

SCHOENFLIES¹ scheint in seinem Buche vom Jahre 1891 die Gruppen \mathfrak{B}_a^7 und \mathfrak{B}_a^8 nicht ganz richtig zu beschreiben. Er bringt die Ebene der Operationen $\mathfrak{S}_a (\tau a)$, $\mathfrak{S}_a (\tau a + \tau z)$ in dieselbe Lage wie die Operationen \mathfrak{S}^d und $\mathfrak{S}_a (\tau z)$ der Gruppen \mathfrak{B}_d^5 und \mathfrak{B}_d^6 . Aber in jenem Falle würden die genannten Ebenen die Axen von \mathfrak{B}^6 nicht mit sich zur Deckung bringen, wie es nothwendig ist. BARLOW² giebt die Lage der Ebene richtig an und dies stimmt überein mit der früher (1889) von SCHOENFLIES³ selbst gegebenen Beschreibung dieser Gruppen.

FEDOROW's Vergleich seiner Gruppen 36 h, 37 h, 55 a, 57 a, 60 a, 61 a, 65 a, 66 a mit BARLOW's Typen scheint nach seinen graphischen Darstellungen unrichtig zu sein⁴. Dasselbe gilt von seiner Vergleichung der Gruppen 36 a, 37 a, 38 a, 64 a, 65 a, 66 a mit den entsprechenden Gruppen von SCHOENFLIES.

FEDOROW⁵ vergleicht seine Gruppen 72 s und 73 s mit den Gruppen \mathfrak{D}^9 und \mathfrak{D}^5 von SCHOENFLIES; hier ist zu lesen: \mathfrak{D}_h^9 und \mathfrak{D}_h^5 .

FEDOROW's Bemerkung⁶ über den Typus 9 a₁ von BARLOW scheint nicht zutreffend zu sein. Die Angabe von BARLOW über die Lage des Inversionscentrums stimmt vollständig überein mit der Angabe von SCHOENFLIES und involviret Symmetrieebenen parallel den Diagonalfächen des Hexaëders, aber nicht Symmetrieebenen parallel zu den Flächen des Hexaëders.

Ueber die Capillaritätsconstanten der Krystallflächen.

Von **Harold Hilton.**

Mit 1 Figur.

Oxford, Magdalen College, October 1901.

»In der Abhandlung: »Zur Frage der Geschwindigkeit des Wachstums und der Auflösung der Krystallflächen« (Zeitschr. f. Kryst. etc., **34**, 520, 1901) stellt Herr G. WULFF das folgende sehr interessante Theorem auf:

Nehmen wir an, dass wir ein Polyëder mit gegebenen Flächenrichtungen, welche durch die Normalen n_1, n_2, n_3, \dots bestimmt werden, gefunden haben, welches der Bedingung des Minimums

¹ Krystallssysteme und Krystallstructur. 1891. 497.

² Zeitschr. f. Kryst. etc. **23**, 54.

³ Math. Ann. **34**.

⁴ Zeitschr. f. Kryst. etc. **24**. Taf. V, VI.

⁵ Zeitschr. f. Kryst. etc. **20**, 60.

⁶ Zeitschr. f. Kryst. **24**. 244. Fussnote *).

der Oberflächenenergie bei gegebenem Volumen Genüge leistet. Es ist einleuchtend, dass alle Polyëder, welche dem letzteren ähnlich sind und nur durch ihre Volumen sich von einander unterscheiden, ebenfalls dieser Bedingung Genüge leisten werden. Alle diese Polyëder werden einen Krystall in verschiedenen Wachstumsstadien vorstellen, wobei es klar ist, dass der Wachstumsanfang mit dem Centrum der Aehnlichkeit der ganzen erhaltenen Polyëderreihe zusammenfallen muss. Auf solche Weise kann man die Oberfläche eines dieser Polyëder folgendermaassen ausdrücken:

$$p (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + \dots),$$

wo p eine Constante ist, und die Oberflächenenergie E bei den Capillaritätsconstanten $k_1, k_2, k_3 \dots$ auf den verschiedenen Flächen

$$E = p (k_1 n_1^2 + k_2 n_2^2 + k_3 n_3^2 + \dots)$$

sein wird.

Das Volumen dieses Polyëders kann in folgender Form geschrieben werden:

$$V = q (n_1^3 + n_2^3 + n_3^3 \dots),$$

wobei q eine Constante ist.

Da das Polyëder ein Minimum der Oberflächenenergie bei constantem Volumen besitzen muss, so müssen folgende Bedingungen erfüllt werden:

$$dE = 2 p (k_1 n_1 dn_1 + k_2 n_2 dn_2 + k_3 n_3 dn_3 + \dots) = 0,$$

$$dV = 3 q (n_1^2 dn_1 + n_2^2 dn_2 + n_3^2 dn_3 + \dots) = 0,$$

dieses ist aber nur dann möglich, wenn

$$k_1 : k_2 : k_3 \dots = n_1 : n_2 : n_3 \dots .$$

Allein dieser Beweis ist falsch, denn G. WULFF nimmt an, dass in den Ausdrücken für E und V , welche lauten sollten:

$$E = k_1 p_1 n_1^2 + k_2 p_2 n_2^2 + \dots$$

$$V = \frac{1}{3} (p_1 n_1^3 + p_2 n_2^3 + \dots),$$

— worin p_1, p_2, \dots Constanten sind, was indessen für jenen Beweis nicht in Betracht kommt, — die Verhältnisse

$$n_1 : n_2 : n_3 : \dots$$

constant seien, so dass in den Ausdrücken für dE und dV

$$dn_1 : dn_2 : dn_3 : \dots$$

constant sein werden. Aber indem G. WULFF aus

$$dE = dV = 0$$

folgert:

$$k_1 : k_2 : k_3 : \dots = n_1 : n_2 : n_3 : \dots,$$

setzt er stillschweigend voraus, dass dn_1, dn_2, dn_3, \dots unabhängig von einander sind.

Gleichwohl ist das Ergebniss richtig, wie aus dem folgenden Beweise hervorgeht.

Es seien s_1, s_2, s_3, \dots die Inhalte der Flächen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$, deren Normalen die Längen n_1, n_2, n_3, \dots besitzen. Dann ist das Volumen des Krystallpolyëders:

$$V = \frac{1}{3} \sum n s$$

und
$$dV = \frac{1}{3} \sum (n ds + s dn).$$

Wenn das Polyöder eine kleine Deformation erfährt, bei der die Normalen seiner Flächen ihre Richtungen behalten, so wird:

$$dV = \sum s dn.$$

Um dies nachzuweisen, nehmen wir an, das Polyöder sei in eine gewichtslose incompressible Flüssigkeit getaucht, die in einem verticalen Cylinder mit dem Querschnitt A enthalten ist. Der Cylinder sei oben geschlossen durch einen beweglichen Kolben mit dem Gewichte w . Dann hat der Druck an irgend einer Stelle der Flüssigkeit den Werth w/A . Erfährt jetzt das Polyöder eine kleine Deformation der angegebenen Art, so liegt der Werth der Arbeit, die von irgend einer Oberfläche geleistet wird, zwischen:

$$\frac{w}{A} (s + ds) dn \text{ und } \frac{w}{A} s dn,$$

sie beträgt daher mit Vernachlässigung von kleinen Grössen zweiter Ordnung:

$$\frac{w}{A} s dn.$$

Wächst das Volumen des Polyöders um dV , so wird der Kolben gehoben um dV/A . Die dabei von den Flächen des Polyöders geleistete Arbeit ist:

$$w \cdot \frac{dV}{A}.$$

Folglich ist:

$$w \frac{dV}{A} = \sum \frac{w}{A} s dn,$$

also:
$$dV = \sum s dn.$$

Demnach wird:

$$dV = \frac{1}{3} \left\{ \sum (n ds) + dV \right\}$$

so dass:

$$\sum n ds = 2 \cdot dV.$$

Dazu treten Beziehungen zwischen den Flächeninhalten s_1, s_2, s_3, \dots , die darauf beruhen, dass sie Polyöderflächen angehören, deren Normalen feste Richtungen besitzen. Um dies nachzuweisen nehmen wir einen festen Punkt O und legen durch ihn die Ebenen P_1, P_2, P_3, \dots parallel zu den Flächen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$. Wir bezeichnen die Normalen von O auf die Flächen des Polyöders mit n_1, n_2, n_3, \dots , die Normalen von einem beliebigen Punkt A auf dieselben Flächen mit $n_1^a, n_2^a, n_3^a, \dots$ und die Normalen von A auf die Ebenen P_1, P_2, P_3, \dots mit a_1, a_2, a_3, \dots ; dabei rechnen wir a_1, a_2, a_3, \dots positiv oder negativ, je nachdem der Punkt A und die entsprechende Polyöderfläche σ auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten der zugehörigen Ebene P liegen. Alsdann ist:

$$\Sigma n s = \Sigma n^a s,$$

denn jede dieser Summen ist = 3 V. Folglich ist:

$$\Sigma (n - n^a) s = 0.$$

Daher ist mit Rücksicht auf:

$$n_1 - n_1^a = a_1, \dots$$

auch

$$\Sigma a . s = 0.$$

Wir beachten nun, dass die drei Normalen a_1, a_2, a_3 ausreichen, um die Lage des Punktes A gegen den festen Punkt O vollständig zu bestimmen und dass die übrigen Normalen a_4, a_5, \dots mit a_1, a_2, a_3 durch lineare Beziehungen von der Form:

$$a_4 = p_4 a_1 + q_4 a_2 + r_4 a_3$$

$$a_5 = p_5 a_1 + q_5 a_2 + r_5 a_3$$

$$\dots$$

verbunden sind. Nehmen wir an Stelle des Punktes A beliebige andere Punkte B, C, D, ... und bezeichnen wir die den Normalen a entsprechenden Normalen mit b, c, d, ..., so erhalten wir:

$$\Sigma b . s = 0, \Sigma c . s = 0, \Sigma d . s = 0, \dots,$$

d. i. eine unbegrenzte Zahl von Relationen, die aber nur drei independenten Relationen äquivalent sind. Denn wählen wir λ, μ, ν so, dass:

$$\lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1 = d_1$$

$$\lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2 = d_2$$

$$\lambda a_3 + \mu b_3 + \nu c_3 = d_3$$

wird, so haben wir:

$$\begin{aligned} d_4 &= p_4 d_1 + q_4 d_2 + r_4 d_3 \\ &= p_4 (\lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1) + q_4 (\lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2) + \\ &\quad r_4 (\lambda a_3 + \mu b_3 + \nu c_3) \\ &= \lambda (p_4 a_1 + q_4 a_2 + r_4 a_3) + \mu (p_4 b_1 + q_4 b_2 + r_4 b_3) + \\ &\quad \nu (p_4 c_1 + q_4 c_2 + r_4 c_3) \\ &= \lambda a_4 + \mu b_4 + \nu c_4. \end{aligned}$$

In analoger Weise wird:

$$d_5 = \lambda a_5 + \mu b_5 + \nu c_5$$

$$\dots$$

folglich ist:

$$\Sigma d . s \equiv \lambda \Sigma a . s + \mu \Sigma b . s + \nu \Sigma c . s.$$

Wir haben also die Relationen:

$$\Sigma n ds = 2 . dV.$$

$$\Sigma k ds = dE.$$

$$\Sigma a ds = \Sigma b ds = \Sigma c ds = 0.$$

Ist das Volumen V constant und die Oberflächenenergie E ein Minimum, so werden hiernach die Flächeninhalte s durch die folgenden fünf Gleichungen und nur durch diese verbunden:

$$0 = \Sigma n ds = \Sigma k ds = \Sigma a ds = \Sigma b ds = \Sigma c ds.$$

Bezeichnen wir jetzt mit $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ unbekannte Constanten, so muss:

$$\begin{aligned} n_1 - \alpha a_1 - \beta b_1 - \gamma c_1 - \zeta k_1 &= 0 \\ n_2 - \alpha a_2 - \beta b_2 - \gamma c_2 - \zeta k_2 &= 0 \\ n_3 - \alpha a_3 - \beta b_3 - \gamma c_3 - \zeta k_3 &= 0 \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

sein.

Nun kann immer ein Punkt O_1 gefunden werden, dessen Abstände von den Ebenen P_1, P_2, P_3 die Werthe:

$\alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1, \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2, \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3$ haben. Der Abstand dieses Punktes O_1 von der Ebene P_4 ist:

$$\begin{aligned} & p_4 (\alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1) + q_4 (\alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2) + \\ & \quad r_4 (\alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3) \\ = & \alpha (p_4 a_1 + q_4 a_2 + r_4 a_3) + \beta (p_4 b_1 + q_4 b_2 + r_4 b_3) + \\ & \quad \gamma (p_4 c_1 + q_4 c_2 + r_4 c_3) \\ = & \alpha a_4 + \beta b_4 + \gamma c_4. \end{aligned}$$

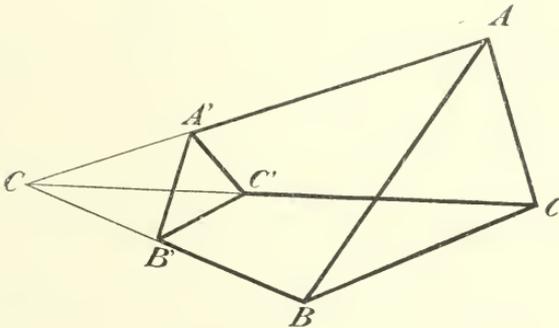


Fig. 1.

In analoger Weise finden wir für den Abstand des Punktes O_1 von den Ebenen P_5, \dots die Werthe:

$$\alpha a_5 + \beta b_5 + \gamma c_5$$

.

Bezeichnen wir jetzt die Normalen vom Punkte O_1 auf die Flächen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$ mit $n^1_1, n^1_2, n^1_3, \dots$, so folgt:

$$\begin{aligned} n^1_1 &= n_1 - \alpha a_1 - \beta b_1 - \gamma c_1 = \zeta k_1 \\ n^1_2 &= n_2 - \alpha a_2 - \beta b_2 - \gamma c_2 = \zeta k_2 \\ n^1_3 &= n_3 - \alpha a_3 - \beta b_3 - \gamma c_3 = \zeta k_3 \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

Demnach existirt ein Punkt O_1 , für welchen:

$$n^1_1 : n^1_2 : n^1_3 : \dots = k_1 : k_2 : k_3 : \dots$$

ist. Und hierin besteht das Theorem von G. WULFF.

Es ist nicht immer leicht, dieses Theorem auf einen concreten Fall anzuwenden. Daher wird es nützlich sein, ein Beispiel zu geben, das in vielen Fällen angewendet werden kann.

Es mögen die drei von dem Eckpunkt O ausgehenden Ebenen OBC , OCA , OAB mit den Kanten OA , OB , OC von den beiden Ebenen ABC und $A'B'C'$ in der Weise geschnitten werden, dass

$$\begin{aligned} OA &= xa, & OB &= xb, & OC &= xc, \\ OA' &= ya', & OB' &= yb', & OC' &= yc' \end{aligned}$$

ist, worin a, b, c, a', b', c' als bekannt vorausgesetzt werden. Bezeichnen wir die Winkel:

$$BOC = \alpha, COA = \beta, AOB = \gamma,$$

so ist das Volumen von $OABC$:

$$\frac{x^3 abc}{6} \sqrt{1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma}$$

und das Volumen von $OA'B'C'$:

$$\frac{y^3 a' b' c'}{6} \sqrt{1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma}.$$

Der Flächeninhalt von ABC ist:

$$\frac{x^2}{2} \sqrt{\Sigma (b^2 c^2 \sin^2 \alpha - bc (b^2 + c^2) \cos \alpha + 2 a^2 bc \cos \beta \cos \gamma)}.$$

Ferner sind die Flächeninhalte von OBC und $OB'C'$ gegeben durch:

$$\frac{x^2}{2} bc \sin \alpha \text{ und } \frac{y^2}{2} b' c' \sin \alpha.$$

Analoge Ausdrücke gelten für die Flächeninhalte von $A'B'C'$, OCA , $OC'A'$, OAB , $OA'B'$.

Wir setzen nun voraus, dass das Polyeder $ABC A'B'C'$ ein Krystallpolyeder von der Beschaffenheit repräsentirt, dass seine Oberflächenenergie für ein gegebenes Volumen ein Minimum ist. Die Capillaritätsconstanten seiner Flächen $BCB'C'$, $CAC'A'$, $ABA'B'$, ABC und $A'B'C'$ seien bezeichnet mit k_1 , k_2 , k_3 , k und k' . Dann ist das Volumen des Krystalls

$$\frac{1}{6} \sqrt{(1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma)} M$$

worin: $M = (x^3 abc - y^3 a' b' c')$
ist, und seine Oberflächenenergie

$$\mathfrak{P}_1 x^2 - \mathfrak{P}_2 y^2,$$

worin:

$$\mathfrak{P}_1 = \frac{1}{2} \left\{ b c k_1 \sin \alpha + c a k_2 \sin \beta + a b k_3 \sin \gamma \right.$$

$$+ k \left. \sqrt{\Sigma (b^2 c^2 \sin^2 \alpha - b c (c^2 + a^2) \cos \alpha + 2 a^2 b c \cos \beta \cos \gamma)} \right\}$$

$$\mathfrak{P}_2 = \frac{1}{2} \left\{ b' c' k_1 \sin \alpha + c' a' k_2 \sin \beta + a' b' k_3 \sin \gamma \right.$$

$$- k' \left. \sqrt{\Sigma (b'^2 c'^2 \sin^2 \alpha - b' c' (c'^2 + a'^2) \cos \alpha + 2 a'^2 b' c' \cos \beta \cos \gamma)} \right\}$$

Wir erhalten für ein constantes Volumen und ein Minimum der Oberflächenenergie

$$\frac{x}{y} = \frac{\mathfrak{P}_1 a' b' c'}{\mathfrak{P}_2 a b c}$$

mit der Bedingung

$$\frac{\mathfrak{P}_1^4 a'^2 b'^2 c'^2}{\mathfrak{P}_2^3 a^2 b^2 c^2} - \mathfrak{P}_1 > 0.$$

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Centralblatt für Mineralogie, Geologie und Paläontologie](#)

Jahr/Year: 1901

Band/Volume: [1901](#)

Autor(en)/Author(s): Hilton Harold

Artikel/Article: [Ueber die Capillaritätsconstanten der Krystallflächen. 753-759](#)