Neue Instrumente und Beobachtungsmethoden.

Über eine Dispersionsformel der Doppelbrechung im Quarz und deren Verwendung beim Babinet'schen Kompensator.

Von **V. de Souza-Brandão.**

Mit 1 Textfigur.

Lissabon, Oktober 1904.

Bekanntlich wird die Konstante des Kompensators für Licht einer bestimmten Wellenlänge dadurch erhalten, daß man den in Trommelteilen ausgedrückten Betrag der Drehung, durch welche zwei aufeinanderfolgende dunkle Streifen nacheinander eingestellt werden, in die Wellenlänge der benutzten Lichtart dividiert. Bedeutet w jenen Drehungswinkel und k die Kompensatorkonstante, so gilt, für Natriumlicht z. B.,

$$\frac{\lambda_D}{w_D} = k_D.$$

Dann wird jeder Gangunterschied d, zu dessen Kompensation (Wiedereinstellung des aus dem Index des Gesichtsfeldes fortgerückten Hauptstreifens) der Drehungsbetrag v erforderlich ist, mittels der Formel

$$d_D = k_D \, . \, v$$

erhalten.

Die spezielle Konstante k_D, für Na-Licht, ist, wie aus der Theorie des Kompensators folgt, wieder das Produkt einer a b s o l u t e n Konstante (p), welche das Verhältnis zwischen Drehung an der Trommel und zusammengehöriger Verschiebung des beweglichen Keiles ausdrückt, und der Stärke der Doppelbrechung des Quarzes für die betreffende Lichtart, also

$$k_D = p \, . \, (\varepsilon - \omega)_D.$$

Was im Kompensator unmittelbar bestimmt wird ist k_D, d. h. die spezielle Konstante irgendwelcher Farbe. Durch Division von k_D durch $(\varepsilon - \omega)_D$ erhält man die absolute Konstante p und danach die Arbeitskonstante k_x für eine beliebige Stelle des Spektrums λ_x mittels

$$k_x = p \, . \, (\varepsilon - \omega)_x,$$

so daß bei Benutzung einer solchen Lichtart ein Gangunterschied d_x, zu dessen Kompensation der Drehungsbetrag u erforderlich ist, sich mit Hilfe der Formel

$$d_x = k_x u$$

berechnen läßt.

Nun verweisen die Lehrbücher[1] im allgemeinen für die Werte von $(\varepsilon - \omega)_x$ auf die bekannten Dispersionsformeln des Quarzes, welche, indem sie nur die geraden Potenzen der Wellenlänge enthalten, nicht rasch und bequem zum Ziele führen. [Enthielte die Entwicklung auch oder allein die ungeraden Potenzen, so könnte man gleich nach der ersten abbrechen und die Brauchbarkeit der sich daraus ergebenden Dispersionsformel der Doppelbrechung prüfen.] Bedenkt man aber, daß die Dispersion der Doppelbrechung eine Größe zweiter Ordnung mit Bezug auf die Dispersion der Brechungsindices ist, so läßt sich hoffen, daß dieselbe durch eine zweigliederige Formel zur Darstellung gebracht werden kann, in welcher nur die erste, allerdings negative, Potenz der Wellenlänge auftritt. In der Tat bildet die Formel

(1) . . . . $(\varepsilon - \omega) = a + b \, . \, \lambda^{-1}$.

wo

(1′) $a = 8{,}324 \, . \, 10^{-3}$,

(1″) $b = 0{,}4867 \, . \, 10^{-6}$,

eine zwischen den Linien B und H sich den Beobachtungen gut anschließende Formel, wie folgende Tabelle zeigt.

Linien	$\lambda \, . \, 10^3$*	$(\varepsilon - \omega) \, 10^3$ (berechnet)	$(\varepsilon - \omega) \, 10^3$** (beobachtet)	Diff. . 10^5
B	0,68675	9,03(3)	9,03	+ 0,3
C	0,65630	9,06(6)	9,07	− 0,4
D_m	0,58932	9,15(0)	9,15	0,0
E	0,52697	9,24(8)	9,18	+ 6,8
F	0,48615	9,32(5)	9,31	+ 1,5
G	0,43080	9,45(4)	9,43	+ 2,4
H	0,39715	9,54(9)	9,54	+ 0,9

Obige Dispersionsformel kann auch geschrieben werden

(2) . . . . . $(\varepsilon - \omega) \, 10^3 = 8{,}324 + \dfrac{0{,}4867}{(\lambda \, . \, 10^3)}$.

[1] Vergl. Th. Liebisch, Physikalische Kristallographie. 1891. p. 466.

* Mascart, Traité d'optique. 3. 658.

** Ibid. p. 663.

wo $(\lambda \,.\, 10^3)$ die wie gewöhnlich in μ ausgedrückte Wellenlänge bedeutet.

Aus der einfachen Formel (1) und der Kompensatorformel

$$\lambda = k\,w = p(\varepsilon - \omega)\,w$$

kann man $(\varepsilon - \omega)$ eliminieren und erhält

$$\lambda^2 - a\,p\,w\,\lambda - b\,p\,w = o,$$

woraus

$$\lambda = \frac{p}{2}\left(a\,w + \sqrt{a^2 w^2 + \frac{4\,b\,w}{p}}\right),$$

welche Formel die Berechnung der Wellenlänge eines beim Kompensator verwendeten mehr oder weniger streng monochromatischen Lichtes aus der ein für allemal (mittels Na-Licht z. B.) bestimmten absoluten Konstante p und dem für die betreffende Wellenlänge charakteristischen Drehungsbetrag w gestattet.

Diese Aufgabe hat neulich Prof. F. BECKE[1] behandelt. Anstatt aber eine direkte Dispersionsformel für die Doppelbrechung des Quarzes, wird eine Formel für die al Funktio $\frac{\lambda}{\varepsilon - \omega}$ aufgestellt, für welche F. BECKE findet, daß sie fast genau eine lineare Funktion der Wellenlänge λ ist, wie in der Tat.

Es ist wahrscheinlich einem Druckfehler zuzuschreiben, wenn als Koeffizient von $\frac{\lambda}{\varepsilon - \omega}$ die Zahl 0,00834, anstatt der richtigen 0,00843 angegeben wird. Auch paßt 0,000045 für das konstante Glied besser als 0,000049, wie dort steht.

Die Konstanten der BECKE'schen Formel sind denjenigen der hier mitgeteilten Dispersionsformel sehr ähnlich. Gibt man diesen Formeln die Formen

(BECKE) . . $(\varepsilon - \omega)\,\lambda = \lambda \,.\, 8{,}43 \;.\, 10^{-3} + (\varepsilon - \omega) \,.\, 46 \,.\, 10^{-6}$,
(BRANDÃO) . $(\varepsilon - \omega)\,\lambda = \lambda \,.\, 8{,}324 \,.\, 10^{-3} + 0{,}4867 \,.\, 10^{-6}$,

so sieht man sofort, warum a (1′) so nahe dem BECKE'schen Koeffizient 0,00843 und b (1″) dem mit 0,01 multiplizierten BECKE'schen Wert 0,000046 steht, indem $\varepsilon - \omega$ nahezu 0,01 beträgt. In die gewöhnliche Form einer Dispersionsformel gebracht, lautet die BECKE'sche Formel

$$\varepsilon - \omega = \frac{0{,}00843 \,.\, \lambda}{\lambda - 0{,}000046};$$

als solche wäre sie unnötig kompliziert, während sie für die Bestimmung der Wellenlänge mit dem Kompensator gute Dienste leistet.

[1] F. BECKE, Min.-petr. Mitt. **22.** 1903. p. 378.

Theoretisch wäre immer die Möglichkeit vorhanden, solange eine Dispersionsformel der Doppelbrechung für das Kompensatormaterial besteht, die Wellenlänge der benutzten Lichtart zu berechnen, indem der Kompensator selbst die andere Gleichung zwischen λ und $(\varepsilon - \omega)$ resp. $(n_1 - n_2)$ liefert, und aus zwei solchen Gleichungen in λ und $(n_1 - n_2)$ letztere Größe eliminiert und λ ermittelt werden könnte. Nur würde dies unter Benützung einer Dispersionsgleichung mit höheren (negativen) Potenzen von λ als der ersten zu Gleichungen von über dem zweiten Grad in λ führen, während Dispersionsformeln mit positiven Potenzen von λ nicht zu bilden sind.

Man könnte übrigens eine in den meisten Fällen genügende Annäherung erzielen, wenn man bedenkt, daß es sich hier vorwiegend um nicht ganz monochromatische Lichtarten handelt, schon dadurch, daß man die sonst sehr kleine Dispersion der Doppelbrechung im Quarz ganz vernachlässigt. Dann wäre die spezielle Konstante k, z. B. diejenige k_D für Na-Licht, als absolute Konstante zu betrachten, und man hätte für die beliebige Wellenlänge λ_x, welcher eine Drehung w_x in Trommelteilen entsprechen möge, den Ausdruck

$$\lambda_x = k_D \, w_x.$$

Wenn man diese Formel auf einen Kompensator mit der Konstante

$$k_D = \frac{\lambda_D}{w_D} = 1{,}214 \,.\, 10^{-6}$$

anwendet, bekommt man für die Linie B ($\lambda_x = \lambda_B$) eine Abweichung von nur 1,1 % in λ, d. h.

$$\lambda_B' = k_D \, w_B$$

fällt nur um 1,1 % von λ_B größer als der richtige Wert

$$\lambda_B = k_B \, w_B.$$

Dagegen beträgt für die Linie H die Abweichung 4,3 % von λ_H im entgegengesetzten Sinne. Diese Resultate erhält man leicht, wenn man aus der speziellen Konstante k_D die absolute Konstante

$$p = \frac{k_D}{(\varepsilon - \omega)_D} = \frac{1{,}214 \,.\, 10^{-6}}{9{,}15 \,.\, 10^{-3}} = 0{,}133 \,.\, 10^{-3},$$

und daraus wieder

$$k_B = p\,(\varepsilon - \omega)_B = 1{,}201 \,.\, 10^{-6}$$

berechnet. Dann ist

$$\frac{\lambda_B'}{\lambda_B} = \frac{k_D}{k_B} = 1 + 1{,}1/100,$$

wobei λ_B' den angenäherten Wert bedeutet. Analoges gilt für λ_H', hier ist aber die Abweichung stärker, die Vereinfachung ungünstiger.

Die Becke'sche Formel gestattet in der einfachsten Weise die Diagrammbildung und graphische Ermittlung, indem die gerade resp. fast geradlinige Kurve

$$\lambda = a' \frac{\lambda}{\varepsilon - \omega} + b'$$

mittels der auf die einzelnen Spektrallinien bezüglichen Werte auf Millimeterpapier gezeichnet wird.

Die graphische Berechnung auf Grund der in dieser Notiz mitgeteilten Formel (1) oder (2) ist ziemlich umständlich. Wird letztere nach λ aufgelöst, also in der Form

$$\lambda \,.\, 10^3 = \frac{\beta}{(\varepsilon - \omega)\, 10^3 - \alpha},$$

mit

$$\alpha = 8{,}324$$
$$\beta = 0{,}4867,$$

geschrieben, und trägt man die hierdurch dargestellte Kurve mittelst der in obiger Tabelle enthaltenen Wertepaare ebenfalls in Millimeterpapier auf, so daß die Einheit der Abszissen $[(\varepsilon - \omega) \,.\, 10^3]$ gleich 10 cm und diejenige der Ordinaten $[\lambda \,.\, 10^3]$ gleich 20 cm genommen wird, dann erhält man eine stark abfallende, gegen die Abszissenachse konvexe, aber schwach gekrümmte Linie, mittels welcher die graphische Berechnung folgendermaßen ausgeführt werden kann.

Hat man den charakteristischen Drehungsbetrag w in Trommelteilen des Kompensators für die Wellenlänge der monochromatischen oder angenähert monochromatischen (wenig gefärbte Franzen liefernden) Lichtart ermittelt und mit Hilfe der absoluten Konstante p das Produkt p . w gebildet, ziehe man durch den Koordinatenursprung eine Gerade, welche mit der Abszissenachse den durch

$$\operatorname{tg} \alpha = p \,.\, w = \frac{\lambda}{\varepsilon - \omega}$$

definierten Winkel α bildet. Der Punkt, wo diese Gerade die Kurve

$$[\lambda \,.\, 10^3] = f\,[(\varepsilon - \omega)\, 10^3]$$

schneidet, hat den gesuchten Wert von λ als Ordinate und die entsprechende Stärke der Doppelbrechung $(\varepsilon - \omega)$ als Abszisse.

Praktisch wird man anders verfahren, weil einerseits die Winkel α sehr klein und deshalb als solche nur sehr ungenau aufzutragen wären, und anderseits, weil unter Annahme einer Abszisseneinheit von 10 cm für $[(\varepsilon - \omega)\, 10^3]$ der Koordinatenursprung um 90,3 cm, also fast 1 m, entfernt vom $[(\varepsilon - \omega)\, 10^3]$-Punkt der Linie B zu liegen käme, da

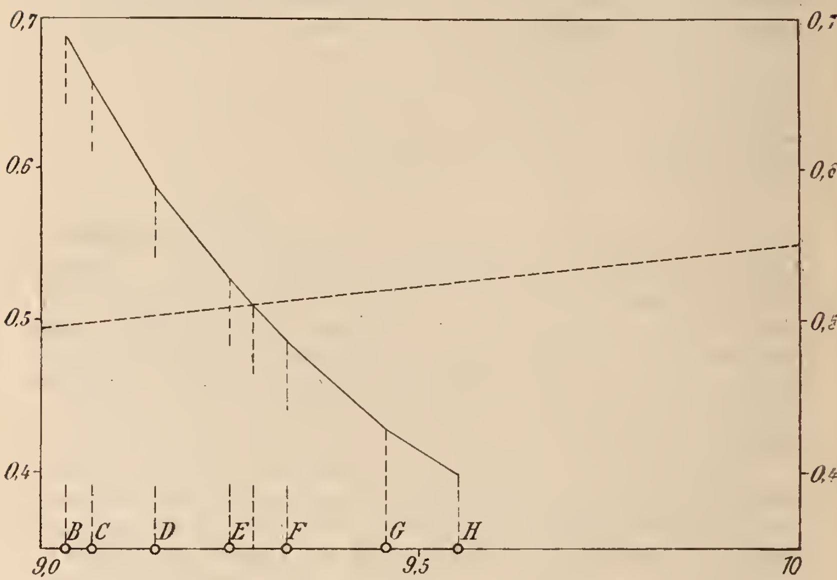
$$(\varepsilon - \omega)_B \,.\, 10^3 = 9{,}03$$

ist.

Man verfährt aber sehr bequem, wenn man nach Ermittlung von

$$p\,w = P$$

diesen Wert nacheinander mit 9 und 10 multipliziert und 9 P und 10 P resp. auf die der Abszisse 9,0 und der Abszisse 10,0 entsprechende Ordinate aufträgt. Die die Endpunkte der so erhaltenen



Ordinaten verbindende Gerade bildet mit der Abszissenachse den Winkel α und schneidet deshalb die Diagrammkurve im gesuchten Punkt. Natürlich braucht man nicht die Gerade zu zeichnen, sondern einfach ein Lineal an die beiden Endpunkte der Ordinaten 9 P und 10 P anzulegen und sich den Schnittpunkt der Linealkante mit der Kurve zu merken.

In der obigen Figur ist mittels der aus obiger Tabelle entnommenen Werte die Kurve konstruiert. Für eine gewisse Lichtart sei, unter Benützung des Kompensators mit der absoluten Konstante $p = 0{,}133 \,.\, 10^{-3}$ (siehe oben), die charakteristische (den Durchgang zwei aufeinanderfolgender Franzen durch den Index des Gesichtsfeldes messende) Drehung gleich 413,5 Trommelteilen. Dann ist

$$p\,w = 0{,}055 = P,$$
$$9\,P = 0{,}495,\quad 10\,P = 0{,}55.$$

Mit Hilfe dieser Werte ist die gestrichelte Gerade im Diagramm gezogen worden, welche einen Punkt der Kurve mit den Koordinaten

$$(\varepsilon - \omega)\,10^3 = 9{,}28$$
$$\lambda = 0{,}51$$

bestimmt.

Es dürfte übrigens die Dispersion der Doppelbrechung in Krystallen durch Formeln wie die Becke'sche und (1) dieser Notiz allgemein darstellbar sein. So gibt die Becke'sche Form mit den Koeffizienten

$$a' = 0{,}1515,\quad b' = 0{,}0698\,.\,10^{-3}$$

und (1) mit

$$a = 0{,}1472,\quad b = 0{,}0147\,.\,10^{-3}$$

sehr gut den Zusammenhang zwischen Wellenlänge und Doppelbrechung des Isländischen Spates innerhalb des sichtbaren Spektrums wieder.

Zeitschrift/Journal: Centralblatt für Mineralogie, Geologie und Paläontologie

Jahr/Year: 1905

Band/Volume: 1905

Autor(en)/Author(s): Souza-Brandao V. de

Artikel/Article: Über eine Dispersionsformel der Doppelbrechung im Quarz und deren Verwendung beim Babinet’schen Kompensator. 23-29