

normal zur irrationalen Drehungsaxe haben, analog den erwähnten Verhältnissen sogen. primärer Zwillinge — alle diese Thatsachen ergeben, dass Gyps-, Hornblende-Zwillinge u. a. einem Specialfall von Schiebungen mit im allgemeinen irrationaler Schiebungsrichtung ähnlich sehen, dagegen Orthoklas (Zusammensetzungsfläche wesentlich die Schiebungsebene) Skolezit und Rohrzucker einen solchen von Schiebungen nach im allgemeinen irrationaler Gleitfläche.

Solche eigenthümliche Beziehungen sind zuerst von MÜGGE gelegentlich seiner grundlegenden Untersuchungen über einfache Schiebungen¹ erkannt worden.

Kettenbruchähnliche Entwicklungen zur Beurtheilung der Wahrscheinlichkeit des Auftretens bestimmter Flächenkombinationen an Krystallen.

Von **Ernst Sommerfeldt** in Tübingen.

Mit 4 Textfiguren.

Einleitung.

Die verschiedenen Formen des Grundgesetzes der geometrischen Krystallographie sind zwar in Bezug auf die Beurtheilung der Lage der Flächen innerhalb eines Krystallkomplexes vollkommen gleichwertig miteinander, nicht aber in Bezug auf die Beurtheilung der Wahrscheinlichkeit und Häufigkeit des thatsächlichen Auftretens derselben. Z. B. können Flächen, die sich mittels ziemlich hoher Indices aus vier Fundamentalflächen ableiten, mit diesen unter Umständen dennoch in relativ einfachen Zonenverbänden liegen; je nachdem man das Gesetz der einfachen rationalen Indices oder das der einfachen Zonen bevorzugt, kann man zu verschiedenen Anschauungen über die Enge des Zusammenhanges derartiger Flächen mit den Fundamentalflächen gelangen. Mehrere Vorschläge² sind bereits gemacht, um für die Innigkeit des Connexes der einzelnen Flächen präcise Formulierungen zu gewinnen, und zwar werden, um bei complicirt ableitbaren Flächen ein Mass für die »Complication« zu erlangen, weniger complicirte Flächen zwischen diese und die Fundamentalflächen geschaltet; die Anzahl der nothwendigen Schritte,

¹ Vergl. besonders N. J. 1888. I. 131, VI. Beil. Bd. 1889. 274, 1889. II. 98.

² Vgl. O. GOLDSCHMIDT: Ueber Entwicklung der Krystallformen. Zeitschr. f. Kryst., 28, 1—35, 414—451, 1897; und andere Publikation desselben Autors. Ferner E. VON FEDOROW: Beiträge zur zonalen Krystallographie. V. Complicationsgesetze und richtige Aufstellung der Krystalle. Zeitschr. f. Kryst., 35, 25—74. C. VIOLA: Ueber Ausbildung und Symmetrie der Krystalle. Zeitschr. f. Kryst., 35, 235 ff.

um durch derartige Einschaltungen nach einem methodischen Verfahren von den Fundamentalflächen zu den zu bestimmenden zu gelangen, erlaubt die »Complication« der letzteren abzuschätzen.

Aber in der Art dieses Ueberganges steckte bisher noch eine Willkür, denn solange nicht bewiesen ist, dass derselbe auf dem kürzesten Wege von den Ausgangs- zu den Endflächen überführt, ist die Beurteilung der Complication illusorisch, selbst äusserst einfache Flächen können als sehr complicirt erscheinen, wenn die Uebergangsmethode, also die Einschaltungsart unzweckmässig ist.

Nun dient das Kettenbruchverfahren bekanntlich dazu, um zwischen grobe Näherungswerthe und die präzisen Werthe von Grössen in möglichst zweckmässiger Weise Zwischenwerthe einzuschalten, es soll im folgenden gezeigt werden, dass dieses Verfahren, sobald es geometrisch interpretirt wird, in engstem Zusammenhang mit dem Grundgesetze der geometrischen Krystallographie steht und die rationellste Methode zu einem successiven Uebergang von den einfachsten Flächen eines Krystallflächencomplexes zu beliebig complicirten (resp. umgekehrt) liefert.

Bisher scheint — abgesehen von der selbstverständlichen Anwendung zur Bestimmung von Näherungswerthen für empirisch gefundene Zahlen — in der geometrischen Krystallographie das Rechnen mit Kettenbrüchen lediglich dazu vorgeschlagen worden zu sein, um die Gesammtheit der Flächen einer Zone zu ermitteln, wenn die Indices der Zone bekannt sind (vgl. LIEBISCH, *geometr. Kryst.*, p. 28, Leipzig 1881).

I. Die Indices einfacher Zonen aufgefasst als Näherungswerthe für die Indices complicirterer Zonen.

Die folgenden Betrachtungen sind zwar vollkommen dualistisch, der Einfachheit der Ausdrucksweise wegen möge jedoch jetzt nur der Krystallkantencomplex, erst später (pag. 547) der Krystallflächencomplex in Betracht gezogen werden.

Vom Coordinatennullpunkt O aus denken wir uns auf den positiven Hälften der Axen eines (asymmetrischen) Krystalles die mit einem willkürlichen Proportionalitätsfaktor behafteten Axeneinheiten a , b , c aufgetragen, die wir als die Componenten eines auf der Einheitskante befindlichen Vektors e auffassen können (vergl. Fig. 1).

Indem wir von O aus sämtliche ganzzahlige Vielfache von a , b , c auf den zugehörigen Axen auftragen und zu jedem Vektor $m a$ jeden Vektor $n b$ sowie $p c$ vektoriell addiren (wo m , n , p gleich Null oder beliebigen ganzen Zahlen sind) erhalten wir in der Gesammtheit der Kantenrichtungen, welche dem Krystallcomplex angehören, Vektoren; falls wir nur die Endpunkte derselben in Betracht ziehen, ergibt sich das zugehörige Punktgitter. Als den Repräsentanten einer durch O gehenden Krystallkante betrachten wir nun den auf ihr von O bis zu dem nächsten Gitterpunkt sich erstreckenden Vektor g , derselbe ergibt sich, wenn wir unter allen

Werthen m, n, p , welche überhaupt eine in die verlangte Richtung fallende Resultante $ma + nb + pc$ liefern, diejenigen auswählen, welche relativ prim zu einander sind.

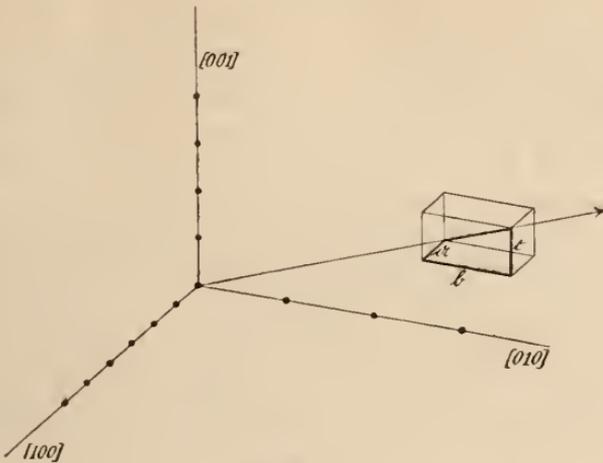


Fig. 1.

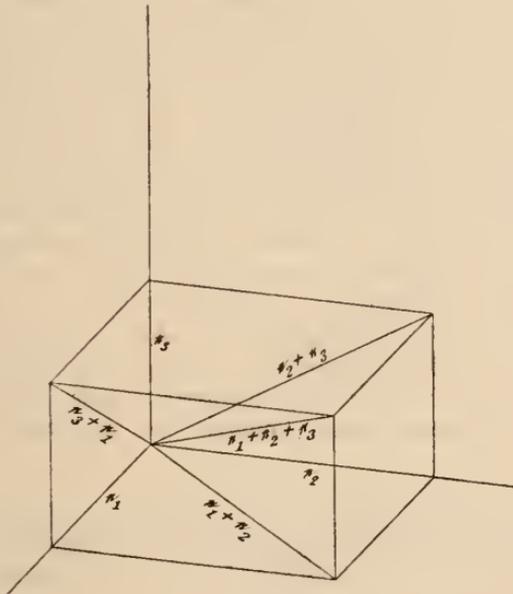


Fig. 2.

Die Indices der Zone ξ sind diesen Grössen m, n, p gleich, deren an sich willkürlicher Proportionalitätsfaktor durch die Bedingung der Abwesenheit eines gemeinschaftlichen Theilers festgelegt ist¹,

¹ Die Abwesenheit eines den drei Indices gemeinschaftlichen Theilers schliesst natürlich nicht aus, dass zwei derselben einen

Um nun Näherungswerthe für den Vektor ξ zu gewinnen, entwickeln wir $\frac{m}{p}$ und $\frac{n}{p}$ in Kettenbrüche und zwar derart, dass der 1te, 2te, 3te, . . . ite . . . Näherungswerth von $\frac{m}{p}$ bezüglich gleichen Nenner erhält mit dem 1ten, 2ten, 3ten, . . . iten . . . Näherungswerth von $\frac{n}{p}$. Indem wir jeden iten Näherungsbruch $\frac{m_i}{p_i}$ von $\frac{m}{p}$ und $\frac{n_i}{p_i}$ von $\frac{n}{p}$ zusammenfassen und in Zähler und Nenner zerspalten, gewinnen wir »Näherungstripel« m_i, n_i, p_i ; und zwar ergeben sich diese Zahlen bei dem sogleich näher zu beschreibenden Verfahren nothwendigerweise als relativ prim. Die Grössen m_i, n_i, p_i fassen wir nun als Indices einer Näherungszone von ξ auf und bilden die vektorielle¹ Summe $m_i a + n_i b + p_i c = \xi_i$. Je grösser i angenommen, d. h. je später die Kettenbrüche abgebrochen werden, um so mehr convergirt sowohl die Richtung von ξ_i als auch die Grösse dieses Vektors nach dem Werth ξ ; letzterer wird exakt erreicht bei dem grössten Werth von i , d. h. bei dem demjenigen i mit welchem der Kettenbruch von selbst abbricht. Die folgenden Betrachtungen gelten ohne weiteres auch für den Fall, dass m, n, p in irrationalem Verhältniss zu einander stehen, dann brechen natürlich die zugehörigen Kettenbrüche überhaupt nicht von selbst ab, sondern es existiren unendlich viele Näherungstripel und Näherungszonen. Da dieser Fall indessen nicht für die bei der Bildung von Krystallindividuen auftretenden Kanten, sondern nur für physikalisch ausgezeichnete Richtungen (z. B. optische Axen u. a.) in Betracht kommt, soll derselbe hier nicht weiter erwähnt werden. Im Folgenden mögen m, n, p sämtlich als positiv und $m > n > p$ angenommen werden; diese Bedingungen beeinträchtigen die Allgemeinheit nicht, da aus dem Folgenden hervorgehen wird, dass in den diesen Bedingungen sich nicht fügenden Bereichen die Kettenbruchentwickelungen nur durch Vorzeichenänderung oder Permutation der m_i, n_i, p_i sich unterscheiden können von den hier direkt behandelten.

Um die Kettenbruchentwickelung von der verlangten Form zu erhalten, setzen wir nacheinander folgende Gleichungspaare an:

Theiler gemeinsam haben; z. B. ist 15, 6, 2 ein Zahlentripel, das als relativ prim zu bezeichnen wäre.

¹ Vektoren sind in dieser Abhandlung durch deutsche Buchstaben; vektorielle Summationen, die also gemäss der Parallelogrammconstruction für die Resultierende mehrerer Kräfte erfolgen, durch das einfache Summenzeichen charakterisirt. (Fig. 2 wird diese Schreibweise verdeutlichen.)

1. Paar.

2. Paar.

3. Paar.

$$\varphi = \frac{m}{p} = a_0 + \frac{\chi_1}{\varphi_1}, \quad \varphi_1 = a_1 + \frac{\chi_2}{\varphi_2}, \quad \varphi_2 = a_2 + \frac{\chi_3}{\varphi_3} \text{ u. s. w.}$$

$$\chi = \frac{n}{p} = b_0 + \frac{1}{\varphi_1}, \quad \chi_1 = b_1 + \frac{1}{\varphi_2}, \quad \chi_2 = b_2 + \frac{1}{\varphi_3} \text{ u. s. w.}$$

und zwar bedeuten hier $a_0, a_1, a_2 \dots$ die nächst kleineren ganzen Zahlen im Vergleich zu den Brüchen $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots$; analog b_0, b_1, b_2, \dots die nächst kleineren ganzen Zahlen im Vergleich zu den Brüchen $\chi, \chi_1, \chi_2, \dots$. In der Zahlenreihe der φ_i und ebenso der χ_i sind vor der Aufstellung obiger Gleichungspaare zwar nur die Anfangsglieder φ und χ bekannt, es liefert aber allgemein das $i-1$ te Gleichungspaar sowohl φ_i (als den — nicht nothwendig ganzzahligen Nenner des bei der Absonderung von b_{i-1} bleibenden Restes, falls dem Zähler der Wert 1 verliehen wird) als auch χ_i (als den nicht nothwendig ganzzahligen Zähler des bei der Absonderung von a_{i-1} bleibenden Restes, falls dem Nenner der Wert φ_i verliehen wird).

Kettenbruchähnliche Terme ergeben sich aus diesen Gleichungen sofort, wenn die Grössen φ_i und χ_i ($i > 0$) successive eliminiert werden, alsdann folgt nämlich:

$$\varphi = a_0 + b_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{b_3 + \dots}{a_3 + \dots}}$$

$$= a_1 + b_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}$$

$$= a_2 + \frac{b_3 + \dots}{a_3 + \dots}$$

$$\chi = b_0 + \frac{1}{a_1 + b_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$$

$$= a_2 + \frac{b_3 + \dots}{a_3 + \dots}$$

Die Grössen a_i, b_i bezeichnen wir in Analogie mit gewöhnlichen Kettenbrüchen als »Theilnenner«. Man erhält Näherungswerthe Φ_i und X_i für φ resp. χ , wenn man alle diejenigen Grössen a_k und b_k vernachlässigt, deren Index k grösser als i ist, d. h. wenn man in obigen Formeln alles das, was hinter derjenigen Vertkale steht, welche die Grössen a_i und b_i verbindet, vernachlässigt; werden die Kettenbrüche in gewöhnliche Brüche verwandelt, so nehmen die Näherungswerthe die Form an:

$$\Phi_i = \frac{m_i}{p_i} \text{ und } X_i = \frac{n_i}{p_i}$$

Wo m, n, p ganze Zahlen bedeuten, die relativ prim sind. Vom rein analytischen Standpunkt aus ist die Theorie derartiger mehrfacher

Kettenbrüche bereits von verschiedenen Forschern untersucht worden¹.

Als Beispiel fragen wir, welche von den einfacheren Zonen derjenigen mit den Indices 121:72:61 besonders nahe kommen. Unsere Kettenbrüche lauten in diesem Fall

$$\chi = 1 + \frac{1}{5 + 1 + \frac{1}{5}} = 2 + \frac{1}{5}$$

$$\varphi = 1 + 5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5}} = 5 + 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5}}$$

und die zugehörigen Gleichungspaare:

$$\varphi = \frac{121}{61} = 1 + \frac{60:11}{61:11}, \varphi_1 = \frac{61}{11} = 5 + \frac{6:5}{11:5}, \varphi_2 = \frac{11}{5} = 2 + \frac{1}{5}$$

$$\chi = \frac{72}{61} = 1 + \frac{1}{61:11}, \chi_1 = \frac{60}{11} = 5 + \frac{1}{11:5}, \chi_2 = \frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}$$

Demnach ergeben sich folgende Näherungswerthe $\left(\frac{m}{p}\right)_i$ und $\left(\frac{n}{p}\right)_i$ für die gesuchte Zone:

$$\left(\frac{m}{p}\right)_1 = \frac{1}{1}, \left(\frac{n}{p}\right)_1 = \frac{1}{1}$$

$$\left(\frac{m}{p}\right)_2 = 1 + \frac{5}{5} = \frac{10}{5}, \left(\frac{n}{p}\right)_2 = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$$

$$\left(\frac{m}{p}\right)_3 = 1 + \frac{5 + \frac{1}{2}}{5 + \frac{1}{2}} = \frac{22}{11}, \left(\frac{n}{p}\right)_3 = 1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2}} = \frac{13}{11}$$

während $\left(\frac{m}{p}\right)_4 = \frac{m}{p} = \frac{121}{61}$, $\left(\frac{n}{p}\right)_4 = \frac{n}{p} = \frac{72}{61}$ wird.

¹ C. G. J. JACOBI: Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden abgeleitet wird. (BORCHARDT's Journ. f. reine u. angew. Math. **60**, p. 29—64, und Ges. Werke, **6**, p. 385—426.) Ferner E. FÜRSTENAU: Ueber Kettenbrüche höherer Ordnung. 30 pag. Wiesbaden 1874 (Programmabh. d. dort. Realgymnasiums). S. GÜNTHER: Ueber Kettenbrüche höherer Ordnung. Archiv d. Math. und Physik, **57**, 37—44, 1875. (Recension und Commentar zu FÜRSTENAU's Abhandl.)

Es ergibt sich also die Aufeinanderfolge der Zonen mit den Indices

$$\begin{aligned} 1 &: 1 : 1 \text{ (1. Annäherung)} \\ 10 &: 6 : 5 \text{ (2. „)} \\ 22 &: 13 : 11 \text{ (3. „)} \\ 121 &: 72 : 61 \text{ (Endwerth)} \end{aligned}$$

II. Der Uebergang von niedrigeren zu höheren Näherungswerthen und die Auffassung desselben als Transformation der Axenelemente.

Eine allgemeinste Transformation der Axenelemente führt die Vektoren a, b, c , deren Richtung die Krystallaxen, deren Länge die Richtung der Einheitskante angiebt, über in die vektoriellen Summen

$$\begin{aligned} \lambda a + \mu b + \nu c \\ \lambda' a + \mu' b + \nu' c \quad * \\ \lambda'' a + \mu'' b + \nu'' c \end{aligned}$$

wo λ, μ, ν beliebige rationelle Zahlen sind. Diese Transformation lässt sich in zwei Schritten derart ausführen, dass beim ersten Schritt sich nicht die Richtung der Krystallaxen a, b, c ändert, sondern nur die Abstände der ganzzahligen Punkte auf ihnen in rationale Multipla ihrer früheren Werthe übergeführt werden; während beim zweiten Schritt umgekehrt die Richtung der Krystallaxen sich ändert, aber die Reihe der ganzzahligen Punkte in den Richtungen von a, b, c (und daher auch in der Richtung einer beliebigen Rationalkante des Krystallcomplexes) keine Aenderung erfährt¹. Der erste Schritt bewirkt — auf das zugehörige Rauggitter bezogen — keinerlei Aenderungen der Richtungen der Coordinatenachsen, wohl aber eine Vermehrung resp. Verminderung der Gitterpunkte, derselbe ist dadurch charakterisirt, dass in das Schema * für die 9 Grössen

$$\begin{array}{ccc} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{array}$$

die in dem Schema

$$\begin{array}{ccc} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu' & 0 \\ 0 & 0 & \nu'' \end{array}$$

an homologer Stelle stehenden speciellen Werthe einzusetzen sind; der zweite Schritt bewirkt sicher eine Aenderung der Richtung der Coordinatenachsen, aber keinerlei Aenderung in der Zahl oder Lage der Gitterpunkte, er führt also das Punktgitter in sich über und ist an die Bedingung geknüpft:

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix} = 1$$

¹ Vergl.: E. SOMMERFELDT: Bemerkungen zur Volumtheorie von Krystallen (Centralbl. f. Min. etc. 1902, 633—637.).

Es ist sofort klar, dass unsere geometrische Deutung der zweifachen Kettenbrüche höchstens auf Beziehungen zu der letzteren Art von Transformationen der Axenelemente führen kann, in der That findet aber anderseits die letzte Gleichung ihr vollkommenes Analogon in dem Determinantensatz der Kettenbrüche. Für gewöhnliche Kettenbrüche besagt derselbe bekanntlich, dass die aus zwei aufeinander folgenden Näherungszählern und Näherungsnennern gebildete Determinante der positiven oder negativen Einheit gleich ist; auf das ternäre Gebiet übertragen lautet derselbe

$$\begin{vmatrix} m_{i+1} & m_i & m_{i-1} \\ n_{i+1} & n_i & n_{i-1} \\ p_{i+1} & p_i & p_{i-1} \end{vmatrix} = \pm 1 \quad **$$

wo die Grössen p die gemeinsamen Näherungsnenner m und n die Näherungszähler der beiden zusammengehörigen Brüche bedeuten und der Index i auf den i -ten Näherungswert hinweist.

Wird — wie wir stets voraussetzen werden — das von den Vektoren a, b, c gebildete Parallelepipid der Raumeinheit gleichgesetzt, so besagt die Gleichung ** dass auch das durch beliebige drei aufeinander folgende Näherungsvektoren bestimmte Parallelepipid $= 1$ ist, folglich können wir insbesondere jeden zweifachen Kettenbruch als eine Operation auffassen, welche das ursprüngliche Elementarstreckentripel a, b, c des gegebenen Punktgitters überführt in das durch den Endvektor, den letzten und vorletzten Näherungsvektor bestimmte Elementarstreckentripel des nämlichen Punktgitters. Hierbei setzt diese Operation aus sovielen einzelnen Schritten sich zusammen, als Tripel consecutiver Näherungsvektoren sich angeben lassen. Die zweifachen Kettenbrüche gestatten also, kurz gesagt, die angeführten Transformationen der Axenelemente durch eine Zahl von besonders einfachen Schritten auszuführen. Es handelt sich jetzt nur noch um die geometrische und krystallographische Bedeutung jedes einzelnen dieser Schritte.

III. Beziehungen zum Zonengesetz.

Es verweisen uns die soeben angeführten Theiloperationen auf das Zonengesetz; welches ja ebenfalls eine schrittweise Bestimmung der Gesamtheit der Elemente eines krystallographischen Complexes aus den Grundelementen ermöglicht. Ein beliebiges Element — Zone oder Ebene — P , welches zu vier anderen Zonen resp. Ebenen in der Beziehung steht, dass P entweder die Indices 110 oder 101 oder 011 erhält, falls jene vier anderen als Grundelemente (100, 010, 001, 111) gewählt werden¹, kann durch eine

¹ Wenn es überhaupt möglich ist die Fläche P durch eines der Indicestripel 110, 101, 011 aus den vier anderen Flächen abzuleiten, so kann diese Ableitung auch durch jedes dieser drei Indicestripel erfolgen, indem man nur die Fundamentalfächen unter sich zu vertauschen braucht; dasselbe gilt natürlich auch für Kanten.

einmalige Anwendung der Regel des doppelten Zonenverbandes aus jenen vier erzeugt gedacht werden; umgekehrt können wir die einmalige Anwendung dieser Regel als erzeugende Operation auffassen und das Problem stellen den Uebergang zu einem beliebig complicirten Element hkl derart zu vollziehen, dass diese Operation eine möglichst kleine Anzahl von Malen wiederholt wird.

Auf das Raumgitter übertragen bedeutet unsere Operation, die wir zunächst nur für die Zonen, nicht für die Flächen weiter verfolgen, den Uebergang von den Kanten des ursprünglichen Elementarparallelepipeds zu den Diagonalen der Flächen oder »Querlinien« derselben (vgl. Fig. 2).

Diese drei Querlinien lassen sich dadurch erzeugen, dass wir zu je zweien der ursprünglichen Axenvektoren die Resultirende (gemäss der Parallelogrammconstruction für Kräfte) construiren; unsere, die Anwendung des Zonengesetzes vermittelnden Operationen bedeuten also nichts anderes als geometrische Summirungen je zweier der drei Axenvektoren. Diese Operationen bilden das dualistische Gegenstück zu den von VIOLA als erste geometrische Ableitungen bezeichneten¹. Es wird nun auf den folgenden Seiten bewiesen werden, dass die Uebergänge von einem beliebigen Näherungswerth der zweifachen Kettenbrüche zu dem nächstfolgenden sich durch die gleichen Operationen veranschaulichen lassen.

Diesem Beweise schicken wir einige allgemeinere Sätze voraus: Zu der bekannten Recursionsformel, welche bei gewöhnlichen Kettenbrüchen das i te Näherungspaar m_i, n_i aus dem $i-1$ ten (m_{i-1}, n_{i-1} und $i-2$ ten (m_{i-2}, n_{i-2}) zu berechnen gestattet, existiren vollkommen analoge bei den Kettenbrüchen höherer Ordnung. Diese Recursionsformel, welche für einen gewöhnlichen Kettenbruch, dessen i ter Theilnenner a_i sein möge, die Form annimmt:

$$\begin{cases} m_i = a_i m_{i-1} + m_{i-2} \\ n_i = a_i n_{i-1} + n_{i-2} \end{cases}$$

verallgemeinert sich auf Tripel von Näherungswerthen (m_i, n_i, p_i) folgendermassen:

$$\begin{aligned} m_i &= a_i m_{i-1} + b_i m_{i-2} + m_{i-3} \\ n_i &= a_i n_{i-1} + b_i n_{i-2} + n_{i-3} \\ p_i &= a_i p_{i-1} + b_i p_{i-2} + p_{i-3} \end{aligned}$$

Hier bedeuten a_i, b_i analog bezeichneten Grössen der Gleichungspaare auf pag. 541, welche in die dort angeschriebenen kettenbruchähnlichen Ausdrücke als Theilnenner eingehen.

Unsere Formel besagt nun, dass der i te Näherungsvektor aus dem $i-3$ ten dadurch entsteht, dass wir zu letzterem geeignete Vielfache des $i-2$ ten und $i-1$ ten Näherungsvektors geometrisch addiren, und zwar sind diese Vervielfachungszahlen gleich den i ten

¹ C. VIOLA: Ueber geometrische Ableitung in der Krystallographie. Zeitschr. f. Kryst. 26, 113—129. 1896.

Theilnennern. Jede einmalige dieser Additionen entspricht nun einer einmaligen Anwendung der Zonenregel; unser Satz gewährt also die Möglichkeit, durch mehrmalige Anwendung dieser Regel den i ten Näherungsvektor aus den drei vorhergehenden zu erzeugen. Um diese Recursionsformel anwenden zu können, brauchen nur die drei ersten Näherungsvektoren des ursprünglichen Ebenengitters sowie die Theilnenner als gegeben betrachtet zu werden.

Zur Erläuterung dieser Ueberlegung kehren wir zu dem früher behandelten Beispiel 121:72:61 zurück. Die Theilnenner, welche wir als Vervielfachungszahlen zu benutzen haben, lassen sich in dem kettenbruchähnlichen Schema am einfachsten erkennen, wenn wir dasselbe in der Form schreiben:

$$121 = \underline{1}.61 + 60, 61 = \underline{5}.11 + 6, 11 = \underline{2}.5 + 1, 5 = \underline{5}.1 + 0^*$$

$$72 = \underline{1}.61 + 11, 60 = \underline{5}.11 + 5, 6 = \underline{1}.5 + 1, 1 = \underline{1}.1 + 0$$

Die Theilnenner sind die unterstrichenen Zahlen dieses Gleichungssystems, dieselben geben dem Vorigen zufolge an, wie man durch zonale Ableitung von den ursprünglichen Fundamentelementen zu denjenigen übergehen kann, bei welchen

[121.72.61] der Endpunkt des ersten Axenvektors

[22.13.11] der Endpunkt des zweiten Axenvektors

[10. 6. 5] der Endpunkt des dritten Axenvektors

bezogen auf das ursprüngliche Coordinatensystem ist.

Und zwar entsprechen die verschiedenen Aenderungen der Fundamentelemente dem folgenden Schema:

Erstes Fundamentalsystem:

[100] Endpunkt des ersten Axenvektors

[010] „ „ zweiten „

[001] „ „ dritten „

Zweites Fundamentalsystem:

[111] Endpunkt des ersten Axenvektors

[100] „ „ zweiten „

[010] „ „ dritten „

[001] ist ersetzt durch $1 \cdot [100] + 1 \cdot [001] + [001]$ (vgl. das Schema *)

Drittes Fundamentalsystem:

[10.6.5] Endpunkt des ersten Axenvektors

[1.1.1] „ „ zweiten „

[1.0.0] „ „ dritten „

[010] ist ersetzt durch $5 \cdot [111] + 5 \cdot [100] + [010]$.

Viertes Fundamentalsystem:

[22.13.11] Endpunkt des ersten Axenvektors

[10. 6. 5] „ „ zweiten „

[1. 1. 1] „ „ dritten „

[100] ist ersetzt durch $2 \cdot [10.6.5] + 1 \cdot [111] + [100]$.

Fünftes Fundamentalsystem:

[121 . 72 . 61] Endpunkt des ersten Axenvektors

[22 . 13 . 11] „ „ zweiten „

[10 . 6 . 5] „ „ dritten „

[111] ist ersetzt durch $5 \cdot [22 . 13 . 11] + 1 \cdot [10 . 6 . 5] + [111]$.

Man kann sagen, es sei das zweite Fundamentalsystem aus dem ersten durch zweimalige Anwendung der Zonenregel, das dritte aus dem zweiten durch 10malige, das vierte aus dem dritten durch 3malige und das fünfte aus dem vierten durch 6malige Anwendung derselben Regel entstanden; insgesamt ist also eine 21malige Anwendung der Regel des doppelten Zonenverbandes erforderlich, um von dem ursprünglichen zu dem gesuchten System auf dem kürzesten Wege zu gelangen.

An diesem Beispiel kann man natürlich noch den Determinantensatz für Kettenbrüche höherer Ordnung verificiren, in der That ist z. B.

$$\begin{vmatrix} 121 & 72 & 61 \\ 22 & 13 & 11 \\ 10 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

Es wurde hier ein Beispiel mit relativ recht hohen Zahlen gewählt, um zu zeigen, dass auch bei den höchsten Indiceswerthen, die für die Krystallographie in Betracht kommen, unsere Methode eine sehr einfache ist, bei kleineren Zahlen gestaltet sich dieselbe natürlich noch wesentlich übersichtlicher.

III. Dualistisches.

Die auf den vorigen Seiten angestellten Ueberlegungen lassen sich von dem Kantencomplex eines Krystalles auf den Flächencomplex desselben übertragen, sobald zu den Grössen a, b, c die dualistischen Gegenstücke eingeführt werden. Statt mit den Längenmassen $a : b : c$ operiren wir jetzt mit Flächenmassen $\mathfrak{A} : \mathfrak{B} : \mathfrak{C}$, die wir dadurch gewinnen, dass wir eine beliebige parallel der Einheitsfläche gelegene ebene Figur auf die Ebene bc durch Parallelen zu a , analog auf die Ebenen ca und ab durch Parallelen zu b resp. c projiciren.

Da durch diese Bestimmung nur über die relativen Inhalte, nicht über die Gestalt der äusseren Contour der »Flächencomponenten« $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ verfügt ist, können wir dieselben als Parallelogramme annehmen, welche von O ausgehen und die Winkel $b \wedge c$ resp. $c \wedge a$ resp. $a \wedge b$ besitzen. Nun können wir aber als die zu projicirende Figur der Einheitsebene das Dreieck ABC (vgl. Fig. 3) wählen, das die Endpunkte der drei Axeneinheiten zu Ecken besitzt.

Da die in den Axenebenen gelegenen Componenten dieser Figur nichts anderes als die Dreiecke OBC, OCA, OAB , d. h. die halben Flächen des Elementarparallelepeds sind, so liefert das

Elementarparallelepiped durch seine in den Axenebenen gelegenen Flächen die relativen Flächenmasse $\mathfrak{A}:\mathfrak{B}:\mathfrak{C}$.

Die hierdurch gegebene Koordinatenbestimmung führt nun unmittelbar zu den MILLER'schen Flächenindices¹; um nämlich dieselben für eine beliebige Fläche P (die in dem von den drei positiven Halbaxen begrenzten Oktanten liegen möge) zu bestimmen, wählen wir unter der Schaar der ihr gleichgerichteten Gitterebenen die dem Coordinatennullpunkt am nächsten liegende aus, welche

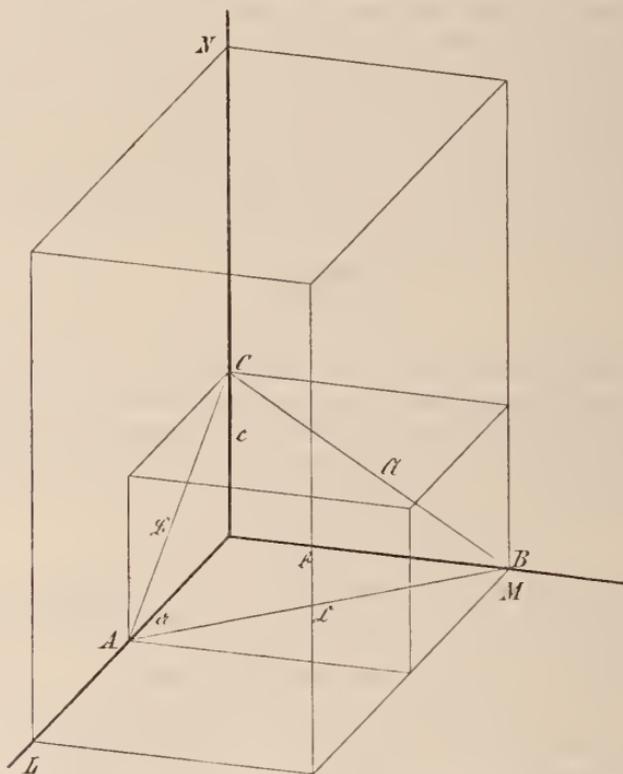


Fig. 3.

die Axen in L, M, N (Fig. 3, in welcher B und M als zusammenfallend angenommen sind, was aber nicht nothwendig ist) schneiden möge, vervollständigen die drei Parallelogramme, deren Hälften die Drei-

¹ Vgl. z. B. VIOLA, Neues Jahrb. f. Min. Beil. Bd. X, pag. 170, 1896. Zuerst wurde die im Text behandelte Definition der Indices von H. GRASSMANN angeführt, vgl. »Die lineale Ausdehnungslehre«, Leipzig 1844, (abgedruckt in GRASSMANN's ges. Werken I, 1 pag. 261 der Orig.-Ausg.); mit Hilfe dieser Definition wurden dort die Formeln für die allgemeinste Transformation der Indices eines triklinen Krystalles aufgestellt, die weit später, offenbar unabhängig von ersterem, Th. LIEBISCH (Geom. Kryst. 1881, pag. 56) angab.

ecke OMN , ONL , OLM sind und messen dieselben in den ihnen gleichgerichteten Flächenmaassen \mathfrak{A} resp. \mathfrak{B} resp. \mathfrak{C} aus. So gewinnen wir die Flächenindices als ganze Zahlen, die relativ prim sind und eine den Kantenindices vollkommen dualistisch entsprechende Bedeutung besitzen. Sobald wir eine vom Nullpunkt weiter entfernt liegende Parallelebene des Gitters wählen, besitzen die auch alsdann ganzzahligen Indices einen gemeinschaftlichen Theiler, auch dieses entspricht dualistisch dem Umstande, dass die Indices einer Kante einen gemeinschaftlichen Theiler besitzen, wenn die Componenten einer in ihr gelegenen Strecke, welche ausser dem Anfangs- und Endpunkt noch weitere Gitterpunkte in sich enthält, durch die parallelen Längenmaasse dividirt und diese Quotienten als Indices aufgefasst werden.

Die sechs Grössen a , b , c , \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} stellen die fünf Constanten eines krystallographischen Complexes gewissermassen in homogener Form dar, da dieselben einen willkürlichen Proportionalitätsfaktor enthalten und in leicht ersichtlicher Weise die Axenelemente eindeutig bestimmen. Ueber jenen Proportionalitätsfaktor verfügt man am zweckmässigsten in der Weise, dass man den Inhalt des Elementarparallelepipedes einer absoluten Zahl z. B. der Einheit gleichsetzt und dadurch die sechs Grössen a , b , c , \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} als die Kanten resp. Flächen den Elementarparallelepipedes ihrem Absolutwerth nach festlegt.

IV. Specialisirungen für den Fall des binären Gebietes.

Die Betrachtungen vereinfachen sich ausserordentlich, wenn nicht wie bisher drei sondern nur zwei Vektorcomponenten nebst deren Näherungszahlen in Betracht kommen, wenn also statt des räumlichen Problemes ein ebenes vorliegt. Alsdann verwandeln sich die oben benutzten kettenbruchähnlichen Ausdrücke in gewöhnliche Kettenbrüche und als die erzeugenden Operationen, auf welche das Grundgesetz der geometrischen Krystallographie hinweist (welches wir am einfachsten in der Form des Gesetzes der rationalen Doppelverhältnisse voraussetzen) treten jetzt nur zwei auf, nämlich Schiebungen längs des jeweiligen ersten und zweiten Axenvektors. Vom rein mathematischen Standpunkt aus ist die Anwendbarkeit der Kettenbruchmethode auf die Transformationen eines ebenen Gitters bereits ausführlich von F. KLEIN dargelegt worden¹, jedoch werden die für den Fall eines räumlichen Gitters nothwendig werdenden Verallgemeinerungen sowie die Beziehungen zur geometrischen Krystallographie dort nicht behandelt.

Offenbar genügt die Beschränkung auf eine Ebene in denjenigen Fällen, in denen es sich darum handelt nicht die sämtlichen Elemente eines krystallographischen Complexes in Beziehung zu einander zu setzen, sondern nur die Flächen einer Zone oder die

¹ F. KLEIN: Vorlesungen über Zahlentheorie. Göttingen 1896/97. I. pag. 8₂ ff.

Kanten einer Fläche des Complexes. Indessen ist bisweilen auch in weniger speciellen Fällen diese Vereinfachung möglich, denn man kann unter Anknüpfung an die QUENSTEDTSche Linearprojection die Punkte resp. Geraden eines ebenen Gitters den Kanten resp. Flächen eines krystallographischen Complexes entsprechen lassen.

Zu diesem Zweck braucht man nur eine derjenigen Flächen, welche parallel zu zwei sich kreuzenden Kanten des Fundamentaltetraeders läuft, als Projektionsebene zu wählen und alle übrigen Flächen des Complexes in das Projektionscentrum zu verschieben. Alsdann entspricht den vier Fundamentalfächen ein Parallelogramm in der Projektionsebene; wird dieses als Elementarparallelogramm eines ebenen Gitters aufgefasst, so entsprechen allen ganzzahligen Punkten resp. ganzzahligen Kanten derselben Rationalkanten resp. -flächen des krystallographischen Complexes. Andererseits genügen diese ganzzahligen Punkte resp. Kanten des Gitters zwar nicht,

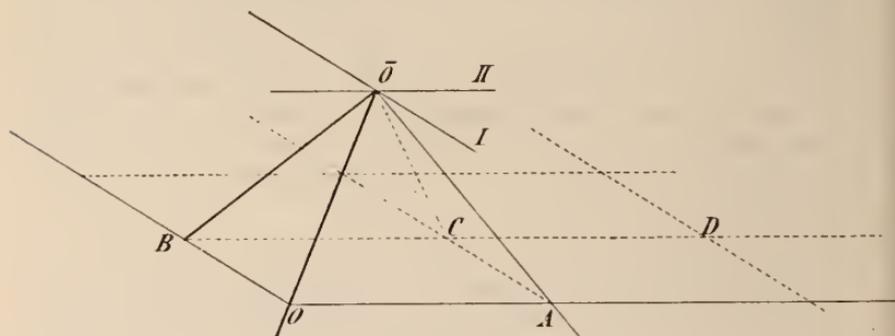


Fig. 4.

um sämtliche Kanten resp. Flächen des Complexes darzustellen, aber dadurch, dass die Projektionsebene nach einander dem ersten, zweiten und dritten Paar sich kreuzender Kanten des Fundamentaltetraeders parallel gelegt wird, kann die Zahl der zur Abbildung gelangenden Flächen und Zonen erhöht werden.

Wird in einem so gewonnenen Punktgitter die eine Coordinatenaxe ersetzt durch diejenige Diagonale des ursprünglichen Elementarparallelogramms, welche durch den Coordinatennullpunkt geht, während die andere Coordinatenaxe beibehalten wird, so braucht man, um die neuen Flächen zu gewinnen, für jede derselben die Regel des doppelten Zonenverbandes nicht öfter als einmal auch die vorangehenden Elemente anzuwenden. Zum Beweise construiren wir (vgl. Fig. 4) die durch den Punkt \bar{O} gehenden Flächen des ursprünglichen Fundamentaltetraeders, legen die Projektionsebene $OABC$ parallel den Schnittkanten I und II je zweier dieser Flächen, verbinden O mit C und ziehen durch A eine Parallele zu OC , welche die Verlängerung von BC in D treffen möge; $OACD$ fassen wir als das neue Elementarparallelogramm auf. Der neuen Coordinatenaxe

OC entspricht eine Ebene, die durch Anwendung der Regel des doppelten Zonenverbandes auf die Kanten $\bar{O}O$ und $\bar{O}C$ sich unmittelbar ergibt; der Seite AD entspricht eine Fläche, die mittels derselben Regel aus der Kante $\bar{O}A$ und der (in der Fig. nicht gezeichneten) Schnittkante der Ebene I II mit der soeben gewonnenen Fläche $\bar{O}OC$ erhalten wird; die beiden anderen Seiten des neuen Elementarparallelogramms entsprechen direkt Flächen des ursprünglichen Tetraëders.

Damit ist bewiesen, dass statt der früheren drei Operationen jetzt deren zwei genügen, um die mit höheren Indices behafteten Flächen des Complexes, welche den Geraden des Gitters $OABC\dots$ entsprechen, aus den Fundamentelementen schrittweise abzuleiten. Indessen liefert diese Methode keineswegs nothwendigerweise stets den kürzesten Weg, auf dem diese Ableitung sich vollziehen lässt; um das einzusehen, genügt die Bemerkung, dass auf der unendlich fernen Geraden der Projektionsebene $OABC$ solche Punkte — und zwar in unbegrenzter Menge — sich befinden, welche rationalen Zonen des Complexes entsprechen, und dass daher diese Flächen sich mittels der letztgenannten Methode nur durch einen sich unbegrenzt fortsetzenden Kettenbruch ableiten lassen.

Für die Behandlung der allgemeinsten Fälle ist daher die zuerst beschriebene Anwendung der Kettenbruchmethode auf das Raumgitter bei weitem vorzuziehen der Einführung einer Linearprojektion; da es indessen anschaulicher ist, die successiven Uebergänge in einer Ebene als im Raume sich vollziehen zu sehen, ist bisweilen die Uebertragung der zugehörigen Operationen auf eine solche Projektion für unsere Zwecke nicht überflüssig.

Die früheren Ausführungen (vergl. pag. 543) über die Transformation der Indices specialisiren sich jetzt auf das Problem ein ebenes Punktgitter auf mehrfache Weise als Parallelengitter aufzufassen und die Uebergänge durch die angegebenen Operationen zu vermitteln. Bezeichnet man mit $e_1, e_2; e_1', e_2'$ die vom Coordinatennullpunkt bis zu den Punkten $+1$ auf den Coordinatenachsen sich erstreckenden Vektoren und beziehen sich e_1, e_2 auf das alte, e_1', e_2' auf das neue Coordinatensystem, fallen ferner die Vektoren

$$\begin{array}{l} \alpha e_1 + \gamma e_2 \\ \beta e_1 + \delta e_2 \end{array}$$

des alten Systems (wo die Summen vektoriell zu nehmen sind und

$$\left| \begin{array}{cc} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{array} \right| = 1$$

sein muss), bezüglich zusammen mit den Vektoren

$$\begin{array}{l} 1 e_1' + 0 e_2' \\ 0 e_1' + 1 e_2' \end{array}$$

so sind zwei Fälle zu unterscheiden (vergl. KLEIN, l. c. pag. 31):

Wenn $\alpha < \beta$ entwickle man $\frac{\alpha}{\gamma}$ in einen Kettenbruch

$$u_1 + \frac{1}{u_2 + \frac{1}{u_3 + \dots}}$$

von gerader Gliederzahl, dann lässt sich die verlangte Transformation dadurch erzeugen, dass man zunächst den Vektor e_1 ersetzt durch $f_1 = e_1 + u_1 e_2$, hierauf den Vektor e_2 durch den Vektor $f_2 = e_2 + u_2 e_2$, alsdann den Vektor f_1 durch $f_1 + u_3 f_2$ etc.

Wenn $\alpha < \beta$ entwickle man $\frac{\beta}{\alpha}$ in einen analogen Kettenbruch aber mit ungerader Gliederzahl und verfähre mit demselben ebenso wie im ersten Falle.

Die einzelnen Schritte, die wir hier ebenso wie im ternären Gebiet als vektorielle Summierungen bezeichneten, kann man natürlich auch als Substitutionen auffassen. Bezeichnen wir, um diese Umformung auszuführen, die laufenden Coordinaten im ursprünglichen System mit x, y , mit x', y' hingegen die Coordinaten in dem neuen System, welches die x -Axe mit dem ursprünglichen System gemeinsam haben möge, während die y' -Axe in die Richtung der vektoriellen Summe derjenigen beiden Elementarstrecken fällt, welche auf der x - und y -Axe liegen, so wird der Zusammenhang beider Systeme durch die Substitution

$$\begin{aligned} x &= x' + y' \\ y &= y' \end{aligned}$$

ausgedrückt. Hieraus ergibt sich, dass diese und die entsprechende Substitution

$$\begin{aligned} x &= x' \\ y &= x' + y' \end{aligned}$$

vollkommen gleichbedeutend mit den beiden früher eingeführten Operationen sind.

In analoger Weise lassen sich natürlich auch die entsprechenden, im räumlichen Gitter auszuführenden einzelnen Schritte von der vektoranalytischen Ausdrucksweise befreien und durch Substitutionen ersetzen, welche bei analoger Bezeichnungsweise der Coordinatensysteme sich den vorigen auch vollkommen analog folgendermassen schreiben lassen:

$$\begin{aligned} x &= x' + y' + z' \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

respektive

$$\begin{aligned} x &= x' \\ y &= x' + y' + z' \\ z &= z' \end{aligned}$$

respektive

$$\begin{aligned} x &= x' \\ y &= y' \\ z &= x' + y' + z'. \end{aligned}$$

V. Anhang mathematischen Inhaltes.

Obgleich in den citirten Arbeiten JACOBI'S und FÜRSTENAU'S die Beweise der im Vorhergehenden benutzten rein analytischen Sätze über Kettenbrüche höherer Ordnung sich vorfinden, möge zur Erhöhung der Uebersichtlichkeit auf dieselben hier kurz eingegangen werden. Für diese Ausdrücke hatte sich die Form ergeben (vergl. pag. 541):

$$\varphi = a_0 + \frac{b_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{b_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}{a_3 + \frac{b_4 + \dots}{a_4 + \dots}}}{a_1 + \frac{b_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{b_4 + \dots}{a_4 + \dots}}}{a_2 + \frac{b_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}{a_3 + \frac{b_4 + \dots}{a_4 + \dots}}}}{\dots}, \chi = b_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{b_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{b_4 + \dots}{a_4 + \dots}}}{a_2 + \frac{b_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}{a_3 + \frac{b_4 + \dots}{a_4 + \dots}}}}$$

Die Näherungswerthe lauten:

für φ :

$$a_0, a_0 + \frac{b_1}{a_1}, a_0 + \frac{b_1 + \frac{1}{a_2}}{a_1 + \frac{b_2}{a_2}}, \dots$$

für χ :

$$b_0, b_0 + \frac{1}{a_1}, b_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2}}, \dots$$

Verwandelt man diese Ausdrücke in gewöhnliche Brüche und zerlegt die i ten Näherungswerthe in die (einander gleichen) Nenner p_i und die (von einander verschiedenen) Zähler m_i resp. n_i , so ergibt sich:

$$\begin{array}{lll} m_0 = a_0, & n_0 = b_0 & p_0 = 1 \\ m_1 = a_0 a_1 + b_1, & n_1 = b_0 a_1 + 1 & p_1 = a_1 \\ m_2 = (a_0 a_1 + b_1) a_2 + a_0 b_2, & n_2 = (b_0 a_1 + 1) a_2 + b_0 b_2 & p_2 = a_1 a_2 + b_2 \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Durch das Verfahren der reinen Induktion beweist man leicht die Recursionsformeln:

$$\begin{aligned} m_{i+1} &= a_{i+1} m_i + b_{i+1} m_{i-1} + m_{i-2} \\ n_{i+1} &= a_{i+1} n_i + b_{i+1} n_{i-1} + n_{i-2} \\ p_{i+1} &= a_{i+1} p_i + b_{i+1} p_{i-1} + p_{i-2} \end{aligned}$$

Mittelst dieser Gleichungen lässt sich die Determinantenbeziehung

$$\begin{vmatrix} m_{i+1} & m_i & m_{i-1} \\ n_{i+1} & n_i & n_{i-1} \\ p_{i+1} & p_i & p_{i-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_i & m_{i-1} & m_{i-2} \\ n_i & n_{i-1} & n_{i-2} \\ p_i & p_{i-1} & p_{i-2} \end{vmatrix}$$

folgendermassen beweisen: Zunächst ist

$$\begin{vmatrix} m_{i+1} & m_i & m_{i-1} \\ n_{i+1} & n_i & n_{i-1} \\ p_{i+1} & p_i & p_{i-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{i+1} - a_{i+1} m_i & m_i - b_{i+1} m_{i-1} & m_i & m_{i-1} \\ n_{i+1} - a_{i+1} n_i & n_i - b_{i+1} n_{i-1} & n_i & n_{i-1} \\ p_{i+1} - a_{i+1} p_i & p_i - b_{i+1} p_{i-1} & p_i & p_{i-1} \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} m_{i-2} & m_i & m_{i-1} \\ n_{i-2} & n_i & n_{i-1} \\ p_{i-2} & p_i & p_{i-1} \end{vmatrix}$$

Wird in letzterer Determinante die erste Colonne hinter die dritte gestellt, so ergibt sich die Behauptung. Nun gestatten die Recursionsformeln für m_{i+1} , n_{i+1} , p_{i+1} auf absteigende Grössen i angewandt, vor m_0 , n_0 , p_0 noch das Näherungstripel

$$m_{-1} = 1, n_{-1} = 0, p_{-1} = 0$$

zu schalten, welches offenbar den Recursionsformeln genügt. Durch wiederholte Anwendung der eben bewiesenen Determinantenbeziehung folgt:

$$\begin{vmatrix} m_{i+1} & m_i & m_{i-1} \\ n_{i+1} & n_i & n_{i-1} \\ p_{i+1} & p_i & p_{i-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_1 & m_0 & m_{-1} \\ n_1 & n_0 & n_{-1} \\ p_1 & p_0 & p_{-1} \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a_0 a_1 + b_1 & a_0 & 1 \\ b_0 a_1 + 1 & b_0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} b_1 & a_0 & 1 \\ 1 & b_0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Erwiderung

auf die »Entgegnung« des Herrn Vicente de Souza-Brandão.

Von F. Stöber.

Gent, 20. Juni 1903.

Herr V. DE SOUZA-BRANDAO ist mit meinem Referat¹ über seine Arbeit »Sur l'orientation cristallographique des sections des minéraux des roches en plaques minces« nicht zufrieden und widmet ihm eine längere »Entgegnung«², in der er meine kritischen Bemerkungen als »scharf« bezeichnet und zu beweisen versucht, dass

¹ Zeitschr. f. Kryst. u. Min. 37, 177.

² Centralblatt f. Min. etc. 1903, pag. 323.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Centralblatt für Mineralogie, Geologie und Paläontologie](#)

Jahr/Year: 1903

Band/Volume: [1903](#)

Autor(en)/Author(s): Sommerfeldt Ernst

Artikel/Article: [Kettenbruchähnliche Entwicklungen zur Beurtheilung der Wahrscheinlichkeit des Auftretens bestimmter Flächenkombinationen an Krystallen. 537-554](#)