

oberflächlichen Schicht dichter zusammengedrängt sind, wie die in der Mitte.

Diese potentielle Energie wird frei, d. h. geht in eine andere Form über, sobald die Oberfläche kleiner wird, und es braucht wohl nicht mehr besonders auseinander gesetzt zu werden, dass die Menge dieser potentiellen Energie der Grösse der Oberfläche direct proportional ist.

Da im Verhältniss zur Grösse der Molecüle auch die relativ stark gekrümmte Oberfläche des Meniscus in engen Capillarröhren als gerade Oberfläche betrachtet werden kann, so kann die Menge potentieller Energie der Oberfläche nicht von dem Krümmungsradius abhängen, und müssen wir also die bekannten Steigungsgesetze für Capillarröhren auch unter der Annahme, dass der Krümmungsradius keinen Einfluss auf die Menge dieser potentiellen Oberflächenenergie hat, ableiten können.

Dies werden wir im nächsten Abschnitt versuchen.

Das Ergebniss dieses Abschnittes können wir zusammenfassen in den Satz: „Die Oberflächenspannung einer Flüssigkeit stellt man sich am einfachsten vor als die Summe der gegenseitigen potentiellen Energie der Molecüle in den oberflächlichen Schichten.

Wir wollen im weiteren Verlauf dieser Arbeit die Menge dieser potentiellen Energie pro Einheit der Oberfläche C nennen.

Dieses C ist natürlich dem H in der Gleichung von Laplace nah verwandt, aber nicht hiermit identisch*).

H ist eine Kraft, C eine Energiemenge.

(Fortsetzung folgt.)

Die pflanzlichen Variationscurven und die Gauss'sche Wahrscheinlichkeitscurve.

Von

Prof. Dr. F. Ludwig

in Greiz.

Mit 1 Doppeltafel.

(Schluss.)

Eine Parabinomialcurve, nämlich von dem Verhältniss $p : q = 5 : 7$, stellt auch die Variationscurve dar, welche C. Davenport und C. Bullard für die Anzahl der Müller'schen Drüsen an den Vorderbeinen des Schweins kürzlich ermittelt und abgebildet haben (A contribution to the quantitative study and the comparative variability of the sexes. Proceed. of the American Academy of Arts and Sciences. (Vol. XXXII. Nr. 4. December 1896. Fig. p. 90).

*) Vergleich Ostwald, I. Das absolute Maasssystem.

Die „halben Galtoncurven“, welche de Vries aufgefunden hat,*) können z. Th. gleichfalls als parabinomiale Curven betrachtet werden, bei denen aber die Variation eine einseitige, der eine Schenkel in gewöhnlicher Weise geneigt, der andere nahezu vertical ist (so dass auf eine Ordinate = 0 gleich die grösste Ordinate folgt). Die meisten sind jedoch halbe Hyperbinomialecurven, die nahe ihrem Gipfel ein steileres Fallen zeigen, als es die durch die Formel $(p + q)^m$ oder $\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \int e^{-\frac{xx}{n}} dx$ ge-

forderten Verhältnisse erheischen; sie dürften nach de Vries gleichfalls darauf zurückzuführen sein, dass neben den Individuen, welche eine fluctuirende und asymmetrisch verlaufende Einzelvariation zeigen, ein ziemlich ansehnlicher Procentsatz von Individuen mit beobachtet wurde, welche an der fluctuirenden Einzelvariation nicht theil nehmen (vgl. hierüber auch Verschaffelt, Berichte der Deutschen Botanischen Gesellschaft. Bd. XII. 1894. p. 350 etc. Bd. XIII. 1895. p. 355). Beispiele der letzten Art liefern u. a. die Zählungen der Staubgefässe von *Oenothera Lamarkiana* (Verschaffelt, l. c. Taf. XXX. Fig. 3), der Blumenblätter von *Caltha palustris*, *Ranunculus bulbosus*, der Blumenkronzipfel von *Weigelia amabilis* etc. (de Vries l. c. Tafel X. Fig. 2 und 3), die halben Galtoncurven der Monstrositäten.**)
Die Monstrositätencurven, z. B. die der Fasciationen von *Crepis biennis*, *Taraxacum officinale* etc. sind „dimorphe Halbcuren“, durch eine Depression getrennte zweigipfelige Curven, die sich zusammensetzen aus einer „halben Galtoncurve“ der Atavisten, die hyperbinomial ist, und einer zweiästigen Curve der Monströsen. Durch Cultur (Trennung der vor dem Winter bereits Fasciationen zeigenden Stöcke von denen, die Ende November noch keine Fasciationen zeigten) gelang es de Vries, die ursprüngliche Curve in die beiden Theile zu zerlegen (cf. Botanisches Centralblatt LXVII. p. 348). Durch bessere Ernährung wird nur der Gipfel der Atavisten erniedrigt, der der Monströsen erhöht. Gipfellage und Gesamtform der Curve bleiben dieselben.

IV. Capitel.

Pleomorphe Curven.

Ehe wir auf die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsmethode bei der Variation nach pleomorphen Curven näher eingehen, wird

*) Hugo de Vries. Ueber halbe Galtoncurven als Zeichen discontinuirlicher Variation. (Berichte der Deutschen Botanischen Gesellschaft. Bd. XII. 1894. p. 197–207. — Kruidkundig Jaarboek Dodonaea. T. VII. p. 74.)

***) Hugo de Vries. Sur les courbes galtoniennes des monstruosités. (Bull. scientifique de la France et de la Belgique. T. XXVII. 1896. p. 396–418. — Ref im Botanischen Centralblatt. Bd. LXVII. 1896. 3. p. 347. — vgl. auch de Vries, Erfelijke monstruositeiten in den ruilhandel der botanische tuinen. (Bot. Jaarboek uitgegeven door het kruidkundig genootschap Dodonaea te Gent. 1897. p. 62–93. — Botanisches Centralblatt. Bd. LXXII. 1897. p. 211 [Ref]).

es nöthig sein, auf diese von mir eingehender studirten Curven (cf. Ludwig, Variationscurven und Variationsflächen) kurz zurück zu kommen. Im Allgemeinen lassen sich zweierlei mehrgipflige oder pleomorphe Curven unterscheiden: solche, bei denen nur die Lage der Curvengipfel constant ist, aber die zugehörigen Ordinatenwerthe von Beobachtungsort zu Beobachtungsort schwanken; sie lassen sich, wie ich z. B. bei den Curven für die Zahl der Doldenstrahlen der *Umbelliferen* nachgewiesen habe, durch Summation einfacher Binomial- oder Hyperbinomialeurven darstellen (die Summations- oder Combinationscurven) und solche, bei denen in der grossen Zahl der Beobachtungen an den verschiedensten Orten Abscissen und Ordinaten der einzelnen Curvengipfel constante Werthe haben (die ganze Curve constante Gestalt hat, wie dies z. B. bei der Strahlencurve von *Leucanthemum* der Fall ist). Erstere ergeben sich ohne Weiteres durch Combination der betreffenden Wahrscheinlichkeitscurven, bei letzteren muss ich aus ihrem constanten Verlaufe schliessen, dass sie sich ebenfalls durch Summation der Binomialeurven oder ihrer beschriebenen Unterformen theoretisch darstellen und der Rechnung unterwerfen lassen. Besonders wird dies bei den Fibonaccicurven und verwandten Curvenformen möglich sein, wo die Gipfel überall bei den Zahlen derselben Reihe liegen.

Bei den pleomorphen Curven ergibt sich die Zugehörigkeit zu der einen oder anderen theoretischen Curvenform sicher auf empirischem Weg bei einer grossen Anzahl von Beobachtungen, aber auch hier gibt die auf Grund der theoretisch berechneten Zahlen entworfene Wahrscheinlichkeitscurve durch ihren Vergleich mit der abweichenden, auf Grund der empirischen Messungen etc. gezeichneten Curve oft schon bei verhältnissmässig wenigen Beobachtungen einen sicheren Anhalt. So konnte z. B. Stieda (Ueber die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der anthropol. Statistik. II. Aufl. Braunschweig) p. 24, wo es sich um die Indices der Schädel des Klosters Ebrach handelt, aus dem Vergleich der theoretischen und empirischen Curve nicht nur den Schluss ziehen, dass es sich um 2 Typen handelte, sondern auch, dass die Indices der beiden Schädeltypen um 73 und 83 lagen. Da wo es sich, wie hier um eine Mischung von Typen*) (Arten, Rassen, Ernährungstypen) handelt, gibt die Wahrscheinlichkeitscurve keinen Ausgleich der Auszackungen der empirischen Curve; da wo ein einheitlicher Typus vorliegt, ist dies der Fall.

*) Die Statistik wird auf diesem Wege dem Systematiker auch nach einer neuen Richtung hin forthelfen. Wie die Untersuchungen von de Bary und Rosen bei *Erophila verna* und verwandte Untersuchungen dargethan haben, gibt es polytypische Arten (Sammelspecies — unter den Pilzen z. B. die Schwesterrassen der Getreideroste etc., die Arten des *Saccharomyces ellipsoideus* etc.), sie werden durch die Combinationscurven angezeigt werden (die meisten *Umbelliferen* scheinen polytypisch zu sein). Monotypische Arten werden constante Curven ergeben.

Auch bei der zweiten Gruppe pleomorpher Curven ist der Verlauf der W-Curve constant, und die Grösse w bzw. q kann als Art- bzw. Rassemerkmal dienen (wie es z. B. auch Brewster (A measure of variability and the relation of individual variations to specific differences. Proceed of the Americ. Academy of Arts and Sciences. Vol. XXXII. 1897. Nr. 15.) für die körperlichen Merkmale von *Lynx canadensis*, *Felis domestica*, *Vulpes fulvus* — *Lepus campestris*, *Lepus palustris*, — *Zapus insignis*, *Z. hudsonianus* und verschiedener menschlichen Rassen (nach Weisbach) gezeigt hat. Auch meine polymorphen Curven von *Lotus*, *Medicago* etc. (cf. Deutsche Botanische Monatschrift. 1897. p. 294) ergeben ähnliches (vgl. auch Fig. 7). Leistet hiernach die Wahrscheinlichkeitsmethode auch zur Ausnutzung der Variationsverhältnisse für systematische Zwecke wichtige Dienste, so wird sie da, wo es sich um pleomorphe Variationscurven (discontinuirliche Variation) handelt, unbrauchbar zur Ermittlung der besonderen Gesetze der Variation. Man darf eben nicht vergessen, dass sie dazu dient, die Unebenheiten der Curve auszugleichen. Sind diese Unebenheiten durch unzureichende Beobachtung entstanden oder durch zufällige Abweichungen und hat die Curve thatsächlich einen einfachen eingipfeligen Verlauf, so erhält man mit ihrer Hilfe oft schon aus geringer Anzahl von Beobachtungen das Variationsgesetz; sind sie aber constante, so müssen wir uns auf empirischem Weg weiter behelfen, diese Constanz empirisch ermitteln und die Lage und Grösse dieser Unebenheiten feststellen. Nur auf diesem letzten Weg konnte ich nach jetziger Kenntniss die discontinuirliche Variation und Untervariation der Fibonaccicurven feststellen. Meiner Meinung nach müsste auch das statistische Material der Anthropologie nach der empirischen Seite hin noch näher als bisher geprüft werden und müsste man, anstatt die Unebenheiten der Curve durch die W-Curve auszugleichen, untersuchen, ob einzelne dieser Unebenheiten in der grossen Zahl constant bleiben und welche diese sind. Es fällt mir z. B. bei der Betrachtung der Curven, die Stieda aus den Ranke'schen Schädelmessungen gewonnen hat, eine weitgehende Uebereinstimmung mit meinen *Lotus*- und *Medicago*curven auf.*) Bei Tabelle I z. B. theilt der Hauptgipfel (III) die Entfernung des Gipfel I und IV genau im Verhältniss 5:3 und der Gipfel II die Entfernung von I und III wieder wie 3:2. Tab. II liegen die Seitengipfel der Medianordinate wie 5:3. Tab. III haben die beiden Seitengipfel vom Mittelgipfel genau das Verhältniss 2:3. Sollte das nur zufällig

*) Der Zusammenhang der Fibonaccizahlen mit den Binomialcoefficienten — sie haben die Form $(n)_0 + (n-1)_1 + (n-2)_2 + \dots$ — und die Beziehung der letzteren zu dem allgemeinen Variationsgesetz legen die Frage nahe, ob nicht auch diese Form der discontinuirlichen Variation in näherem Zusammenhang mit dem allgemeinen Gesetz steht, ob die Untervariationen der Variation sich gleichfalls theoretisch durch die W-Lehre begründen lassen.

sein? (Bekanntlich hat man gerade für die Körperdimensionen des Menschen vielfach das Vorkommen des Verhältnisses des goldenen Schnittes behauptet, wie dies von anderer Seite (Xaver Pfeifer) für die Gliederung des pflanzlichen Körpers behauptet worden ist. In beiden Fällen könnte die Ermittlung der Variationseurven zur sicheren Entscheidung führen, ob es ein zu diesen Verhältnissen führendes allgemeines Wachstums- und Vermehrungsgesetz der organischen Materie gibt). Auf alle Fälle müsste der empirische Nachweis gesetzmässiger Nebenvariationen im Pflanzenreich (die Coëxistenz kleiner und kleinster Bewegungen der Variation) die Anthropologen und Zoologen veranlassen ihre Zickzacklinien, die gleichfalls auf solche Untervariationen hindeuten, auf's Neue empirisch zu untersuchen, anstatt deren Abweichungen durch die W-Curve aus der Welt zu schaffen.

Die Anthropologie ist der Botanik auf dem Gebiete der Statistik Lehrmeisterin geworden. Es würde uns freuen, wenn hier etwas gefunden wäre, was die Botanik jener als Gegengabe spenden könnte.

Zum Schluss soll noch an einer Reihe von Beobachtungen die Bedeutung des Unterschiedes zwischen empirischen Curven und der W-Curve gezeigt werden. In meinem ersten Galtonapparat, den ich mir selbst konstruirte, waren weder die Kästchen am Grund genau von gleicher Grösse, noch war auf die mittlere Lage der Einwurfsmündung allzu grosse Sorgfalt verwendet worden. Trotzdem ergab sich immer dieselbe empirische Curve. (Es wurden immer 100 Kugeln eingeworfen, die Kugeln in den einzelnen Kästchen gezählt. Der Durchschnitt aus je hundert Einwürfen ergab die folgenden Werthe). Die Zahl der Kugeln in den 13 Abtheilungen war bezüglich:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
---	----	-----	----	---	----	-----	------	----	---	----	-----	------

In der I. Beobachtungsreihe:

4	4	6	7	10	10	16	11	9	8	6	4	4
---	---	---	---	----	----	----	----	---	---	---	---	---

In der II. Beobachtungsreihe:

4	4	6	7	9	10	16	12	10	8	6	4	4
---	---	---	---	---	----	----	----	----	---	---	---	---

Die W-Curve ergibt:

1	2	3,5	5,5	8	10,5	12,5	13	12,5	10,5	8	5,5	3,5	2
---	---	-----	-----	---	------	------	----	------	------	---	-----	-----	---

Die Abweichungen von der W-Curve sind hier gleichfalls constante, welche eben dem gewählten Exemplar des Galtonapparates eigenthümlich waren und die Sonderheiten dieses Apparates charakterisirten. Die W-Curve würde die Vertheilung der Kugeln in einem sehr sorgfältig construirten Apparat angeben.

Erklärung der Figuren.

Fig. 1. Die eine Hälfte der symmetrischen Wahrscheinlichkeitcurve, welche die Beziehung zwischen der Grösse der Fehler x und der relativen Wahrscheinlichkeit ihres Eintreffens darstellt. aw (Mass der Ab-

scisse) ist die wahrscheinliche Abweichung (Oscillationsindex, Quartilwerth), m die mittlere Abweichung, aq die Abweichung aus dem mittleren Fehlerquadrat, at der Galton'sche Modulus, wo $a_m = 1,183 w$, $a_q = 1,483 w$, $a_t = 2,097$ ist. Die Flächen II 2w B, III 3w B etc. (wo B im Unendlichen gedacht werden muss), sind gleich der Wahrscheinlichkeit, dass die Abweichung nicht grösser als das 2-, 3fache der wahrscheinlichen Abweichung sein wird (die ganze von der symmetrischen Curve und der Abscissenaxe eingeschlossene Fläche = 1 gesetzt).

- Fig. 2. Variation der Zahl der Blattfiederchen von *Fragaria excelsior*. A. Wahrscheinlichkeitscurve, B. Beobachtungcurve. Uebereinstimmung mit beiden gibt auch die gewöhnliche Binomialcurve z. B. für $(p + q)^{20}$, wenn man die Einheiten für Abscissen und Ordinate so wählt, dass die letztere mit der Curve A gleiche Höhe und Weite ab hat.
- Fig. 3. *Senecio nemorensis*. Zahl der Hüllblätter. A. Wahrscheinlichkeitscurve. B. Beobachtungcurve.
- Fig. 4a. Hyperbinomialcurve der Zahl der Randstrahlen von *Chrysanthemum segetum*. A. normale Wahrscheinlichkeitscurve. B. Binomialcurve der Varianten (es sind 58 % Varianten und 42 % Invarianten), C. Berechnete Hyperbinomialcurve. (Die punktirte Linie gibt den — wenig abweichenden — Verlauf der Beobachtungcurve an.)
- Fig. 4b. Hyperbinomialcurve von *Bellis perennis* (cf. den Text); H. Beobachtungcurve; BHB fast völlig damit übereinstimmende berechnete Hyperbinomialcurve (für 35 % Varianten und 65 % Invarianten), W. Wahrscheinlichkeitscurve, V Curve der Varianten.
- Fig. 5. Parabinomialcurve der Zahl der Samen in den Hülsen von *Indigofera australis*. A. beobachtete, B. berechnete Parabinomialcurve (für $(p + q)^6$), C. normale Wahrscheinlichkeitscurve (mit abweichendem Gipfel).
- Fig. 6. Apparat zur Darstellung der Variationscurven nach Galton.
- Fig. 7. Beobachtungcurve und Wahrscheinlichkeitscurve von *Lotus uliginosus* (Zahl der Blüten im Köpfehen nach 400 Zählungen).
- Fig. 8. Curven für die Vertheilung der Schrotkugeln in meinem ersten Galtonapparat. A und B für 2 verschiedene Versuchsreihen. C. Binomialcurve.

Floristische Notizen.

Von

Ernst H. L. Krause

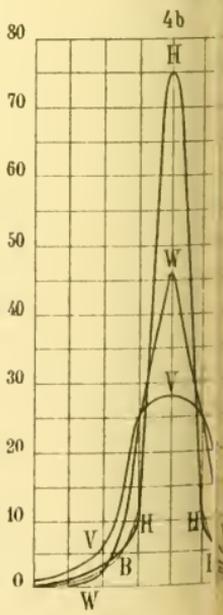
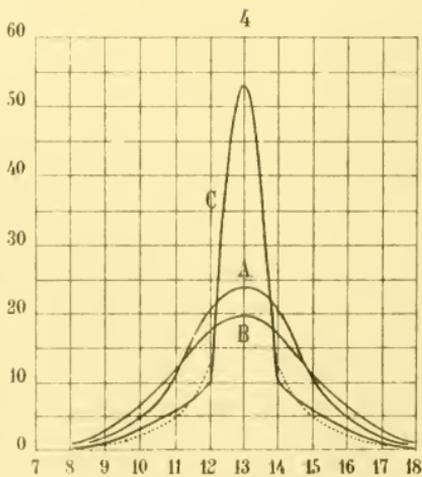
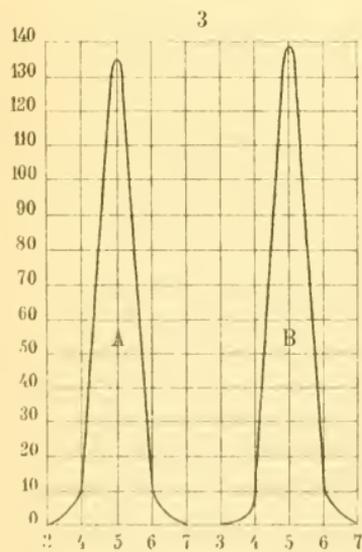
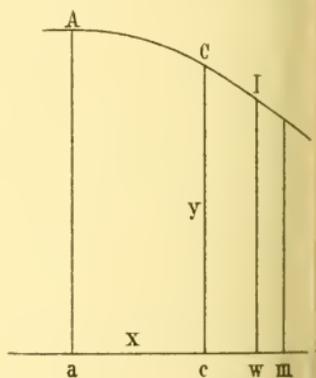
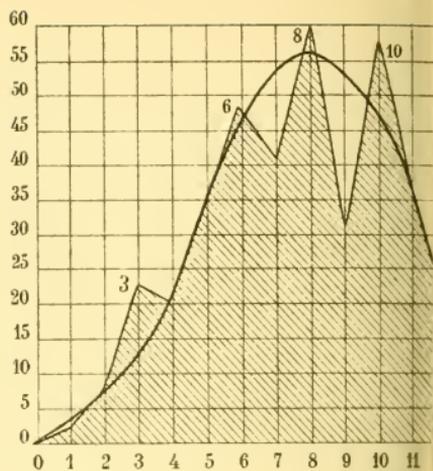
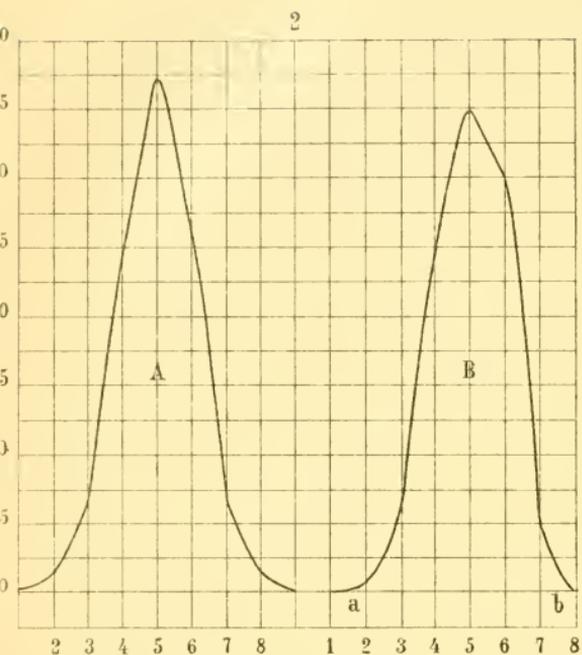
in Saarlouis.

(Schluss.)

2. Monstrositäten und Variationen.

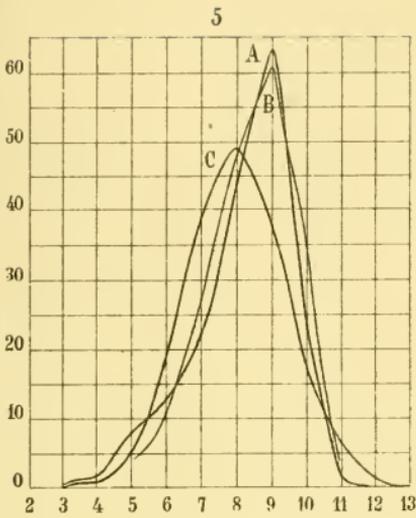
Bei *Phleum pratense* findet man nicht selten ein scheidenähnliches Blatt am Grunde des Blütenstandes. Ich habe solche Exemplare aus Westpreussen (No. 1885), Pommern (No. 1894 und 1895), Mecklenburg (No. 1891, 1892), Brandenburg (No. 1896 und 1900) und Hannover (No. 1898). Dieselbe Erscheinung zeigt ein brandenburgisches Exemplar von *Ph. phalaroides viviparum* (No. 1909). Dieselbe Erscheinung bei *Alopecurus pratensis* bieten ein Rostocker (No. 1864) und ein Bremer Exemplar (No. 1863).

Ein zweites Individuum dieses Bremer Exemplars hat den untersten Blütenstandszweig 3 cm unterhalb des ährenähnlichen Hauptblütenstandes.



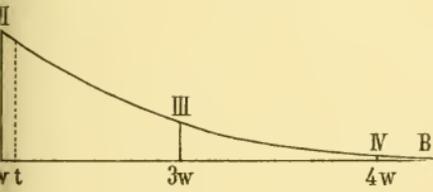
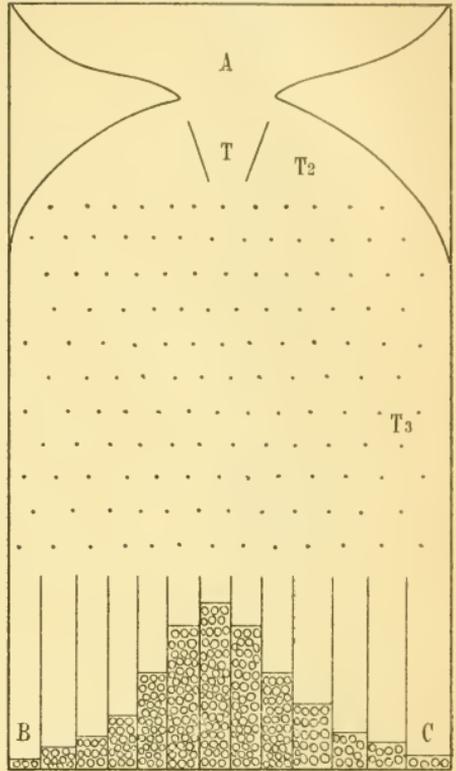


7

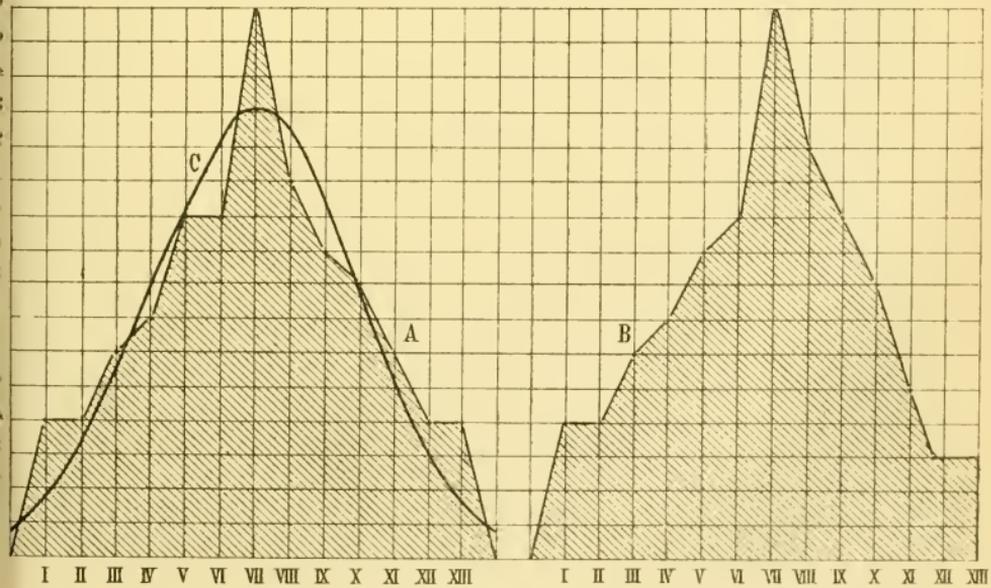


5

6



8



ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Botanisches Centralblatt](#)

Jahr/Year: 1898

Band/Volume: [73](#)

Autor(en)/Author(s): Ludwig Friedrich

Artikel/Article: [Die pflanzlichen Variationscurven und die Gauss'sche Wahrscheinlichkeitscurve. \(Schluss.\) 374-379](#)