Über diskontinuierliche Variation im Organismenreiche.

(Mit einer kurzen Zusammenfassung der durch variationsstatistische Untersuchungen bezüglich des Wachstumsprozesses gewonnenen wichtigsten Kenntnisse.)

Von

Dr. phil. Georg Ritter.

Disposition der Arbeit.

Literaturangabe.

1. Eine Literaturübersicht findet man in:

I. Davenport, C. B., Statistical methods with special reference to biological variation. New-York (John Wiley & Sons) 1904. II. p. 85—104.

Die Entwicklung der statist. Methode schildert auch:

II. Davenport, A history of the development of the quantitative study of variation. (Repr. fr. Science. N. S. Vol. XII. 1900. No. 310. p. 864—870.)

A. Gallardo, Les mathématiques et la biologie. Paris (G. Carré et C. Naud.) 1901. (L'enseignement mathématique. 3. A. 1. 15. Jan.)

2. Davenport, C. B., s. u. 1.

Dunker, G., Die Methode d. Variationsstatistik. Leipzig (Engelmann) 1899.

Galton, Fr., Biometry. (Biom. I. 7.—10. Oct. 1901.)

Ludwig, F., I. Über Variationskurven u. Variationsflächen d. Pflanzen. (Bot. Centralbl. LXIV. 1895. 1—8 ff. 2 Taf.)

II. Die pflanzlichen Variationskurven u. die Gauß'sche Wahrscheinlichkeitskurve. (Bot. Centralbl. LXIII. 241—250 ff. 1 Taf.)

III. Über Variationspolygone und Wahrscheinlichkeitskurven. (Bot. Centralbl. Beihefte IX. 1900. 24 p.)

Pearson, K., I. Contributions to the mathematical theory of evolution. (Phil. Trans. Roy. Soc. London. CLXXXV. 1894. A. 71—110.)

II. Dasselbe. (CLXXXVII. 1896. A. 253—318.)

III. On the scientific measure of variability. (Nat. Sc. XI. 1897.)

Wasteels, C. E., I. De variatiecurven met betrekking tot de polynomiale waarschijnlijkheidswet. (Ov. uit de 4. Vlaamsch. Nat. en Geneeskundig Congres. Brüssel, 30. Sept. 1900.)

II. Over het bepalen der variatie en correlatie. (Handel. v. h. 5. Vl. N. en G. C. Brügge, 29. Sept. 1901.)

3. Vries, H. de, Mutationstheorie. Leipzig 1901—03.

4. S. u. 2, 7 und 27.

5. Ritter, G., I. Beiträge zur Physiologie des Flächenwachstums der Pflanzen. (Beih. Bot. Centralbl. XXII. Abt. II. 1907.)

II. Das normale Längen-, Flächen- und Körperwachstum der Pflanzen. (Beih. Bot. Centralbl. XXIII. Abt. I. 1908.)

6. Den genauen Wortlaut findet man in: 5. II. p. 316—317.

7. Gallardo, A., La phytostatique. Lons-le-Saunier 1900. (Congrès internat. de bot. à l'Exposit. Univ. de 1900. Paris, 1.—10. Oct.)

Ludwig, F., I. Eine fünfgipfelige Variationskurve. (Ber. d. d. bot. Ges. XIV.)

II. Weiteres über Fibonaccikurven. (Bot. Centralbl. LXXVIII. 1—8.)

III. Das Gesetz der Variabilität der Zahl der Zungenblüten von *Chrysanth. leuc.* (Mitteil. d. Thür. bot. Ver. N. F. X. 20—22.)

IV. Variationskurven von *Lotus, Trifolium, Medicago.* (Deutsche bot. Monatsschr. Heft 11. 294—296. Nov.)

Shull, G. H., Place-constants for *Aster prenanthoides.* (Bot. Gazette. 38. Nov. 1904.)

Vries, H. de, s. u. 3.

Wasteels, C. E., Over de Fibonaccigetallen. (Handel. v. h. derde Vl. N. en G. Congr. Antwerpen, 24. Sept. 1899. p. 25—37.)

Bruyker, C. de, I. Een nieuw geval van omkeering eener „halve Galton-curve". (Handel. v. h. Elfte Vl. N. en G. Congr. Mechelen. 1907. 21.—23. Sept.)

II. S. u. 17, I u. II.

8. S. u. 5. II. p. 286 ff.

9. Vgl. Vogler, P., Variationskurven bei Pflanzen mit tetrameren Blüten. (Vierteljahrsschr. der Naturforsch. Ges. Zürich. XLVII. 1903. 429—436.)

10. S. u. 5. II. p. 275—285.

11. Pfeifer, X., Der goldene Schnitt u. dessen Erschein.-Form i. Mathem., Natur u. Kunst. Augsburg.

12. Bruyker, C. de, Over correlatieve variatie bij de rogge en de gerst. (Handel. v. h. tweede N. en G. Congres. Gent. 28. Aug. 1898.)

13. Mac Leod, J., Over de correlatie tusschen lengte en breedte van licht-en schaduwbladen bij den groenen en den bruinen beuk. (Handel. v. h. tweede Vl. en G. Congres. Gent. 28. Aug. 1898.)

14. S. u. 3.

15. S. u. 3. Die Thüringer Individuen zählte Ludwig.

16. S. u. 5. II. p. 288—289. p. 295—999.

17. Bruyker, C. de, I. De gevoelige periode van den invloed der voeding op het aantal randbloemen van het eindhoofdje bij *Chrysanth. carinatum.* (Handel. van het Tiende Vl. N. en G. Congres. Brugge. 29. u. 30. Sept. 1906.)

II. De polymorphe variatiecurve van het aantal bloemen bij *Primula elatior* Jacq.; hare beteekenis en hare beinvloeding door uit wendige factoren. (Handel. van het Tiende Vl. en N. Congres. Brugge. 29. u. 30. Sept. 1906.)

18. Mac Leod, Over den invloed der lebensvoorwaarden op het aantal randbloemen bij *Chrysanthemum carinatum* en over de trappen der veranderlijkheit. (Bot. Jaarboek. Jaarg. 13. Gent. 1907. Speziell p. 123.)

19. Reinöhl, Fr., Die Variation im Andröceum der *Stellaria media* Cyr. Diss. Tübingen 1903.

20. S. u. 3.

21. S. u. 9.

22. Amonn, O., Zur Anthropologie der Badener. Jena (G. Fischer) 1899.

23. Bateson, W., Materials for the study of variation. London u. New-York. 1894. etc.

24. Davenport, C. B., I. On the variation of the statoblasts of *Pectinatella magnifica* from Lake Michigan at Chicago. (Amer. Nat. XXXIV. 1900.)

II. Zoologie of the Twentieth Century. (Sc. XIV. Aug. 30. 1901.)

III. Quantitative studies in the evolution of *Pecten.* (Proc. Ann. Ac. Arts and Sc. XXXIX. Nov. 1903.)

IV. Studies in morphogenesis. (Proc. Am. Ac. Arts and Sc. XXXII. 1896. etc.)

25. Dunker, G., I. Wesen u. Ergebnisse der variationsstatistischen Methode in der Zoologie. (Verh. der deutsch. zool. Ges. IX. 1899. p. 209—226.)

II. On the variation of the rostrum in *Palaemonetes vulg.* Herbst. (Amer. Nat. XXXIV. 1900. p. 621—633.)

26. Weldon, W. F. R., I. The variations occuring in certain decapod *Crustacea*. I. (Proc. Roy. Soc. London. XLVII. 1890. p. 445—453.)
II. Certain correladet variations in *Crangon vulgaris*. (Proc. Roy. Soc. London. LI. 1892. p. 2—21.)
27. Ludwig, Fr., Een fondamenteel verschil in de veranderlijkheid bij het dier en de plant? (Bot. Jaarboek. XI. Gent 1899.)
28. Wasteels, C. E. en J. Mac Leod, Over de veranderlijkheid van het aantal ribben bij *Scalaria communis*. (Handel. van het vijfde Vl. N. en G. Congres. Brugge. 29. Sept. 1901.)
29. S. u. 5. I u. II.
30. S. u. 5. II. p. 316 u. 317.
31. S. u. 5. II. p. 309 ff.
32. Darwin, Ch., Das Variieren der Tiere u. Pflanzen. Bd. II. 1868. Kap. 27.
33. Spencer, H., Prinzipien der Biologie. p. 258. 276—78. — Faktoren der organischen Entwicklung. (Kosmos. 1886.)
34. Wiesner, J., Die Elementarstruktur und das Wachstum der lebenden Substanz. Wien 1892.
35. Hertwig, O., Zeit- und Streitfragen der Biologie. Bd. II. Jena 1894.
36. Weismann, Das Keimplasma. Jena 1892.
37. de Vries, H., Intracellulare Pangenesis. Jena 1899.
38. Nägeli, Mechanisch-physiologische Theorie der Abstammungslehre. 1884.
39. Müller, O., Ber. der deutsch. bot. Ges. I. p. 36—44.
40. Wasteels, C. E., Over de ligging der maxima in variatiekurven en het voorkomen der Fibonaccigetallen. (Handel. van het Zevende Vl. N. en G. Congres. Gent. 27. Sept. 1903.)
41. Vgl. Mac Leod, J., s. u. 18. p. 163.
42. Schwendener, Mechanische Theorie der Blattstellungen. 1878.
43. S. u. 6.

I. Teil.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung in Anwendung auf Ereignisse, Zufälligkeiten etc.

Wenn wir unsere Aufmerksamkeit dem Eintreten, der Häufigkeit sogenannter „Zufälligkeiten“ und „Ereignisse“ etc. zuwenden, ergibt es sich, daß auch sie mathematisch einer gewissen Gesetzmäßigkeit unterliegen.

Ziehen wir zum Beispiel die Möglichkeit eines Gewinnes in einer Lotterie in Rücksicht, so lassen sich von vornherein bestimmte Erwartungen gerechtfertigt hegen. Die Verhältniszahl der günstigen zu den überhaupt möglichen Fällen gibt des Näheren den Grad der „Wahrscheinlichkeit“ eines Gewinnes an. Ist man im Besitze einer größeren Menge von Losen, so steigern sich natürlich die günstigen Aussichten, und umgekehrt.

Tatsächlich kann man beobachten, wie wirklich in der großen Zahl der Vorkommnisse im allgemeinen die „theoretischen Aussichten“ dem tatsächlichen Ausfalle entsprechen.

Bei zahlreichen statistischen Ermittelungen, die sich auf irgend welches Phänomen oder dergleichen beziehen mögen, stellt sich jeweilig ein Fall dar, der hinsichtlich seiner Frequenz alle übrigen übertrifft. Alle Möglichkeiten, die dem „Hauptfalle" am nächsten stehen, treten mit ebenfalls starker, doch geringerer Häufigkeit in die Erscheinung. Je entfernter sie ihm stehen, um so mäßiger wird ihre Frequenz.

Die Variationsreihe des beobachteten Gegenstandes oder Ereignisses, des „Merkmales" (die man nach Abschluß der empirischen Feststellungen durch Ordnen der verschiedenen gefundenen individuellen „Einzelformen" oder der „Einzelfälle", der „Varianten", ihrem arithmetischen „Klassenwerte" nach, und durch Notieren der Häufigkeit jeder derselben erhält), korrespondiert, von Beobachtungsfehlern abgesehen, jeweilig mit der Zahlenreihe des Newton-Pascalschen Binomiums $(a + b)^n$. Natürlich müssen für a und b den Versuchsbedingungen entsprechende Werte gewählt sein, und n eine hinreichend große Zahl von Einzeluntersuchungen bedeuten.

Für Vorstellungen geeigneter, da sie den Vorteil größerer Anschaulichkeit und Übersichtlichkeit gewährt, erweist sich die Methode der graphischen Darstellung der ermittelten Variationsverhältnisse. Man trägt auf die Abscissenaxe alle ins Bereich der Beobachtung fallenden Variationsklassen als Punkte gleichen Abstandes und ihrem Zahlenwerte nach geordnet ein, und errichtet in diesen Punkten rechtwinklig Ordinaten, deren Länge der beobachteten absoluten oder relativen Häufigkeit der jeweiligen Variationsklasse entspricht. Verbindet man dann die freien Enden je zweier benachbarter Ordinaten, so erhält man eine vielfach eckige Linie, die mit der Abscisse zusammen ein Polygon darstellt: Dieses empirische Variationsschema weicht stets nur innerhalb der zulässigen Fehlergrenze vom Verlaufe der Gaußschen Binomialkurve ab, wie sie zu berechnen ist, mit einander entsprechenden Werten von x und y, durch das Integral:

$$y = \frac{1}{\sqrt{\pi . n}} \cdot \int e . \frac{- x . x}{n} . dx$$

II. Teil.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung in Anwendung auf „Merkmale" von Organismen.

Auch an Merkmalen von Organismen läßt sich die Giltigkeit des Verteilungsgesetzes der Varianten prüfen, und es ist dieses statistische Studium der Lebewesen bereits eine besondere biologische Disziplin (1) geworden. Es wird als Lehre von der fluktuierenden, graduellen, kontinuierlichen, begrenzten oder statistischen Variabilität bezeichnet. Sie hat die Ungleichheit der einzelnen Individuen und ihrer einzelnen Organe zum Gegenstande des Studiums. Durch sie erkennt man immer mehr, daß diese Variationen völlig verschieden sind von allen anderen Erscheinungen, die man bisher auch mit dem Namen „Variabilität" begriff, als die systematische und die durch Bastardierung erzeugte Polymorphie, sowie die sogenannten „spontanen" Abänderungen. Sie lassen sich stets konstatieren und können bereits an einer verhältnismäßig geringen Zahl von Lebewesen, bezüglicherweise ihrer Organe, wahrgenommen werden. Auch sie sind nach Maß und Zahl verfolgbar, und die gewonnenen Ergebnisse durch mathematische Formeln zu berechnen, die uns durch die Bemühungen mancher Forscher (2) für speziell biologische Zwecke ermittelt sind.

Auf botanischem Gebiete, das hier besonders interessiert, unterscheide ich für anschließende Darstellungen mit de Vries (3) zwischen individueller und partieller Variabilität, mit ersterer die Unterschiede zwischen den einzelnen Individuen, mit letzterer die noch häufigeren Differenzen der einzelnen Teile, Glieder, Organe bezeichnend. Die gleichzeitig auftretenden Varianten nenne ich weiter Convarianten, die im Laufe einer gesamten relativen Vegetationsperiode zeitlich verschieden, und zwar hintereinander auftretenden Varianten hingegen Devarianten. Die Variation nach Maß heiße quantitativ, die nach Zahlen meristisch.

Trotzdem die Zahl aller biologischen statistischen Untersuchungen, die sich den grundlegenden betreffenden Arbeiten Ludwigs (4) anschlossen, schon eine gewaltige ist, kann sie doch niemals zu groß werden. Denn die Wichtigkeit der sich aus den Resultaten ergebenden Konsequenzen, ihre Bedeutung für die Auffassung und das Verständnis der lange umstrittenen, wichtigen natürlichen Vorgänge als Entstehungsweise der Arten, Vererbung, Selektion etc. muß natürlich eine Menge bezüglicher Arbeiten erheischen.

Auch durch die im folgenden publizierten Variationsverhältnisse finden die bezüglichen früheren Resultate ihre Bestätigung, soweit selbstverständlich eine dafür hinreichend große Zahl von Einzelfällen studiert wurde.

Darauf soll aber nur an dieser Stelle ganz allgemein hingewiesen werden, denn ich möchte jetzt das Augenmerk im besonderen auf eine ganz auffällige Erscheinung bei der Variation hinlenken: auf die sogenannte „diskontinuierliche" Variation.

Es zeigt sich nämlich, daß gewisse Variationsklassen mit einer Frequenz zur Erscheinung kommen, die ihnen nach den strengen Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht zukommt, so daß sie in geometrischer Darstellung kleinere, sekundäre Gipfel bedingen.

Deren weiteres Studium lieferte mir Resultate, die den bereits bei meinen früheren, auf dasselbe Moment hin gerichteten Untersuchungen erhaltenen entsprechen, und so ebenfalls mit den Ansichten des Herrn Hofrat Prof. Dr. Fr. Ludwig über das ein-, zwei- und dreidimensionale Wachstum der Lebewesen, die er mir gegenüber gütigst äußerte, (6) in Einklang stehen, und die theoretischen Vorstellungen, zur Erklärung der Gesetzmäßigkeiten der diskontinuierlichen Variationen, rechtfertigen.

III. Teil.

Die diskontinuierlichen meristischen Variationen.

Die Tabelle gibt das Resultat wieder, wie ich es beim Zählen der je in einem Köpfchen versammelten Blüten von *Sanguisorba officinalis* erhielt.

Die Zählungen geschahen im Laufe zweier Sommer und wurden, um baldigst einen Einblick in die Variationsverhältnisse zu erhalten, hauptsächlich an kleineren, weniger stark variierenden Exemplaren vorgenommen.

Trotzdem zeigt sich die Variationsweite immer noch als beträchtlich. Wenn so wohl auch die Zahl der Einzeluntersuchungen als nicht besonders groß erscheinen kann (um so weniger, als sich ja überhaupt erst bei „Zählungen in der großen Zahl" die Gesetze der Statistik voll und ganz herausstellen), ist sie doch für unseren Zweck schon vollauf genügend.

Die Maxima erweisen sich konstant. Schon bei wenigen Ermittelungen treten bestimmte Klassen fast ausnahmslos als solche auf.

Weiterhin sind die Gipfelzahlen identisch mit denen, wie sie durch das Studium anderer Forscher (7) bereits bekannt geworden sind. In gleicher Mannigfaltigkeit wurden sie allerdings nur noch an *Succisa pratensis* (8) festgestellt. Vielleicht ist jene ein Charakteristikum für Pflanzen mit tetrameren Blüten (9), für die also wieder eine Entwickelung nach dem Ludwigschen Gipfelgesetze, d. h. nach den Zahlen der mathematisch festgelegten Reihe des Fibonacci nachgewiesen werden kann (da auch bei unserem Objekte ein spiraliger Verlauf der dabei ev. noch in Quirlen angeordneten Organe um die Inflorescenzaxe statthat). Die diskontinuierlichen Klassen kollidieren nämlich ihrem Zahlenwerte nach mit den Gliedern der genannten Reihe, die in den Näherungswerten des „goldenen Schnittes" (zu berechnen durch die Kettenbrüche $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}$, $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\dots}}$ und $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\dots}}$) sich vorfinden, oder die einen höheren multiplen Wert besitzen. Sie sind ebenfalls anschließend dargestellt und mit Klammern umgeben, soweit ihnen keine besondere Bevorzugung bei der behandelten Variation zukommt.

Variationsreihe für die Anzahl der Blüten in den Köpfchen von *Sanguisorba officinalis*.

Zahl der Blüten:	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Häufigkeit I:	0	1	—	3	1	6	7	4	8	6	2	16	12	21	18	14	17	14	12
II:	0	10	8	11	9	12	15	9	11	15	13	23	21	52	39	41	44	26	19

Fortsetzung.

Zahl der Blüten:	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Häufigkeit I:	31	26	26	19	38	38	40	42	34	27	32	28	28	18	29	30	28	12	23
II:	43	39	38	26	41	43	62	67	58	63	72	28	33	26	37	41	40	18	39

Fortsetzung.

Zahl der Blüten:	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
Häufigkeit I:	13	19	4	16	24	21	18	28	11	14	10	8	16	12	3	11	32	32	30
II:	14	47	34	18	31	26	30	39	14	29	14	13	32	33	24	26	43	48	41

Fortsetzung.

Zahl der Blüten:	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88
Häufigkeit I:	16	5	16	19	17	6	12	12	14	2	—	5	5	2	4	—	—	1	4
II:	46	43	52	32	28	36	52	48	37	33	32	38	27	31	33	27	13	6	10

Fortsetzung.

Zahl der Blüten:	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105
Häufigkeit I:	4	3	—	2	3	—	—	2	1	—	4	—	2	—	2	—	1
II:	10	6	5	—	3	3	1	5	10	6	6	5	2	3	3	4	2

Fortsetzung.

Zahl der Blüten:	106	107	108	109	110	111	. . . .	116	.	118	.	120	121
Häufigkeit I:	—	—	—	3	—	—	—	1	—	—	—	—	—
II:	2	3	3	4	3	—	—	2	—	1	—	3	3

Anm.: Die Untersuchungszahl beträgt für Reihe I = 1200 Köpfchen.
„ „ „ „ „ II = 2475 „

Zahlen des Fibonacci (jede Zahl ist Summe der 2 vorangehenden).

1) Zahlen der Kettenbrüche: $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}$ und $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\dots}}$

Simpla:	(1)	(2)	(3)	(5)	(8)	(13)	21	34	55	89	(144)
Multipla:	(2)	(4)	(6)	(10)	16	26	42	68	110	178	= Dupla.
	(3)	(6)	(9)	(15)	24	39	63	102	(165)		= Tripla.
	(4)	(8)	(12)	(20)	32	52	84	(136)			= Quadrupla.

Ferner: 48 = 2.24 64 = 4.16 78 = 2.39
104 = 2.52 = 4.26 110 = 2.55 = Höhere Multipla.

2) Zahlen des Kettenbruches: $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\dots}}$

Simpla:	(1)	(3)	(4)	(7)	(11)	18	29	47	76	(113)
Multipla:	(2)	(6)	(8)	14	22	36	58	94	(152)	= Dupla.
	(4)	(12)	16	28	44	72	(116)			= Quadrupla.

Daß auch die übrigen, in den bisherigen theoretischen Reihen nicht enthaltenen Gipfelzahlen zur Reihe des Fibonacci in Beziehung stehen, wird leicht klar, denn:

38 = 2. 19,	und 19	teilt	den	Intervall	zw.	16—21	im	Verhältn.	3 : 2
50 = 5. 10,	„	„	„	„	„	47—55	„	„	3 : 5
60 = 6. 10,	„	„	„	„	„	55—68	„	„	5 : 8
70 = 7. 10,	„	„	„	„	„	68—73	„	„	2 : 3
73		„	„	„	„	68—76	„	„	5 : 3
81		„	„	„	„	76—89	„	„	5 : 8
97		„	„	„	„	89—110	„	„	8 : 13
102		„	„	„	„	89—110	„	„	13 : 8
107		„	„	„	„	102—110	„	„	5 : 3
120 = 2.60 (s. u. 60).									

IV. Teil.

Die diskontinuierlichen quantitativen Variationen.

a) An Organen mit linearem Wachstume.

Daß nun die gleichen mathematischen Gesetzmäßigkeiten wie oben uns auch da entgegentreten, wo es sich um lineares Wachstum handelt, habe ich bereits durch Messungen (10) dargetan. Dies jetzt auch noch des Weiteren erweisen zu müssen, meine ich unterlassen zu dürfen. Denn einmal wurde ja schon durch die gütigen Nachprüfungen meines Resultates seitens des Herrn stud. math. G. Wagner dasselbe bestätigt. Dann aber ist seine Richtigkeit mit Sicherheit noch zu erschließen aus den Untersuchungen von X. Pfeifer (11), welcher mit Hilfe eines „Proportionalzirkels" an Vegetabilien feststellte, daß das geometrische Verhältnis von Major zu Minor zahlreiche Verbreitung hat. Besonders schön fand er den „goldenen Schnitt" ausgeprägt an den durch seitliche Verzweigungen gegliederten Hauptaxen der Umbelliferenblätter, während an Kaulomen besonders in der Blütenregion das Verhältnis sich häufig beobachten läßt. So besonders bei den Labiaten, und von den Monocotyledonen vor allem bei den Gramineen, Juncaceen, Smilaceen und Alismataceen, in der Abteilung der Cryptogamen bei den Farnen und Equisetaceen, doch hier oft so, daß erst Summen von Abschnitten die betr. Beziehungen ergaben.

Wenn zudem auch noch C. de Bruyker (12) für die Längen von Halminternodien polymorphe Kurven ermittelte, in denen (besonders in dem Polygone IV), das primäre Maximum die Amplitude im Verhältnisse 5 : 8, die sekundären Gipfel aber wieder die Kurvenhälften im Verhältnisse 3 : 5, beziehungsweise 2 : 3 teilen, ist dadurch ebenfalls eine weitere Bestätigung zweifellos gegeben.

b) An Organen mit zweidimensionalem Wachstume.

Hier erschien es mir angebracht, an möglichst verschiedenen Arten Ermittelungen anzustellen, um zu prüfen, ob wieder überall die absolute Übereinstimmung der diskontinuierlich variierenden

Klassen ihrem arithmetischen Werte nach, und die früher beobachteten mathematischen Gesetzmäßigkeiten statthätten. Deshalb fiel die Wahl besonders auf Species, wo eine geringere Größe und eine geringere Variabilität der zu untersuchenden Organe keine besonders große Zahl von Messungen je nötig zu machen schien, oder es wurden deshalb auch Messungen an Organen, die „mit Wahl" gesammelt waren, vorgenommen.

Ein Vergleich der jeweiligen empirischen Gipfelzahlen untereinander, respektive mit den theoretischen Zahlenwerten, zeigt nun, daß auch hier wieder das von mir aufgestellte „Gleichheitsgesetz" der diskontinuierlichen Variationen (nach welchem eben, wenn es sich nur je um die gleiche Art eines normalen, regulären Wachstumes handelt, ungeachtet der systematischen Stellung einer Species und der Dimensionen im Falle mehrdimensionalen Wachstumes, die diskontinuierlichen Klassen die Abscisse nicht nur in einem je gleichen Verhältnisse teiten, sondern sogar überall je einundderselben absolut gleichen mathematischen Zahlenreihe angehören), durch diese Arbeit mehrfache Bestätigung seiner Richtigkeit findet, und daß wieder alle Gipfelzahlen (in Übereinstimmung mit dem Ludwig'schen Gesetze) jetzt im Verhältnisse der Quadratwurzeln aus Fibonaccizahlen die Abscisse teilen. Selbstverständlich ist es ja schon von vornherein ganz klar, daß dabei die Koincidenz zwischen berechneten Wurzelwerten und empirischen Gipfelzahlen, zunächst schon als zwischen irrationalen Größen und ganzen rationalen Zahlen, nur eine angenäherte sein kann; dann gilt es aber auch zu bedenken, daß unser mm eine willkürlich gewählte Maßeinheit darstellt, und so keineswegs ohne Weiteres auch als „Maßstab der Natur" betrachtet werden darf. Weiterhin ist er auch für makroskopische Untersuchungen schon ein recht kleines Maß, sodaß Beobachtungsfehler durchaus nicht vermieden werden können, und besonders dann sich einstellen werden, wenn die Größe eines geprüften Organes zwischen zwei um 1 mm differierenden Größen steht, oder wo irgendwelche morphologische Eigentümlichkeiten, als feine Zähnchen oder Wellungen etc. am Blattrande, ein allmähliches, nicht scharf abgesetztes Übergehen der Spreite in den Stiel, eventuelle Rollungen der Blätter, Blattfältchen, feine Runzeln und dergleichen die genaue Bestimmung erschweren. In solchen Fällen mögen vielfach, für das Endresultat in seinen prinzipiellen Zügen natürlich im großen und ganzen unwesentlich, noch eine gewisse subjektive unbewußte Voreingenommenheit etc. bei der Beobachtung und Beurteilung ihren anerkannten Einfluß ausüben. Schließlich wird wohl auch der Turgor, der ja bezüglich der Größe eines Gliedes nicht unerhebliche Differenzen zu verursachen vermag, sicherlich nicht ohne jede Bedeutung sein, da er sich ja verschieden groß zeigt je nach der Jahres- und Tageszeit, und geringer ist, wenn das abgepflückte Material nicht direkt nach dem Sammeln, sondern erst nach einiger Zeit zur Untersuchung seine Verwendung findet: Sodaß also aus allen diesen Gründen einmal die trotzdem aber nur recht geringe Abweichung zwischen empirischen und theoretischen Werten, dann aber auch teilweise vorkommende, kleine Unterschiedlichkeiten zwischen den einander entsprechenden Gipfelzahlen bei verschiedenen Spezies, das Schwanken eines Maximums zwischen zwei benachbarten Klassen, selbst bei ∞ Untersuchungen selbst innerhalb einunddeselben Art, sicherlich nicht befremden können.

Bei meinen allerersten statistischen Studien hatte ich nun bereits außer Maximis, die sich stets konstant als solche erhielten, auch einige Gipfelklassen angetroffen, für die ich wohl auch eine zweifellose Bedeutung im Leben der betreffenden Pflanzen nachzuweisen vermochte (20, 24, 26), die sich aber allmählich wieder zum größten Teile unter den übrigen kontinuierlichen Varianten entweder verloren oder zuletzt nur noch einen „Knick" der Kurve veranlaßten. Auch bei meinen weiteren Feststellungen waren mir dann die Variationsklassen 20, 24 resp. 25 des öfteren mit einer solchen Frequenz entgegengetreten, daß ihre Bedeutung im Entwickelungsprozesse außer Frage stehen mußte. Aber auch da konnte dieselbe nur als eine geringere, untergeordnetere erscheinen, indem auch hier vielfach einem anfänglichen Überwiegen ein Zurückbleiben gegenüber anderen Klassen folgte. Freilich hatte ich ja auch meine Messungen keineswegs immer so zahlreich angestellt, daß über sie nun bereits ein definitives Urteil hätte gesprochen werden können. Da nun aber auch die übrigen Gipfelzahlen für den Zweck vollkommen genügten, den ich in meinen beiden früheren bezüglichen Arbeiten verfolgte, andrerseits aber jene bald auftretende, bald wieder schwindende Maxima ebenfalls nicht im geringsten gegen die Theorie sprachen, deren Anerkennung ich herbeizuführen suche (im Gegenteile gleichfalls mit jener in besten Einklang zu bringen sind), begnügte ich mich, da ich mich mit ihnen später näher beschäftigen wollte, in meiner letzten Abhandlung (10) damit, nur in allgemeiner Weise auf sie aufmerksam zu machen. Um aber nun zwischen den nachfolgenden Resultaten, wie ich sie von wieder neuen statistischen Untersuchungen erhielt, und den früheren bezüglich dieser diskontinuierlichen „Nebenvariationen" keinen Gegensatz, wo er nicht besteht, erscheinen zu lassen, sei mir jetzt die ergänzende Bemerkung erlaubt, daß auch in der früheren Arbeit selbst bei Abschluß meiner Ermittelungen ein Maximum bezw. ein Buckel der Kurve sich immer noch findet für die Variationsklasse 20 bei *Buxus sempervirens* (Länge der Spreite, p. 294 und 297, obere 2 Reihen), bei *Robinia pseudacacia* (Breite der Spreite, p. 294), bei *Berberis aquifolia* (Breite der Spreite, p. 295); für die Variationsklasse 25 bei *Trifolium pratense* (Länge der Spreite, p. 294), bei *Robinia pseudacacia* (Breite der Spreite, p. 294), bei *Buxus sempervirens* (p. 297, obere 2 Reihen), bei *Majanthemum bifolium* (Breite ausgewählter Blätter, p. 298, Reihe 1). In manchen anderen Fällen kann von vornherein ein Überwiegen dieser Klassen nicht sicher erwartet werden, wenn dieselben in der Nähe eines Endes des Variationsfeldes liegen, wo ja bekannterweise nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitslehre alle bezüglichen Varianten nur spärlicher in die Erscheinung treten.

Ohne mich nun schon endgiltig auf Grund meiner bisherigen Erfahrungen über das Auftreten dieser diskontinuierlichen „Nebenvariationen" äußern zu wollen (diese Frage vielmehr einer Spezialuntersuchung vorbehaltend, um so mehr, als ich sie für den Hauptzweck auch der vorliegenden Schrift für weniger wichtig erachte), halte ich es doch für ganz zweifellos, daß ihr Vorkommen oder Fehlen bei der diskontinuierlichen Variation bedingt sein kann durch die Art, um die es sich jeweilig handelt. So ist es ja auch auf dem Gebiete der meristischen Variation eine bekannte Tatsache, daß bei prinzipiell gleichen Zwischenvariationen dennoch das eine oder andere Maximum bei manchen Spezies fehlt, bei anderen hingegen konstant auftritt, und so in geringem aber fundamentalem Unterschiede oft zur Artendiagnose Anleitung zu geben vermag. In dem Sinne spricht es ja auch eindeutig, daß Herr Oberlehrer A. Heyer in St. Gallen bei seinen zahlreichen Messungen der Blattbreite wie -länge von *Prunus spinosa* die betreffenden Zahlenverhältnisse nie mit einer beachtenswerten Häufigkeit antraf: Während ich hinwiederum gerade die Klassen 20 und 24 bei der Blattbreite von *Cytisus Laburnum* (s. u.) als „Hauptgipfel" feststellen konnte. Auch Herr cand. phil. A. Daßler, der mir gütigerweise (ohne im geringsten in die fraglichen Gesetzmäßigkeiten eingeweiht zu sein) in Göttingen zur Kontrolle Messungen am gleichen Objekte vornahm (s. u.), erhielt ein gleiches Ergebnis. Die Resultate erscheinen um so bemerkenswerter für uns, als hier manche der sonstigen „Hauptmaxima" des öfteren überhaupt keine besonders bemerkenswerte Rolle bei der Variation spielen, wie die Entwicklung der Variationsreihen lehrt. Aber wenn ich weiter die statistischen Resultate einander gegenüberstelle, die mir in meiner letztzitierten Arbeit die Beachtung verschiedener Verhältnisse z. B. für *Buxus sempervirens* ergab (p. 294 und 297, 4 Reihen), so möchte ich auch den jeweiligen physikalischen Verhältnissen einen gewissen, vielleicht indirekten Einfluß darauf zuschreiben, ob die Hauptvariationsintervalle durch diskontinuierliche Nebenvariationen häufiger oder weniger oft geteilt werden. Wenigstens meine ich nicht, daß die jeweilige Zahl der Untersuchungen da zu gering ist, um die bestehenden Unterschiede vollauf zu rechtfertigen, da ja im allgemeinen alle Zwischenzahlen bereits von relativ wenigen Ermittelungen ab deutlichst hervorzutreten pflegen. Auf eine gleiche Ursache führe ich es auch vorläufig noch zurück, daß in der Variationsreihe für die Blattbreite von *Symphoricarpus racemosus,* die ich der Liebenswürdigket des Herrn Leutnant a. D., stud. phil. A. Philipps verdanke, und die durch Messungen von Blättern eines schwächlichen Strauches, auch aus Göttingens Nähe, erhalten wurde, wohl 14 — 17 — 22 anfangs, später nur noch 14 und 17, 18 einen deutlichen Gipfel, respektive ganz auffallende Buckel im Polygone bilden, daß aber 20 niemals eine „supranormale" Frequenz hier besessen hat (s. u.): Während ich andererseits bei meinen eigenen gleichen Untersuchungen am gleichen, nur kräftigeren, größeren Materiale allerdings zunächst auf 20 auch kein Maximum fallen sah, das sich aber später deutlichst einstellte (s. u.).

Für sein spätes Erscheinen im letzten Falle darf wohl die Größe der Amplitude verantwortlich gemacht werden, wo natürlich erst nach Prüfungen in ziemlich großer Zahl die Gesetzmäßigkeiten sich herausstellen können; allein, es ist wohl mit vollem Rechte zu behaupten, daß im ersten Falle in Anbetracht der weit geringeren Variationsweite den Bedingungen für das Eintreten aller überhaupt zu erwartender Regelmäßigkeiten vollauf Genüge geleistet ist, daß auf weitere Zwischenzahlen selbst im Laufe noch weiterer Messungen nicht zu rechnen war. Selbstverständlich läßt es sich, um noch dieses Moment nicht außer acht zu lassen, auch erwarten, daß im allgemeinen einer größeren Variabilität, nicht nur der einzelnen Arten, sondern auch innerhalb einer Spezies, ihrer Individuen, im allgemeinen auch eine größere Zahl verschiedener diskontinuierlich variierender Klassen selbst innerhalb eines gleichgroßen Variationsfeldes entsprechen wird etc.

Ich bemerke noch, daß sich durch diese meine neuen statistischen Studien noch manche neue „Gipfel" ergaben, die entweder früher als den betreffenden Arten nicht eigen, oder wegen einer kleineren Amplitude mir noch nicht begegneten, oder die nur in einem Falle, oder so undeutlich daselbst aufgetreten waren, daß ich sie als Maxima nicht ohne weiteres ansprechen zu dürfen meinte. Es kann wohl angenommen werden, daß nunmehr sämtliche diskontinuierlich variierende Klassen, sofern sie nur innerhalb der bisher untersuchten Größe liegen, zu unserer Kenntnis gelangt sind.

Daß aber trotz ihrer Menge sie alle als die mit 10 multiplizierten Werte aus Fibonaccizahlen sich einheitlich erklären lassen, muß natürlich nur als weiterer Beweis für die Richtigkeit dieser Deutung der Zwischenzahlen gelten, der aber weiter noch schon durch die hier wieder bestätigte Erfahrung der Übereinstimmung der Gipfelklassen für Länge und Breite, sowie dadurch, daß im Laufe des Wachstums die Gestalt unserer Objekte sich nicht ändert, sich mathematisch „ähnlich" bleibt, erbracht wird.

Variationsreihe für die Breite der Blattspreite von *Stellaria media.*

Breite in mm:	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Frequenz:	0	24	61	39	19	20	21	15	2	0

n = 200. Gipfel: 10—14.

Variationsreihe für die Breite der Blattspreite von *Oxalis acetosella.*

Breite in mm:	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Frequenz:	0	2	11	16	30	29	32	34	35	33	5	2	1	0

n — 230. Gipfel 10—14, 15.

(Sämtliche Foliola eines Blattes wurden gemessen.)

Variationsreihe für die Breite der Blattspreite von *Lysimachia nummularia.*

Breite in mm:	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Frequenz:	0	1	0	7	15	20	18	24	26	20	6	1	2	0

n = 140. Gipfel: 10, 11 — 14, 15 — 18.

Variationsreihe für die Länge der Blattspreite von *Lysimachia nummularia.*

Länge in mm:	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Frequenz:	0	6	20	23	26	17	43	50	53	35	24	5	1	—

n = 300. Gipfel: 14 — 17, 18; Buckel der Kurve bei 20.

Variationsreihe für die Länge der Blattspreite von *Hypericum perforatum.*

Länge in mm:	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Frequenz:	0	4	13	23	68	125	151	92	87	31	6	0

n = 600. Gipfel: 18; schwacher Buckel der Kurven bei 20.

Variationsreihe für die Länge der Spreite kleinerer Blätter von *Caragana arborescens.*

Länge in mm:	14	15	16	17	18	19	20	21
Frequenz:	0	5	22	59	55	38	6	0

n = 175. Gipfel: 17, 18.

Variationsreihe für die Breite der Spreite der Foliola der Blätter von *Rosa canina* (Blattzähnchen inklusive).

Breite in mm:	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
Frequenz:	0	2	26	35	45	52	36	39	55	94	83	73	74	71	75	87	71	67	37	32	26	14	6	0

n = 1100. Buckel der Kurve bei 15 — 30, Gipfel: 18 — 22 — 25 — 28.

Variationsreihe für die Spreitenlänge der Foliola der Blätter von *Medicago sativa* (Blätter „mit Wahl“).

Länge in mm:	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Frequenz:	0	4	4	5	23	34	51	46	39	63	48	60	61	53	41	18	6	12	16	3	6	5	0

n = 600. Buckel der Kurve bei 22; Gipfel: 14 — 17 — 20 — 25, 26 — 28.

Variationsreihen für die Breite der Blattspreite von *Symphoricarpus racemosus.*

Breite in mm:		8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
Frequenz:	1)	0	0	1	4	8	7	22	21	21	28	24	15	9	3	4	0	—	—	—	—	—	—
„	2)	0	0	4	14	32	45	70	55	46	41	35	19	13	6	4	2	0	—	—	—	—	—
„	3)	0	1	2	3	4	7	21	17	24	35	35	34	36	47	49	44	38	29	17	22	26	9
„	4)	0	4	8	9	13	31	43	48	47	53	55	48	55	57	59	50	44	37	19	24	30	10
„	5)	0	6	11	31	51	47	106	109	123	137	107	98	116	103	109	98	90	69	57	44	58	32

Fortsetzung.

Breite in mm:	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
Frequenz: 1)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
„ 2)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
„ 3)	5	2	5	6	3	4	0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
„ 4)	5	3	9	9	7	5	4	0	2	2	2	1	0	2	0	0	2	0	3	0	1	0
„ 5)	39	23	18	13	15	16	16	5	2	5	9	6	7	4	1	4	3	1	7	3	4	3

Reihe 1 und 2 ermittelte gütigst Herr Leutnant a. D. stud. phil. A. Philipps.

Reihe 3, 4, 5 erhielt ich durch eigene Messungen. (Reihe 2 vergegenwärtigt die Weiterentwicklung von Reihe 1; Reihen 4 bezw. 5 die von 3.)

Es beträgt für Reihe 1) n = 167, und fallen Gipfel auf: 14 — 17, 18 — 22.
„ „ „ „ 2) n = 386, „ „ „ „ 14 — 18 — 22.
„ „ „ „ 3) n = 530, „ „ „ „ 14 — 17, 18 — 22 — 24 (Nur Buckel) — 28 — 32.
Es beträgt für Reihe 4) n = 800, und fallen Gipfel auf: 14, 15 — 17, 18 — 20 (Nur Buckel) — 22 — 24 (Nur Buckel) — 28 — 32 — 36 — 38.
Es beträgt für Reihe 5) n = 1850, und fallen Gipfel auf: 14 — 17 — 20 — 22 — 24 (Nur Buckel) — 28 — 30 — 32 — 34, 35, 36 — 38 — 40 — 42 — 45, 46 — 48 — 50, 51.

Variationsreihe für die Spreitenlänge der Foliola der Blätter von *Fragaria vesca*.

Länge in mm:	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Frequenz:	0	3	5	8	26	31	27	54	60	61	67	72	86	78	66	66	77	71	63

Fortsetzung.

Länge in mm:	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
Frequenz:	40	34	28	25	23	23	13	10	4	9	9	7	6	5	2	0

n = 1160. Gipfel: 14, 15 — 22 — 26 — 34 — 38 — 42.
Buckel der Kurve bei: 17, 18 — 28 — 36.

Variationsreihen für die Spreitenbreite der Foliola von *Cytisus Laburnum*.

1. Variationsreihen, freundlichst festgestellt von Herrn cand. phil. A. Daßler, erhalten durch Messungen aller 3 Foliola eines Blattes durcheinander.

Reihe 2 stellt die Weiterentwicklung von Reihe 1 dar.

Breite in mm:	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
Frequenz: 1)	0	6	4	0	5	6	10	16	39	21	25	28	34	32	22	23	30	20	13	13	12	9	3	1	4	2	1	0
„ 2)	0	6	4	0	8	17	21	38	59	41	40	50	65	48	41	41	39	27	21	14	16	9	7	1	4	2	1	0

2. Variationsreihen,

von mir festgestellt durch Messungen je des mittleren Hauptfolioli. Reihen 4 und 5 stellen die Weiterentwicklung von Reihe 3 dar.

Breite in mm:	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
Frequenz: 3)	—	—	0	1	0	2	1	3	3	7	12	5	10	9	18	12	10	14	27	19
„ 4)	0	1	1	1	6	8	10	18	19	24	27	24	35	37	44	27	35	32	45	30
„ 5)	0	1	1	3	10	12	20	26	37	44	46	45	55	62	78	53	52	58	70	57

Fortsetzung.

Breite in mm:	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	. . . .	44	45	46	47
Frequenz: 3)	17	7	13	8	3	5	5	1	3	0	—	0	1	0	—
„ 4)	26	18	22	11	9	7	5	2	4	2	—	1	1	1	—
„ 5)	51	33	36	21	19	17	16	5	5	2	—	1	1	1	—

3. Variationsreihen,

von mir festgestellt durch Messungen je der 2 Seiten-Foliola. Reihe 7 stellt die Weiterentwicklung von Reihe 6 dar.

Breite in mm:	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Frequenz: 6)	—	0	4	3	4	12	15	15	22	28	19	24	23	23	18	9	11	16
„ 7)	0	3	6	10	15	25	43	59	50	83	62	76	79	99	86	49	42	48

Fortsetzung.

Breite in mm:	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
Frequenz: 6)	12	7	6	6	5	3	0	2	2	0	0	—	—
„ 7)	34	23	14	16	11	8	0	3	2	1	0	3	0

Es beträgt für Reihe 1) n = 280, und fallen Gipfel auf: 13, 14 — 20 — 24, 25 — 28 — 32 — 36.

Es beträgt für Reihe 2) n = 620, und fallen Gipfel auf: 13, 14 — 17 (Nur Buckel) — 20 — 24 — 28 — 32 — 34 (Deutlichster Buckel) — 36.

Es beträgt für Reihe 3) n = 215, und fallen Gipfel auf: 13 — 17 — 20 — 22 — 24 — 28 — 30 (Nur kleiner Buckel) — 32 — 36 — 38 (Kleiner Gipfel) — 45.

Es beträgt für Reihe 4) n = 540, und fallen Gipfel auf: 17 — 20 — 22 (Nur kleiner Buckel) — 24 — 28 — 30 (Nur kleiner Buckel) — 32 — 38 (Kleiner Gipfel) — 45, 46.

Es beträgt für Reihe 5) n = 935, und fallen Gipfel auf: 14 — 20 — 24 — 28 — 30 (Nur kleiner Buckel) — 32 — 36 — 38 (Nur Buckel) — 45, 46.

Es beträgt für Reihe 6) n = 290, und fallen Gipfel auf: 13 — 17 — 20 — 22 (Sehr kleiner Gipfel) — 24 — 28 — 36.

Es beträgt für Reihe 7) n = 950, und fallen Gipfel auf: 20 — 22 (Nur kleiner Buckel) — 24, 25 — 28 — 34 — 36 — 40.

Auch bei den Messungen, die Mac Leod (13) zum Zwecke des Studiums der Korrelationen zwischen Länge und Breite von

Licht- und Schattenblättern vornahm, wo aber die Strecke von 5 mm als Maßeinheit zu Grunde gelegt ist, fallen Maxima meist auf Klassen, welche die besonders häufig auftretenden der von mir festgestellten Gipfelzahlen enthalten. Sicherlich hätten sich auch hier die gleichen Gesetzmäßigkeiten ergeben, wenn die Größe 1 mm als Maßeinheit gewählt wäre.

Gegenüberstellung der empirischen und theoretischen Gipfel.

Früherer empir. Gipfel.	Jetziger empir. Gipfel.	Theoretischer Gipfel.	
10	10 (selten 10-11)	$10 = 10\sqrt{1}$	Simpla.
13, 14	13, 14, 15	$14,1 = 10\sqrt{2}$	
17, 18	17, 18	$17,3 = 10\sqrt{3}$	
22	22	$22,4 = 10\sqrt{5}$	
28	28	$28,3 = 10\sqrt{8}$	
36	36	$36,1 = 10\sqrt{13}$	
45, 46	45, 46	$45,8 = 10\sqrt{21}$	
20	20	$20 = 10\sqrt{4}$	Dupla.
24	24, 25	$24,5 = 10\sqrt{6}$	
32	32	$31,6 = 10\sqrt{10}$	
40	40	$40 = 10\sqrt{16}$	
51	50, 51	$50,9 = 10\sqrt{26}$	
30 (schon vereinz. früher)	30	$30 = 10\sqrt{9}$	Tripla.
—	38	$38,7 = 10\sqrt{15}$	
48 (bei *Berberis aquifol.*)	48	$48,9 = 10\sqrt{24}$	
26	26	$26,5 = 10\sqrt{7}$	Trientaliszahlen.
—	34	$33,2 = 10\sqrt{11}$	
42	42	$42,4 = 10\sqrt{18}$	

c) An Organen mit dreidimensionalem Wachstume.

Die Messungen mit Hilfe der Schubleere, die gerade hier besonders erforderlich sind, da mir bei meinen früheren Untersuchungen infolge der ungünstigen Jahreszeit nur wenig geeignetes Material zur Verfügung stand, ergeben auch mehrgipflige Kurven. Ebenfalls wieder variieren ungeachtet der systematischen Stellung der einzelnen Arten Klassen diskontinuierlich, die (mein „Gleichheitsgesetz“ wieder bestätigend) wieder sämtlich der absolut gleichen Zahlenreihe angehören, und (im Einklange mit dem Ludwigschen

Gesetz) wieder die Abscisse jetzt im Verhältnisse der Kubikwurzeln aus Fibonaccizahlen teilen. Speziell lassen sich die Zwischenzahlen wieder als die mit 10 multiplizierten Werte auffassen, wie auf Grund nachfolgender Gegenüberstellung der empirischen und theoretischen Werte ersichtlich ist.

Variationsreihe für die Breite der „Nüßchen" von *Alnus glutinosa.*

Empirischer Gipfel: 10.

Zahl der mm:	7	8	9	10	11	12	13	14
Häufigkeit:	0	33	89	122	73	26	8	0

sa = 350 Exemplare.

Variationsreihe für die Breite der Früchte von *Rosa canina.*

Empirischer Gipfel: 13, 14.

Zahl der mm:	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Häufigkeit:	0	7	14	39	65	62	21	4	2	1	0

sa = 215 Exemplare.

Variationsreihe für die Breite der Früchte (ohne „Becher") unserer einheimischen Eichen (*Quercus Robur* und *Q. sessiliflora* durcheinander).

Empirischer Gipfel: 13, 14 — 17.

Zahl der mm:	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Häufigkeit:	0	5	20	35	70	75	20	12	8	0

sa = 250 Exemplare.

Variationsreihe für die Länge der „Nüßchen" von *Alnus glutinosa.*

Empirischer Gipfel: 13 — 17, 18.

Zahl der mm:	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Häufigkeit:	0	20	42	53	64	112	215	196	37	1	0

sa = 750 Exemplare.

Variationsreihe für die Länge der Früchte (ohne „Becher" und „Spitze" von *Quercus, Q. Robur* und *Q. sessiliflora* durcheinander).

Empirischer Gipfel: 13, 14 — 17, 18 — 20 — 23 — 28.

Zahl der mm:	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
Häufigkeit:	0	8	13	11	20	29	35	24	78	70	84	108	65	23	10	7	6	0

sa = 600 Exemplare.

Gegenüberstellung der empirischen und theoretischen Gipfel.

Früherer empir. Gipfel.	Jetziger empir. Gipfel.	Theoretischer Gipfel.
—	10	$10 = 10\sqrt[3]{1}$
13	13, 14	$\left\{\begin{array}{l} 12{,}6 = 10\sqrt[3]{2} \\ 14{,}4 = 10\sqrt[3]{3} \end{array}\right.$
17	17, 18	$17{,}1 = 10\sqrt[3]{5}$
20, 21	20	$20 = 10\sqrt[3]{8}$
23, 24	23	$23{,}5 = 10\sqrt[3]{13}$
27, 28	28	$27{,}6 = 10\sqrt[3]{21}$

V. Teil.

Der Einfluss der Selektion etc. auf die Gesetzmässigkeit der diskontinuierlichen Variation.

Nicht nur ebenfalls weiter für die Entscheidung der Frage, ob die Zwischenzahlen eine zufällige Erscheinung bedeuten oder auf gesetzmäßigen inneren Vorgängen beruhen, ist es von Wichtigkeit, zu untersuchen, wie sich die Lage des jeweiligen Hauptgipfels unter der Einwirkung positiver oder negativer Selektion verändert. Auch über das Wesen dieser selbst, ihren Einfluß auf den Gestaltungs- und Wachstumsprozeß der Lebewesen verspricht dies Studium zu belehren.

Es hat sich ja durch die Untersuchungen von de Vries (14) erwiesen, und hat Klarheit gebracht über „Variabilität" und „Mutabilität" der Arten, daß der Hauptgipfel, wie er bei hinreichend genügenden Feststellungen empirisch zustande kommt, für jede Spezies als konstant sich zeigt, sofern die Individuen nur einigermaßen gleichen Vegetationsbedingungen ausgesetzt sind. So besitzt zum Beispiel *Chrysanthemum segetum* (15) das gleiche Maximum in Holland wie in Thüringen. Geringen Lebens-Veränderungen entspricht nur eine Verschiebung der zu berechnenden „Konstanten" eines Polygones, der „Schwerpunktsordinate" etc., indem bald die rechts, bald die links vom primären Gipfel gelegene Partie der Kurve bei graphischer Darstellung infolge stärkerer oder geringerer Frequenz größerer oder kleinerer Individuen oder Organe etc. sich ausgebuchteter resp. eingebuchteter (als im Normalfalle miteinander völlig gleichgestalteten Kurvenhälften) zeigt. Aber wenn die Stärke und Nachhaltigkeit der Selektion einen gewissen Grad überschreitet, stellt sich ein neues Maximum ein, und wird die Variation eines Merkmales gewissermaßen aus der alten Gleichgewichtslage herausgebracht, in eine neue übergeführt.

Am sichersten müßten ja zweifellos direkte Kulturversuche die Entscheidung des Problems bringen, ob stets Gesetzmäßigkeit oder unter Umständen auch Willkür in der Tektonik der Organismen obwaltet. Aber da es ja hier nicht darauf ankommt, den Einfluß irgend eines bestimmten Ernährungsfaktoren in spezieller Weise zu ergründen, sondern nur im allgemeinen die Reaktion der lebenden Substanz zu prüfen, beschränkte ich mich auf Fälle, wo in der Natur selbst durch irgendwelche anormale Lebenslage abweichende Variationsverhältnisse augenfällig herbeigeführt wurden.

Es zeigt sich nun überall aus den im folgenden gegebenen bezüglichen Resultaten beim Vergleiche der „normalen" und der durch Selektion beeinflußten Variation eines Merkmales auch jetzt die Giltigkeit des „Gleichheitsgesetzes" der diskontinuierlichen Variationen — wie bereits in der früheren Arbeit (16) —, daß die Einwirkung jener keine prinzipiellen Änderungen zur Folge hat, sondern eine bedingte ist. Selektion vermag eine Verschiebung des primären Gipfels nur auf eine andere „Klasse" zu bedingen, die auch schon früher als Nebengipfel in die Erscheinung getreten war, zur selben mathematischen Reihe wie das ursprüngliche Maximum zugehört.

Auch da, wo auf dem Gebiete meristischer Variation andere Zwischenzahlen als die bisher konstatierten, von anderen mathematischen Relationen, durch die Anordnung etc. der Organe bedingt, auftreten, wie unter Abschnitt a, zeigen sich keine fundamentale Baudifferenzen mit abweichender mathematischer Gesetzmäßigkeit, und bleibt ebenfalls das Bauprinzip gewahrt.

Ein gleiches Ergebnis fand ich auch in Arbeiten von de Bruyker (17), Mac Leod (18), Reinöhl (19) und de Vries (20) etc., als ich sie daraufhin beachtete.

Die natürliche Entwicklung der Organismen beeinflussen eben außer dem jeweiligen „monde ambiant" auch Kräfte, die als „innere" zu bezeichnen sind, und so kommt es, daß „de invloed van de voeding combineert zich met den invloed van het erfelijk voedingsvermogen van het ei en met den invloed dien de verschillende deelen vae het organisme op elkander uitoefenen. Elk individu is de drager eener dergelijke combinatic. Van die combinatie hangt de waarde van elke elementaire eigenschap bij elk individu af." (18)

a) Der Einfluß der Selektion auf die Gesetzmäßigkeiten der diskontinuierlichen meristischen Variationen.

Variationsreihen für die Zahl der Staubgefäße in der Blüte von *Chelidonium majus.* Die Zählungen geschahen zu verschiedenen Zeiten während der Vegetationsperiode. Die

Staubgefäße sind in viergliedrigen Quirlen angeordnet. Demgemäß variieren stets alle durch 4 ganz teilbaren Klassen diskontinuierlich. „Normal" finden wir die Zahl der Staubgefäße nur zur mittleren Blühzeit. Indes zeigt sich überall stets die gleiche Anordnung und Gesetzmäßigkeit erhalten. Die Differenzen sind nur graduell.

Zahl der Staubgefäße:		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
Häufigkeit.	sa = 200:	1	5	2	3	4	25	13	15	22	56	17	17	7	17	—	Juli (Normal).
„	sa = 120:	3	6	3	10	15	28	13	7	8	12	5	2	3	5	—	April (Ende).
„	sa = 250:	10	10	2	4	6	57	14	15	26	31	22	18	15	29	1	Oktober.

Variationsreihen für die Zahl der Blüten in den „Trugdolden" von *Cornus mas*. Jene sind zum größten Teil in zwei- oder viergliedrigen Wirteln angeordnet. Deshalb variieren die geraden Zahlen (Klassen) diskontinuierlich. Ich stelle meine Zählungen, die ich an Blüten eines sehr verkümmerten, schwächlichen Strauches aus dem Greizer Parke vornahm, den Zählungen gegenüber, die von Vogler (21) in der Schweiz angestellt wurden. Der Vergleich der drei Reihen ergibt einen gleichen Befund bezüglich des Vermögens der Selektion wie eben bei *Chelid. maj.*, Reihe I und II gibt die Variationen der Greizer Blüten wieder. In Reihe II sind die Exemplare von Reihe I nicht mit enthalten.

Zahl der Blüten:		4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Häufigkeit	I:	1	1	3	3	6	7	9	17	20	14	15	5	6	1	3	—	—	—	—
„	II:	1	1	4	10	17	16	23	33	52	34	37	23	30	16	26	9	10	2	3
„	III:	3	1	6	8	23	24	35	40	57	40	48	45	70	60	61	59	80	48	60

Fortsetzung.

Zahl der Blüten:		23	24	25	26	27	28	
Häufigkeit	I:	—	—	—	—	—	—	sa = 110 Exemplare.
„	II:	1	4	—	—	—	—	sa = 350 „
„	III:	52	50	28	22	22	11	sa = 1000 „

b) Der Einfluß der Selektion auf die Gesetzmäßigkeiten der diskontinuierlichen quantitativen Variationen.

Variationsreihen für die Länge der Blattspreite von *Lysimachia nummularia*. Reihe I kennen wir bereits von früher. Sie entstand durch Messung von Blättern „ohne Wahl". Reihe II demonstriert hingegen die Variationsverhältnisse von zwar völlig ausgewachsenen Blättern, die aber von schwächlichen Individuen stammen. Reihe III ergab sich endlich bei Berücksichtigung von wohl normalen, doch jugendlichen Blattzuständen.

Zahl der mm:	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
Häufigkeit I:	—	—	—	—	—	—	9	20	23	26	17	43	50	53	35	24	5	1	—	sa = 300 Exempl.
„ II:	—	—	7	12	15	28	29	36	39	42	36	19	23	14	—	—	—	—	—	sa = 300 „
„ III:	6	18	39	38	53	54	37	11	26	17	1	—	—	—	—	—	—	—	—	sa = 300 „

Variationsreihen für die Länge der Blattspreite von *Hypericum perforatum.* Reihe I ist die gleiche von früher. Reihe II wurde gewonnen durch Messungen von Blättern ausnehmend kräftiger Individuen.

Zahl der mm:	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Häufigkeit I:	—	—	—	4	13	23	68	125	151	92	87	31	6	—	—	—	—	—	—	—	—	—
„ II:	—	5	12	18	20	19	35	53	56	48	58	60	69	52	42	19	11	5	4	2	3	—

sa je 600 Exemplare.

Zweifelsohne würden sich analoge Verhältnisse auch beim entsprechenden Studium von Organen mit ein- bezw. mit dreidimensionalem Wachstume herausstellen.

VI. Teil.

Der Unterschied zwischen den Variationen von „Zufälligkeiten“ etc. und von „Merkmalen“ der Pflanzen.

Die bisher gewonnenen Resultate, im Verein mit den Ergebnissen früherer Untersuchungen gestatten es nunmehr, deutlich mehrere fundamentale Differenzen zwischen den Variationen einerseits von „Merkmalen“ der Pflanzen, andererseits von sogenannten Zufälligkeiten, Ereignissen etc. zu erkennen.

Als Unterschied muß es schon gekennzeichnet werden, daß bei den Pflanzen das Maximum sich immer noch konstant erhält, selbst wenn auch die Grundlagen des Versuches, d. h. im gegebenen Falle, die Lebensbedingungen einige Veränderungen erfahren. Es ist ganz klar, um die bereits erwähnte Gleichheit des Hauptgipfels für *Chrysanthemum segetum* sowohl bei Zählungen der Randstrahlen in Holland wie in Thüringen nochmals als ein besonders deutliches Beispiel anzuführen, daß eine innere Kraft, und zwar die Eigenschaft der Erblichkeit, hier die Befähigung gibt, gewissen Widerstand gegen Einflüsse von außen her zu leisten. Denn ganz natürlich bestehen in beiden Ländern voneinander abweichende, ja sicher nicht wenig abweichende Ernährungsbedingungen.

Weiter ist es aber für Pflanzen charakteristisch, daß die Variationen ihrer Merkmale als keine kontinuierlichen, sondern als diskontinuierliche sich zeigen, stets, sofern nur die Variationsweite eine nicht zu geringe ist.

Vor allem jedoch geschehen eventuelle Veränderungen, Verschiebungen des primären Maximums nicht beliebig, sondern von strenger Gesetzmäßigkeit beherrscht. Während die Größe seiner Verschiebung für „Zufälligkeiten“, Merkmale von Anorganismen etc. eine schwankende, jeweilig verschiedene, voraus nicht zu ermittelnde ist, springt es im gleichen Falle, wo es sich um Merkmale von Pflanzen handelt, auf ganz bestimmte mathematisch gesetzmäßige Variationsklassen über, die schon immer bevorzugt waren, die gleichsam determiniert von jeher erscheinen.

VII. Teil.

Die Übereinstimmung und der Unterschied zwischen den Variationen von Merkmalen der Pflanzen und Tiere.

Auch zwischen den Variationen von Merkmalen der Pflanzen und Tiere ist eine gewisse Abweichung nicht zu verkennen, wenn man die zahlreichen statistischen Untersuchungen, die besonders von Ammon (22), Bateson (23), Davenport (24), Dunker (25), Weldon (26) an Tieren vorgenommen wurden, zum Vergleiche heranzieht, ein Unterschied, wie er ganz richtig schon früher von Ludwig (27) erkannt wurde.

Bei den Variationskurven, wie sie von zoologischer Seite ermittelt werden, fehlt die Polymorphie. Es findet sich hier jeweilig nur ein Hauptwert vor, um den herum die übrigen Varianten kontinuierlich sich gruppieren.

In sonstiger Übereinstimmung mit denen der Pflanzen differieren aber die Variationen von Merkmalen der Tiere von denen der Anorganismen, der Ereignisse in den erörterten Punkten.

Weiterhin liegen auch hier die Gipfel auf Zahlen, die mathematisch nicht bedeutungslos, sondern gesetzmäßig sind. Zeigten doch so Wasteels und Mac Leod (28), daß die Zahlen der Fibonacci-Reihe auch im Tierreiche eine Rolle spielen.

VIII. Teil.

Die Elementarstruktur der Organismen, die Hypothese der rhythmischen Teilung der kleinsten lebenden Zellindividualitäten, zur Erklärung der konstatierten mechanischen Gesetzmässigkeiten in der Tektonik der Organismen.

Selbstverständlich muß dem gesetzmäßigen, konstanten, diskontinuierlichen Auftreten bestimmter Zahlenverhältnisse bei den Variationen der Merkmale von Organismen auch eine bestimmte Ursache zugrunde liegen, und es ist von vornherein klar, daß es mit dem Entwickelungsprozesse in kausalem Zusammenhange steht, Die Fälle diskontinuierlicher Variation repräsentieren die „normalen“ Wachstumsetappen, während alle zwischen ihnen liegenden kontinuierlichen Variationen auf Störungen etc. während der Entwicklung zurückzuführen sind. Aus dem Auftreten jeweilig bestimmter Zwischenklassen müssen wir so zur Erklärung des sprungweise erfolgenden Wachstumes auf bestimmte innere Vorgänge schließen.

Ich habe nun bereits früher (29) in Übereinstimmung mit den Ansichten Ludwigs (30) das Zustandekommen der konstatierten Gesetzmäßigkeiten durch die Annahme bestimmter, gesetzlicher, einfacher Teilungsarten der kleinsten lebenden Teilchen, die die Lebewesen aufbauen, zu begründen versucht. In meiner Abhandlung (31) über „Das normale Längen-, Flächen- und Körperwachstum der Pflanzen“ habe ich ausführlicher die Notwendigkeit dieser Anschauung dargetan und zu zeigen versucht, wie wirklich eine gute und vollkommene Erklärung so gegeben ist, die mit keinem wissenschaftlichen Ergebnis nicht nur nicht in Widerspruch steht, sondern im Gegenteil direkt als logische und wissenschaftliche Notwendigkeit erscheinen muß.

Jetzt kann ich mich zudem noch auf die neuesten Entdeckungen Gaidukows stützen, der mit Hilfe des Ultramikroskopes den protoplasmatischen Zellinhalt der Pflanzen aus kleinen, lebhaft sich bewegenden Teilchen von 5—100-Millionstel Millimeter Durchmesser, den „Ultramikronen“, als jetzt letzten sichtbaren lebenden Körperchen zusammengesetzt fand. Wenn wohl auch diese kleinen, mit Leben begabten Individualitäten der Zelle mit den theoretischen „Lebenseinheiten“ immer noch nicht identisch sein mögen, sondern wohl vielmehr erst noch Aggregate aus letzteren darstellen, ist so doch wieder ein neuer Beweis erbracht, daß unsere Kenntnis über die Anatomie der Zelle noch recht unvollkommen bis in die allerneueste Zeit war, und sicher noch ist, daß die vorläufige Unsichtbarkeit der hier vorausgesetzten kleinsten lebenden Elemente ein ernstliches Bedenken gegen die angenommene Wachstumshypothese sicherlich nicht zu erregen vermag.

Sei es nun, daß wir jene im Sinne Darwins (32) „Gemmulae“ nennen, sei es, daß wir mit jenen die Vorstellungen Spencers (33) über dessen „Physiological units“ oder Wiesners (34) über die „Plasome“, Hertwigs (35) über die „Bioblasten“, Weismanns (36) über die Biophoren“, die von de Vries (37) über die „Pangenen“ oder Nägelis (38) über sein aus „Micellen“ aufgebauten „Idioplasmas“ etc. verbinden, stets lassen sich so alle Organismen trotz systematischer Unterschiede von einem einfachen, gemeinsamen Gesichtspunkte begreifen und zusammenfassen, in einer Weise, wie sie den je nach der Art des Wachstumes gleichen Gesetzmäßigkeiten entspricht. Es ist ja von selbst einleuchtend, daß die letzten, einfachsten, kleinsten lebenden „Bausteine“ sich nicht oder kaum voneinander unterscheiden können. Andererseits aber finden trotzdem auch die späteren Verschiedenheiten der Organe, Individuen und Arten ihre Begründung. Denn wie ein Architekt aus gleichem Materiale, Ziegelsteinen, gleichwohl die unterschiedlichsten Gebäude bezüglich Größe, Form und Stil entstehen lassen kann, muß es auch hier denkbar sein, daß trotz gleicher Grundlage schließlich die differentesten Formen zur Schau gelangen können, infolge der den „Lebenseinheiten“ als Erblichkeitsträgern inhärenten, je bestimmten Größe der Neigung, die Teilungen bis zu einer gewissen Stufe fortschreiten zu lassen, auf je gewisse Art zu Komplexen immer höherer Ordnung zusammenzutreten etc.

Man hat dann also nur noch anzunehmen, daß der Teilungsmodus jeweilig ein bestimmter ist, wie er sich aus den mathematischen Beziehungen der diskontinuierlichen Variationen erschließen läßt, z. B. zur Erklärung der scheinbar ganz besonders häufigen, vielleicht fast allgemein auftretenden Fibonaccizahlen, daß das Verhältnis der beiden Teilstücke, in die ein Plasom wie im Falle der „gewöhnlichen“ Teilung zerfällt, das von Mutter zu Tochter ist; dann hat das eine stets erst eine Reifungsperiode zu durchleben, bevor auch es an den nunmehr regelmäßigen Teilungen teilnehmen kann.

Tatsächlich konnte ja auch bereits speziell dieser bestimmte Vermehrungstropus, der aus der Kaninchenaufgabe des Fibonacci wohl bekannt ist, wirklich in der Natur an der *Bacillariacee Melosira arenaria* beobachtet werden.

Auch für jede mathematisch andere Art der diskontinuierlichen Variation ist durch die Annahme besonderer Vermehrungsweisen der kleinsten lebenden Zellindividualitäten eine ursächliche Erklärung zu geben, wie dies von Wasteels (40) im allgemeinen theoretisch, in einigen Fällen aber auch bereits speziell anwendbar, (41) gezeigt wurde. Dabei wären stets nur geringe Modifikationen von der gewöhnlichen, normalen, rhythmischen Zweiteilung, und der eben erwähnten nach den Zahlen des Fibonacci, wie auch immer die Zwischenzahlen zur Erscheinung kämen, zur Begründung erforderlich. Dadurch, daß die verschiedensten Variationsreihen der Zwischenklassen sich nur durch die verschiedenen Zahlenwerte stets derselben theoretischen allgemeinen „Konstanten“ unterscheiden, bleibt stets ein gewisser innerer Zusammenhang bestehen. (40)

Rein mechanisch dürfte wenigstens für das Auftreten bestimmter Zahlenregelmäßigkeiten bei den Variationen organischer Eigenschaften eine genügende Erklärung nicht zu geben sein, wennschon an und für sich das Zustandekommen von Divergenzen auf diesem Wege plausibel erscheinen muß, wie Schwendener (42) zeigte. Mag immerhin gegenseitiger Druck und Verschiebung von Organen während der Entwicklung von Bedeutung sein, schon das konstante Auftreten desselben Hauptgipfels, abgesehen von den jeweiligen mathematischen Regelmäßigkeiten, muß bei solchen Erklärungsversuchen ein Rätsel bleiben, da schon alle Voraussetzungen einer mechanischen Theorie den Tatsachen widersprechen. Nur durch die gegebene Hypothese dürfte vorläufig eine befriedigende Lösung der Frage nach der Ursache gegeben sein, zumal Druck und Verschiebung allein ganz unmöglich die direkten Fibonacci zahlen, ihre Quadrat- resp. Kubikwurzeln bei den quantitativen Variationen bedingen können.

Um das vindizierte Wachstumsgesetz in der einfachsten Form, wie es mir Herr Hofrat Prof. Dr. Ludwig (43) in dankenswerter, gütiger Weise über den Punkt mitteilt, auszusprechen, verteilen sich die Teilplasome gleichmäßig über den Raum des Mutterplasomes. So resultieren ja alle beobachteten Wertigkeiten der Fibonacciglieder bezw. bei linearem, wie Flächen- und Körperwachstum. So ist es wohl zu verstehen, daß bei jeder Art des Wachstums die Zwischenzahlen je die absolut gleichen sind, welche Dimension auch immer im Falle einer mehrdimensionalen Stoffzunahme Berücksichtigung findet. Denn auf diese Weise muß die Vergrößerung des studierten Organes nach allen Richtungen hin, um die es sich im gegebenen Falle handelt, in gleichem Verhältnisse statthaben, d. h. die Gestalt des Organes muß sich bei mehrdimensionalem Wachstume mathematisch „ähnlich" bleiben. Dies aber galt es auch, zu begründen.

IX. Teil.

Kurze Zusammenfassung der wichtigsten, durch variationsstatistische Untersuchungen bezüglich des Wachstumsprozesses der Lebewesen gewonnenen Erfahrungen.

Das organische Wachstum zeigt sich gesetzmäßig schon insofern, als eine hinreichende Menge von Zählungen irgend welcher Organe eines Lebewesens oder von Messungen eines beliebigen Gliedes etc. stets einen bestimmten Mittelwert ergibt, um den herum die übrigen Varianten sich gruppieren. Deren Frequenz wird im allgemeinen um so geringer, je weiter entfernt die betreffende „Klasse" von Varianten von der „Gipfelklasse" liegt, wie dies ja aus der Wahrscheinlichkeitslehre bekannt ist. Im großen und ganzen weichen die empirisch ermittelten Variationsverhältnisse von den theoretisch jeweilig zu berechnenden nur innerhalb der zulässigen Fehlergrenze ab. Mit je ganz bestimmter, festzustellender Größe der „Wahrscheinlichkeit" darf man innerhalb einer gewissen Zahl von Individuen oder Organen solche von bestimmter Art und in bestimmter Menge anzutreffen erwarten.

Das „Maximum" ist nicht jeweilig ein beliebiges, wie bei den Variationen von „Ereignissen", Zufälligkeiten", von „Merkmalen" von Anorganismen etc., sondern besitzt konstante, für die Spezies charakteristische Lage, auch wenn etwas differente Lebensbedingungen eintreten. Schon daraus ist es deutlichst ersichtlich, daß bei dem Entwickelungsprozesse der Lebewesen neben den von außen her einwirkenden Faktoren auch „innere" Kräfte eine bestimmende Rolle spielen, ganz offenbar eine bestimmte, erblich fixierte „Entwickelungs-Richtung" zu veranlassen streben, und so bis zu einem gewissen Grade Einflüssen von außen entgegenwirken.

Der Organismus wächst somit also unter der Einwirkung beider Arten von Faktoren, und die individuellen und partiellen Variationen sind die Folge. Der stärkeren oder geringeren Abweichung vom Hauptwerte entspricht ursächlich die stärkere oder geringere Beteiligung einer jeder dieser beiden Gruppen von Faktoren bei ihrem kombinierten Einwirken auf den sich entfaltenden Organismus. Die dem oben erwähnten Verteilungsgesetze entsprechende Häufigkeit der einzelnen „Variationsklassen" kommt zustande, weil (wie überall, wo konstante Ursachen und zufällige, veränderliche Einwirkungen auftreten) sich „in der großen Zahl" der Fälle die veränderlichen Faktoren kompensieren, da sie nach den allerverschiedensten Richtungen hin, in verschiedenstem Sinne, erfolgen.

Die Variationen der Merkmale speziell von Pflanzen unterscheiden sich von denen der Anorganismen auch noch besonders durch die Erscheinung der „diskontinuierlichen" Variabilität. „Zwischenzahlen", d. h. Klassen mit „supranormaler" Frequenz der Varianten, die diesen nach den theoretischen Berechnungen des Newton-Pascalschen Binomiums oder des Gaußschen Wahrscheinlichkeitsintegrales nicht zukommt, treten überall bei statistischen Ermittelungen auf, wo die Variationsweite nur einigermaßen bedeutend ist; woraus zu entnehmen, daß das Wachstum der Pflanzen und ihrer Organe nicht kontinuierlich, gleichmäßig, sondern rhythmisch, sprungweise statthat.

Die Zwischenzahlen zeigen sich auch nicht beim statistischen Studium von Merkmalen der Tiere, und so ist darin ein fundamentaler Unterschied in der Variation zwischen beiden Reichen der Lebewesen gegeben: das Wachstum des Tieres erscheint ungleich begrenzter gegenüber dem der Pflanzen.

Daß die inneren Kräfte hauptsächlich den Gestaltungsprozeß beeinflussen, daß das Wachstum, seine Etappen ganz bestimmte, nicht willkürliche sind, ist daraus zu entnehmen, daß die diskontinuierlich variierenden Klassen sich stets je als ein und dieselben erhalten, und immer zur Schau gelangen, wenn nur der betreffende „Variationsbezirk" durch hinreichend zahlreiche Varianten vertreten ist. Meist genügen schon wenige Untersuchungen, um sie hervortreten zu sehen.

Weiter springt das primäre Maximum, wenn es wirklich seine Lage verändert, im Falle, daß die äußeren Lebensbedingungen doch die inneren Gestaltungskräfte an Einfluß und Nachhaltigkeit übertreffen, stets auf eine dieser Zwischenklassen über, ist also stets in seiner Lage von vornherein gleichsam determiniert, nicht beliebig und gesetzlos wie bei den Merkmalen der Anorganismen. Der Einfluß der Selektion (in positiver oder negativer Richtung) auf das Wachstum der Pflanzen erscheint also nur in beschränkter Weise als derartiger, daß lediglich graduelle Differenzen sich ergeben. Der Bau ist ein bestimmter, jeweilig charakteristischer, und im Prinzip stets unveränderbar. Dafür sprechen die Ergebnisse des Studiums sowohl der individuellen wie partiellen, sowohl der Kon- wie der Devariationen, ungeachtet, ob die Variabilität sich von meristischer oder quantitativer Natur zeigt, ganz eindeutig.

Die Zwischenzahlen sind ferner stets Zahlen ein und derselben absolut gleichen mathematischen Zahlenreihe, nicht nur je bei einer Art, sondern bei den Arten, ungeachtet der phylogenetischen Stellung, je bei linearem, Flächen- und Körperwachstum, und im Falle der letzten beiden Arten eines mehrdimensionalen Wachstumes ungeachtet der Dimensionen. Die materielle Grundlage muß also für alle bezüglich untersuchten Arten die gleiche sein. Geringe Differenzen der Spezies bestehen darin, daß in manchen Fällen sämtliche bezügliche Zwischenzahlen, in anderen nur gewisse von ihnen mit Regelmäßigkeit auftreten, daß bald die, bald jene als besonders häufig sich erweisen.

Auch auf dem Gebiete der meristischen Variabilität finden sich fast allgemein verbreitet ein und dieselben Zahlenverhältnisse vor; doch lassen sich hier verschiedene „Reihen" konstatieren, da hier natürlich auch die Art und Weise der Anordnung der Organe, ob spiralig, hemicyklisch oder lediglich quirlig, von Belang sein muß.

Auch mathematisch betrachtet, sind die „Zwischenklassen" von strenger Gesetzmäßigkeit. In den meisten Fällen stehen sie zur „Fibonacci-Reihe" in Beziehung. So fallen das primäre und die sekundären Maxima im Falle meristischer Variationen fast immer direkt auf Glieder der Reihe oder ihrer Multipla, und es werden so die Hauptvariationsgipfel durch die der Nebenvariation in den Näherungsverhältnissen des „goldenen Schnittes" geteilt. Im direkten Verhältnisse der Fibonaccizahlen geschehen weiter die diskontinuierlichen Variationen von Organen mit typischem Längenwachstum, in dem ihrer Quadratwurzeln die von solchen mit „normalem" Flächenwachstum, endlich in dem ihrer Kubikwurzeln da, wo eine „reguläre" Volumenzunahme statthatt, d. h. für die zweite und dritte Art des Wachstumes da, wo die Gestalt, die Form eines Organes stets dieselbe, sich „ähnlich" bleibt. — Auch im Tierreiche können die Maxima der Variationspolygone auf Zahlen derselben Reihe liegen. Es entwickelt sich nach ein und demselben Prinzip nicht nur das Organ, das Individuum, die Art, die Sippen, sondern auch die Pflanze und das Tier, und es wird so trotz des scharfen, oben erörterten Unterschiedes im Wesen des Wachstumes zwischen beiden Reichen eine „innere" Beziehung geschaffen und gleichsam angedeutet, daß der Ausgangspunkt auch der phylogenetischen Entwicklung für beide Reiche derselbe ist.

Allen konstatierten Erscheinungen wird bei einem Erklärungsversuche, nicht nur ohne Widerspruch mit irgend einer wissenschaftlichen Tatsache, sondern direkt im Einklange mit den Ergebnissen neuester biologischer Forschung (auf andre, rein mechanische Weise niemals!) Rechnung getragen durch die Annahme einer „Elementarstruktur" der Organismen, wo die kleinsten, mit der Fähigkeit des Wachstums und der Teilung begabten „Lebenseinheiten" je in bestimmter, gesetzlicher, aus dem Zahlenverhältnisse der diskontinuierlich variierenden Klassen zu erschließender, von der gewöhnlichen, rhythmischen Zweiteilung nur wenig modifizierter, in der Natur z. T. auch bereits beobachteter Weise sich vermehren, und, vielleicht infolge gegenseitigen Druckes und Verschiebung (da sich die Teilstücke über den Raum der „Mutterlebenseinheit“ verbreiten) die relative Anordnung je beibehalten, die sie, durch organische Kräfte bewirkt (analog den Verhältnissen beim Kristalle), in der jugendlichsten Organanlage einnehmen.

Nachtrag.

Während des Druckes vorliegender Arbeit übersandte mir Herr Prof. Dr. P. Vogler aus St. Gallen liebenswürdigerweise seine Abhandlung: „Variationsstatistische Untersuchungen an den Blättern von *Vinca minor* L.“ (Sep.-Abdr. aus dem Jahrbuch 1907 der St. Gallischen Naturwiss. Gesellschaft.) Auch durch die dabei erhaltenen Resultate finden das Ludwigsche Gipfelgesetz, sowie mein „Gleichheitsgesetz“ der diskontinuierlichen Variationen ihre volle Bestätigung. Denn stelle ich den von Vogler ermittelten Zwischenzahlen die von mir festgestellten gegenüber, so muß im Hinblicke auf die p. 10 geschilderten, bei Messungen sich ergebenden Schwierigkeiten und Fehler die Übereinstimmung zwischen den beiderseits gefundenen Maximis als recht vollkommen bezeichnet werden. Es entsprechen einander:

Voglers empir. Gipfel:	10	12, 13, 15	17, 18	20	22	25	28	30
Ritters empir. Gipfel:	10	13, 14, 15	17, 18	20	22	24, 25	27, 28	30

Fortsetzung.

Voglers empir. Gipfel:	32	34	35	37, 38	40	42	45	47	50, 51	54, 55
Ritters empir. Gipfel:	32	34	36	38	40	42	45, 46	48	50, 51	54, 55