Band LXXIII. No. 8. XIX. Jahrgang.

Botanisches Centralblatt.

REFERIRENDES ORGAN

für das Gesammtgebiet der Botanik des In- und Auslandes.

Herausgegeben

unter Mitwirkung zahlreicher Gelehrten

von

Dr. Oscar Uhlworm und **Dr. F. G. Kohl**

in Cassel. in Marburg.

Zugleich Organ

des

Botanischen Vereins in München, der Botaniska Sällskapet i Stockholm, der Gesellschaft für Botanik zu Hamburg, der botanischen Section der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur zu Breslau, der Botaniska Sektionen af Naturvetenskapliga Studentsällskapet i Upsala, der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien, des Botanischen Vereins in Lund und der Societas pro Fauna et Flora Fennica in Helsingfors.

Nr. 8.	Abonnement für das halbe Jahr (2 Bände) mit 14 M. durch alle Buchhandlungen und Postanstalten.	1898.

Die Herren Mitarbeiter werden dringend ersucht, die Manuscripte immer nur auf *einer* Seite zu beschreiben und für *jedes* Referat besondere Blätter benutzen zu wollen. Die Redaction.

Wissenschaftliche Originalmittheilungen.*)

Die pflanzlichen Variationscurven und die Gauss'sche Wahrscheinlichkeitscurve.

Von

Prof. Dr. F. Ludwig

in Greiz.

Mit 1 Doppeltafel.**)

Die Curven, welche für die Variation pflanzlicher Merkmale auf dem statistischen Weg bisher gewonnen wurden, sind alle zurückführbar auf die Binomial- oder Gauss'schen Wahrscheinlichkeitscurven. Sie lassen sich in folgender Weise eintheilen:

*) Für den Inhalt der Originalartikel sind die Herren Verfasser allein verantwortlich. Red.

**) Die Tafel liegt einer der nächsten Nummern bei.

A. Monomorphe Curven.
   a. Bilaterale (zweiästige Curven).
      α. Symmetrische
         1. (normale) Binomialcurven.
         2. Hyperbinomialcurven.
      β. Asymmetrische
         3. Parabinomialcurven.
   b. Unilaterale.
         4. Halbe Galtoncurven $\begin{cases}\text{binomiale.}\\ \text{hyperbinomiale.}\end{cases}$
B. Pleomorphe Curven.
         5. Combinationscurven (Summationscurven). (Lage der Maxima konstant, Frequenzverhältnisse wechselnd.)
         6. Constante polymorphe Curven. (Lage der Maxima **und** deren Frequenzverhältnisse constant.)

Einige dieser Curven sollen im Folgenden etwas eingehender, als dies bisher von botanischer Seite geschehen ist, behandelt werden. Dabei sollen einmal die Methoden der Anthropologen und Zoologen, die in der Anwendung der Statistik den Botanikern weit vorausgeeilt sind, den letzteren nutzbar gemacht werden. Sodann soll dargethan werden, wie die Gauss'schen Formeln für den wahrscheinlichen Fehler und die Gauss'sche Wahrscheinlichkeitscurve, welche sich durch Berechnung des Integrals $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\int e^{-\frac{x.x}{n}}dx$ ergibt und nur eine präcisere Form der aus dem Binom $(p+q)^n$ gewonnenen „Binomialcurve" darstellt, ein wichtiges Kriterium für die Zugehörigkeit der Variationscurven zu einer der obigen Curven ist, wie sich auch für die letzteren mathematische Formeln ergeben, die gestatten, aus verhältnissmässig *wenigen* Beobachtungen die mittlere Eigenschaft eines Merkmals und das Gesetz seiner Variation zahlenmässig festzustellen, wozu sonst nur eine sehr grosse Zahl von Beobachtungen führt.

Kapitel I.

Normale Binomialcurven.

Sie sind wohl die am häufigsten vorkommende Form der Variationscurven. Die Uebereinstimmung der durch Beobachtung gewonnenen Variationscurve mit einer normalen Binomialcurve lässt sich auf dem Weg der Construction oder auf analytischem Wege darthun. Der erstere Weg ist hinreichend von de Vries, Verschaffelt u. A.*) gekennzeichnet worden. Die Darstellung der

*) Vergl. Ludwig: „Ueber Variationscurven und Variationsflächen". (Botanisches Centralblatt. Bd. LXIV. 1895. 31 p. und 2 Tafeln).

Wahrscheinlichkeitscurve auf analytischem Weg beruht auf dem Gauss'schen Fehlergesetz. Die Statistiker, welche die analytische Methode gewählt haben, beziehen sich in ihren Schriften meist nicht auf diese Quelle, sondern auf Schriften ausländischer Mathematiker (so Galton, Brewster u. A. auf M. Merriman A Textbook on the method of least squares New-York 1884, Id. On the method of least squares London Macmillan 1885, Quételet Lettres sur la théorie des probabilités etc. Brüssel 1886 etc.).

Da, wie ich meine, eine Anwendung der Gauss'schen Formeln für die Wahrscheinlichkeitscurve nicht recht ohne Kenntniss von deren Ableitung geschehen kann, der Botaniker sich auch bei Behauptung der Uebereinstimmung der durch Entwicklung des Binoms $(p + q)^n$ abgeleiteten Curve und der mittels des Integrals $\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \int e^{-\frac{x\,x}{n}} dx$ gewonnenen Wahrscheinlichkeitscurve nicht beruhigen, sondern nach einem Warum fragen wird, so glaube ich im Folgenden diese Ableitung voranschicken zu sollen. Ich folge dabei den Deductionen eines deutschen Mathematikers:

Durch sehr einfache Betrachtungen gelangt G. Hagen (Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1867) zu dem zuerst von Gauss (1809), später von Thomas Young und Bessel auf Grund anderer Hypothesen abgeleiteten Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit des Eintretens der Fehler von verschiedener Grösse, der nach den späteren Untersuchungen zunächst der Anthropologen und Zoologen und den neueren Beobachtungen der Botaniker auch bei der gewöhnlichsten Variation eines Merkmals einer naturhistorischen Species für die Häufigkeit der vom Mittel abweichenden Werte volle Geltung hat. Hagen geht dabei von der Hypothese aus, dass der Beobachtungsfehler die algebraische Summe einer unendlich grossen Anzahl elementarer Fehler ist, die alle gleichen Werth haben und ebenso leicht positiv, wie negativ sein können. Das Verhältniss ist dasselbe, wie bei den Combinationen der Züge weisser und schwarzer Kugeln, die in gleicher Zahl in einer Urne liegen, wenn man wiederholt eine Kugel herauszieht, die man dann, nachdem man sie gesehen, wieder in die Urne wirft. Denkt man sich die sämmtlichen Combinationen der schwarzen und weissen Kugeln, die bei ν Zügen möglich sind, der Reihe nach als Abscissen auf eine Gerade abgetragen, so dass die Abscisse 1 eine weisse und $\nu - 1$ schwarze, die Abscisse 2 zwei weisse und $\nu - 2$ schwarze Kugeln bezeichnet, und giebt man den zugehörigen Ordinaten solche Längen, dass sie in beliebigem Massstab der Wahrscheinlichkeit der betreffenden Combinationen entsprechen, so geben die Verbindungslinien der Endpunkte die bekannte, früher von uns (l. c.) erörterte Binomialcurve, die einzelnen Ordinatenlängen entsprechen den aufeinanderfolgenden Koeffizienten des Binoms $(p + q)^\nu$. In der Mitte ist die

Anzahl der schwarzen und weissen Kugeln gleich gross, der Fehler gleich Null. Ist ν eine grade Zahl = 2n, so ist die mittlere Ordinate (die Wahrscheinlichkeit dieser Combination $E = 2^{-2n} . (2n)_n$) wo $(2n)_n$ den Binomialkoeff. $\frac{2n\ (2n-1)\ (2n-2)\ .\ .\ .\ (n+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ .\ n}$ bezeichnet. Da im Anfang ν Züge vorausgesetzt wurden, wobei die Abscissen immer um eine Einheit wuchsen, wird man bei Einführung von n unter Beibehaltung derselben Einheit die letzteren um $^1/_2$ wachsen lassen, was bezeichnet, dass eine halbe weisse Kugel fortgenommen und eine halbe schwarze hinzugekommen ist, dass die Differenz beider um eine ganze Kugel oder der durch diese Differenz symbolisirte Beobachtungsfehler sich um einen elementaren Fehler vergrössert hat. Hagen drückt nunmehr die vorhergehenden und folgenden Binomialkoeffizienten durch den mittleren E aus, d. h. durch die Wahrsch., dass der Fehler = 0 ist und ebenso die Wahrscheinlichkeiten für Fehler die 1, 2, 3 ... elementaren Fehlern gleich sind. Es ist für den Fehler

$$1 \quad y = \frac{n}{n+1}\ E$$

$$2 \quad y = \frac{n\,.\,(n-1)}{(n+1)\ (n+2)}\ E \text{ etc.,}$$

allgemein für den Fehler = m

$$y = \frac{n\ (n-1)\ .\ .\ .\ .\ (n-m+1)}{(n+1)\ (n+2)\ .\ .\ .\ (n+m)}\ .\ E$$

für die nächstfolgende Ordinate = m + 1

$$y' = \frac{n\ (n-1)\ .\ .\ .\ (n-m)}{(n+1)\ (n+2)\ .\ .\ .\ (n+m+1)}\ .\ E = \frac{n-m}{n+m+1}\ .\ y.$$

Es ist daher $y' - y = -\frac{2m+1}{n+m+1}\ .\ y.$

Da sich nach der anfänglichen Voraussetzung der Fehler m aus unendlich vielen elementaren Fehlern zusammensetzt, so vers schwindet dieser einzelne Fehler im Zähler und Nenner. Es it ferner jeder wirkliche vorkommende Fehler, dessen Wahrscheinlichkeit grösser als Null ist, unendlich klein gegen den grössten denkbaren Fehler. Auch die Zahl der elementaren Fehler n, mithin auch die Anzahl der Binomialkoeffizienten oder der Ordinaten ist unendlich gross (die Curve setzt sich auf beiden Seiten asymptotisch zur Abscissenaxe ins Unendliche fort). Daher ist der grösste denkbare Fehler unendlich gross gegen jeden noch zu erwartenden Fehler m = x und dieser wieder gegen den letzten elementaren Fehler (der bisher = 1 gesetzt wurde). Mithin ist

$$y' - y = -\frac{2x}{n}\ .\ y.$$

Wachsen die Fehler nicht mehr stufenförmig um die unendlich kleinen Einheiten der elementaren Fehler, wird die Curve continuirlich, so wird diese Einheit = dx und $y' - y = dy$. Die

Curve umfasst dann alle möglichen Fehler von $+\infty$ bis $-\infty$. Die Wahrscheinlichkeit, dass irgend einer derselben vorkommt, d. h. die Summe der Ordinaten, oder die Fläche der Curve wird gleich 1. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen zwei bekannten Werten a und b liegt, ist gleich der Fläche zwischen den zu $x = a$ und $x = b$ gelegenen Ordinaten. y ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen x und $x + dx$ fallen wird. Es wird mithin

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y dx = 1 \;;\; dy = -\frac{2x}{n} . y . dx \;;$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{2x}{n} . dx \;; \text{ folglich}$$

$$\log y = -\frac{1}{n} x^2 + \text{Const.} = -\frac{1}{n} x^2 + \log E,$$

da für $x = o$ $y = E$ war; folglich wenn e die Basis der natürl. Log. bezeichnet:

$$y = E . e^{\frac{-x . x}{n}}$$

Die Constante n ist charakteristisch für die jedesmalige Beobachtungsart (das Präcisionsmass der Beobachtungen). Sind die Beob. gleichartig, so kann man ihm jeden beliebigen Wert geben. Es lässt sich jedoch zeigen, dass es zu E in einfacher Beziehung steht. Es ist nämlich (cf. Hagen, p. 35—38 l. c.):

$$E = \frac{1}{\sqrt{\pi} . \sqrt{n}}$$

womit der Ausdruck für das Gauss'sche Gesetz*) über die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler die folgende Form erhält:

$$x = \frac{1}{\sqrt{\pi} . \sqrt{n}} e^{\frac{-xx}{n}}$$

(d. i. die Wahrscheinlichkeit einen Fehler x zu begehen).

Dieses Gauss'sche Gesetz gibt nun auch in den biologischen Wissenschaften da, wo es sich um wiederholte Zählungen, Messungen, Wägungen einer und derselben Grösse handelt, ein getreues Bild der Gruppirung der Einzelbeobachtungen um den beobachteten Mittelwert.

Noch fehlt es jedoch an einem einheitlichen Mass. Zwar ist die Schärfe der Beobachtungsart in dem entwickelten Ausdruck durch die Grösse n gegeben oder durch E, die zu n, wie nachgewiesen wurde, in einfacher Beziehung steht (also durch die grössten Ordinate). Es empfiehlt sich jedoch aus verschiedenen

*) Gauss, Theoria motus corporum coelestium, Hamburg 1809, Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae. Göttingen 1823.

Gründen, als Einheits-Mass der Beobachtungsfehler einen gewissen charakteristischen Fehler zu wählen, der unmittelbar die Schärfe der Messung kennzeichnet und zwar erscheint am geeignetsten der sogen. wahrscheinliche Fehler oder die wahrscheinliche Abweichung, die auch in der anthropologischen und zoologischen Statistik die meiste Anwendung gefunden hat. Führt man die wahrscheinliche Abweichung als Längenmass für die Abscissen der Wahrscheinlichkeits- bezüglich Variationscurven ein, so lassen sich auch die Ordinaten in bestimmten Zahlenwerten ausdrücken und die durch sie begrenzten Flächen. Letzteres ist darum besonders wichtig, weil diese Flächen unmittelbar die Frequenz der Abweichungen vom Mittel angeben, die gewisse Vielfache oder Teile des wahrscheinlichen Fehlers sind.

Ausserdem in Betracht kommen könnte der mittlere Fehler oder die mittlere Abweichung, oder noch besser das mittlere Fehlerquadrat, die jedoch zu dem wahrscheinlichen Fehler in einfacher Beziehung stehen.

Der mittlere Fehler ist gleich der Summe der einzelnen Fehler (Abweichungen) dividirt durch ihre Anzahl. Ist die Anzahl der Beobachtungen unendlich gross, so ergiebt sich die Summe der Fehler (Summe der Produkte der Wahrscheinlichkeit der Fehler in die Wahrscheinlichkeiten ihres Vorkommens), nämlich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} yxdx = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \int e^{\frac{-xx}{n}} xdx = \frac{-\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}} e^{\frac{-xx}{n}}$$

(cf. Hagen, p. 57)

für $x = 0$ gleich $\frac{-\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}}$, für $x = \infty$ gleich Null, also von 0 bis ∞ gleich $\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}}$, von $-\infty$ bis $+\infty$ gleich $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$.

Die Anzahl der Fehler $\int ydx$ von $-\infty$ bis $+\infty$ ist $= 1$; mithin der mittlere Fehler

$$m = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} = 0{,}56420\sqrt{n} \text{ oder (vergl. oben) } m = \frac{1}{\pi E}.$$

Ist nur eine beschränkte Anzahl von Fehlern gegeben, die aber nach Massgabe ihrer Wahrscheinlichkeit vertheilt sind, so ergibt sich derselbe Werth für m. Bei sehr zahlreichen Beobachtungen ist der mittlere Fehler brauchbar. Vortheilhafter ist jedoch das mittlere Fehlerquadrat d. h. die Summe der Quadrate der einzelnen Fehler, dividirt durch ihre Anzahl.

$$q^2 = \int_{+\infty}^{+\infty} yx^2 dx : \int_{-\infty}^{+\infty} ydx.$$

Da der Nenner gleich 1 ist wird

$$q^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \int e^{\frac{-xx}{n}} x^2 dx$$

und durch partielle Integration

$$q^2 = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}} \left(e^{\frac{-xx}{n}} x + \int e^{\frac{-xx}{n}} dx \right)$$

Das erste Glied in der Klammer wird gleich 0 innerhalb $x = o$ und $x = \infty$, daher

$$q^2 = \frac{1}{2} n \int_{-\infty}^{+\infty} ydx = \frac{1}{2} n \quad \text{mithin } q = \sqrt{\frac{n}{2}} = 0{,}70711 \sqrt{n}$$

Der Fehler $x = q$ *bezeichnet in der Curve die Stelle, wo die abwärts gekehrte Krümmung in die entgegengesetzte übergeht oder wo die Neigung am grössten ist.* Der *wahrscheinlichste Fehler* schliesslich ist derjenige Fehler, von dem es ebenso wahrscheinlich ist, dass er überschritten wird, wie, dass er nicht erreicht wird. Nennt man ihn w, so muss also $\int_o^w ydx = \int_w^\infty ydx$ sein. Da die beiden Aeste der Curve symmetrisch sind, so muss $\int_o^w ydx = \frac{1}{4}$ sein.

Setzt man $\frac{x}{\sqrt{n}} = t$ also $x = t\sqrt{n}$ und $dx = \sqrt{n}\, dt$, so wird

$$\int ydx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{-tt} dt\,;\; e^{tt} = 1 - \frac{t^2}{1} + \frac{t^4}{1.2} + \frac{t^6}{1.2.3} + \cdots$$

also nach Ausführung der Integration in den angegebenen Grenzen

$$\frac{1}{4}\sqrt{\pi} = 0{,}4431135 = t - \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{10} t^5 - \frac{1}{42} t^7 + \frac{1}{216} t^9 - \frac{1}{1320} t^{11} + \frac{1}{9360} t^{13} \ldots$$

Durch Probiren der verschiedenen Werthe von t (oder auf dem von Bessel in der Abhandlung über den Olbers'schen Kometen angegebenen direkten Weg) erhält man $t = 0{,}4769364$ (Galton's Variations „Modulus").

Hiernach ergibt sich $w = 0{,}4769364 \sqrt{n}$ oder

$$w = 0{,}845332 \text{ m (s. oben)}$$

$$\text{oder } w = 0{,}674486 q.$$

Führt man diese wahrscheinliche Abweichung w als Längenmass der Abscissen ein, so lassen sich die Flächen nach der Methode der mechanischen Quadratur berechnen, welche die Frequenz der einzelnen Abweichungen bestimmen (Vergl. Fig. 1). Zuvor sind aber die Ordinaten in geringen Abständen zu berechnen.

Es war $y = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \int e^{\frac{-xx}{n}}$, dagegen $w = 0{,}476936 \sqrt{n}$

und da w als Einheit dienen soll $1 = 0{,}476936 \sqrt{n}$ $n = 4{,}396218$. Es lässt sich mithin für jedes x die zugehörige Ordinate y finden. Es wird

$$\log y = -\sqrt{\pi}\sqrt{n} - \frac{x.x}{n} \log e = -0{,}570115 - 0{,}099788\ x^2.$$

Bestimmt man für Intervalle von $\delta = 0{,}1$ der x die zugehörigen y, so ergeben sich hieraus die zugehörigen Flächenräume

$$\int y dx = \frac{1}{2}(y + y') \cdot \delta - \frac{1}{12}\left(\frac{dy'}{dx} - \frac{dy}{dy'}\right) \delta^2$$ oder das Doppelte für

$\pm$ Werthe oder da $\frac{dy}{dy} = -\frac{2xy}{n}$ $\frac{dy'}{dx} = -\frac{2x'y'}{n}$

$\int y dx = 0{,}1\ (y - y') + 0{,}00075825\,(y'x' - yx)$ (Hagen, p. 64).

Die so ermittelten Flächenwerthe werden zu der Summe der vorhergehenden bis zu $x = o$ addirt und geben so die zur Berechnung der Variationscurven nöthigen Werthe der folgenden Tabelle*):

x	$\int y dx$	x	$\int y dx$	x	$\int y dx$
0,0	0,000	0,6	0,314298	1,2	0,581707
0,1	0,53776	0,7	0,363176	1,3	0,619424
0,2	0,107308	0,8	0,410522	1,4	0,654976
0,3	0,160355	0,9	0,456176	1,5	0,688335
0,4	0,212683	1,0	0,500000	1,6	0,719494
0,5	0,264068	1,1	0,541875	1,7	0,748466

*) Vergl. auch Galton, Natural Inheritance. London 1889. Taf. 5 etc., p. 202—204. Daselbst finden sich auch die entsprechenden Tabellen der Ordinaten für andere Einheiten als w, so für t (den „Modulus") und die Ordinaten für die „Vertheilungscurve" (cf. Bot. Centralbl. Vol. LXIV. 1895. p. 12 Anmerkung, ferner Verschaffelt (l. c. citirt) und nach diesem A. Cournot, Exposition de la théorie des chances et des probabilités. Paris (Hachette) 1843; K. Pearson Proceed, Royal Soc. London. Vol. LVII. 1895. p. 257.

x	$\int ydx$	x	$\int ydx$	x	$\int ydx$
1,8	0,775283	3,8	0,989624	5,8	0,999908
1,9	0,799992	3,9	0,991474	5,9	0,999931
2,0	0,822656	4,0	0,993023	6,0	0,999948
2,1	0,843349	4,1	0,994314	6,1	0,999961
2,2	0,862158	4,2	0,995386	6,2	0,999971
2,3	0,879176	4,3	0,996272	6,3	0,999978
2,4	0,894504	4,4	0,997000	6,4	0,989984
2,5	0,908247	4,5	0,997596	6,5	0,999988
2,6	0,920513	4,6	0,998082	6,6	0,999991
2,7	0,931411	4,7	0,998476	6,7	0,999993
2,8	0,941050	4,8	0,998794	6,8	0,999995
2,9	0,949536	4,9	0,999050	6,9	0,999996
3,0	0,956974	5,0	0,999255	7,0	0,999997
3,1	0,963463	5,1	0,999418	7,1	0,999998
3,2	0,969099	5,2	0,999547	7,2	0,999998
3,3	0,973972	5,3	0,999649	7,3	0,999999
3,4	0,978166	5,4	0,999729	7,4	0,999999
3,5	0,981759	5,5	0,999792	7,5	0,999999
3,6	0,984823	5,6	0,999841	7,6	1,000000
3,7	0,987425	5,7	0,999879		

Bei der Bestimmung der theoretischen Curve für die Variation eines (pflanzlichen) Merkmals wird man am praktischsten erst q (gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Einzelabweichungen vom Mittelwerth M dividirt durch die Anzahl der Beobachtungen $= \sqrt{\frac{\Sigma\ d^2}{n}}$) berechnen und hieraus w = 0,674486 q ermitteln.

Aus w und M lässt sich die theoretische Curve (wie die folgenden Beispiele zeigen) berechnen und zwar genügt meist — wenn es sich um eine eingipfelige binomiale Variationskurve handelt (vgl. unten die hyperbinomialen Curven) — schon eine verhältnissmässig geringe Beobachtungsreihe, um eine solche Curve zu erhalten. Die Grössen w und M geben daher über den ganzen Verlauf der Variation Auskunft und vielfach begnügt man sich bei statistisch anthropologischen oder zoologischen Untersuchungen mit ihrer Ermittelung. Die Grösse w (also die wahrscheinliche Abweichung) hat man auch als den Oscillationsindex (Stieda) der Beobachtungsreihe bezeichnet, $\frac{w}{M}$ als Variabilitätskoëffizienten (CV Davenport's, Brewster's). w stimmt mit dem Galton'schen Quartilwerth, mithin $\frac{w}{M}$ auch mit Verschaffelt's Variationskoëffizienten $\frac{Q}{M}$ überein.

Noch hat auch der Ausdruck $\frac{w}{\sqrt{n}}$ (wo n die Zahl der Beobachtungen ist) eine besondere Bedeutung bei der Beurtheilung der Sicherheit für die Messung des Mittelwerthes. Es gibt nämlich $R = \frac{w}{\sqrt{n}}$ (Stieda setzt für w r) die Schwankung des Medianwerthes M. d. h. die Grenzen an, zwischen denen sich das Mittel bewegt (M $\pm$ R) (vgl. Stieda, Ueber die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der anthropologischen Statistik (I. Aufl. 1882, II. Auflage, Braunschweig 1892).

$\frac{\Sigma d}{n} = m$ ist die mittlere Abweichung, der mittlere Fehler.

$\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}} = q$ das mittlere Fehlerquadrat. Mithin

$$w = 0{,}6745 \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}, \text{ oder}$$

$$w = 0{,}8453 \sqrt{\frac{\Sigma d}{n}}, \text{ wenn n nicht zu klein ist.}$$

Um zunächst mich selbst zu überzeugen, welche Zuverlässigkeit die Anwendung des Gauss'schen Wahrscheinlichkeitsgesetzes verdient, wählte ich ein Beispiel nach dem Vorgang von Hagen, die Feststellung der Häufigkeit eines Buchstabens in der Zeile eines gleichmässig gedruckten Buches. Ich wählte, da sich hier kurze Zeilen fanden, die Frequenz des Buchstaben e in der vollen Spaltzeile der Frankfurter Bibelausgabe.

(Fortsetzung folgt.)

Beiträge zur Anatomie der Kapselfrüchte.

Von

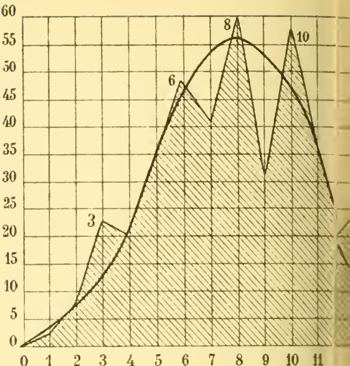
A. Weberbauer

in Breslau.

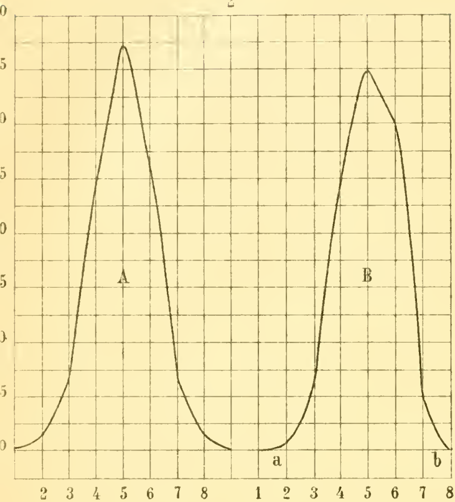
Mit 2 Tafeln.

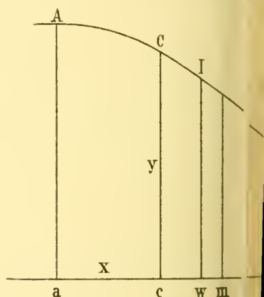
(Fortsetzung.)

Isolirt stehen *Corrigiola* und *Paronychia* da. Bei der ersteren sind die 3—4 obersten Schichten mit derben, wellig verbogenen nicht deutlich verholzten Wänden versehen, das übrige Gewebe zart und unverholzt. Eine sehr eigenartig gebaute Frucht besitzt *Paronychia*: Derbe und verholzte Wände sind nur der zweitobersten Schicht, deren Elemente zu eigenthümlichen Krystallbehältern ausgebildet sind, eigen.

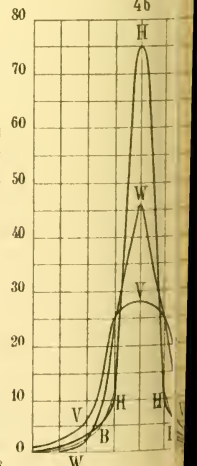

60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
3
6
8
10
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

2

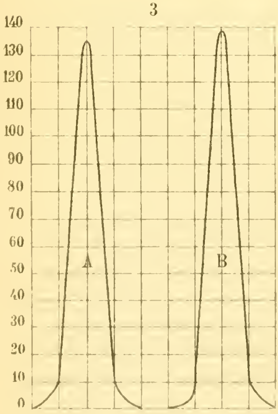

A
B
a
b
2 3 4 5 6 7 8
1 2 3 4 5 6 7 8


A
C
I
y
x
a
c
w
m

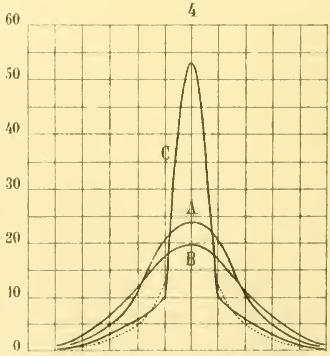
4b


80
70
60
50
40
30
20
10
0
H
W
V
V
H
H
B
I
W

3


140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
A
B
4 5 6 7 3 4 5 6 7

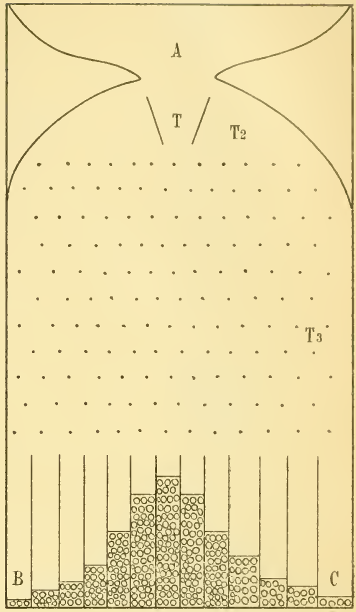
4


60
50
40
30
20
10
0
C
A
B
7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

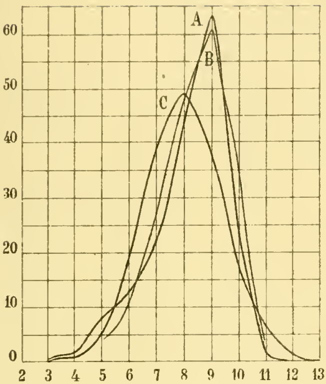

15 16 17 18

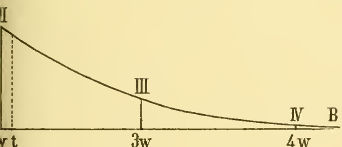
7

6

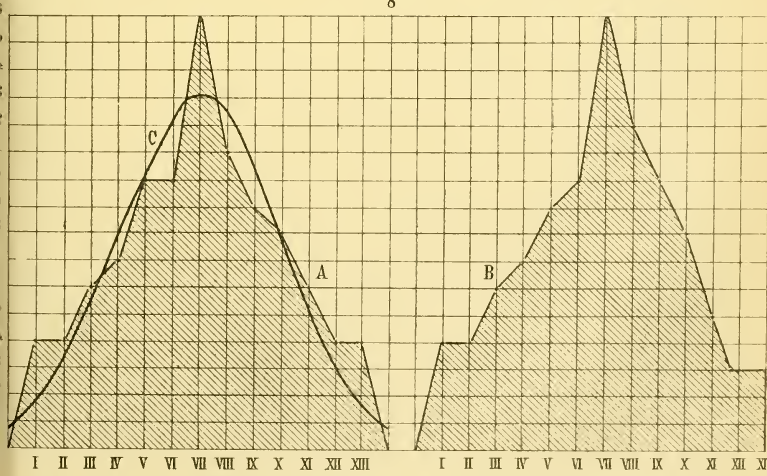

A
T
T2
T3
B
C

5


A
B
C
60
50
40
30
20
10
0
2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13


II
III
IV
B
t
3w
4w

8


C
A
B
I II III IV V VI VII VIII IX X XI XII XIII
I II III IV V VI VII VIII IX X XI XII XIII