{1}{2\omega(1+3k_1)-2a} \sin \Theta_0 \sin^2 \frac{\Theta_0}{2} (1 - \cos \varepsilon - 2\cos^2 \varepsilon)$
$2u_1 + u_3$	$\frac{3}{16\omega k_1 - 8a} \sin^2 \Theta_0 \sin 2\varepsilon$

$2u_1 - u_3$	$\frac{3}{16\omega k_1 + 8a} \sin^2 \Theta_0 \sin 2\varepsilon$
$2u_2 + u_3$	$\frac{1}{4\omega(1+k_1)+2a} \sin^2 \Theta_0 \sin \varepsilon \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}$
$2u_2 - u_3$	$\frac{1}{4\omega(1+k_1)-2a} \sin^2 \Theta_0 \sin \varepsilon \cos^2 \frac{\varepsilon}{2}$
$2u_2 + 2u_1 + u_3$	$\frac{1}{2\omega + a} \cos^4 \frac{\Theta_0}{2} \sin \varepsilon \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}$
$2u_2 + 2u_1 - u_3$	$\frac{1}{2\omega - a} \cos^4 \frac{\Theta_0}{2} \sin \varepsilon \cos^2 \frac{\varepsilon}{2}$
$2u_2 - 2u_1 + u_3$	$\frac{1}{2\omega(1+2k_1)+a} \sin^4 \frac{\Theta_0}{2} \sin \varepsilon \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}$
$2u_2 - 2u_1 - u_3$	$\frac{1}{2\omega(1+2k_1)-a} \sin^4 \frac{\Theta_0}{2} \sin \varepsilon \cos^2 \frac{\varepsilon}{2}$

Diejenigen Glieder, deren Koeffizienten $\sin \Theta_0$ und höhere Potenzen von $\sin \Theta_0$ enthalten, brauchen nicht berücksichtigt zu werden. So bleiben, wenn man von den Koeffizienten der Argumente u_3 und $2u_3$ absieht, nur noch die Koeffizienten der Argumente $2u_2 + 2u_1$, $2u_2 + 2u_1 \pm 2u_3$ und $2u_2 + 2u_1 \pm u_3$ übrig. Der Koeffizient des letzten Argumentes ist auch zu vernachlässigen, da er nur mit den kleinen Größen i oder c multipliziert vorkommt. Die drei übrigen Glieder haben verschiedenes Vorzeichen in $\cos^2 \alpha$ und $\cos^2 \beta$; daher bekommen sie als Koeffizienten $\frac{3}{2}(1 + \lambda)\, n_1^2 (k_1 A - k_2 B) = \frac{3}{2} n_1^2 (B - A)(1 + \lambda)$, wobei $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1$ gesetzt wurde. Der kleinste Koeffizient in U_1 nach der Integration ist $\frac{3}{2} n_1^2 . (C - A) \frac{\lambda e_2}{13 n_1}$. Da $\omega = 366{,}25 . n_1$ und $C - A = 100 (B - A)$, so sind die oben erwähnten Glieder mindestens 2000 mal kleiner als das kleinste in U_1 mitgenommene Glied.

Für U erhält man dann

$$U = \frac{3}{2} n_1^2 \Bigg\{ k_1 A \Bigg[\frac{1}{4} \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2} \left(\frac{x_1^2}{r_1^2} + \frac{y_1^2}{r_1^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2} \frac{z_1^2}{r_1^2}$$

$$+ \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2} \right) \left(\left(\frac{x_1^2}{r_1^2} - \frac{y_1^2}{r_1^2} \right) \cos 2 u_3 + \frac{2 x_1 y_1}{r_1^2} \sin 2 u_3 \right)$$

$$- \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \sqrt{1 - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}} \left(\frac{x_1 z_1}{r_1^2} \sin u_3 - \frac{y_1 z_1}{r_1^2} \cos u_3 \right) \Bigg]$$

$$+ k_2 B \Bigg[\frac{1}{4} \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2} \left(\frac{x_1^2}{r_1^2} + \frac{y_1^2}{r_1^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2} \frac{z_1^2}{r_1^2}$$

$$+ \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2} \right) \left(\left(\frac{x_1^2}{r_1^2} - \frac{y_1^2}{r_1^2} \right) \cos 2 u_3 + \frac{2 x_1 y_1}{r_1^2} \sin 2 u_3 \right)$$

$$- \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \sqrt{1 - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}} \left(\frac{x_1 z_1}{r_1^2} \sin u_3 - \frac{y_1 z_1}{r_1^2} \cos u_3 \right) \Bigg] \Bigg\} + \text{Mondglieder}$$

$$= - \frac{3}{2} n_1^2 \frac{2C - A - B}{2} \Bigg\{ - \frac{1}{2} \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2} \left(\frac{x_2^2}{r_1^2} + \frac{y_1^2}{r_1^2} \right) + \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2} \frac{z_1^2}{r_1^2}$$

$$- \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2} \right) \left(\left(\frac{x_1^2}{r_1^2} - \frac{y_1^2}{r_1^2} \right) \cos 2 u_3 + 2 \frac{x_1 y_1}{r_1^2} \sin 2 u_3 \right)$$

$$+ 2 \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \sqrt{1 - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}} \left(\frac{x_1 z_1}{r_1^2} \sin u_3 - \frac{y_1 z_1}{r_1^2} \cos u_3 \right) \Bigg\}$$

$+$ Mondglieder.

Führt man noch die Bezeichnung $U_2 = - U$ ein, so zeigt der Vergleich von U_2 mit (4), daß U_2 gleich U_1 ist, wenn $\frac{2C - A - B}{2}$ an Stelle von $k_1 A$ gesetzt wird. Da T die Veränderlichen α_3 und u_3 nicht enthält, so hat man

$$(14) \qquad \frac{d\alpha_3}{dt} = \frac{\delta H}{\delta u_3} = \frac{\delta U_2}{\delta u_3} \qquad\qquad \frac{du_3}{dt} = - \frac{\delta H}{\delta \alpha_3} = - \frac{\delta U_2}{\delta \alpha_3}$$

An Stelle von α_3 und u_3 mögen die Veränderlichen ε und ψ treten. Es war

$$\psi = - u_3 - \text{periodische Glieder},$$

die vorläufig zu vernachlässigen sind, und

$$\cos \varepsilon = - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \, .$$

Also

$$\frac{d\,\psi}{d\,t} = -\frac{d u_3}{d t} \qquad \text{und } \sin\varepsilon\,\frac{d\,\varepsilon}{d t} = \frac{1}{\alpha_2}\,\frac{d\alpha_3}{d t}$$

Dies in (14) eingesetzt, gibt

$$\frac{d\,\varepsilon}{d\,t} = -\frac{1}{\alpha_2 \sin\varepsilon}\,\frac{\delta U_2}{\delta\,\psi} \qquad \frac{d\,\psi}{d t} = \frac{1}{\alpha_2 \sin\varepsilon}\,\frac{\delta U_2}{\delta\,\varepsilon}\,,$$

wo in U_2 ε und ψ an Stelle von α_3 und u_3 zu setzen sind.

Außerdem kann man schreiben

$$i \sin \Omega = p_1\,t + p_2\,t^2 + p_3\,t^3$$
$$i \cos \Omega = q_1\,t + q_2\,t^2 + q_3\,t^3,$$

in denen aber nur je das erste Glied mitgenommen werden soll, und

$$e_1 = e'_1 + e_1''\,t$$

$$k = \frac{3}{2}\,\frac{n_1^2}{\omega}\,\frac{2C - A - B}{2\,C}\,.$$

Für U_2 erhält man dann unter Vernachlässigung kleiner Größen

$$U_2 = -k\,.\,C\,.\,\omega \left\{ \frac{1}{2}\cos^2\varepsilon \left[1 + \lambda + \frac{3}{2}e'^2_1 + \frac{3}{2}\,e_2^2\,\lambda - \frac{3}{2}\,\dot{c}^2\,\lambda \right] \right.$$

$$\left. + e_1' e_1'' \cos^2\varepsilon \left[\frac{3}{2} - \sin\varepsilon\cos\varepsilon\,(1+\lambda)\,(q_1 \cos\psi - p_1 \sin\psi) \right] t \right\}$$

$$+ G,$$

wo

$$G = -k\,.\,C\,.\,\omega \left\{ \frac{1}{2}\sin^2\varepsilon \left[\cos\,(2 n_1\,t + 2\,\mu_1 + 2\,\psi) \right.\right.$$

$$\left. + \lambda\,\cos\,(2\,n_2\,t + 2\,\mu_2 + 2\,\psi) \right]$$

$$+ \frac{3}{2}\cos^2\varepsilon \left[e_1'\,\cos\,(n_1\,t + \mu_1 - \omega_1) \right.$$

$$\left. + \lambda\,e_2\,\cos\,(n_2\,t + \mu_2 - \omega_2) \right]$$

$$- \frac{1}{2} \sin^2 \varepsilon \Big[e_1' \cos (n_1 t + \mu_1 + \omega_1 + 2\psi)$$

$$+ \lambda\, e_2 \cos (n_2 t + \mu_2 + 2\psi) \Big]$$

$$- \sin \varepsilon \cos \varepsilon\, \lambda . c \cos (N + \psi)$$

$$+ \frac{1}{4} \sin^2 \varepsilon\, \lambda . c^2 . \cos (2 N + 2 \psi) \Big\}$$

Die Ausführung der Differentiation ergibt

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = k (1 + \lambda) \cos \varepsilon\, (q_1 \sin \psi + p_1 \cos \psi)\, t - \frac{1}{\alpha_2 \sin \varepsilon} \frac{\partial G}{\partial \psi}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = k \cos \varepsilon \Big[1 + \lambda + \frac{3}{2} e_1'^2 + \frac{3}{2} e_2^2 \lambda - \frac{3}{2} c^2 \lambda \Big]$$

$$+ k \Big[\frac{3}{2} e_1' e_1'' \cos\varepsilon + \frac{\cos 2\varepsilon}{\sin \varepsilon} (1 + \lambda) (q_1 \cos \psi - p_1 \sin \psi) \Big]\, t$$

$$+ \frac{1}{\alpha_2 \sin \varepsilon} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon}$$

Unter vorläufiger Vernachlässigung von G und unter der Annahme der ε und ψ als unveränderliche Größen auf den rechten Seiten der Gleichungen erhält man

$$\psi = \text{const.} + a\, t + b\, t^2$$
$$\varepsilon = \text{const.} + d\, t^2,$$

wo

$$a = \cos \varepsilon \Big[1 + \lambda + \frac{3}{2} e_1'^2 + \frac{3}{2} e_2^2 \lambda - \frac{3}{2} c^2 \lambda \Big],$$

$$b = \frac{1}{2} k \Big[\frac{3}{2} e_1' e_1'' \cos \varepsilon + \frac{\cos 2\varepsilon}{\sin \varepsilon} (1 + \lambda) (q_1 \cos \psi + p_1 \sin \psi) \Big]$$

$$d = \frac{1}{2} k (1 + \lambda) \cos \varepsilon\, (q_1 \sin \psi + p_1 \cos \psi) .$$

Die Konstante in ψ kann gleich Null gesetzt werden, die in ε soll die Bezeichnung ε_0 bekommen. Bezeichnet man die nichtperiodischen Werte von ψ und ε mit ψ_m und ε_m, so sind

$$\psi_m = at + bt^2$$
$$\varepsilon_m = \varepsilon_0 + dt^2 .$$

Die Größe ε bezeichnet den Winkel zwischen der Zentralachse und der im Raume festen z Achse. Es soll hier aber der Winkel Θ zwischen der Figurachse und der z Achse berechnet werden.

Es war

$$\cos \Theta = \cos \Theta_0 \cos \varepsilon - \sin \Theta_0 \sin \varepsilon \cos u_2$$

$$= \cos (\varepsilon + \Theta_0) + 2 \sin \Theta_0 \sin \varepsilon \sin^2 \frac{u_2}{2}.$$

Unter vorläufiger Vernachlässigung des mit $\sin \Theta_0$ multiplizierten zweiten Gliedes auf der rechten Seite erhält man

$$\Theta = \varepsilon + \Theta_0.$$

Da die periodischen Glieder in Θ_0 hier nicht mitgenommen werden sollen und seine Konstante mit ε_0 zusammen zu der neuen Konstanten ε_0 vereinigt werden kann, so erhält man den Wert Θ_m

$$\Theta_m = \varepsilon'_0 + dt^2.$$

Die Größen ψ_m und Θ_m stellen die Bewegung des mittleren Äquators zur festen Ekliptik dar. Für $t = 0$ wird $\psi_m = 0$ und $\Theta_m = \varepsilon'_0$. Da 1850,0 als Zeitanfang angenommen worden war, so fällt für 1850,0 der Knotenpunkt des mittleren Äquators mit X zusammen. X stellt also den mittleren Frühjahrstagundnachtgleichenpunkt dar.

Führt man die Bezeichnungen E und F für $\frac{1}{\alpha_2 \sin \varepsilon} \frac{\delta G}{\delta \varepsilon}$ und $-\frac{1}{\alpha_2 \sin \varepsilon} \frac{\delta G}{\delta \psi}$ ein, so wird

$$\psi = \psi_m + E \qquad \Theta = \Theta_m + F.$$

Durch ψ und Θ ist die Bewegung des wahren Äquators zur festen Ekliptik bestimmt. Infolge der Bewegung des mittleren Äquators zur Ekliptik entsteht die Praecession und infolge der Bewegung des wahren Äquators zum mittleren Äquator die Nutation. Die Größe ψ wird die lunisolare Praecession genannt.

Es bleibt noch übrig, E und F zu berechnen. Nach (15) wird

$$\frac{dE}{dt} = -k\Big\{\cos\varepsilon\,[\cos(2n_1t+2\mu_1+2\psi)+\lambda\cos(2n_2t+2\mu_2+2\psi)]$$
$$-3\cos\varepsilon\,[e_1'\cos(n_1t+\mu_1-\omega_1)+e_2\lambda\cos(n_2t+\mu_2-\omega_2)]$$
$$-\cos\varepsilon\,[e_1'\cos(n_1t+\mu_1+\omega_1+2\psi)+e_2\lambda\cos(n_2t+\mu_2+\omega_2+2\psi)]$$
$$-\frac{\cos^2\varepsilon}{\sin\varepsilon}\,\lambda\,c\cos(N+\psi)$$
$$+\frac{1}{2}\cos\varepsilon\,\lambda\,c^2\cos(2N+2\psi)\Big\}$$

$$\frac{dF}{dt} = -k\Big\{\sin\varepsilon\,[\sin(2n_1t+2\mu_1+2\psi)+\lambda\sin(2n_2t+2\mu_2+2\psi)]$$
$$-\sin\varepsilon\,[e'_1\sin(n_1t+\mu_1+\omega_1+2\psi)+e_2\lambda\sin(n_2t+\mu_2+\omega_2+2\psi)]$$
$$-\cos\varepsilon\,\lambda c\sin(N+\psi)$$
$$+\frac{1}{2}\sin\varepsilon\,\lambda\,c^2\sin(2N+2\psi)\Big\}$$

Setzt man unter Vernachlässigung der Störungen, die der Mondknoten erfährt, $N+\psi = g - ht$, so ergibt die Integration, wenn noch ε_0' an Stelle von ε tritt,

$$E = -k\lambda\frac{\cos 2\varepsilon'_0}{\sin\varepsilon'_0}\,\frac{c}{h}\sin(N+\psi)$$
(16)
$$+k\lambda\frac{1}{4}\cos\varepsilon'_0\,\frac{c^2}{h}\sin(2N+2\psi)$$
$$-k\cos\varepsilon'_0\Big\{\frac{1}{2n_1}\sin(2n_1t+2\mu+2\psi)+\frac{\lambda}{2n_2}\sin(2n_2t+2\mu_2+2\psi)$$
$$-\frac{3e'_1}{n_1}\sin(n_1t+\mu_1-\omega_1)-\frac{3\varepsilon_2\lambda}{n_2}\sin(n_2t+\mu_2-\omega_2)$$
$$-\frac{e_1'}{n_1}\sin(n_1t+\mu_1+\omega_1+2\psi)-\frac{e_2\lambda}{n_2}\sin(n_2t+\mu_2+\omega_2+2\psi)\Big\}$$

$$F = k\lambda\cos\varepsilon'_0\,\frac{c}{h}\cos(N+\psi)$$
$$-k\lambda\sin\varepsilon'_0\,\frac{c^2}{4h}\cos(2N+2\psi)$$
(17)
$$+k\sin\varepsilon'_0\Big\{\frac{1}{2n_1}\cos(2n_1t+2\mu_1+2\psi)+\frac{1}{2n_2}\cos(2n_2t+2\mu_2+2\psi)$$
$$-\frac{e_1'}{n_1}\cos(n_1t+\mu_1+\omega_1+2\psi)-\frac{e_2\lambda}{n_2}\sin(n_2t+\mu_2+\omega_2+2\psi)\Big\}$$

Wichtiger für die astronomische Praxis ist die Bewegung des Äquators zu der Ekliptik der Zeit t als ihre Bewegung in bezug auf die feste Ekliptik. Das Verhältnis dieser sogenonnten allgemeinen Praecession zu der lunisolaren läßt sich mit Hülfe trigonometrischer Formeln ausdrücken.

Man trage auf AE (siehe Figur) von A aus eine Strecke gleich AX bis X' ab. Wenn man $XE = \psi''$ setzt, so ist $EA = \psi'' + \Omega$. Der Winkel AEx soll mit Θ_0 bezeichnet werden. Aus dem Dreieck DEA ergeben sich die Gleichungen

$$\operatorname{tg} \frac{\psi'' + \Omega + DE}{2} = \frac{\cos \frac{\Theta - i}{2}}{\cos \frac{\Theta + i}{2}} \operatorname{tg} \frac{\psi + \Omega}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\psi'' + \Omega - DE}{2} = \frac{\sin \frac{\Theta - i}{2}}{\sin \frac{\Theta + i}{2}} \operatorname{tg} \frac{\psi + \Omega}{2} .$$

Daraus folgt

$$\frac{\psi'' + \Omega + DE}{2} = \frac{\psi + \Omega}{2} + \operatorname{tg} \frac{i}{2} \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \sin(\psi + \Omega)$$

$$+ \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{i}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\Theta}{2} \sin 2(\psi + \Omega) + \ldots$$

$$\frac{\psi'' + \Omega - DE}{2} = \frac{\psi + \Omega}{2} - \operatorname{tg} \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \frac{\Theta}{2} \sin(\psi + \Omega)$$

$$+ \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{i}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\Theta}{2} \sin 2(\psi + \Omega) - \ldots\ldots$$

$$\psi'' + \Omega = \psi + \Omega - 2 \operatorname{tg} \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \Theta \sin(\psi + \Omega)$$

$$(18) \qquad + \operatorname{tg}^2 \frac{i}{2} \frac{1 + \cos^2 \Theta}{\sin^2 \Theta} \sin 2(\psi + \Omega)$$

$$\psi'' = \psi - i \operatorname{ctg} \Theta \sin(\psi + \Omega) + \frac{i^2}{4} \frac{1 + \cos^2 \Theta}{\sin^2 \Theta} \sin 2(\psi + \Omega)$$

Weiter besteht die Gleichung

$$\cos \Theta'' = \cos \Theta \cos i - \sin \Theta \sin i \cos (\psi + \Omega)$$

$$\Theta'' = \Theta + (\Theta'' - \Theta)$$

$$\cos \Theta'' = \cos \Theta - (\Theta'' - \Theta) \sin \Theta - \frac{1}{2} (\Theta'' - \Theta)^2 \cos \Theta$$

$$= \cos \Theta \left(1 - \frac{i^2}{2}\right) - i \cos (\psi + \Omega) \sin \Theta .$$

Da $\Theta'' - \Theta$ von der Ordnung i ist, so

$$\Theta'' - \Theta = i \cos (\psi + \Omega) + \frac{1}{2} [i^2 - (\Theta'' - \Theta)^2] \operatorname{ctg} \Theta$$

(19) $$\Theta'' - \Theta = i \cos (\psi + \Omega) + \frac{1}{2} i^2 \sin^2 (\psi + \Omega) \operatorname{ctg} \Theta ,$$

wenn $\Theta'' - \Theta = i \cos (\psi + \Omega)$ angenommen wird.

Führt man noch die Abkürzungen

$$\sin (\psi + \Omega) = \sin \Omega + a t \cos \Omega = p_1 t + a q_1 t^2$$

$$\cos (\psi + \Omega) = \cos \Omega - a t \sin \Omega = q_1 t + q_2 t^2 - a p_1 t^2$$

ein und setzt in den trigonometrischen Ausdrücken ε'_0 für Θ, so erhält man

$$\psi'' = P t + P' t^2 + E$$

$$\Theta'' = \varepsilon'_0 + Q t + Q' t^2 + F ,$$

wo

$$P = a - p_1 \operatorname{ctg} \varepsilon'_0 \qquad P' = b - (p_1{}^2 + a q_1) \operatorname{ctg} \varepsilon'_0 + p_1 q_1 \frac{1 + \cos^2 \varepsilon'_0}{2 \sin \varepsilon'_0}$$

$$Q = q_1 \qquad Q' = d + q_2 - a p_1 + \frac{1}{2} p_1{}^2 \operatorname{ctg} \varepsilon'_0 .$$

Durch die Formeln

$$\psi''_m = P t + P' t^2 \quad \text{und} \quad \Theta''_m = \varepsilon'_0 + Q t + Q' t^2$$

wird die Lage des mittleren Äquators in bezug auf die Ekliptik zur Zeit i bestimmt; ψ''_m ist die allgemeine Praecession und Θ''_m die mittlere Schiefe der Ekliptik zur Zeit t, wohingegen Θ'' die wahre Schiefe bedeutet.

Bis jetzt waren alle Argumente von dem Widderpunkte X der festen Ekliptik gerechnet werden. Damit sie von dem Widderpunkte der gleichzeitigen Epoche gerechnet werden, muß zu ihnen ψ'' oder was bei den kleinen

Gliedern in ψ und Θ auf dasselbe hinauskommt, ψ hinzugefügt werden. Die folgenden Bezeichnungen sollen eingeführt werden

$n_1 t + \mu_1 + \psi = L =$ mittlere Länge der Sonne, gerechnet in der mittleren Ekliptik vom Widderpunkt der Zeit t an.

$n_2 t + \mu_2 + \psi = J =$ mittlere Länge des Mondes in seiner Bahn von demselben Widderpunkt aus gerechnet.

$n_1 t + \mu_1 - \omega_1 = f_1 =$ mittlere Anomalie der Sonne

$n_2 t + \mu_2 - \omega_2 = f_2 =$ mittlere Anomalie des Mondes.

$N_1 + \psi = N'_1 =$ mittlere Länge des aufsteigenden Mondknotens.

Den folgenden Berechnungen liegt als Zeiteinheit das julianische Jahr zu Grunde.

Nach Newcomb ist

$p_1 = + 0,''05341$ $\qquad q_1 = - 0,46848$

$p_2 = + 0,00001935$ $\qquad q_2 = + 0,00000563$

Die folgenden Werte sind in Teilen des Radius angegeben.

Nach Leverier ist

$e'_1 = 0,016770$ $\qquad e_1'' = - 0,08951 \sin 1''$

mittlere Bewegung von $L = 6,28332$

" " " $f_1 = 6,28302$.

Nach Hansen

mittlere Bewegung von $J = 83,99709$

$f_2 = 83,28691$.

Nach Brown

$e_2 = 0,05490$ $\qquad c = 0,08977432$ $\qquad = 5^0 8' 37''.28$

$h = + 0,3375355$ $\qquad \varepsilon'_0 = 23^0 27' 31''.68$

Die Konstanten P und K der Praecession und Nutation sind durch die Beobachtungen bestimmt und dienen uns dazu, die Größen k und λ zu berechnen.

Es ist

$$P + p_1 \operatorname{ctg} \varepsilon'_0 = k\left(1 + \frac{3}{2} e_1^{\,2}\right) \cos \varepsilon'_0 + k\lambda\left(1 + \frac{3}{2} e_2^{\,2} - \frac{3}{2} c^2\right) \cos \varepsilon'_0$$

und, wenn wir den größten Koeffizienten von F herausnehmen,

$$K = \frac{c}{h} \cos \varepsilon'_0 \, . \, k \, . \, \lambda \; .$$

Nach Newcomb ist $P = 50'',24638$ und nach den Beschlüssen der Pariser Konferenz $K = 9'',21$. Setzt man in die Gleichungen die oben gegebenen numerischen Werte ein, so erhält man, wenn die Zahlen in den runden Klammern die Logarithmen bedeuten,

$$\begin{aligned} (\bar{1},96271)\, k + (\bar{1}.95923) . k\, \lambda &= 50'',36945 \\ (9,38734) . k\, \lambda &= 9'',21 \; . \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$k = 17'',388 \qquad\qquad \lambda = 2,174$$

Durch Einsetzen der numerischen Werte in alle Glieder von ψ und Θ, ψ'' und Θ'' ergibt sich

$$\begin{aligned} \psi &= 50'',36945\, t - 0'',0001076\, t^2 + E \\ \Theta &= 23.^0 27' 31'',68 + 0'',00000654\, t^2 + F \\ \psi'' &= 50'',24638\, t + 0'',00015565\, t^2 + E \\ \Theta'' &= 23^0 27' 31'',68 - 0'',46838\, t - 0'',000\,00085\, t^2 + F \; , \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} E = &- 17,''2265 \sin N' \\ &+ 0,''2064 \sin 2N' \\ &- 1,2693 \sin 2L \qquad\qquad - 0,2064 \sin 2J \\ &+ 0,1277 \sin f^2 \qquad\qquad + 0,0687 \sin f_2 \\ &- 0,0446 \sin (2L - f_1) \qquad - 0,0224 \sin (2J - f_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F = &\;\; 9'',21 \cos N' \\ &- 0,0896 \cos 2N' \\ &+ 0,5509 \cos 2L \qquad\qquad + 0,0896 \cos 2J \\ &- 0,0184 \cos (2L - f_1) \qquad - 0,0047 \cos (2J - f^2) \end{aligned}$$

Es war $\lambda = \frac{\varrho_1{}^3}{\varrho_2{}^3} \frac{m_2}{m_1}$ gesetzt worden. Nach dem dritten Keplerschen Gesetze bestehen, wenn die Masse der Erde als Einheit genommen wird, die Beziehungen

$f(1 + m_2) = n_2{}^2 \varrho_2{}^3 \qquad f\, m_1 = n_1{}^2 \varrho_1{}^3$, wobei die Gauss'sche Konstante mit f bezeichnet wird, und daraus folgt

$$\frac{\varrho_1{}^3}{\varrho_2{}^3} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{m_1}{1 + m_2} \quad \text{und} \quad \lambda = \left(\frac{n_2}{n_1}\right) \frac{m_2}{1 + m_2} \; .$$

Mit den gegebenen numerischen Werten erhält man für m_2

$$m_2 = \frac{1}{81,22} .$$

Aus $k = \frac{3}{2} \frac{n_1^2}{\omega} \frac{2C - A - B}{2C}$ läßt sich $\frac{2C - A - B}{2C}$ berechnen. Da das julianische Jahr als Zeiteinheit angenommen war, so ist

$$\omega = n_1 + 2\pi \cdot 365,25 .$$

Es ergibt sich dann

$$\frac{2C - A - B}{2C} = \frac{1}{305,3} .$$

In den Ausdrücken für die Praecessionsgrößen kommen mit t^2 multiplizierte Glieder vor. Eine nochmalige Integration würde mit t^3 multiplizierte Glieder hinzuergeben. Für kürzere Zeiträume genügen die mit t^2 multiplizierten Glieder der verlangten Genauigkeit. Für große Zeiträume müssen aber Fehler entstehen, die auch nicht dadurch verschwinden, daß man mit höher als der zweiten Potenz von t multiplizierte Glieder mitnimmt. Will man also genauere Formeln aufstellen, so muß man für die Glieder, die durch mit t multiplizierte Größen ersetzt werden, periodische Größen setzen. Zugleich müssen bei einer strengeren Bedingungen genügenden Berechnung, die alle Koeffizienten bis zur Größe von 0″,001 mitnimmt, die Störungen, die die Mondbahn beeinflussen, berücksichtigt werden.

In dem Potential U_2, von dem ausgegangen werden soll, sind die Sonnen- und Mondkoordinaten durch ihre in (8) gegebenen Werte ersetzt. An Stelle von $-u_3$ und $-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}$ sind ψ und $\cos\varepsilon$ eingeführt. Dann ist

$$U_2 = -kC\omega \left(\frac{\varrho_1}{r_1}\right)^3 \left\{ \frac{1}{2}\cos^2\varepsilon + \frac{1}{2}\sin^2\varepsilon \cos(2v_1 + 2\psi) \right.$$
$$\left. + \sin\varepsilon \cos\varepsilon \left[i\cos(2v_1 - \Omega + \psi) - i\cos(\Omega + \psi) \right] \right\}$$

$$
\begin{aligned}
& - k\lambda C\omega \left(\frac{\varrho_2}{r_2}\right)^3 \left\{ \frac{1}{2}\cos^2\varepsilon \left[1 - \frac{3}{2}\sin^2 c + \frac{3}{2}\sin^2 c \cos(2v_2 - 2N) \right] \right. \\
(20) \quad & + \frac{1}{2}\sin^2\varepsilon \left[\cos^4\frac{c}{2}\cos(2v_2 + 2\psi) + 2\sin^2\frac{c}{2}\cos(2N + 2\psi) \right] \\
& + \sin\varepsilon\cos\varepsilon \Big[i\cos(2v_2 - \Omega + \psi) - i\cos(\Omega + \psi) \\
& \left. - \sin c \cos(N + \psi) + \sin c \cos(2v_2 - N + \psi) \Big] \right\} .
\end{aligned}
$$

Im folgenden sollen v_1, v_2 und N an die Stelle von $v_1 + \psi''$, $v_2 + \psi''$ und $N + \psi$ — der Unterschied $\psi'' - \psi$ kann vernachlässigt werden — gesetzt werden, wobei die neuen Größen v_1, v_2 und N von dem Widderpunkt der Zeit t gerechnet werden. Für die Differentialgleichungen für ψ und ε erhält man dann

$$
\begin{aligned}
\frac{d\varepsilon}{dt} = & - k \left(\frac{\varrho_1}{r_1}\right)^3 \Big\{ \sin\varepsilon \sin 2v_1 \\
& + \cos\varepsilon \left[i\sin(2v_1 - \Omega - \psi) - i\sin(\Omega + \psi) \right] \Big\} \\
(21) \quad & - k\lambda \left(\frac{\varrho_2}{r_2}\right)^3 \Big\{ \sin\varepsilon \left[\cos^4\frac{c}{2}\sin 2v_2 + 2\sin^2\frac{c}{2}\sin 2N \right] \\
& + \cos\varepsilon \big[i\sin(2v_2 - \Omega - \psi) - i\sin(\Omega + \psi) \\
& - \sin c \sin N + \sin c \sin(2v_2 - N) \big] \Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\psi}{dt} = & \, k \left(\frac{\varrho_1}{r_1}\right)^3 \Big\{ \cos\varepsilon - \cos\varepsilon \cos 2v_1 \\
& - \frac{\cos 2\varepsilon}{\sin\varepsilon} \left[i\cos(2v_1 - \Omega - \psi) - i\cos(\Omega + \psi) \right] \Big\} \\
& + k\lambda \left(\frac{\varrho_2}{r_2}\right)^3 \Big\{ \cos\varepsilon \left[1 - \frac{3}{2}\sin^2 c + \frac{3}{2}\sin^2 c \cos(2v_2 - 2N) \right] \\
(22) \quad & - \cos\varepsilon \left[\cos^4\frac{c}{2}\cos 2v_2 + 2\sin^2\frac{c}{2}\cos 2N \right] \\
& - \frac{\cos 2\varepsilon}{\sin\varepsilon} \Big[i\cos(2v_2 - \Omega - \psi) - i\cos(\Omega - \psi) \\
& - \sin c \cos N + \sin c \cos(2v_2 - N) \Big] \Big\}
\end{aligned}
$$

Führt man für $e_1 \sin \omega_1$ und $e_1 \cos \omega_1$ die Größen $\Sigma\, \delta_i \sin\, (h_i\, t + \xi_i)$ und $\Sigma\, \delta_i \cos\, (h_i\, t + \xi_i)$ in die Ausdrücke für $\left(\frac{\varrho_1}{r_1}\right)^3$ und $\left(\frac{\varrho_1}{r_1}\right)^3 \cos 2 v_1$ ein, so erhält man

$$\left(\frac{\varrho_1}{r_1}\right)^3 = 1 + \frac{3}{2} \Sigma\, \delta_i\, \delta_j \cos (\overline{h_i - h_j}\, t + \xi_i - \xi_j)$$
$$+ \frac{3}{2} \Sigma\, \delta_i^{\,2} + 3\, \Sigma\, \delta_i \cos (L - h_i\, t - \xi_i)$$
$$+ \frac{9}{2} \Sigma\, \delta_i\, \delta_j \cos (2 L - \overline{h_i + h_j}\, t - \xi_i - \xi_j)$$

$$\left(\frac{\varrho_1}{r_1}\right)^3 \cos 2 v_1 = \cos 2 L \left(1 - \frac{5}{2} \Sigma\, \delta_i^{\,2}\right) - \frac{1}{2} \Sigma \delta_i \cos (L + h_i\, t + \xi_i)$$
$$- \frac{5}{2} \Sigma\, \delta_i\, \delta_j \cos (2 L + \overline{h_i - h_j}\, t + \xi_i - \xi_j)$$
$$+ \frac{7}{2} \Sigma\, \delta_i \cos (3 L - h_i\, t - \xi_i)\ .$$

Für den Mond hat man

$$\frac{\varrho_2}{r_2} = 1 + a_1 \cos f_2 + a_2 \cos 2 f_2 + a_3 \cos 2 D + a_4 \cos (2 D - f_2)$$
$$+ a_5 \cos (2 D + f_2)\,,$$

wo D gleich der Differenz der mittleren Längen der Sonne und des Mondes ist, und

$$\left(\frac{\varrho_2}{r_2}\right) = a + a' \cos f_2 + a'' \cos 2 f_2 + a''' \cos 2 D + a^{IV} \cos (2 D - f_2)$$
$$+ a^{V} \cos (2 D + f_2)\ .$$

$$a = 1 + \frac{3}{2} a_1^{\,2} + \frac{3}{2} a_3^{\,2} + \frac{3}{2} a_4^{\,2} \qquad a' = 3 a_1 \qquad a'' = 3 a_2 + \frac{3}{2} a_1^{\,2}$$
$$a''' = 3 a_3 + 3\, a_1\, a_4 \qquad a^{IV} = 3 a_4 \qquad a^{V} = 3 a_5\ .$$

Bezeichnet wieder J die Länge des Mondes in seiner Bahn von dem Widderpunkt der Zeit t an gerechnet, so ist

$$2 v_2 = 2 J + 2 b_1 \sin f_2 + 2 b_2 \sin 2 f_2 + 2 b_3 \sin 2 D$$
$$+ 2 b_4 \sin (2 D - f_2) + 2 b_5 \sin f_1$$

und

$$\cos 2v_2 = b\cos 2J + b'\cos(2J+f_2) - b'\cos(2J-f_2)$$
$$+ b''\cos(2J+2f_2) + b'''\cos(2J-2f_2) + b^{IV}\cos(2J+2D)$$
$$+ b^{V}\cos(2J-2D) + b^{VI}\cos(2J+2D-f_2)$$
$$+ b^{VII}\cos(2J-2D+f_2) + b^{VIII}\cos(2J+2D-2f_2)$$
$$+ b^{VIII}\cos(2J-2D+2f_2) + b^{IX}\cos(2J+f_1) - b^{IX}\cos(2J-f_1)$$

wo

$$b = 1 - b_1^2; \quad b' = b_1; \quad b'' = \frac{b_1^2}{2} + b_2; \quad b''' = \frac{b_1^2}{2} - b_2;$$
$$b^{IV} = b_1 b_4 + b_3; \quad b^{V} = b_1 b_4 - b_3; \quad b^{VI} = b_4 - b_1 b_3;$$
$$b^{VII} = -b_4 - b_1 b_3; \quad b^{VIII} = -b_1 b_4; \quad b^{IX} = b_5 .$$

$\cos 2v_2$ mit $\left(\frac{\varrho_2}{r_2}\right)^3$ multipliziert gibt

$$\left(\frac{\varrho_2}{r_2}\right)^3 \cos 2v_2 = d_0\cos 2J + d_1\cos(2J+f_2) + d_2\cos(2J-f_2)$$
$$+ d_3\cos(2J+2f_2) + d_4\cos(2J-2f_2) + d_5\cos(2J+2D)$$
$$+ d_6\cos(2J-2D) + d_7\cos(2J+2D-f_2)$$
$$+ d_8\cos(2J-2D+f_2) + d_9\cos(2J+2D-2f_2)$$
$$+ d_{10}\cos(2J-2D+2f_2) + d_{11}\cos(2J+f_1)$$
$$+ d_{12}\cos(2J-f_1),$$

wo

$$d_0 = a_0 b + \frac{3}{2}\left(a_2 + \frac{a_1^2}{2}\right)b_1^2 + 3(a_3 + a_1 a_4) b_1 b_4 - 3a_4 b_1 b_3$$

$$d_1 = a_0 b_1 + \frac{3}{2}a_1\left(b + \frac{b_1^2}{2} + b_2\right) - \frac{3}{2}\left(a_2 + \frac{a_1^2}{2}\right)b_1$$
$$- \frac{3}{2}(a_3 + a_1 a_4)(b_4 + b_1 b_3) - \frac{3}{2}a_4 b_1 b_4$$

$$d_2 = -a_0 b_1 + \frac{3}{2}a_1\left(b + \frac{b_1^2}{2} - b_2\right) + \frac{3}{2}\left(a_2 + \frac{a_1^2}{2}\right)b_1$$
$$+ \frac{3}{2}(a_3 + a_1 a_4)(b_4 - b_1 b_3) - \frac{3}{2}a_4 b_1 b_4$$

$$d_3 = a_0\left(\frac{b_1^2}{2} + b_2\right) + \frac{3}{2}a_1 b_1 + \frac{3}{2}\left(a_2 + \frac{a_1^2}{2}\right)b$$

$$d_4 = a_0\left(\frac{b_1^2}{2} - b_2\right) - \frac{3}{2}a_1 b_1 + \frac{3}{2}\left(a_2 + \frac{a_1^2}{2}\right)b$$

$$d_5 = a_0\ (b_1\, b_4 + b_3) + \frac{3}{2}(a_3 + a_1\, a_4)\, b + \frac{3}{2} a_4\, b_1\ - \frac{3}{2} a_5\, b_1$$
$$+ \frac{3}{2} a_1\, (b_4 - b_1\, b_3 - b_1\, b_4)$$

$$d_6 = a_0\, (b_1\, b_4 + b_3) + \frac{3}{2}(a_3 + a_1\, a_4)\, b - \frac{3}{2} a_4\, b_1 + \frac{3}{2} a_5\, b_1$$
$$- \frac{3}{2} a_1\, (b_4 + b_1\, b_3 - b_1\, b_4)$$

$$d_7 = a_0\ (b_4\ - b_1\, b_3) + \frac{3}{2} a_1\, b_3 - \frac{3}{2} a_3\ b_1 + \frac{3}{2} a_4\, b$$

$$d_8 = - a_0\, (b_4 + b_1\ b_3) - \frac{3}{2} a_1\ b_3 + \frac{3}{2} a_3\ b_1 + \frac{3}{2} a_4\, b$$

$$d_9 = - a_0\ b_1\ b_4 - \frac{3}{2} a_4\, b_1 \qquad d_{10} = - a_0\ b_1\ b_4 + \frac{3}{2} a_4\, b_1$$

$$d_{11} = a_0\, b_5 \qquad d_{12} = - a_0\, b_5\ .$$

Setzt man $2\, v_2 - 90^0$ und $2\, J - 90^0$ an Stelle von $2\, v_2$ und $2\, J$, so erhält man die Formel für $\left(\frac{\varrho_2}{r_2}\right)^3 \sin 2\, v_2$. Will man die Formel für $\frac{\cos}{\sin}(2\, v_2 - N)$, bez. $\frac{\cos}{\sin}(2\, v_2 - 2\, N)$ haben, so muß man $2\, v_2 - N$, bez. $2 v_2 - 2\, N$ und $2\, J - N$, bez. $2\, J - 2\, N$ für $2\, v_2$ und $2\, J$ in die Formeln für $\frac{\cos}{\sin} 2 v_2$ setzen.

Um die Störungen in $\sin c \frac{\sin}{\cos} N$ zu berücksichtigen, ist zu setzen

$$N = N_0 + l \sin (2\, L - 2\, N_0) + l_1 \sin (2\, \omega_2 - 2\, N_0)$$
$$c = c_0 + l_2 \cos (2 L - 2 N_0) + l_3 \cos (2\, \omega_2 - 2\, N_0)\ .$$

Daraus folgt

$$\sin c\ \sin N = \sin c_0\ \sin N_0 + \frac{1}{2}(l \sin c_0 + l_2\ \cos c_0) \sin (2 L - N_0)$$
$$+ \frac{1}{2}(l_1\ \sin c_0 + l_3 \cos c_0) \sin (2\, \omega_2 - 3\, N_0)$$

$$\sin c\ \cos N = \sin c_0\ \cos N_0 + \frac{1}{2}(l \sin c_0 + l_2 \cos c_0) \cos (2 L - N_0)$$
$$+ \frac{1}{2}(l_1 \sin c_0 + l_3 \cos c_0) \cos (2 \omega_2 - 3\, N_0)\ .$$

In den Gliedern auf den rechten Seiten der Gleichungen kann wieder c und N für c_0 und N_0 gesetzt werden.

Für $\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\,\delta$ sollen die Summen $\Sigma\,\gamma_i \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}(g_i\, t + \beta_i)$ eingeführt werden.

Werden für die Größen im Ausdruck (21) für $\frac{d\varepsilon}{dt}$ die neueu Größen eingesetzt, wobei nur die Glieder mitgenommen werden sollen, deren Koeffizienten nach der Integration mindestens gleich 0″,001 werden, so ergibt sich für $\frac{d\varepsilon}{dt}$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\varepsilon}{dt} = & - k \sin\varepsilon \sin 2L - k\,\lambda \sin\varepsilon \cos^4\frac{c}{2} \Big| d_0 \sin 2J + d_1 \sin(2J + f_2) \\
& + d_2 \sin(2J - f_2) + d_3 \sin 2J + 2 f_2) + d_4 \sin(2J - 2 f_2) \\
& + d_5 \sin(2J + 2D) + d_6 \sin(2J - 2D) \\
& + d_7 \sin(2J + 2D - f_2) + d_8 \sin(2J - 2D + f_2) \Big| \\
& - k\,\lambda \cos\varepsilon \sin c\, [\, d_0 \sin(2J - N) + d_1 \sin(2J - N + f_2) \\
& \qquad + d_2 \sin(2J - N - f_2) + d_7 \sin(2J + 2D - N - f_2)\,] \\
& + k\,\lambda \cos\varepsilon \Big| a \sin c \sin N + \frac{1}{2}(l \sin c + l_2 \cos c) \sin(2L - N) \\
(23) \qquad & \qquad + \frac{1}{2}(l_1 \sin c + l_3 \cos c) \sin(2\,\omega_2 - 3N) \Big| \\
& - 2k\,\lambda \sin\varepsilon \sin^2\frac{c}{2} \sin 2N + k(1 + \lambda) \cos\varepsilon\, \Sigma\,\gamma_i \sin(\overline{g_i + a}\, t + \beta_i) \\
& - k \cos\varepsilon\, \Sigma\,\gamma_i \sin(2L - \overline{g_i + a}\, t - \beta_i) \\
& - k\,\lambda \cos\varepsilon\, \Sigma\,\gamma_i \sin(2J - \overline{g_i + a}\, t - \beta_i) \\
& + \frac{1}{2} k \sin\varepsilon\, [\, \Sigma\,\delta_i \sin(L + h_i\, t + \xi_i) - 7\, \Sigma\,\delta_i \sin(3L - h_i\, t - \xi_i)\,] \\
& + \frac{1}{2} k\,\lambda \cos\varepsilon \sin c\, a' [\sin(N + f_2) + \sin(N - f_2)\,]
\end{aligned}
$$

Integriert man diese Gleichung und nimmt auf der rechten Seite nur die beiden größten Glieder mit, so bekommt man

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - k(1+\lambda)\cos\varepsilon \frac{\Sigma\gamma_i}{g_i+a}\cos(\overline{g_i+a\,t}+\beta_i)$$

$$-k\lambda \frac{\cos\varepsilon}{[N]}\sin c \cos N,$$

wo [N] die mittlere Bewegung von N bedeutet. Für $\cos\varepsilon$ erhält man dann

$$\cos\varepsilon = \cos\varepsilon_0 \Big[1 - k^2(1+\lambda)^2\cos^2\varepsilon_0 \frac{\Sigma\gamma_i{}^2}{4(g_i+a)^2}\cos(\overline{2g_i+2a\,t}+2\beta_i)$$

$$-\frac{1}{2}k^2(1+\lambda)^2\cos^2\varepsilon_0 \frac{\Sigma\gamma_i\gamma_j}{(g_i+a)(g_j+a)}\cos(\overline{g_i+g_j+2a\,t}+\beta_i+\beta_j)$$

$$-\frac{1}{2}k^2(1+\lambda)^2\cos^2\varepsilon_0 \frac{\Sigma\gamma_i\gamma_j}{(g_i+a)(g_j+a)}\cos(\overline{g_i-g_j\,t}+\beta_i-\beta_j)\Big] \tag{24}$$

$$+k(1+\lambda)\sin\varepsilon_0\cos\varepsilon_0 \frac{\Sigma\gamma_i}{g_i+a}\cos(\overline{g_i+a\,t}+\beta_i)$$

$$+k\lambda\sin\varepsilon_0\cos\varepsilon_0\frac{\sin c}{[N]}\cos N.$$

Setzt man in dem Ausdruck (22) für $\frac{d\psi}{dt}$ die neuen Größen ein und beschränkt sich auf die nicht periodischen Glieder, so erhält man nach der Integration

$$\psi = \Big[k\cos\varepsilon\,(1+\frac{3}{2}\Sigma\delta_i{}^2) + k\lambda\cos\varepsilon\,(a_0-\frac{3}{2}\sin^2 c)\Big]t = a\,t$$

Die Größe a und der größte Koeffizient der Nutation sollen wieder zur Berechnung von k und λ benützt werden. Nach Newcomb ist die Konstante der lunisolaren Praecession für 1850,0 gleich 50″,36948, wenn das julianische Jahr als Einheit angenommen wird. Es bestehen dann die Gleichungen

$$50'',36948 = k\cos\varepsilon_0\,(1+\frac{3}{2}\Sigma\delta_i{}^2) + k\lambda\cos\varepsilon_0\,(a_0-\frac{3}{2}\sin^2 c) = a$$

$$9'',21 = k\lambda\cos\varepsilon_0\frac{\sin c_0}{[N]}.$$

Diese ergeben

$$k = 17'',365 \qquad \lambda = 2,177$$

und daraus folgen für die Größen m_2 und $\frac{2C-A-B}{2C}$ die Werte $m_2 = \frac{1}{80.64}$ und $\frac{2C-A-B}{2C} = \frac{1}{305.7}$.

Setzt man in den Ausdruck für $\frac{d\psi'}{dt}$ den in (24) gefundenen Wert von $\cos\varepsilon$ an Stelle von $\cos\varepsilon$, so ergibt sich für $\frac{d\psi}{dt}$,

$$\frac{d\psi}{dt} = a - k\cos\varepsilon_0 \cos 2L\left(1 - \frac{5}{4}\Sigma\delta_i^{\,2}\right) - k\lambda\cos\varepsilon_0\cos^4\frac{c}{2}\left[d_0\cos 2J\right.$$
$$+ d_1\cos(2J + f_2) + d_2\cos(2J - f_2) + d_3\cos(2J + 2f_2)$$
$$+ d_4\cos(2J - 2f_2) + d_5\cos(2J + 2D) + d_6\cos(2J - 2D)$$
(25)
$$+ d_7\cos(2J + 2D - f_2) + d_8\cos(2J - 2D + f_2)$$
$$+ d_9\cos(2J + 2D - 2f_2) + d_{10}\cos(2J - 2D + 2f_2)$$
$$\left. + d_{11}\cos(2J + f_1) + d_{12}\cos(2J - f_1)\right]$$
$$+ k\lambda\cos\varepsilon'_0\left[a'\cos f_2 + a''\cos 2f_2 + a'''\cos 2D + a^{IV}\cos(2D - f_2)\right]$$
$$- k\lambda\frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0}\sin c\left[d_0\cos(2J - N) + d_1\cos(2J - N + f_2)\right.$$
$$\left. + d_2\cos(2J - N - f_2) + d_7\cos(2J - N + 2D - f_2)\right]$$
$$+ \frac{3}{2}k\lambda\cos\varepsilon_0\sin^2 c\cos(2J - 2N)$$
$$+ \frac{1}{2}k\lambda\frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0}\sin c\; a'\left[\cos(N + f_2) + \cos(N - f_2)\right]$$
$$+ k\lambda a\left|\frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0} + \frac{k(1+\lambda)}{[N]}\sin\varepsilon_0\cos\varepsilon_0\right|\sin c\cos N$$
$$+ \frac{1}{2}k\lambda\frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0}\left[(l\sin c + l_2\cos c)\cos(2L - N)\right.$$
$$\left. + (l_1\sin c + l_3\cos c)\cos(2\omega_2 - 3N)\right]$$
$$- 2k\lambda\cos\varepsilon_0\sin^2\frac{c}{2}\cos 2N$$
$$+ a\left|\operatorname{ctg}\varepsilon_0 - \frac{g_i}{g_i + a}\operatorname{tg}\varepsilon_0\right|\Sigma\gamma_i\cos\overline{(g_i + a\,t + \beta_i)}$$
$$- a^3\frac{\Sigma\gamma_i^{\,2}}{4(g_i + a)^2}\cos\overline{(2g_i + 2a\,t + 2\beta_i)}$$
$$- \frac{1}{2}a^3\frac{\Sigma\gamma_i\gamma_j}{(g_i + a)(g_i + a)}\left[\cos\overline{(g_i + g_j + 2a\,t + \beta_i + \beta_j)}\right.$$
$$\left. + \cos\overline{(g_i - g_j\,t + \beta_i - \beta_j)}\right]$$

$$- k \frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin \varepsilon_0} [\Sigma \gamma_i \cos (2L - \overline{g_i + a}\, t - \beta_i)$$

$$+ \lambda \Sigma \gamma_i \cos (2J - \overline{g_i + a}\, t - \beta_i)]$$

$$+ \frac{1}{2} k \cos \varepsilon_0 [3 \Sigma \delta_i \delta_j \cos \overline{h_i - h_j}\, t + \xi_i - \xi_j)$$

$$+ \Sigma \delta_i \cos (L + h_i t + \xi_i) + 6 \Sigma \delta_i \cos (L - h_i t - \xi_i)$$

$$+ 9 \Sigma \delta_i \delta_j \cos (2L - \overline{h_i + h_j}\, t - \xi_i - \xi_j)$$

$$- 7 \Sigma \delta_i \cos (3L - h_i t - \xi_i)] .$$

Die Indices i und j können alle Werte zwischen 0 und 8 annehmen; jedoch muß i immer verschieden von j sein.

Jeder der Ausdrücke in $\frac{d\varepsilon}{dt}$ und $\frac{d\psi}{dt}$ ist von der Form a, sin (b t + c) oder cos (b t + c) und wird durch die Integration von der Form a t, $-\frac{1}{b} \cos (b\,t + c)$ oder $\frac{1}{b} \sin (b\,t + c)$

An Stelle von ε soll Θ treten. Es war

$$\cos \Theta = \cos \Theta_0 \cos \varepsilon - \sin \Theta_0 \sin \varepsilon \cos u_2$$

$$= \cos (\varepsilon + \Theta_0) + 2 \sin \Theta_0 \sin \varepsilon \sin^2 \frac{u_2}{2} ,$$

woraus folgt

$$\Theta = \varepsilon + \Theta_0 - 2 \frac{\sin \Theta_0 \sin \varepsilon \sin^2 \frac{u_2}{2}}{\sin (\varepsilon + \Theta_0)}$$

$$- 2 \operatorname{ctg} (\varepsilon + \Theta_0) \frac{\sin^2 \Theta_0 \sin^2 \varepsilon \sin^4 \frac{u_2}{2}}{\sin^2 (\varepsilon + \Theta_0)} - \ldots \ldots .$$

Wie später gezeigt werden soll, ist Θ_0 gleich einer Konstanten und mehreren periodischen Gliedern, deren Koeffizienten nicht zu bestimmen sind und die daher nicht mitgenommen werden sollen. Die Konstante in $\varepsilon + \Theta_0$ soll mit ε'_0 bezeichnet werden und ist für 1850,0 gleich 23°27′31″.68. Da durch Beobachtungen der Wert von Θ_0 noch nicht genügend bestimmt ist, er aber als sehr klein angenommen werden kann, so sollen auch in dem Ausdruck für Θ die mit $\sin \Theta_0$ multiplizierten Glieder vernachlässigt werden.

Dann bekommt man für Θ

$$\Theta = \varepsilon'_0 + \text{periodische Glieder in } \varepsilon \,.$$

Wie die Formel (1*) zeigt, ist $\psi = -u_3 +$ Summe von periodischen Gliedern. Da diese einzelnen Glieder infolge des Faktors tg $\frac{\Theta_0}{2}$ unbestimmt bleiben, so sollen sie nicht mit berücksichtigt werden.

Die Größen ψ und Θ bestimmen die Lage des Äquators zur festen Ekliptik. Vermittels der Gleichungen (18) und (19) erhält man die die Lage des Äquators zur beweglichen Ekliptik der Zeit t bestimmenden Größen ψ'' und Θ'', wobei für i sin ☊ und i cos ☊ die Summenglieder einzusetzen sind.

$$\begin{aligned} \psi'' = \psi - \operatorname{ctg}\varepsilon'_0 \,\Sigma\, \gamma_i \sin\left(\overline{g_i + a}\, t + \beta_i\right) \\ (26) \qquad + \frac{1+\cos^2\varepsilon'_0}{4\sin^2\varepsilon'_0} \,\Sigma\, \gamma_i\,\gamma_j \cos\left(\overline{g_i + g_j + 2a}\, t + \beta_i + \beta_j\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta'' = \Theta + \Sigma\, \gamma_i \cos\left(\overline{g_i + a}\, t + \beta_i\right) \\ + \frac{1}{4}\operatorname{ctg}\varepsilon'_0 \,\Sigma\, \gamma_i^{\,2} \left[1 - \cos\left(\overline{2g_i + 2a}\, t + 2\beta_i\right)\right] \\ (27) \qquad - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\varepsilon'_0 \,\Sigma\, \gamma_i\,\gamma_j \left[\cos\left(\overline{g_i + g_j + 2a}\, t + \beta_i + \beta_j\right)\right. \\ \left. - \cos\left(\overline{g_i - g_j}\, t + \beta_i - \beta_j\right)\right]\,. \end{aligned}$$

Was die Zahlenwerte anlangt, so sind die Werte der mittleren Bewegung von f_1, f_2, L, J und N schon früher gegeben.

Nach Brown sind, ausgedrückt in Halbmesserteilen,

$a_1 = +0{,}054500$	$b_1 = +0{,}1097598$
$a_2 = +0{,}002970$	$b_2 = +0{,}0037334$
$a_3 = +0{,}008254$	$b_3 = +0{,}0116487$
$a_4 = +0{,}010074$	$b_4 = +0{,}0223275$
$a_5 = +0{,}0009052$	$b_5 = -0{,}0032714$

Weiter ist

$l = 0{,}0276$	$l_1 = 0{,}00142$
$l_2 = 0{,}00247$	$l_2 = 0{,}00010024$

Die Werte für die einzelnen Größen in den Summen $\sum\limits_1^8 \gamma_i \,\frac{\sin}{\cos}\,(g_i\, t + \beta_i)$ und $\sum\limits_1^8 \delta_i \,\frac{\sin}{\cos}\,(h_i\, t + \xi_i)$ sind die nach den neuesten Massenwerten korrigierten Stockwellschen Zahlenwerte. Die Massen wurden nach Bauschinger* angenommen.

γ_0	+ 0,007768	g_0	— 5,″197803	β_0	18° 28′ 57″,8
γ_1	— 0,0076629	g_1	— 6,″575349	β_1	136° 23′ 31″,8
γ_2	+ 0,0045618	g_2	— 17,″632899	β_2	296° 4′ 59″,8
γ_3	+ 0,0263248	g_3	— 18,″745317	β_3	254° 15° 31″,7
γ_4	+ 0,0276616	g_4	0″	β_4	106° 4′ 9″,1
γ_5	+ 0,0012754	g_5	— 0,″681957	β_5	20° 51′ 7″,8
γ_6	+ 0,0017352	g_6	— 2,″907958	β_6	133° 43′ 34″,3
γ_7	— 0,0027553	g_7	— 25,″961286	β_7	306° 17′ 49″,4

δ_0	+ 0,0040802	h_0	+ 5,″466085	ξ_0	87° 6′ 11″
δ_1	— 0,0147210	h_1	+ 7,″349878	ξ_1	14° 54′ 9″
δ_2	+ 0,0106210	h_2	+ 17,″323845	ξ_2	332° 19′ 38″
δ_3	+ 0,0150451	h_3	+ 18,″001723	ξ_3	136° 17′ 9″
δ_4	+ 0,0000139	h_4	+ 0,″6381081	ξ_4	70° 6′ 0″
δ_5	+ 0,0005917	h_5	+ 2,″705166	ξ_5	107° 43′ 13″
δ_6	+ 0,0163297	h_6	+ 3,″729504	ξ_6	28° 1′ 27″
δ_7	— 0,0023433	h_7	+ 22,″488308	ξ_7	307° 53′ 53″

Durch Einsetzen dieser Zahlengrößen in die Gleichungen (23), (25), (26) und (27) ergeben sich die numerischen Werte für ψ bez. ψ'' und Θ bez. Θ''.

* Tafeln zur theoretischen Astronomie.

$$\underbrace{\psi' = 50'',3695\,t \qquad \psi'' = 50'',3695\,t}$$

$$\begin{aligned}
&- 17,224 \ \sin N \\
&- \ \ 1,268 \ \sin 2L \\
&+ \ \ 0,206 \ \sin 2N \\
&- \ \ 0,203 \ \sin 2J \\
&+ \ \ 0,068 \ \sin f_2 \\
&- \ \ 0,034 \ \sin (2J - N) \\
&- \ \ 0,026 \ \sin (2J + f_2) \\
&+ \ \ 0,015 \ \sin (2D - f_2) \\
&+ \ \ 0,013 \ \sin (2L - N) \\
&+ \ \ 0,012 \ \sin (2J - f_2) \\
&+ \ \ 0,006 \ \sin (N + f_2) \\
&- \ \ 0,006 \ \sin (N - f_2) \\
&+ \ \ 0,006 \ \sin 2D \\
&- \ \ 0,005 \ \sin (2J + 2D - f_2) \\
&+ \ \ 0,005 \ \sin (2\omega_2 - 3N) \\
&- \ \ 0,004 \ \sin (2J - N + f_2) \\
&+ \ \ 0,003 \ \sin (2J - 2D + f_2) \\
&+ \ \ 0,002 \ \sin (2J - 2f_2) \\
&+ \ \ 0,002 \ \sin (2J - 2N) \\
&- \ \ 0,002 \ \sin (2J + 2f_2) \\
&- \ \ 0,002 \ \sin (2J + 2D) \\
&+ \ \ 0,002 \ \sin (2J - N - f_2) \\
&+ \ \ 0,002 \ \sin 2f_2 \\
&- \ \ 0,001 \ \sin (2J - 2D) \\
&- \ \ 0,001 \ \sin (2J + 2D - N - f_2) \\
&+ \ \ 0,001 \ \sin (2J + 2D - 2f_2) \\
&+ \ \ 0,001 \ \sin (2J - 2D + 2f_2) \\
&- \ \ 0,001 \ \sin (2J + f_1) \\
&- \ \ 0,001 \ \sin (2J - f_1)
\end{aligned}$$

$+ 22153,916 \sin (\overline{g_3 + a}\, t + \beta_3)$	$+ 9641,446 \sin (\overline{g_3 + a}\, t + \beta_3)$
$+ 13147,872 \sin (\overline{g_4 + a}\, t + \beta_4)$	
$- 4307,563 \sin (\overline{g_1 + a}\, t + \beta_1)$	$- 665,302 \sin (\overline{g_1 + a}\, t + \beta_1)$
$+ 4206,484 \sin (\overline{g_0 + a}\, t + \beta_0)$	$+ 514,268 \sin (\overline{g_0 + a}\, t + \beta_0)$
$+ 3674,599 \sin (\overline{g_2 + a}\, t + \beta_2)$	$+ 1506,325 \sin (\overline{g_2 + a}\, t + \beta_2)$
$- 3243,913 \sin (\overline{g_7 + a}\, t + \beta_7)$	$- 1934,289 \sin (\overline{g_7 + a}\, t + \beta_7)$

$$
\begin{aligned}
&+\ 885{,}392 \sin(\overline{g_6 + a}\, t + \beta_6) \\
&+\ 616{,}120 \sin(\overline{g_5 + a}\, t + \beta_5) \\
&-\ 72{,}196 \sin(\overline{2\, g_3 + 2\, a}\, t + 2\, \beta_3) \\
&-\ 19{,}728 \sin(\overline{2\, g_4 + 2\, a}\, t + 2\, \beta_4) \\
&-\ 2{,}303 \sin(\overline{2\, g_1 + 2\, a}\, t + 2\, \beta_1) \\
&-\ 2{,}157 \sin(\overline{2\, g_0 + 2\, a}\, t + 2\, \beta_0) \\
&-\ 1{,}954 \sin(\overline{2\, g_2 + 2\, a}\, t + 2\, \beta_2) \\
&-\ 1{,}720 \sin(\overline{2\, g_7 + 2\, a}\, t + 2\, \beta_7) \\
&-\ 0{,}094 \sin(\overline{2\, g_6 + 2\, a}\, t + 2\, \beta_6) \\
&-\ 0{,}044 \sin(\overline{2\, g_5 + 2\, a}\, t + 2\, \beta_5) \\
&-\ 145{,}545 \sin(\overline{g_3 + g_4 + 2a}\, t + \beta_3 + \beta_4) \\
&+\ 50{,}392 \sin(\overline{g_1 + g_3 + 2a}\, t + \beta_1 + \beta_3) \\
&-\ 48{,}643 \sin(\overline{g_0 + g_3 + 2a}\, t + \beta_0 + \beta_3) \\
&-\ 46{,}964 \sin(\overline{g_2 + g_3 + 2a}\, t + \beta_2 + \beta_3) \\
&+\ 43{,}612 \sin(\overline{g_3 + g_7 + 2a}\, t + \beta_3 + \beta_7) \\
&+\ 26{,}687 \sin(\overline{g_1 + g_4 + 2a}\, t + \beta_1 + \beta_4) \\
&-\ 25{,}853 \sin(\overline{g_0 + g_4 + 2a}\, t + \beta_0 + \beta_4) \\
&-\ 24{,}044 \sin(\overline{g_2 + g_4 + 2a}\, t + \beta_2 + \beta_4) \\
&+\ 21{,}106 \sin(\overline{g_4 + g_7 + 2a}\, t + \beta_4 + \beta_7) \\
&-\ 10{,}044 \sin(\overline{g_3 + g_6 + 2a}\, t + \beta_3 + \beta_6) \\
&-\ 8{,}841 \sin(\overline{g_0 + g_1 + 2a}\, t + \beta_0 + \beta_1) \\
&+\ 8{,}315 \sin(\overline{g_1 + g_2 + 2a}\, t + \beta_1 + \beta_2) \\
&-\ 8{,}028 \sin(\overline{g_0 + g_2 + 2a}\, t + \beta_0 + \beta_2) \\
&-\ 7{,}542 \sin(\overline{g_1 + g_7 + 2a}\, t + \beta_1 + \beta_7) \\
&+\ 7{,}266 \sin(\overline{g_0 + g_7 + 2a}\, t + \beta_0 + \beta_7) \\
&+\ 7{,}160 \sin(\overline{g_2 + g_7 + 2a}\, t + \beta_2 + \beta_7) \\
&-\ 6{,}860 \sin(\overline{g_3 + g_5 + 2a}\, t + \beta_3 + \beta_5) \\
&-\ 5{,}369 \sin(\overline{g_4 + g_6 + 2a}\, t + \beta_4 + \beta_6) \\
&-\ 3{,}687 \sin(\overline{g_4 + g_5 + 2a}\, t + \beta_4 + \beta_5) \\
&+\ 1{,}833 \sin(\overline{g_1 + g_6 + 2a}\, t + \beta_1 + \beta_6) \\
&-\ 1{,}775 \sin(\overline{g_0 + g_6 + 2a}\, t + \beta_0 + \beta_6) \\
&-\ 1{,}658 \sin(\overline{g_2 + g_6 + 2a}\, t + \beta_2 + \beta_6) \\
&+\ 1{,}496 \sin(\overline{g_6 + g_7 + 2a}\, t + \beta_6 + \beta_7) \\
&+\ 1{,}256 \sin(\overline{g_1 + g_5 + 2a}\, t + \beta_1 + \beta_5) \\
&-\ 1{,}217 \sin(\overline{g_0 + g_5 + 2a}\, t + \beta_0 + \beta_5) \\
&-\ 1{,}133 \sin(\overline{g_2 + g_5 + 2a}\, t + \beta_2 + \beta_5) \\
&+\ 1{,}019 \sin(\overline{g_5 + g_7 + 2a}\, t + \beta_5 + \beta_7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\ 60{,}632 \sin(\overline{g_6 + a}\, t + \beta_6) \\
&+\ 9{,}909 \sin(\overline{g_5 + a}\, t + \beta_5) \\
&+\ 343{,}057 \sin(\overline{2g_3 + 2a}\, t + 2\, \beta_3) \\
&+\ 438{,}768 \sin(\overline{2g_4 + 2a}\, t + 2\, \beta_4) \\
&+\ 32{,}882 \sin(\overline{2g_1 + 2a}\, t + 2\, \beta_1) \\
&+\ 34{,}001 \sin(\overline{2g_0 + 2a}\, t + 2\, \beta_0) \\
&+\ 10{,}915 \sin(\overline{2g_2 + 2a}\, t + 2\, \beta_2) \\
&+\ 2{,}829 \sin(\overline{2g_7 + 2a}\, t + 2\, \beta_7) \\
&+\ 1{,}710 \sin(\overline{2g_6 + 2a}\, t + 2\, \beta_6) \\
&+\ 0{,}931 \sin(\overline{2g_5 + 2a}\, t + 2\, \beta_5) \\
&+\ 727{,}133 \sin(\overline{g_3 + g_4 + 2a}\, t + \beta_3 + \beta_4) \\
&+\ 191{,}360 \sin(\overline{g_1 + g_3 + 2a}\, t + \beta_1 + \beta_3) \\
&+\ 196{,}425 \sin(\overline{g_0 + g_3 + 2a}\, t + \beta_0 + \beta_3) \\
&+\ 96{,}953 \sin(\overline{g_2 + g_3 + 2a}\, t + \beta_2 + \beta_3) \\
&-\ 43{,}314 \sin(\overline{g_3 + g_7 + 2a}\, t + \beta_3 + \beta_7) \\
&-\ 227{,}341 \sin(\overline{g_1 + g_4 + 2a}\, t + \beta_1 + \beta_4) \\
&+\ 231{,}659 \sin(\overline{g_0 + g_4 + 2a}\, t + \beta_0 + \beta_4) \\
&+\ 127{,}181 \sin(\overline{g_2 + g_4 + 2a}\, t + \beta_2 + \beta_4) \\
&-\ 70{,}233 \sin(\overline{g_4 + g_7 + 2a}\, t + \beta_4 + \beta_7) \\
&+\ 44{,}699 \sin(\overline{g_3 + g_6 + 2a}\, t + \beta_3 + \beta_6) \\
&-\ 62{,}494 \sin(\overline{g_0 + g_1 + 2a}\, t + \beta_0 + \beta_1) \\
&-\ 33{,}578 \sin(\overline{g_1 + g_2 + 2a}\, t + \beta_1 + \beta_2) \\
&+\ 34{,}439 \sin(\overline{g_0 + g_2 + 2a}\, t + \beta_0 + \beta_2) \\
&+\ 17{,}761 \sin(\overline{g_1 + g_7 + 2a}\, t + \beta_1 + \beta_7) \\
&-\ 18{,}384 \sin(\overline{g_0 + g_7 + 2a}\, t + \beta_0 + \beta_7) \\
&-\ 7{,}903 \sin(\overline{g_2 + g_7 + 2a}\, t + \beta_2 + \beta_7) \\
&+\ 33{,}377 \sin(\overline{g_3 + g_5 + 2a}\, t + \beta_3 + \beta_5) \\
&+\ 52{,}154 \sin(\overline{g_4 + g_6 + 2a}\, t + \beta_4 + \beta_6) \\
&+\ 38{,}593 \sin(\overline{g_4 + g_5 + 2a}\, t + \beta_4 + \beta_5) \\
&-\ 14{,}102 \sin(\overline{g_1 + g_6 + 2a}\, t + \beta_1 + \beta_6) \\
&+\ 14{,}379 \sin(\overline{g_0 + g_6 + 2a}\, t + \beta_0 + \beta_6) \\
&+\ 7{,}828 \sin(\overline{g_2 + g_6 + 2a}\, t + \beta_2 + \beta_6) \\
&-\ 4{,}234 \sin(\overline{g_6 + g_7 + 2a}\, t + \beta_6 + \beta_7) \\
&-\ 10{,}456 \sin(\overline{g_1 + g_5 + 2a}\, t + \beta_1 + \beta_5) \\
&+\ 10{,}656 \sin(\overline{g_0 + g_5 + 2a}\, t + \beta_0 + \beta_5) \\
&+\ 5{,}840 \sin(\overline{g_2 + g_5 + 2a}\, t + \beta_2 + \beta_5) \\
&-\ 3{,}193 \sin(\overline{g_5 + g_7 + 2a}\, t + \beta_5 + \beta_7)
\end{aligned}
$$

$$- 0{,}253 \sin(\overline{g_5 + g_6 + 2a}\, t + \beta_5 + \beta_6) \qquad + 2{,}400 \sin(\overline{g_5 + g_6 + 2a}\, t + \beta_5 + \beta_6)$$

$$\begin{array}{rl}
- & 2706{,}799 \sin(\overline{g_2 - g_3}\, t + \beta_2 - \beta_3) \\
+ & 634{,}714 \sin(\overline{g_3 - g_4}\, t + \beta_3 - \beta_4) \\
- & 539{,}511 \sin(\overline{g_4 - g_5}\, t + \beta_4 - \beta_5) \\
+ & 473{,}986 \sin(\overline{g_0 - g_4}\, t + \beta_0 - \beta_4) \\
- & 381{,}176 \sin(\overline{g_1 - g_4}\, t + \beta_1 - \beta_4) \\
+ & 337{,}158 \sin(\overline{g_3 - g_7}\, t + \beta_3 - \beta_7) \\
+ & 311{,}264 \sin(\overline{g_1 - g_3}\, t + \beta_1 - \beta_3) \\
- & 274{,}852 \sin(\overline{g_0 - g_1}\, t + \beta_0 - \beta_1) \\
- & 180{,}172 \sin(\overline{g_4 - g_6}\, t + \beta_4 - \beta_6) \\
+ & 112{,}987 \sin(\overline{g_2 - g_4}\, t + \beta_2 - \beta_4) \\
+ & 71{,}606 \sin(\overline{g_0 - g_6}\, t + \beta_0 - \beta_6) \\
+ & 62{,}004 \sin(\overline{g_4 - g_7}\, t + \beta_4 - \beta_7) \\
+ & 57{,}364 \sin(\overline{g_1 - g_2}\, t + \beta_1 - \beta_2) \\
+ & 56{,}941 \sin(\overline{g_0 - g_1}\, t + \beta_0 - \beta_1) \\
- & 50{,}141 \sin(\overline{g_0 - g_2}\, t + \beta_0 - \beta_2) \\
+ & 49{,}998 \sin(\overline{g_3 - g_6}\, t + \beta_3 - \beta_6) \\
+ & 48{,}916 \sin(\overline{g_2 - g_7}\, t + \beta_2 - \beta_6) \\
- & 45{,}484 \sin(\overline{g_1 - g_6}\, t + \beta_1 - \beta_6) \\
+ & 30{,}785 \sin(\overline{g_3 - g_5}\, t + \beta_3 - \beta_5) \\
- & 26{,}436 \sin(\overline{g_1 - g_7}\, t + \beta_1 - \beta_7) \\
+ & 25{,}498 \sin(\overline{g_0 - g_5}\, t + \beta_0 - \beta_5) \\
+ & 24{,}263 \sin(\overline{g_0 - g_7}\, t + \beta_0 - \beta_7) \\
- & 19{,}877 \sin(\overline{g_1 - g_5}\, t + \beta_1 - \beta_5) \\
- & 11{,}000 \sin(\overline{g_5 - g_6}\, t + \beta_5 - \beta_6) \\
+ & 9{,}005 \sin(\overline{g_2 - g_6}\, t + \beta_2 - \beta_6) \\
+ & 5{,}493 \sin(\overline{g_2 - g_5}\, t + \beta_2 - \beta_5) \\
+ & 4{,}647 \sin(\overline{g_6 - g_7}\, t + \beta_6 - \beta_7) \\
+ & 2{,}976 \sin(\overline{g_5 - g_7}\, t + \beta_5 - \beta_7) \\
- & 0{,}065 \sin(2L - \overline{g_4 + a}\, t - \beta_4) \\
- & 0{,}062 \sin(2L - \overline{g_3 + a}\, t - \beta_3) \\
- & 0{,}018 \sin(2L - \overline{g_0 + a}\, t - \beta_0)
\end{array}$$

$+ \quad 0{,}018 \sin (2L - \overline{g_1 + a}\, t - \beta_1)$
$- \quad 0{,}011 \sin (2L - \overline{g_2 + a}\, t - \beta_2)$
$+ \quad 0{,}007 \sin (2L - \overline{g_7 + a}\, t - \beta_7)$
$- \quad 0{,}004 \sin (2L - \overline{g_6 + a}\, t - \beta_6)$
$- \quad 0{,}003 \sin (2L - \overline{g_5 + a}\, t - \beta_5)$
$- \quad 0{,}011 \sin (2J - \overline{g_4 + a}\, t - \beta_4)$
$- \quad 0{,}010 \sin (2J - \overline{g_3 + a}\, t - \beta_3)$
$- \quad 0{,}003 \sin (2J - \overline{g_0 + a}\, t - \beta_0)$
$+ \quad 0{,}003 \sin (2J - \overline{g_1 + a}\, t - \beta_1)$
$- \quad 0{,}002 \sin (2J - \overline{g_2 + a}\, t - \beta_2)$
$+ \quad 0{,}001 \sin (2J - \overline{g_7 + a}\, t - \beta_7)$
$- \quad 0{,}001 \sin (2J - \overline{g_6 + a}\, t - \beta_6)$
$-1161{,}797 \sin (\overline{h_2 - h_3}\, t + \xi_2 - \xi_3)$
$- \quad 327.231 \sin (\overline{h_1 - h_6}\, t + \xi_1 - \xi_6)$
$+ \quad 189{,}092 \sin (\overline{h_0 - h_6}\, t + \xi_0 - \xi_6)$
$+ \quad 157{,}128 \sin (\overline{h_0 - h_1}\, t + \xi_0 - \xi_1)$
$+ \quad 102{,}471 \sin (\overline{h_1 - h_3}\, t + \xi_1 - \xi_3)$
$+ \quad 84{,}841 \sin (\overline{h_3 - h_6}\, t + \xi_3 - \xi_6)$
$+ \quad 77{,}247 \sin (\overline{h_1 - h_2}\, t + \xi_1 - \xi_2)$
$+ \quad 62{,}880 \sin (\overline{h_2 - h_6}\, t + \xi_2 - \xi_6)$
$- \quad 46{,}490 \sin (\overline{h_5 - h_6}\, t + \xi_5 - \xi_6)$
$+ \quad 38{,}728 \sin (\overline{h_3 - h_7}\, t + \xi_3 - \xi_7)$
$- \quad 24{,}126 \sin (\overline{h_0 - h_3}\, t + \xi_0 - \xi_3)$
$+ \quad 23{,}751 \sin (\overline{h_2 - h_7}\, t + \xi_2 - \xi_7)$
$- \quad 18{,}010 \sin (\overline{h_0 - h_2}\, t + \xi_0 - \xi_2)$
$- \quad 11{,}230 \sin (\overline{h_1 - h_7}\, t + \xi_1 - \xi_7)$
$+ \quad 10{,}054 \sin (\overline{h_6 - h_7}\, t + \xi_6 - \xi_7)$
$- \quad 9{,}242 \sin (\overline{h_1 - h_5}\, t + \xi_1 - \xi_5)$
$+ \quad 4{,}309 \sin (\overline{h_0 - h_5}\, t + \xi_0 - \xi_5)$
$+ \quad 2{,}868 \sin (\overline{h_3 - h_5}\, t + \xi_3 - \xi_5)$
$+ \quad 2{,}768 \sin (\overline{h_0 - h_7}\, t + \xi_0 - \xi_7)$
$+ \quad 2{,}118 \sin (\overline{h_2 - h_5}\, t + \xi_2 - \xi_5)$

$$+\ 0{,}345 \sin (\overline{h_5 - h_7}\, t + \xi_5 - \xi_7)$$
$$-\ 0{,}261 \sin (\overline{h_4 - h_6}\, t + \xi_4 - \xi_6)$$
$$-\ 0{,}150 \sin (\overline{h_1 - h_4}\, t + \xi_1 - \xi_4)$$
$$+\ 0{,}059 \sin (\overline{h_3 - h_4}\, t + \xi_3 - \xi_4)$$
$$+\ 0{,}043 \sin (\overline{h_2 - h_4}\, t + \xi_2 - \xi_4)$$
$$-\ 0{,}020 \sin (\overline{h_4 - h_5}\, t + \xi_4 - \xi_5)$$
$$+\ 0{,}007 \sin (\overline{h_4 - h_7}\, t + \xi_4 - \xi_7)$$
$$+\ 0{,}006 \sin (\overline{h_0 - h_4}\, t + \xi_0 - \xi_4)$$
$$+\ 0{,}021 \sin (L + h_6\, t + \xi_6)$$
$$+\ 0{,}019 \sin (L + h_3\, t + \xi_3)$$
$$-\ 0{,}019 \sin (L + h_1\, t + \xi_1)$$
$$+\ 0{,}013 \sin (L + h_2\, t + \xi_2)$$
$$+\ 0{,}005 \sin (L + h_0\, t + \xi_0)$$
$$-\ 0{,}003 \sin (L + h_7\, t + \xi_7)$$
$$+\ 0{,}001 \sin (L + h_5\, t + \xi_5)$$
$$+\ 0{,}124 \sin (L - h_6\, t - \xi_6)$$
$$+\ 0{,}114 \sin (L - h_3\, t - \xi_3)$$
$$-\ 0{,}111 \sin (L - h_1\, t - \xi_1)$$
$$+\ 0{,}080 \sin (L - h_2\, t - \xi_2)$$
$$+\ 0{,}031 \sin (L - h_0\, t - \xi_0)$$
$$-\ 0{,}018 \sin (L - h_7\, t - \xi_7)$$
$$+\ 0{,}004 \sin (L - h_5\, t - \xi_5)$$
$$+\ 0{,}002 \sin (2L - 2h_1\, t - \xi_1)$$
$$+\ 0{,}002 \sin (2L - 2h_3\, t - 2\xi_3)$$
$$+\ 0{,}002 \sin (2L - 2h_6\, t - 2\xi_6)$$
$$+\ 0{,}001 \sin (2L - 2h_2\, t - 2\xi_2)$$
$$-\ 0{,}002 \sin (2L - \overline{h_1 + h_3}\, t - \xi_1 - \xi_3)$$
$$-\ 0{,}002 \sin (2L - \overline{h_1 + h_6}\, t - \xi_1 - \xi_6)$$
$$+\ 0{,}002 \sin (2L - \overline{h_3 + h_6}\, t - \xi_3 - \xi_6)$$
$$-\ 0{,}001 \sin (2L - \overline{h_1 + h_2}\, t - \xi_1 - \xi_2)$$
$$+\ 0{,}001 \sin (2L - \overline{h_2 + h_3}\, t - \xi_2 - \xi_3)$$
$$+\ 0{,}001 \sin (2L - \overline{h_2 + h_6}\, t - \xi_2 - \xi_6)$$
$$-\ 0{,}048 \sin (3L - h_6\, t - \xi_6)$$
$$-\ 0{,}044 \sin (3L - h_3\, t - \xi_3)$$
$$+\ 0{,}043 \sin (3L - h_1\, t - \xi_1)$$
$$-\ 0{,}031 \sin (3L - h_2\, t - \xi_2)$$

$$-\ 0{,}012\ \sin(3L - h_0 t - \xi_0)$$
$$+\ 0{,}007\ \sin(3L - h_7 t - \xi_7)$$
$$-\ 0{,}002\ \text{sie}(3L - h_5 t - \xi_5)\ .$$

$\Theta = 23^0 27' 31,'' 68$ | $\Theta'' = 23^0 30' 43,'' 02$

$$+\ 9{,}21\ \cos N$$
$$+\ 0{,}550\ \cos 2L$$
$$-\ 0{,}089\ \cos 2N$$
$$+\ 0{,}088\ \cos 2J$$
$$+\ 0{,}018\ \cos(2J - N)$$
$$+\ 0{,}011\ \cos(2J + f_2)$$
$$-\ 0{,}007\ \cos(2L - N)$$
$$-\ 0{,}005\ \cos(2J - f_2)$$
$$-\ 0{,}003\ \cos(N + f_2)$$
$$+\ 0{,}003\ \cos(N - f_2)$$
$$-\ 0{,}003\ \cos(2\omega_2 - 3N)$$
$$+\ 0{,}002\ \cos(2J - N + f_2)$$
$$+\ 0{,}002\ \cos(2J + 2D - f_2)$$
$$+\ 0{,}001\ \cos(2J + 2D)$$
$$+\ 0{,}001\ \cos(2J - 2D)$$
$$+\ 0{,}001\ \cos(2J + 2f_2)$$
$$-\ 0{,}001\ \cos(2J - 2f_2)$$
$$-\ 0{,}001\ \cos(2J - 2D + f_2)$$
$$-\ 0{,}001\ \cos(2J - N - f_2)$$
$$-\ 0{,}001\ \cos(2J + 2D - N - f_2)$$

$-\ 8648{,}058\cos(\overline{g_3 + a}\,t + \beta_3)$	$-\ 3218{,}178\cos(\overline{g_3 + a}\,t + \beta_3)$
$-\ 5705{,}338\cos(\overline{g_4 + a}\,t + \beta_4)$	
$+\ 1817{,}811\cos(\overline{g_1 + a}\,t + \beta_1)$	$+\ 237{,}224\cos(\overline{g_1 + a}\,t + \beta_1)$
$-\ 1786{,}551\cos(\overline{g_0 + a}\,t + \beta_0)$	$-\ 184{,}297\cos(\overline{g_0 + a}\,t + \beta_0)$
$-\ 1447{,}697\cos(\overline{g_2 + a}\,t + \beta_2)$	$-\ 506{,}759\cos(\overline{g_2 + a}\,t + \beta_2)$
$+\ 1175{,}455\cos(\overline{g_7 + a}\,t + \beta_7)$	$+\ 607{,}133\cos(\overline{g_7 + a}\,t + \beta_7)$
$-\ 379{,}821\cos(\overline{g_6 + a}\,t + \beta_6)$	$-\ 21{,}911\cos(\overline{g_6 + a}\,t + \beta_6)$
$-\ 266{,}668\cos(\overline{g_5 + a}\,t + \beta_5)$	$-\ 3{,}598\cos(\overline{g_5 + a}\,t + \beta_5)$

$$
\begin{aligned}
& - \quad 90{,}923 \cos (2g_4 + 2a\,t + 2\beta_4) \\
& - \quad 82{,}347 \cos (2g_3 + 2a\,t + 2\beta_3) \\
& - \quad 7{,}170 \cos (2g_1 + 2a\,t + 2\beta_1) \\
& - \quad 6{,}978 \cos (2g_0 + 2a\,t + 2\beta_0) \\
& - \quad 2{,}467 \cos (2g_2 + 2a\,t + 2\beta_2) \\
& - \quad 0{,}902 \cos (2g_7 + 2a\,t + 2\beta_7) \\
& - \quad 0{,}358 \cos (2g_6 + 2a\,t + 2\beta_6) \\
& - \quad 0{,}193 \cos (2g_5 + 2a\,t + 2\beta_5) \\
& - \quad 173{,}058 \cos (g_3 + g_4 + 2a\,t + \beta_3 + \beta_4) \\
& - \quad 51{,}066 \cos (g_0 + g_4 + 2a\,t + \beta_0 + \beta_4) \\
& + \quad 50{,}375 \cos (g_1 + g_4 + 2a\,t + \beta_1 + \beta_4) \\
& - \quad 48{,}598 \cos (g_0 + g_3 + 2a\,t + \beta_0 + \beta_3) \\
& + \quad 47{,}941 \cos (g_1 + g_3 + 2a\,t + \beta_1 + \beta_3) \\
& - \quad 29{,}989 \cos (g_2 + g_4 + 2a\,t + \beta_2 + \beta_4) \\
& - \quad 28{,}540 \cos (g_2 + g_3 + 2a\,t + \beta_2 + \beta_3) \\
& + \quad 18{,}113 \cos (g_4 + g_7 + 1a\,t + \beta_4 + \beta_7) \\
& + \quad 17{,}238 \cos (g_3 + g_7 + 2a\,t + \beta_3 + \beta_7) \\
& + \quad 14{,}147 \cos (g_0 + g_1 + 2a\,t + \beta_0 + \beta_1) \\
& - \quad 11{,}407 \cos (g_4 + g_6 + 2a\,t + \beta_4 + \beta_6) \\
& - \quad 10{,}856 \cos (g_3 + g_6 + 2a\,t + \beta_3 + \beta_6) \\
& - \quad 8{,}422 \cos (g_0 + g_2 + 2a\,t + \beta_0 + \beta_2) \\
& - \quad 8{,}384 \cos (g_4 + g_5 + 2a\,t + \beta_4 + \beta_5) \\
& + \quad 8{,}308 \cos (g_1 + g_2 + 2a\,t + \beta_1 + \beta_2) \\
& - \quad 7{,}979 \cos (g_3 + g_5 + 2a\,t + \beta_3 + \beta_5) \\
& + \quad 5{,}087 \cos (g_0 + g_7 + 2a\,t + \beta_0 + \beta_7) \\
& - \quad 5{,}018 \cos (g_1 + g_7 + 2a\,t + \beta_1 + \beta_7) \\
& - \quad 3{,}203 \cos (g_0 + g_6 + 2a\,t + \beta_0 + \beta_6) \\
& + \quad 3{,}160 \cos (g_1 + g_6 + 2a\,t + \beta_1 + \beta_6) \\
& + \quad 2{,}987 \cos (g_2 + g_7 + 2a\,t + \beta_2 + \beta_7) \\
& - \quad 2{,}355 \cos (g_0 + g_5 + 2a\,t + \beta_0 + \beta_5) \\
& + \quad 2{,}323 \cos (g_1 + g_5 + 2a\,t + \beta_1 + \beta_5) \\
& - \quad 1{,}881 \cos (g_2 + g_6 + 2a\,t + \beta_2 + \beta_6) \\
& - \quad 1{,}383 \cos (g_2 + g_5 + 2a\,t + \beta_2 + \beta_7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\quad 1{,}136 \cos(\overline{g_6 + g_7 + 2a}\, t + \beta_6 + \beta_7)\\
&-\quad 0{,}835 \cos(\overline{g_5 + g_7 + 2a}\, t + \beta_5 + \beta_7)\\
&-\quad 0{,}526 \cos(\overline{g_5 + g_6 + 2a}\, t + \beta_5 + \beta_6)\\
&+ 173{,}058 \cos(\overline{g_3 - g_4}\, t + \beta_3 - \beta_4)\\
&+\ 51{,}066 \cos(\overline{g_0 - g_4}\, t + \beta_0 - \beta_4)\\
&-\ 50{,}375 \cos(\overline{g_1 - g_4}\, t + \beta_1 - \beta_4)\\
&+\ 48{,}598 \cos(\overline{g_0 - g_3}\, t + \beta_0 - \beta_3)\\
&-\ 47{,}941 \cos(\overline{g_1 - g_3}\, t + \beta_1 - \beta_3)\\
&+\ 29{,}989 \cos(\overline{g_2 - g_4}\, t + \beta_2 - \beta_4)\\
&+\ 28{,}540 \cos(\overline{g_2 - g_3}\, t + \beta_2 - \beta_3)\\
&-\ 18{,}113 \cos(\overline{g_4 - g_7}\, t + \beta_4 - \beta_7)\\
&-\ 17{,}238 \cos(\overline{g_3 - g_7}\, t + \beta_3 - \beta_7)\\
&-\ 14{,}147 \cos(\overline{g_0 - g_1}\, t + \beta_0 - \beta_1)\\
&+\ 11{,}407 \cos(\overline{g_4 - g_6}\, t + \beta_4 - \beta_6)\\
&+\ 10{,}856 \cos(\overline{g_3 - g_6}\, t + \beta_3 - \beta_6)\\
&+\quad 8{,}422 \cos(\overline{g_0 - g_2}\, t + \beta_0 - \beta_2)\\
&+\quad 8{,}384 \cos(\overline{g_4 - g_5}\, t + \beta_4 - \beta_5)\\
&-\quad 8{,}308 \cos(\overline{g_1 - g_2}\, t + \beta_1 - \beta_2)\\
&+\quad 7{,}979 \cos(\overline{g_3 - g_5}\, t + \beta_3 - \beta_5)\\
&-\quad 5{,}087 \cos(\overline{g_0 - g_7}\, t + \beta_0 - \beta_7)\\
&+\quad 5{,}018 \cos(\overline{g_1 - g_7}\, t + \beta_1 - \beta_7)\\
&+\quad 3{,}203 \cos(\overline{g_0 - g_6}\, t + \beta_0 - \beta_6)\\
&-\quad 3{,}160 \cos(\overline{g_1 - g_6}\, t + \beta_1 - \beta_6)\\
&-\quad 2{,}987 \cos(\overline{g_2 - g_7}\, t + \beta_2 - \beta_7)\\
&+\quad 2{,}355 \cos(\overline{g_0 - g_5}\, t + \beta_0 - \beta_5)\\
&-\quad 2{,}323 \cos(\overline{g_1 - g_5}\, t + \beta_1 - \beta_5)\\
&+\quad 1{,}881 \cos(\overline{g_2 - g_6}\, t + \beta_2 - \beta_6)\\
&+\quad 1{,}383 \cos(\overline{g_2 - g_5}\, t + \beta_2 - \beta_5)\\
&-\quad 1{,}136 \cos(\overline{g_6 - g_7}\, t + \beta_6 - \beta_7)\\
&-\quad 0{,}835 \cos(\overline{g_5 - g_7}\, t + \beta_5 - \beta_7)\\
&+\quad 0{,}526 \cos(\overline{g_5 - g_6}\, t + \beta_5 - \beta_6)
\end{aligned}
$$

$$+\ 0{,}035 \cos(2L - \overline{g_4 + a}\, t - \beta_4)$$

$$+\ 0{,}033 \cos (2\,L - \overline{g_3 + a}\,t - \beta_3)$$
$$+\ 0{,}010 \cos (2\,L - \overline{g_0 + a}\,t - \beta_0)$$
$$-\ 0{,}010 \cos (2\,L - \overline{g_1 + a}\,t - \beta_1)$$
$$+\ 0{,}006 \cos (2\,L - \overline{g_2 + a}\,t - \beta_2)$$
$$-\ 0{,}003 \cos (2\,L - \overline{g_7 + a}\,t - \beta_7)$$
$$+\ 0{,}002 \cos (2\,L - \overline{g_6 + a}\,t - \beta_6)$$
$$+\ 0{,}002 \cos (2\,L - \overline{g_5 + a}\,t - \beta_5)$$
$$+\ 0{,}006 \cos (2\,J - \overline{g_4 + a}\,t - \beta_4)$$
$$+\ 0{,}005 \cos (2\,J - \overline{g_3 + a}\,t - \beta_3)$$
$$+\ 0{,}002 \cos (2\,J - \overline{g_0 + a}\,t - \beta_0)$$
$$-\ 0{,}002 \cos (2\,J - \overline{g_1 + a}\,t - \beta_1)$$
$$+\ 0{,}001 \cos (2\,J - \overline{g_2 + a}\,t - \beta_2)$$
$$-\ 0{,}001 \cos (2\,J - \overline{g_7 + a}\,t - \beta_7)$$
$$-\ 0{,}009 \cos (L + h_6\,t + \xi_6)$$
$$-\ 0{,}008 \cos (L + h_3\,t + \xi_3)$$
$$+\ 0{,}008 \cos (L + h_1\,t + \xi_1)$$
$$-\ 0{,}006 \cos (L + h_2\,t + \xi_2)$$
$$-\ 0{,}002 \cos (L + h_0\,t + \xi_0)$$
$$+\ 0{,}001 \cos (L + h_7\,t + \xi_7)$$
$$+\ 0{,}021 \cos (3\,L - h_6\,t + \xi_6)$$
$$+\ 0{,}019 \cos (3\,L - h_3\,t - \xi_3)$$
$$-\ 0{,}019 \cos (3\,L - h_1\,t - \xi_1)$$
$$+\ 0{,}014 \cos (3\,L - h_2\,t - \xi_2)$$
$$+\ 0{,}005 \cos (3\,L - h_0\,t - \xi_0)$$
$$-\ 0{,}003 \cos (3\,L - h_7\,t - \xi_7)$$
$$+\ 0{,}001 \cos (3\,L - h_5\,t - \xi_5)$$

Nimmt man die Summe aller Koeffizienten der periodischen Glieder in ψ'' ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, so erhält man den größten Wert, um den der wahre Widderpunkt von dem mittleren abweichen kann. Dieser Wert ist $+\ 7^0\ 20'\ 14,''289$.

Nimmt man die Summe aller Koeffizienten der periodischen Glieder in Θ'', ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, so bekommt man den größten Wert, um den die Schiefe der Ekliptik von ihrem mittleren Werte für das Jahr 1850,0 abweichen kann. Dieser Wert ist $+$ 1° 41′ 51,″28. Die Schiefe der Ekliptik muß also immer zwischen den beiden Werten 21° 48′ 51,″54 und 25° 12′ 34,″10 liegen.

Es sind noch die Größen α_1, α_2, u_1 und u_2 für den Fall zu bestimmen, daß A von B verschieden ist. Um die Größe α_2 zu bestimmen, ist die Gleichung $\frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{\delta H}{\delta u_2}$ zu benützen. Wie die Gleichung (2) zeigt, enthält T die Veränderliche u_2 nicht. In dem Ausdruck für U kann man alle mit $\sin \Theta_0$ multiplizierten Glieder vernachlässigen. Außerdem sollen $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 1$ und $-\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \cos \varepsilon$ gesetzt werden. Dann erhält man für U unter Berücksichtigung der nur μ_2 enthaltenden Glieder

$$
\begin{aligned}
U = \frac{3}{2}(B - A)\frac{m_1}{r_1^3}\Big\{ & \frac{1}{4}\sin^2 \varepsilon_0 \cos(2u_2 + 2u_1) \\
& + \frac{1}{2}\sin^4 \frac{\varepsilon_0}{2}\cos(2v_1 - 2u_2 - 2u_1 - 2u_3) \\
& + \frac{1}{2}\cos^4 \frac{\varepsilon_0}{2}\cos(2v_1 + 2u_2 + 2u_1 - 2u_3) \\
& - \frac{i}{2}\sin^2 \frac{\varepsilon_0}{2}\sin\varepsilon_0\,[\cos(\Omega - 2u_2 - 2u_1 - u_3) \\
& \qquad - \cos(2v_1 - \Omega - 2u_1 - 2u_2 - u_3)] \\
& + \frac{i}{2}\cos^2 \frac{\varepsilon_0}{2}\sin\varepsilon_0\,[\cos(\Omega + 2u_2 + 2u_1 - u_3) \\
& \qquad - \cos(2v_1 - \Omega + 2u_1 + 2u_2 - u_3)]\Big\} \\
& + \text{Mondglieder.}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

In U kann man die mit i und c multiplizierten Glieder vernachlässigen, 2φ, $2L$ und $2J$ an Stelle von $-2u_2 - 2u_1$, $2v_1 - 2u_3$ und $2v_2 - 2u_3$ setzen und außerdem $\left(\frac{\varrho_1}{r_1}\right)^3 = 1$ und $\left(\frac{\varrho_2}{r_2}\right)^3 = 1$ nehmen. Dann erhält man für $\frac{d\alpha_2}{dt}$

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = -\frac{3}{2}(B-A)\,n_1^2\left\{\frac{1}{2}\sin^2\varepsilon'_0\sin 2\varphi + \sin^4\frac{\varepsilon'_0}{2}\sin(2\varphi+2L)\right.$$
$$\left. + \cos^4\frac{\varepsilon'_0}{2}\sin(2\varphi-2L)\right\}$$
$$-\frac{3}{2}(B-A)\,n_1^2\lambda\left\{\frac{1}{2}\sin^2\varepsilon'_0\sin 2\varphi + \sin^4\frac{\varepsilon'_0}{2}\sin(2\varphi+2J)\right.$$
$$\left. + \cos^4\frac{\varepsilon'_0}{2}\sin(2\varphi-2J)\right\}$$

und daraus folgt

$$\alpha_2 = \text{const} + \frac{3}{2}(B-A)\,n_1^2\,(1+\lambda)\,\frac{\sin^2\varepsilon'_0}{4\omega}\cos 2\varphi$$
$$(29)\quad + \frac{3}{2}(B-A)\,n_1^2\left\{\frac{\sin^4\frac{\varepsilon'_0}{2}}{2(\omega+n_1)}\cos(2\varphi+2L) + \frac{\cos^4\frac{\varepsilon'_0}{2}}{2(\omega-n_1)}\cos(2\varphi-2L)\right\}$$
$$+ \frac{3}{2}(B-A)\,n_1^2\lambda\left\{\frac{\sin^4\frac{\varepsilon'_0}{2}}{2(\omega+n_2)}\cos(2\varphi+2J) + \frac{\cos^4\frac{\varepsilon'_0}{2}}{2(\omega-n_2)}\cos(2\varphi-2J)\right\}$$

Die Größe $\frac{\alpha_2}{C}$ war mit ω bezeichnet worden; die Größe $\frac{\text{const.}}{C}$ auf der rechten Seite der Gleichung soll mit ω_0 bezeichnet werden. Der Winkel, den der Körper in der Zeit dt um die Zentralachse beschreibt, ist $\omega\,.\,dt$; in der Zeit t beschreibt der Körper den Winkel $\int\omega\,dt$. Aus (29) erhält man

$$\int\omega\,dt = \text{const} + \omega_0 t + \frac{3}{8}\frac{B-A}{C}\frac{n_1^2}{\omega^2}(1+\lambda)\sin^2\varepsilon'_0\sin 2\varphi$$
$$+ \frac{3}{8}\frac{B-A}{C}\frac{n_1^2}{\omega^2}\left\{\frac{\sin^4\frac{\varepsilon'_0}{2}}{\left(1+\frac{n_1}{\omega}\right)^2}\sin(2\varphi+2L) + \frac{\cos^4\frac{\varepsilon'_0}{2}}{\left(1-\frac{n_1}{\omega}\right)^2}\sin(2\varphi-2L)\right\}$$
$$(30)$$
$$+ \frac{3}{8}\frac{B-A}{C}\frac{n_1^2}{\omega^2}\lambda\left\{\frac{\sin^4\frac{\varepsilon'_0}{2}}{\left(1+\frac{n_2}{\omega}\right)^2}\sin(2\varphi+2J) + \frac{\cos^4\frac{\varepsilon'_0}{2}}{\left(1-\frac{n_2}{\omega}\right)^2}\sin(2\varphi-2L)\right\}$$

Die periodischen Glieder sind alle mit $\frac{3}{8}\frac{n_1{}^2}{\omega^2}\frac{B-A}{C}$ multipliziert. Die Größe $\frac{3}{8}\frac{n_1{}^2}{\omega^2}$ ist gleich 0,"58. Nach den Pendelbeobachtungen ist $\frac{B-A}{C}$ über hundertmal kleiner als $\frac{C-A}{C}$, also $\frac{B-A}{B}$ 2 $\frac{1}{30000}$. Setzt man diese Werte ein, so zeigt sich, daß die Summe der Koeffizienten der periodischen Glieder noch nicht gleich 0,"0001 ist.

Die Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde, die als Zeitmaß allen astronomischen Beobachtungen zu Grunde liegt, ist also unveränderlich.

Zur Berechnung von u_1 und u_2 gehen wir wieder von den Differentialgleichungen $\frac{d\,u_1}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta \alpha_1}$ und $\frac{du_2}{dt} = -\frac{\delta H}{d\alpha_1}$ aus. Für $\frac{du_1}{dt}$ folgt dann aus Gleichung (2), wenn $\frac{\alpha_2}{C}$ gleich ω gesetzt wurde,

$$\frac{d\,u_1}{dt} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\,\omega\, k_1 \sin^2 u_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\,\omega\, k_2 \cos^2 u_1 + \frac{\delta U}{\delta \alpha_1}$$

und daraus

$$u_1 = \text{const} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\,\omega\, k_1\, t - \int \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\,\omega\,\frac{B-A}{C}\,\frac{C^2}{A-B}\cos^2 u_1\, dt + \int \frac{\delta U}{\delta \alpha_1}\, dt \tag{31}$$

wo

$$\int \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\,\omega\,\frac{B-A}{C}\cdot\frac{C^2}{A\,.\,B}\cos^2 u_1\, dt = \frac{1}{2}\,\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\,.\,\omega.\,\frac{B-A}{C}\,\frac{C^2}{A\,.\,B}\,t$$
$$+ \frac{1}{4}\,\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\,\frac{B-A}{C-A}\,\frac{C^2}{A\,.\,B}\sin 2u_1\ .$$

Führt man die neue Veränderliche Θ_0 an Stelle von α_1 ein, so bestehen die Gleichungen

$$\cos\Theta_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \qquad \frac{d\,\Theta_0}{d\,a_1} = -\frac{1}{\alpha_2 \sin\Theta_0}$$

In dem Ausdruck für U sollen alle die Glieder vernachlässigt werden, die nach der Differentiation nach Θ_0

den Faktor sin Θ_0 noch im Zähler haben. Dann ist unter Vernachlässigung der mit c^2, i u. s. w. multiplizierten Glieder

$$\begin{aligned}
\frac{\delta U}{\delta \alpha_1} &= -\frac{1}{\alpha_2 \sin \Theta_0} \frac{\delta U}{\delta \Theta_0} = \frac{1}{4} k (1+\lambda) \cos \Theta_0 \, (3 \cos^2 \varepsilon - 1) \\
&- \frac{1}{2} k (1+\lambda) \frac{\cos 2\,\Theta_0}{\sin \Theta_0} \sin 2\,\varepsilon \cos u_2 \\
&- \frac{1}{2} k (1+\lambda) \cos \Theta_0 \, \sin^2 \varepsilon \, \cos 2\,u_2 \\
&- \frac{3}{8} \frac{B-A}{C} \frac{n_1^2}{\omega} (1+\lambda) \cos \Theta_0 \, (3 \cos^2 \varepsilon - 1) \cos 2\,u_1 \\
&+ \frac{3}{4} k \cos \Theta_0 \sin^2 \varepsilon \cos (2 v_1 - 2 u_3) + \frac{3}{4} k \, \lambda \cos \Theta_0 \sin^2 \varepsilon \cos (2 v_2 - 2 u_3) \\
&+ \frac{3}{8} \frac{B-A}{C} \frac{n_1^2}{\omega} (1+\lambda) \operatorname{ctg} \Theta_0 \, \cos^2 \frac{\Theta_0}{2} \sin 2\,\varepsilon \cos (u_2 + 2\,u_1) \\
&+ k \frac{\cos 2\,\Theta_0}{\sin \Theta_0} \sin \varepsilon \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} [\cos (2 v_1 - u_2 - 2 u_3) + \lambda \cos (2 v_2 - u_2 - 2 u_3)] \\
&- k \frac{\cos 2\,\Theta_0}{\sin \Theta_0} \sin \varepsilon \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} [\cos (2 v_1 + u_2 - 2 u_3) + \lambda \cos (2 v_2 + u_2 - 2 u_3)] \\
&+ \frac{3}{8} \frac{B-A}{C} \frac{n_1^2}{\omega} (1+\lambda) \cos^2 \frac{\Theta_0}{2} \sin^2 \varepsilon \cos (2 u_2 + 2 u_1) \qquad (32) \\
&- k \cos \Theta_0 \sin^4 \frac{\varepsilon}{2} \left| \cos (2 v_1 - 2 u_2 - 2 u_3) + \lambda \cos (2 v_2 - 2 u_2 - 2 u_3) \right| \\
&- k \cos \Theta_0 \cos^4 \frac{\varepsilon}{2} \left| \cos (2 v_1 + 2 u_2 - 2 u_3) + \lambda \cos (2 v_2 + 2 u_2 - 2 u_3) \right| \\
&- \frac{9}{16} \frac{B-A}{C} \frac{n_1^2}{\omega} \cos \Theta_0 \sin^2 \varepsilon [\cos (2 v_1 - 2 u_1 - 2 u_3) \\
&\qquad\qquad + \lambda \cos (2 v_2 - 2 u_1 - 2 u_3)] \\
&- \frac{9}{16} \frac{B-A}{B} \frac{n_1^2}{\omega} \cos \Theta_0 \sin^2 \varepsilon [\cos (2 v_1 + 2 u_1 - 2 u_3) \\
&\qquad\qquad + \lambda \cos (2 v_2 + 2 u_1 - 2 u_3)] \\
&- \frac{3}{4} \frac{B-A}{C} \frac{n_1^2}{\omega} \operatorname{ctg} \Theta_0 \, \cos^2 \frac{\Theta_0}{2} \sin \varepsilon \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} [\cos (2 v_1 - u_2 - 2 u_1 - 2 u_3) \\
&\qquad\qquad + \lambda \cos (2 v_2 - u_2 - 2 u_1 - 2 u_3)]
\end{aligned}$$

$$+\frac{3}{4}\frac{B-A}{C}\frac{n_1^2}{\omega}\operatorname{ctg}\Theta_0\cos^2\frac{\Theta_0}{2}\sin\varepsilon\cos^2\frac{\varepsilon}{2}\left[\cos(2v_1+u_2+2u_1-2u_3)\right.$$
$$\left.+\lambda\cos(2v_2+u_2+2u_1-2u_3)\right]$$
$$+\frac{3}{4}\frac{B-A}{C}\frac{n_1^2}{\omega}\cos^2\frac{\Theta_0}{2}\sin^4\frac{\varepsilon}{2}\left[\cos(2v_1-2u_2-2u_1-2u_3)\right.$$
$$\left.+\lambda\cos(2v_2-2u_2-2u_1-2u_3)\right]$$
$$+\frac{3}{4}\frac{B-A}{C}\frac{n_1^2}{\omega}\cos^2\frac{\Theta_0}{2}\cos^4\frac{\varepsilon}{2}\left[\cos(2v_1+2u_2+2u_1-2u_3)\right.$$
$$\left.+\lambda\cos(2v_2+2u_2+2u_1-2u_3)\right]$$
$$+\frac{3}{2}c\,k\,\lambda\cos\Theta_0\sin\varepsilon\cos\varepsilon\left[\cos(2v_2-N-u_3)-\cos(N\,u_3)\right]$$
$$+\frac{c}{2}k\,\lambda\frac{\cos 2\Theta_0}{\sin\Theta_0}(1+\cos\varepsilon-2\cos^2\varepsilon)\left[\cos(2v_2-N-u_2-u_3)\right.$$
$$\left.-\cos(N-u_2-u_3)\right]$$
$$+\frac{c}{2}k\,\lambda\frac{\cos 2\Theta_0}{\sin\Theta_0}(1-\cos\varepsilon-2\cos^2\varepsilon)\left[\cos(2v_2-N+u_2-u_3)\right.$$
$$\left.-\cos(N+u_2-u_3)\right]$$
$$-\frac{3}{8}c\frac{B-A}{C}\frac{n_1^2}{\omega}\lambda\operatorname{ctg}\Theta_0\cos^2\frac{\Theta_0}{2}(1+\cos\varepsilon$$
$$-2\cos^2\varepsilon)\left[\cos(2v_2-N-u_2-2u_1-u_3)-\cos(N-u_2-2u_1-u_3)\right]$$
$$-\frac{3}{8}c\frac{B-A}{C}\frac{n_1^2}{\omega}\lambda\operatorname{ctg}\Theta_0\cos^2\frac{\Theta_0}{2}(1-\cos\varepsilon$$
$$-2\cos^2\varepsilon)\left[\cos(2v_2-N+u_2+2u_1-u_3)-\cos(N+u_2+2u_1-u_3)\right]$$
$$-\frac{9}{8}c\frac{B-A}{C}\frac{n_1^2}{\omega}\lambda\cos\Theta_0\sin\varepsilon\cos\varepsilon\left[\cos(2v_2-N-2u_1-u_3)\right.$$
$$\left.-\cos(N-2u_1-u_3)\right]$$
$$-\frac{9}{8}c\frac{B-A}{C}\frac{n_1^2}{\omega}\lambda\cos\Theta_0\sin\varepsilon\cos\varepsilon\left[\cos(2v_2-N+2u_1-u_3)\right.$$
$$\left.-\cos(N+2u_1-u_3)\right]$$
$$-c\,k\,\lambda\cos\Theta_0\sin\varepsilon\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\left[\cos(2v_2-N-2u_2-u_3)\right.$$
$$\left.-\cos(N-2u_2-u_3)\right]$$
$$+c\,k\,\lambda\cos\Theta_0\sin\varepsilon\cos^2\frac{\varepsilon}{2}\left[\cos(2v_2-N+2u_2-u_3)\right.$$
$$\left.-\cos(N+2u_2-u_3)\right]$$

$$+ \frac{c}{2} \frac{B-A}{C} \frac{n_1{}^2}{\omega} \lambda \cos^2 \frac{\Theta_0}{2} \sin\varepsilon \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} [\cos(2v_2 - N - 2u_2 - 2u_1 - u_3)$$
$$- \cos(N - 2u_2 - 2u_1 - u_3)]$$
$$- \frac{c}{2} \frac{B-A}{C} \frac{n_1{}^2}{\omega} \lambda \cos^2 \frac{\Theta_0}{2} \sin\varepsilon \cos^2 \frac{\varepsilon}{2} [\cos(2v_2 - N + 2u_2 + 2u_1 - u_3)$$
$$- \cos(N + 2u_2 + 2u_1 - u_3)]$$

Die zu dem Argument u_3 gehörigen, mit i multiplizierten Größen können durch die Integration bedeutend werden und sollen daher mitgenommen werden. Die betreffenden Ausdrücke lauten

$$+ \frac{3}{2} k \cos\Theta_0 \sin\varepsilon \cos\varepsilon [i \cos(2v_1 - \Omega - u_3) + \lambda i \cos(2v_2 - \Omega - u_3)$$
$$- (1 + \lambda) i \cos(\Omega - u_3)]$$

In dem Ausdruck für u_1 ist $\cos\Theta_0 = 1$ zu setzen und die Größen χ, φ, $2L$, $2J$, N für u_1, $-u_2 - u_1$, $2v_1 - 2u_3$ $2v_2 - 2u_3$, $N - u_3$ einführen. Die Glieder, deren Koeffizienten nach der Integration kleiner als 0,"02 sind, sollen vernachlässigt werden. Hierbei wird $\frac{B-A}{C}$ gleich $\frac{1}{30000}$ angenommen. Die Glieder, deren Koeffizienten mit diesem Wert von $\frac{B-A}{C}$ kleiner als 0,"02 sind, sind dann zu vernachlässigen.

Es ergibt dann die Integration, wenn die Zahlen in Klammern die Logarithmen der in Sekunden ausgedrückten Zahlengrößen bedeuten,

$$u_1 = \text{const.} + \left[\omega \frac{C(B+A) - 2A.B}{2.A.B} - 18{,}''27\right] t$$
$$- (2{,}73907) \frac{\cos 2\Theta_0}{\sin\Theta_0} \sin(\varphi + \chi)$$
$$- \left|(3{,}36742) - (2.22712) \frac{C^2}{A.B}\right| \frac{B-A}{C} \sin 2\chi$$
$$+ 0{,}''16 \sin 2L + 0{,}''03 \sin 2J$$
$$(0{,}92607) \frac{B-A}{C} \operatorname{ctg}\Theta_0 \sin(\varphi - \chi)$$

$$- (4{,}09013)\ \frac{\cos 2\ \Theta_0}{\sin\ \Theta_0} \sin(\varphi + \chi + 2\,L)$$

$$+ (4{,}39980)\ \frac{\cos 2\ \Theta_0}{\sin\ \Theta_0} \sin(\varphi + \chi + 2\,J)$$

$$- (\bar{3}{,}46316)\ \frac{\cos 2\ \Theta_0}{\sin\ \Theta_0} \sin(\varphi + \chi - 2L)$$

$$- (\bar{3}{,}82856)\ \frac{\cos 2\ \Theta_0}{\sin\ \Theta_0} \sin(\varphi + \chi - 2\,J)$$

$$- (2{,}27721)\ \frac{B-A}{C}\ \mathrm{ctg}\ \Theta_0 \sin(\varphi - \chi + 2\,L)$$

$$- (2{,}58670)\ \frac{B-A}{C}\ \mathrm{ctg}\ \Theta_0 \sin(\varphi - \chi + 2\,J)$$

$$+ (\bar{1}{,}64741)\ \frac{B-A}{C}\ \mathrm{ctg}\ \Theta_0 \sin(\varphi - \chi - 2L)$$

$$+ (0{,}01588)\ \frac{B-A}{C}\ \mathrm{ctg}\ \Theta_0 \sin(\varphi - \chi - 2\,J)$$

$$- 0{,}''88 \sin N$$

$$+ 0{,}''02 \sin(2L - \overline{g_4 + a\,t} - \beta_4) \qquad + 0{,}''02 \sin(2L - \overline{g_3 + a\,t} - \beta_3)$$

$$- 5164{,}05 \sin(\overline{g_3 + a\,t} + \beta_3) \qquad - 3406{,}85 \sin(\overline{g_4 + a\,t} + \beta_4)$$

$$- 1085{,}48 \sin(\overline{g_1 + a\,t} + \beta_1) \qquad - 1066{,}81 \sin(\overline{g_0 + a\,t} + \beta_0)$$

$$- 864{,}47 \sin(\overline{g_2 + a\,t} + \beta_2) \qquad - 701{,}90 \sin(\overline{g_7 + a\,t} + \beta_7)$$

$$- 226{,}80 \sin(\overline{g_6 + a\,t} + \beta_6) \qquad - 159{,}24 \sin(\overline{g_5 + a\,t} + \beta_5)$$

$$+ (4{,}20642)\ \frac{\cos 2\ \Theta_0}{\sin\ \Theta_0} \sin(\varphi + \chi + 2\,J - N)$$

$$- (\bar{4}{,}23705)\ \frac{\cos 2\ \Theta_0}{\sin\ \Theta_0} \sin(\varphi + \chi + N)$$

$$+ (3{,}10344)\ \frac{\cos 2\ \Theta_0}{\sin\ \Theta_0} \sin(\varphi + \chi - 2\,J - N)$$

$$- (\bar{3}{,}07100)\ \frac{\cos 2\ \Theta_0}{\sin\ \Theta_0} \sin(\varphi + \chi - N)$$

$$- (2{,}39260)\ \frac{B-A}{C}\ \mathrm{ctg}\ \Theta_0 \sin(\varphi - \chi + 2\,J - N)$$

$$+ (\bar{2}{,}42314)\ \frac{B-A}{C}\ \mathrm{ctg}\ \Theta_0 \sin(\varphi - \chi + N)$$

$$-(1{,}29076)\,\frac{B-A}{C}\,\operatorname{ctg}\Theta_0\,\sin(\varphi-\chi-2J+N)$$

$$+(1{,}25760)\,\frac{B-A}{C}\,\operatorname{ctg}\Theta_0\,\sin(\varphi-\chi-N)\;.$$

Die Größen $\frac{B-A}{C}$ und $\frac{1}{\sin\Theta_0}$ sind unbekannt. Um aber genäherte Werte für die einzelnen Koeffizienten zu erhalten, sollen Annahmen über die Größe von $\frac{B-A}{C}$ und Θ_0 gemacht werden. Nimmt man $\frac{B-A}{C}=\frac{1}{30000}$ und $\Theta_0 = 0,''3$ an, so zeigt sich, daß die mit $\frac{B-A}{C}$ und $\frac{B-A}{C}\operatorname{ctg}\Theta_0$ multiplizierten Koeffizienten von keiner Bedeutung sind, hingegen können die Koeffiziente der mit $\frac{\cos 2\,\Theta_0}{\sin\Theta_0}$ multiplizierten Glieder einige Grade groß werden. Sollte Θ_0 nicht viel kleiner als $0,''3$ sein, so kann man alle Glieder in u_1 gegenüber $\omega\,\frac{C(B+A)-2\,A.B}{2\,A.B}\,t$ vernachlässigen. Die Zentralachse bewegt sich also in ungefähr 10 Monaten (der sogenannten Eulerschen Periode) um die Figurachse.

Aus Gleichung (2) folgt für u_2

$$\frac{du_2}{dt}=-\omega-\omega\,k_1+\omega\,\frac{B-A}{C}\,\frac{C^2}{A.B}\cos^2 u_1+\frac{\delta U}{\delta\alpha_2}$$

und

$$u_2=\text{const}-\omega(1+k_1)\,t-\int\omega\,\frac{B-A}{C}\,\frac{C^2}{A.B}\cos^2 u_1\,dt+\int\frac{\delta U}{\delta\alpha_2}\,dt$$

Man erhält dann für φ unter Vernachlässigung der periodischen Glieder in (1)

$$\varphi=-\mu_1-u_2=\text{const}+\omega\,t-\int\left(\frac{\delta U}{\delta\alpha_1}-\frac{\delta U}{\delta\alpha_2}\right)dt\;.$$

Wird $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ gleich 1 gesetzt, so ist

$$\frac{\delta U}{\delta \alpha_1} \quad \frac{\delta U}{\delta \alpha_2} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_2} \frac{\delta U}{\delta \alpha_3} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_2} \frac{\delta u_3}{dt} = -\cos \varepsilon \frac{d\psi}{dt},$$

folglich

$$\varphi = \text{const} + \omega t + \int \cos \varepsilon \frac{d\psi}{dt} .$$

Mit Hülfe dieser Gleichung, läßt sich nach Laplace, Serret u. a. die Veränderung des mittleren Sonnentages untersuchen. Da diese Veränderung so klein ist, daß sie für die praktische Astronomie nicht in Betracht kommt, so soll auf diesen Gegenstand hier nicht eingegangen werden.

Es bleibt noch die Veränderliche α_1 zu bestimmen übrig.

Die Größe $\frac{\alpha_1}{\alpha_1}$ bestimmt den Winkel Θ_0, den die Zentralachse mit der Figurachse bildet. Es empfiehlt sich für α_1 die neue Veränderliche Θ_0 einzuführen, wobei man α_2 als eine Konstante ansieht.

Aus

$$\cos \Theta_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

folgt

$$\frac{d\Theta_0}{dt} = -\frac{1}{\alpha_2 \sin \Theta_0} \frac{\delta H}{\delta u_1} .$$

Werden die Glieder vernachläßigt, die nach der Differentiation noch $\sin \Theta_0$ im Zähler führen, und außerdem noch diejenigen, deren Koeffixienten nach der Integration kleiner als 0,‟001 sind, so erhält man

$$\frac{d\Theta_0}{dt} = \frac{3}{2} \frac{B-A}{C} \frac{n_1^2}{\omega} \Bigg\{ \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\Theta_0}{2} \sin 2\varepsilon \sin (u_2 + 2u_1)$$
$$- \frac{1}{2} \frac{\cos 2\Theta_0}{\sin \Theta_0} \sin^2 \varepsilon \sin (2u_2 + 2u_1)$$

$$+ \frac{\cos^4 \frac{\Theta_0}{2}}{\sin \Theta_0} \sin^4 \frac{\varepsilon}{2} \Big[\sin (2\,v_1 - 2\,u_2 - 2\,u_1 - 2\,u_3)$$

$$+ \lambda \sin (2\,v_2 - 2\,u_2 - 2\,u_1 - 2\,u_3) \Big]$$

$$- \frac{\cos^4 \frac{\Theta_0}{2}}{\sin \Theta_0} \cos^4 \frac{\varepsilon}{2} \Big[\sin (2\,v_1 + 2\,u_2 + 2\,u_1 - 2\,u_3)$$

$$+ \lambda \sin (2\,v_2 + 2\,u_2 + 2\,u_1 - 2\,u_3) \Big]$$

$$+ \lambda\, c \frac{\cos^4 \frac{\Theta_0}{2}}{\sin \Theta_0} \sin \varepsilon \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \Big[\sin (2\,v_2 - N - 2\,u_2 - 2\,u_1 - u_3)$$

$$- \sin (N - 2\,u_2 - 2\,u_1 - u_3) \Big]$$

$$+ \lambda\, c \frac{\cos^4 \frac{\Theta_0}{2}}{\sin \Theta_0} \sin \varepsilon \cos^2 \frac{\varepsilon}{2} \Big[\sin (2\,v_2 - N + 2\,u_2 + 2\,u_1 - u_3)$$

$$- \sin (N + 2\,u_2 + 2\,u_1 - u_3) \Big] \Big\}$$

Die Integration ergibt, wenn wieder die Zahlen in Klammern die Logarithmen der in Sekunden ausgedrückten Zahlengrößen bedeuten,

$$\Theta_0 = \text{const.} + (1{,}22710)\, \frac{B-A}{C} \cos (\varphi - \chi)$$

$$- (1{,}47287)\, \frac{B-A}{C} \frac{\cos^4 \frac{\Theta_0}{2}}{\sin \Theta_0} \cos 2\,\varphi$$

$$- (3{,}29323)\, \frac{B-A}{C} \frac{\cos^4 \frac{\Theta_0}{2}}{\sin \Theta_0} \cos (2\,\varphi + 2\,L)$$

$$- (3{,}61665)\, \frac{B-A}{C} \frac{\cos^4 \frac{\Theta_0}{2}}{\sin \Theta_0} \cos (2\,\varphi + 2\,J)$$

$$- (0{,}02648)\ \frac{B-A}{C}\ \frac{\cos^4 \frac{\Theta_0}{2}}{\sin \Theta_0}\ \cos(2\varphi - 2L)$$

$$- (0{,}38025)\ \frac{B-A}{C}\ \frac{\cos^4 \frac{\Theta_0}{2}}{\sin \Theta_0}\ \cos(2\varphi + N)$$

$$- (\overline{3}{,}25251)\ \frac{B-A}{C}\ \frac{\cos^4 \frac{\Theta_0}{2}}{\sin \Theta_0}\ \cos(2\varphi + 2J - N)$$

$$+ (3{,}26814)\ \frac{B-A}{C}\ \frac{\cos^4 \frac{\Theta_0}{2}}{\sin \Theta_0}\ \cos(2\varphi + N)$$

$$+ (2{,}64973)\ \frac{B-A}{C}\ \frac{\cos^4 \frac{\Theta_0}{2}}{\sin \Theta_0}\ \cos(2\varphi - 2J + N)$$

$$- (2{,}63352)\ \frac{B-A}{C}\ \frac{\cos^4 \frac{\Theta_0}{2}}{\sin \Theta_0}\ \cos(2\varphi - N)\ .$$

Wie aus der Gleichung zu ersehen ist, haben die periodischen Glieder eine Periode von ungefähr einem halben oder einem ganzen Tage.

Die Größen u_1 und Θ_0 stellen die Bewegung der Zentralachse um die Figurachse dar. Der Wert von Θ_0 ist nicht genügend bekannt; er scheint höchstens gleich 0,"3 zu sein. Nicht bekannt ist, ob sich in Θ_0 auch kurzperiodische Glieder befinden.