

gleichen Index wie das Mineral herstellen und danach ihren Index mittelst der Indicatoren-Skala bestimmen.

Es empfiehlt sich die Lösungen von verschiedenen Concentrationsgraden in nicht zu kleinen gut schliessenden Pipettenflaschen mit breitem Boden aufzubewahren. In den 10 Flaschen würde man Lösungen mit den Dichten:

1,5 — 1,7 — 1,9 — 2,1 — 2,3 — 2,5 — 2,7 — 2,9 — 3,0

und schliesslich die gesättigte Lösung bereiten. Die genannten Dichten können und brauchen diese Lösungen auch nicht genau zu haben, sondern sie stellen nur die Mittelpunkte von Kreisen mit 0,1 als Radius dar, innerhalb deren sich die bezüglichen Dichten bewegen sollen. Um dessen sicher zu sein, kann man in jedes Fläschchen zwei Dichte-Indicatoren hineinwerfen, welche das fragliche specifische Gewicht sehr nahe einschliessen, so dass man, bei etwaiger Concentrationszunahme, aus dem Schwimmen des schwereren (oder aus dem Sinken des leichteren bei Concentrationsabnahme) sofort die Aenderung gewahr wird und die gewünschte Dichte wieder herstellen kann.

Lässt sich aus irgend welchem Grund die THOULET'sche Lösung nicht ganz bis zur höchsten erreichbaren Dichte concentriren, so kann man, ausnahmsweise, Jodmethylen und Benzol verwenden, um Flüssigkeiten mit den Indices von 1,71 bis 1,74 darzustellen. Darüber hinaus wird man, bei petrographischen Arbeiten, für welche diese Bestimmungsmethode besonders geeignet ist, kaum zu gehen brauchen.

**Ueber den Satz, dass Symmetrieaxen mit einer
Drehungsperiode gleich fünf oder grösser als sechs bei Krystallen
nicht auftreten können.**

Von **Ernst Sommerfeldt** in Tübingen.

Mit 1 Textfigur.

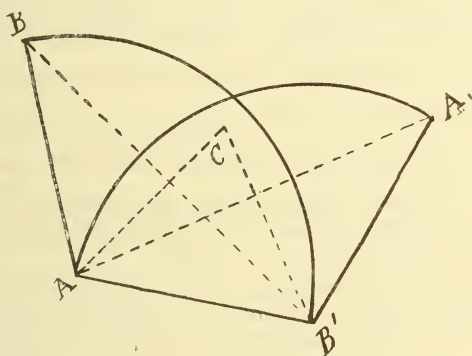
I. VIOLA's homogene Medien.

VIOLA sucht den Satz, dass Symmetrieaxen, deren Periode fünf oder mehr als sechs beträgt, krystallographisch unmöglich sind, zu beweisen, ohne das Gesetz der rationalen Indices oder auch nur dasjenige Axiom der Strukturtheorie als Grundlage zu postuliren, welches dem Abstand zweier benachbarter gleichwerthiger Punkte (resp. den Dimensionen des Elementarparallelepipeds) einen bestimmten unteren Grenzwert beilegt. Vielmehr will VIOLA zunächst die Homogenität einer krystallisirten Phase¹ als Grundeigenschaft benutzen, ferner

¹ Diese in der Thermodynamik und statistischen Mechanik ganz gebräuchliche Bezeichnung scheint mir in der Krystallographie überall da nützlich zu sein, wo von Gleichartigkeit der physikalischen Eigenschaften in parallelen Richtungen bei Krystallen gesprochen, die äussere Umgrenzung derselben aber vernachlässigt wird.

aber das Axiom, dass, falls eine bestimmte Richtung Symmetrieaxe ist und nach einander um zwei verschiedene dieser Richtung parallele Axen A und B wiederholt gedreht wird und zwar durch Winkel, welche den sovielten Theil von 360° betragen, als die Zähligkeit der Symmetrieaxe angiebt, dass alsdann auch derjenige Winkel einem aliquoten Theil von 360° gleich ist, durch welchen die den vorigen äquivalente resultirende Einzeldrehung erfolgt¹.

Es wird nun im folgenden gezeigt werden, dass dieser Beweis zwar formal richtig ist, dass aber das letztgenannte Axiom, das ich kurz »VIOLA'S-Axiom« nennen will, dem Begriffe der Homogenität eine von der gewöhnlichen ganz und gar abweichende Bedeutung verleiht. Auch wird nachgewiesen werden, dass der scheinbare Widerspruch mit den Resultaten C. JORDAN's², auf welchen HILTON³ aufmerksam macht, sich eben dadurch erklärt, dass VIOLA'S Axiom ganz ausserordentlich zahlreiche Gruppen ausschliesst, die an sich möglich sind. Nun liegt aber kein zwingender Grund vor, VIOLA'S



Axiom als bei Krystallen erfüllt anzunehmen, vielmehr wäre es denkbar, dass unter den von C. JORDAN erhaltenen Gruppen mit infinitesimalen Translationen auch diejenigen, welche in VIOLA'S homogenen Phasen unmöglich sind, für die krystallographische Systematik dereinst Bedeutung gewinnen könnten.

Für unsere weiteren Betrachtungen suchen wir jetzt dem Axiome VIOLA'S eine vereinfachte Deutung zu verleihen:

Es möge in einer zur Symmetrieachsenrichtung senkrechten Ebene A der Durchstossungspunkt der ersten Axe in ihrer Anfangsstellung sein und um diese durch den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ gedreht werden; die zweite Axe B oder vielmehr deren Durchstossungspunkt möge

¹ C. VIOLA: Zeitschr. f. Kryst. **35**. 236—239. 1902. Ibid. **36** 153—155. 1903. Centralblatt f. Min. etc. 1903. p. 389.

² C. JORDAN: Annali di matematica pura e applicata. 1869. Ser. II. **2**. 339.

³ H. HILTON: Zeitschr. f. Kryst. **36**. 151—153. 1903.

hierdurch in die Lage B' befördert werden. Nunmehr möge um B' durch den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ gedreht werden und dadurch A nach A' gelangen. Construirt man den Schnittpunkt C der auf AA' und BB' errichteten Mittelsenkrechten, so geht die resultirende Drehungsaxe durch C und liegt natürlich ebenfalls normal zur Zeichnungsebene. Nun behaupte ich, dass aus VIOLA's Axiom folgt: Die Periode einer krystallographischen Symmetriaxe ist der Eckenzahl eines regulären n -Ecks gleich, bei welchem sowohl der Centriwinkel als auch der Polygonwinkel ein aliquoter Theil von 360° ist.

Wenn nämlich $\sphericalangle BAB' = \frac{2\pi}{n}$ (wo n eine ganze Zahl ist) so folgt aus der Gleichschenkligkeit des Dreiecks ACB' dass Winkel $ACB' = 2R - \frac{2\pi}{n}$. Der doppelte Winkel (nämlich $\sphericalangle ACA'$ d. h. der resultirende Drehungswinkel um C) soll nun dem Axiome VIOLA's zufolge ein aliquoter Theil von 360° sein, folglich gilt dasselbe für den Winkel $2R - \frac{2\pi}{n}$. Nun kann letztere Grösse als der von zwei benachbarten Seiten eines regulären n -Ecks eingeschlossene Winkel betrachtet werden, da sich für einen solchen ebenfalls der Werth $2R - \frac{2\pi}{n}$ ergibt. Der auf den Polygonwinkel sich beziehende Theil unserer Behauptung ist damit bewiesen, der auf den Centriwinkel bezügliche aber ohne weiteres evident.

Es ist aber die Forderung, dass in ebenen regulären n -Ecken der Centriwinkel und auch der Polygonwinkel aliquote Theile von 360° sind, als die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Möglichkeit zu betrachten, die Ebene lückenlos mittels regulärer und einander congruenter Vielecke auszufüllen. Und damit sind wir zu dem sehr anschaulichen Resultat gelangt, dass alle diejenigen Symmetriaxen in VIOLA's homogenen Phasen unmöglich sind, deren Symmetriefiguren durch Aneinanderlegen nicht die Ebene lückenlos zu erfüllen gestatten. Es ist aber ein bekanntes Resultat, dass eine Ausfüllung der Ebene durch solche reguläre congruente Polygone, deren Eckenzahl gleich fünf oder grösser als sechs ist, unmöglich wird.

Umgekehrt aber können wir auch sagen, durch VIOLA's Axiom werde nur ein kleiner Theil der möglichen Arten von Homogenität beherrscht; denn beschränken wir uns auf das Vorhandensein von n -zähligen Symmetriaxen in nur einer Richtung, so haben wir von einer dieser Richtung parallelen Schaar von diskreten Linien auszugehen, die solche Abstände von einander haben, dass sie in jeder auf ihnen senkrechten Ebene ein regelmässiges Punktsystem bestimmen; jeden solcher Punkte haben wir alsdann seinem »natürlichen Fundamentalbereich«, d. h. einem den Symmetriegrad

n wiedergebenden regulären n-Eck zuzurechnen (wobei diese congruenten n-Ecken die Ebene lückenlos überdecken), schliesslich haben wir die Grösse dieser n-Ecke nach Null convergirend zu denken und so die Translationen infinitesimal werden zu lassen. Indessen ist es zwar sehr anschaulich, aber keineswegs nothwendig, das Homogene in der eben beschriebenen Weise als Grenzfall des Inhomogenen aufzufassen, sondern die von C. JORDAN aufgefundenen Gruppen mit infinitesimalen Translationen, welche wirklich verschieden sind von den nur endliche Translationen (normal zur Symmetrieaxe) besitzenden existiren in der Mathematik. Daher kann nicht etwa, wie VIOLA zu glauben scheint, ein allgemeinster, mit Materie homogen erfüllt gedachter physikalischer Raum eine geringere Zahl von Gruppen mit infinitesimalen Transformationen zulassen.

Jedoch kann unsere Annahme didaktische Vortheile bei dem Anfangsstudium der Krystallographie bieten, um später durch strengere Beweise ersetzt zu werden; man kann es für einiger-massen plausibel erklären, dass die lückenhafte Ausfüllung einer senkrecht auf einer Symmetrieaxe stehenden Ebene durch Materie eine Ungleichwerthigkeit der von Materie besetzten mit den davon freien Partien bedinge und daher der Homogenität widerspreche, dass ferner die blossе Vorstellung einer Symmetrieaxe die Idee eines, wenn auch noch so kleinen, ihr zugeordneten Bereiches bedinge, innerhalb dessen die Deckbewegungsoperationen der Axe sich bethätigen, dass diese Bereiche die Gestalt regelmässiger Polygone annehmen und wechselseitig in ihren Kanten und Ecken aneinanderstossen und sich dort abgrenzen müssen. Wiederum aus didaktischen Gründen, aber auch um eine Bemerkung über die Axiome der geometrischen Krystallographie damit zu verbinden, möge ein einfacherer Beweis als der aus VIOLA's Betrachtung (l. c.) folgende, für den bekannten Satz mitgetheilt werden, dass keine anderen unter sich congruenten regulären Polygone die Ebene lückenlos zu überdecken gestatten, als Drei-, Vier- und Sechsecke. In dem gleichschenkligen Dreieck, welches den Mittelpunkt eines beliebigen n-Ecks zur Spitze und die Verbindungslinie zweier benachbarter Ecken zur Grundlinie hat, beträgt der Winkel an der Spitze $\frac{1}{n} 360^\circ$ (wo n eine ganze Zahl ist), die Summe der beiden anderen Winkel ist aber gleich dem Polygonwinkel $\frac{1}{v} 360$ (wo v ebenfalls eine ganze Zahl ist); da die Summe aller drei Winkel 180° betragen muss, folgt

$$\frac{2}{n} + \frac{2}{v} = 1.$$

Nur durch folgende Paare ganzer Zahlen kann aber dieser Gleichung genügt werden:

$$n = 3 \text{ und } v = 6$$

$$n = 4 \quad „ \quad v = 4$$

$$n = 6 \quad „ \quad v = 3.$$

Es scheint mir nun in axiomatischer Hinsicht nicht ganz unwesentlich zu sein, dass dieser Beweis von dem Parallelenaxiom Gebrauch macht, dass hingegen bei derjenigen Behandlungsweise der geometrischen Krystallographie, die z. B. TH. LIEBISCH in seinen Lehrbüchern gewählt hat, dieser Satz sich unter Zuhilfenahme lediglich solcher mathematischer Axiome ergibt, die der projektiven Geometrie angehören (vergl. besonders¹ LIEBISCH, Grundriss der physikal. Kryst., pag. 53). Da sich nun alle Fragen, die mit dem Grundgesetz der geometrischen Krystallographie sowie mit der Symmetrie der Flächencombinationen bei makroskopischen Krystallen zusammenhängen, an dem zugehörigen Flächen-Kantenbündel erledigen lassen und das Grundgesetz der geometrischen Krystallographie selbst rein projektiven Charakter besitzt (was besonders aus der Fassung als Zonengesetz oder auch als Gesetz der rationalen Doppelverhältnisse hervorgeht), bedarf man in der geometrischen Krystallographie, solange von der Struktur der Krystalle nicht gesprochen wird, keineswegs aller Axiome der euklidischen Geometrie, besonders nicht nothwendigerweise des Parallelenaxioms. Da es nun einen gewissen — natürlich nur rein mathematischen — Reiz besitzt, aus möglichst wenigen Eigenschaften der Dinge die übrigen abzuleiten, so würde ich schon aus diesen Gründen denjenigen Beweisen unseres Satzes, welchen nur die Axiome der projektiven Geometrie und als weiteres Axiom das Grundgesetz der geometrischen Krystallographie zu Grunde liegen, den Vorzug geben.

Anhangsweise sei noch darauf hingewiesen, dass die scheinbar widersprechenden Meinungen VIOLA's und HILTON's von unserem Standpunkt aus in der einfachsten Weise sich aufklären. VIOLA führt als Stütze für seinen Beweis eine Reihe von Beispielen an²; dieselben sind aber nichts weiteres als einige Rechenbeispiele für die längst bekannte Thatsache, dass die Configuration von Ecken und Geraden, welche entsteht durch die lückenlose Ausfüllung der unbegrenzt gedachten Ebene mit regulären Polygonen von endlicher Ausdehnung, in sich übergeht bei der Aufeinanderfolge einer Drehung um den Schwerpunkt eines Polygons durch den Centriwinkel nebst einer um eine Ecke desselben durch den Polygonwinkel (oder Multipla desselben). Aus diesem Grunde ist der resultirende Drehungswinkel ein aliquoter Theil von 360° .

In der That, benennen wir mit VIOLA die Zähligkeit der Symmetrieaxe mit n , den Centriwinkel $\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ mit 2α , den bei der

¹ Daneben käme noch die auf pag. V des KRANTZ'schen Kataloges No. 14 (Samml. von 58 Glas-Krystallmodellen) von TH. LIEBISCH gemachte Bemerkung hier in Betracht.

² C. VIOLA: Zeitschr. f. Kryst. **36**. 153. 1903.

zweiten Drehung benutzten Multiplikator des Centriwinkels mit p , den der ersten Drehung (durch den einfachen Centriwinkel) und der zweiten Drehung zusammen entsprechenden Winkel der resultirenden Drehung mit $2\gamma_p$, und ferner die Anzahl der verschiedenen Drehungen, welche bei Ausführung um eine Polygonecke die Configuration in sich überführen, mit γ , so enthält das folgende Schema in der zweiten Colonne sämtliche von VIOLA (l. c.) als aliquote Theile von 360° (und -0) hervorgehobenen Drehungen, in der dritten Colonne aber die Angaben, auf welche Deckbewegungen der zugehörigen Configurationen diese Drehungen hinauskommen:

Regul. Dreieck	$n = 3, p = 1$	1. Drehung d. d. Centriwinkel (120°)
	$2\gamma_p = \frac{2\pi}{3}$	2. „ „ „ Polygonwinkel (120°)
Regul. Viereck	$n = 4, p = 1$	1. Drehung d. d. Centriwinkel (90°)
	$2\gamma_p = \frac{2\pi}{2}$	2. „ „ „ Polygonwinkel (90°)
Regul. Sechseck	$n = 6, p = 2$	1. Drehung d. d. Centriwinkel (60°)
	$2\gamma_p = \frac{2\pi}{2}$	2. „ „ „ Polygonwinkel (120°)

Auch wird es klar weshalb, wie HILTON hervorhebt, VIOLA den Fall $n = 6, p = 1$ in seiner Aufzählung fortlassen musste, denn wird die Ebene lückenlos mit congruenten regulären Sechsecken überdeckt, so geht die Configuration der Ecken (resp. Kanten) bei Drehung um eine derselben zum ersten Mal in sich über, falls der doppelte Centriwinkel (welcher dem Polygonwinkel gleich ist) nicht aber bereits wenn der einfache Centriwinkel als Werth für den Drehungswinkel erreicht wird.

Zusammenfassend können wir sagen: Man bedarf einer ganz speciellen Annahme über die bei Krystallen möglichen Arten von Homogenität, um unseren Satz beweisen zu können; besonders einfach ist folgende Formulierung dieser Annahme: Besitzt eine krystallisirte Phase eine Schaar paralleler Symmetrieachsen, so muss sich die Anordnung derselben auffassen lassen als Grenzfall derjenigen Schaar, welche in den Schwerpunkten einer Menge von solchen regulären congruenten Polygonen, durch welche eine Ebene lückenlos überdeckt werden kann, senkrecht auf derselben construiert wird.

Indessen ist es möglich unser Problem von einem viel allgemeineren und zwar gruppentheoretischen Standpunkt aus zu behandeln, alsdann lässt sich die in obiger Formulierung enthaltene Willkür sehr wesentlich mildern, und es scheint mir, dass ein von F. KLEIN in sehr anschaulicher Form (Vorles. über höhere Geometrie, II, p. 306 ff.) gegebener Beweis, den VIOLA übersehen zu haben

scheint, sich auf VIOLA's homogene Medien vollkommen einwandsfrei anwenden lässt. Bekanntlich sind die krystallographischen Symmetriebetrachtungen (auch die strukturtheoretischen) durchweg von gruppentheoretischer Art. Z. B. entsprechen die 32 Symmetriegruppen genau den eigentlich discontinuirlichen und endlichen Symmetriegruppen welche diejenigen regulären Körper darbieten¹, deren Flächen resp. Kanten sich aus vier derselben durch das Zonengesetz ableiten lassen. Bei VIOLA's homogenen Medien soll nun letzteres Gesetz natürlich nicht beim Beweise unseres Satzes postuliert werden, ferner haben wir es dort zunächst nicht wie oben mit eigentlich discontinuirlichen und endlichen Gruppen zu thun, sondern mit sogenannten gemischten Gruppen². Denn betrachten wir innerhalb eines homogenen Mediums die Gruppe der α^6 möglichen Bewegungen eines starren Systems, so führt jedenfalls die in derselben enthaltene Untergruppe der α^3 Verschiebungen jeden Punkt in einen äquivalenten Punkt über; ausserdem aber können noch aus einer endlichen Zahl von Drehungen und Spiegelungen sich zusammensetzende Operationen existiren, welche jeden Punkt in einen äquivalenten Punkt überführen. Unter diesen werden wir zunächst die reinen Drehungen betrachten und die Annahme postuliren: Nur diejenigen Drehungen um ein festes Centrum, welche mit Translationen combinirt zu eigentlich discontinuirlichen Untergruppen innerhalb jener gemischten Deckoperationsgruppen Anlass geben, haben krystallographische Bedeutung, alle übrigen können also bei Krystallen als Symmetrioperationen nicht vorkommen.

Der citirte Beweis lehrt nun, es müsse hierzu in dem Falle, dass die in Frage kommende Drehungsperiode n beträgt, die Bedingung erfüllt sein, dass die n -Grössen $1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^2, \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^3, \dots, \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^{n-1}$ sich linear und ganzzahlig aus 2 Hülfsgrössen zusammensetzen lassen. Dieser Bedingung genügen aber die Einheitswurzeln nur bei den Fällen $n = 2, 3, 4, 6$, indem unsere n -Grössen im Falle $n = 2$ gleich $+1$ und -1 , im Falle $n = 3$ aber $1, \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$ werden, also alsdann linear und ganzzahlig aus $\frac{1}{2}$ und $\frac{\sqrt{-3}}{2}$ sich zusammensetzen lassen. Im Falle $n = 4$ erscheinen unsere n -Grössen $+1, +i$ aus 1 und i , endlich im Falle $n = 6$ aus

¹ Hierbei sind die Diëder mitzuzählen, sowie alle ausgezeichneten Untergruppen, aus welchen sich die Hauptsymmetriegruppen dieser und der eigentlichen regulären Körper aufbauen.

² Hinsichtlich der Terminologie schliesse ich mich hier vollkommen an F. KLEIN an.

denselben Grössen wie im Falle $n = 3$ linear und ganzzahlig zusammensetzbar, da falls $n = 6$ ist, die n -Grössen die Werthe ± 1 , $\pm \left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \right) \pm \left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \right)$ annehmen.

II. Beitrag zur Symmetrie trigonaler Punktsysteme.

Der in dem Titel unserer Notiz genannte Satz hängt noch mit einem weiteren Problem nahe zusammen, das zwar schon vielfach behandelt ist, aber mir dennoch eine bisher noch nicht ausgefüllte Lücke darzubieten scheint: Bekanntlich ist erstens eine Richtung, welche bei einem krystallographischen Complex die Rolle einer dreizähligen Symmetrieaxe spielt, darum nicht nothwendigerweise stets eine krystallographisch mögliche Zone dieses Complexes¹; zweitens giebt die dreizählige Symmetrieaxe eines trigonalen Punktsystems stets die Richtung einer krystallographisch möglichen Zone des zugehörigen Complexes an². Wie sind nun diese beiden Sätze vereinbar mit der Thatsache, dass drittens jedem krystallographischen Complex ein Raumgitter zugehört, welches demselben vollkommen äquivalent ist³ und sich von ihm nur dadurch unterscheidet, dass es die Flächen des Complexes nicht direkt durch continuirliche Stücke sondern durch diskrete Punkte derselben darstellt? Offenbar löst sich der scheinbare Widerspruch dieser drei Sätze nur dann, wenn gezeigt werden kann, dass die hierbei benutzten Definitionen des Begriffs Symmetrieaxe für krystallographische Complexe und Raumgitter sich nicht vollständig decken, und dass aus diesem Grunde zusammengehörige Complexe und Raumgitter verschiedene Symmetrie aufweisen können. Diese Unterscheidung soll nun im Folgenden anschaulich geometrisch zum Ausdruck gebracht werden; implicite und in rein analytischer Form ist dieselbe freilich schon in den Arbeiten HECHT's enthalten (besonders mag auf das von HECHT vollkommen durchgerechnete Beispiel N. Jahrb. f. Min. 1895, II, 252 verwiesen werden).

Unter den Kanten des betreffenden krystallographischen Complexes der bei Drehung durch 120 resp. 240° um eine Symmetrieaxe C in sich übergeführt werden kann, mögen die Coordinatenachsen

¹ A. GODOLIN: Abhandlung über die Herleitung aller Krystallsysteme aus einem einzigen Princip. OSTWALD's Klassiker. No. 75. pag. 59.

B. HECHT: N. Jahrb. f. Min. etc. 1893, II, 173; 1894, I, 278; 1895, II, 248.

² A. SCHÖNFLIES: Krystallsysteme und Krystallstruktur. p. 283 Lehrs. VIII und p. 284 Lehrs. XI.

³ Wohl zuerst wurde auf die Möglichkeit rein geometrisch und unter Verzicht auf Strukturhypothesen Raumgitter und krystallographische Complexe einander zuzuordnen von L. A. SEEBER aufmerksam gemacht. SEEBER: Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen. Mannheim 1831. pag. VIII der Vorrede.

e_1, e_2, e_3 so gewählt sein, dass sie sich bei den genannten Deckbewegungen permutiren, also gegen C unter gleichem Winkel geneigt sind. Durch die Einheitsfläche E denken wir uns auf den Coordinatenaxen die Punkte A_1, A_2, A_3 abgeschnitten und vom Coordinatennullpunkt O aus alle rationalen Multipla von OA_1 auf e_1 , von OA_2 auf e_2 , von OA_3 auf e_3 abgetragen. Die Endpunkte dieser Strecken, welche kurz »Rationalpunkte« heissen mögen, bedecken die Coordinatenaxen zwar überall dicht, aber dennoch »nicht perfekt«. Nun drehen wir um C durch den Winkel 120° , wodurch e_1 in e_2 , e_2 in e_3 , e_3 in e_1 übergeführt werden möge. Wenn nun gleichzeitig A_1 in A_2 , A_2 in A_3 , A_3 in A_1 übergeht, so ist diese Operation zugleich als Deckbewegungsoperation für das dem Complex zugehörige Raumgitter aufzufassen, denn dasselbe wird gewonnen durch Construction von drei Schaaren äquidistanter Ebenen, deren Abstände (längs den Coordinatenaxen gemessen) OA_1, OA_2, OA_3 betragen. Für den Complex allein (also für das Flächen-Kantenbündel) kann aber diese Drehung auch in vielen Fällen, in denen der Bedingung $OA_1 = OA_2 = OA_3$ nicht genügt wird, eine Deckbewegung herbeiführen, denn hierzu ist nur erforderlich, dass diejenige Fläche, welche vor der Drehung durch die Punkte A_1, A_2, A_3 ging, durch die Drehung in eine solche Fläche übergeführt wird, die parallel ist einer durch drei Rationalpunkte gehenden Fläche. Sind nun A'_1, A'_2, A'_3 diejenigen Stellen auf den Coordinatenaxen, in welche die Punkte A_1, A_2, A_3 durch die Drehungen übergegangen sind, so kann der letztgenannten Forderung auch dann genügt werden, wenn keiner der Punkte A'_1, A'_2, A'_3 mit einem Rationalpunkte der betreffenden Coordinatenaxen zusammenfällt. Falls aber in einem solchen Falle nachträglich die durch A'_1, A'_2, A'_3 gehende Fläche so gelegt wird, dass sie statt durch A'_1 durch irgend einen Rationalpunkt der Geraden OA'_1 geht, so muss dieselbe alsdann auch die anderen Coordinatenaxen in Rationalpunkten treffen. Diese Bedingung können wir auch so aussprechen: Wenn die drei Rationaltheilungen in gleichem Maasse gestreckt werden und zwar derart, dass die erste mit der zweiten congruent wird, so muss auch die zweite mit der dritten und die dritte mit der ersten congruent werden. Demnach ist die Operation, welche der betrachteten Deckbewegung des Complexes gleichkommt, auf das zugehörige Raumgitter bezogen, aus einer Drehung und Aehnlichkeitstransformation des Gitters zusammengesetzt, welche beide um O als Centrum erfolgen, und wir gelangen zu dem Resultat: Wollte man den Satz, dass zusammengehörige Complexe und Raumgitter gleiche Symmetrie besitzen, aufrecht erhalten, so müsste man in unserem Falle eine aus einer Drehung und einer Aehnlichkeitstransformation des Gitters zusammengesetzte Operation als Symmetrieoperation des Raumgitters auffassen. Nun bietet die Erfahrung aber bisher keinerlei Stütze dafür, dass die Aehnlichkeits-

transformation für die krystallographische Systematik in Betracht kommen könne, auch würde die Anzahl der Gruppen, die für die möglichen Strukturarten der Krystalle zu den bisher bekannten 230 alsdann noch hinzukommen würden, fast unübersehbar gross werden. Natürlich kann man auch den entgegengesetzten Ausweg wählen, nämlich anstatt die Zahl der Fälle bei den Raumgittern zu erweitern, kann man diejenigen bei den Complexen einschränken; wie bekannt ist, kann das z. B. dadurch geschehen, dass man den aus dem Grundgesetz der geometrischen Krystallographie selbst nicht folgenden Satz postulirt: dass in gleichwerthigen Richtungen die Axeneinheiten gleich gross angenommen werden können. Vielleicht am übersichtlichsten ist es, diese Hilfsannahme mit dem Symmetriebegriff zu vereinigen und etwa zu postuliren, dass ein krystallographischer Complex nur dann Symmetrie besitzt, wenn nicht nur die Flächen und Kanten des Complexes sondern auch die auf den Kanten befindlichen Rationaltheilungen ineinander übergeführt werden können durch Operationen, die aus Drehungen und Spiegelungen zusammengesetzt sind. Dass durch dieses Postulat die Existenz irrationaler dreizähliger Symmetrieachsen ausgeschlossen ist, geht aus unseren Betrachtungen evident hervor.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Centralblatt für Mineralogie, Geologie und Paläontologie](#)

Jahr/Year: 1904

Band/Volume: [1904](#)

Autor(en)/Author(s): Sommerfeldt Ernst

Artikel/Article: [Ueber den Satz, dass Symmetrieaxen mit einer Drehungsperiode gleich fünf oder grösser als sechs bei Krystallen nicht auftreten können. 18-27](#)