

Zum Schlusse erübrigt es mir noch, meinen Dank Herrn Dr. F. KRANTZ für die Überlassung des Arbeitsmaterials zu wiederholen und Herrn Dr. R. KÖCHLIN für manche Hilfe herzlich zu danken.

Wien, Januar 1909.

Ueber dichteste Kugelpackung in Erbsen- und Rogensteinen und die Entstehung des „dodekaedrischen Kalkes“.

Von A. Johnsen in Göttingen.

Mit 8 Textfiguren.

I. Dichteste Kugelpackung in Erbsen- und Rogensteinen.

Erbsensteine setzen sich aus sprudelndem Wasser ab, Rogensteine werden z. T. als Flachseebildungen, z. T. als Dünenbildungen angesprochen. Die Pisolithe haben sich also sämtlich, die Oolithe mindestens teilweise in bewegtem Medium abgelagert.

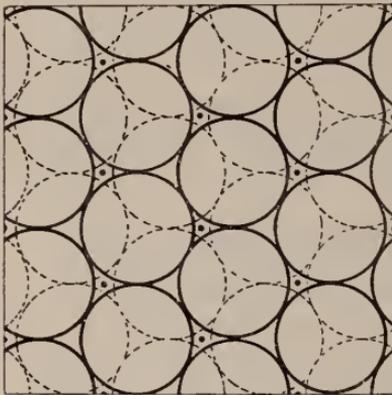


Fig. 1.

Setzt man den Fall, daß die einzelnen Sphärolithe gleich groß¹ und genau kugelförmig sind, daß die Zementmenge unterhalb eines gewissen Betrages (s. S. 309) bleibt und daß infolge der Schüttelung keine neue Schicht entsteht, bevor in der vorhergehenden dichtesten Lagerung eingetreten ist, so wird in jeder Schicht jede Kugel von 6 anderen berührt und bildet mit ihnen 6 Lücken; ferner sind dann überall je 3 solcher 6 Lücken

von einer Kugel der hangenden Kugelschicht bedeckt, während je 3 zwischenliegende Lücken frei sind (Fig. 1). Demnach ist jede Kugel außer mit 6 Kugeln der betr. Schicht noch mit je drei Kugeln der hangenden und der liegenden Schicht, also im ganzen mit 12 Kugeln in Berührung. Obige Annahmen ergeben daher die dichteste aller Packungen, die man mit Kugeln von gleichem Radius aus führen kann. Hiermit ist jedoch die entstehende Kugellagerung keineswegs eindeutig bestimmt, vielmehr existieren bei unendlich großer Schichtenzahl unendlich viele Anordnungen,

¹ Das wird häufiger für äolische als für marine Ablagerungen zutreffen.

welche jede Kugel in Berührung mit 12 anderen zeigen und sich als Kombinationen (C) von 2 Grenzfällen (A und B) darstellen. Lassen wir nämlich 3 aufeinanderfolgende Schichten entstehen, so können sich 2 Anordnungen a und b ergeben, je nachdem die Kugeln der 3. Schicht genau vertikal über denen der 1. Schicht liegen oder nicht; Fig. 1 stellt die 1. und 2. Schicht dar, die Kugelzentren der 3. Schicht projizieren sich im Fall a auf diejenigen der 1. Lage, im Fall b dagegen auf die durch kleine volle Kreise markierten Stellen. Operieren wir nun statt mit 3 Schichten mit unendlich vielen, so ergeben sich aus a und b folgende 2 Grenzfälle A und B.

Grenzfall A. Die Kugeln der 1., 3., 5. . . . Schicht liegen genau vertikal übereinander, ebenso diejenigen der 2., 4., 6. . . . Schicht. Symmetrie des unendlich ausgedehnten Systems: Normal zur Schichtung verläuft 1 Schar 3-zähliger Deck-

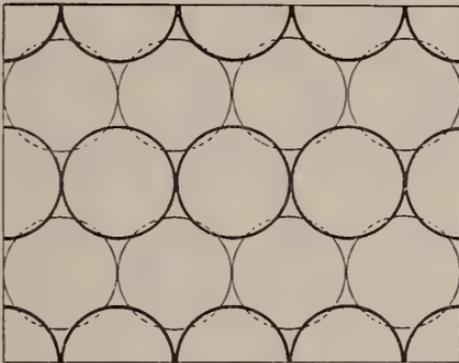


Fig. 2.

bewegungsachsen, die durch Kugel- und Lückenzentren hindurchgehen und 1 Schar 6-zähliger Drehspiegelungsachsen, die nur durch Lückenzentren hindurchgehen. Diese Drehspiegelungsachsen, die natürlich gleichzeitig 3-zählige Deckbewegungsachsen darstellen, sind mit Inversionszentren besetzt, deren je eines mitten zwischen den Niveaus¹ zweier benachbarter Kugelschichten liegt (in Fig. 1 durch kleine volle Kreise markiert). Ferner schneiden sich in den Kugelzentren und in den Lückenzentren 3 Scharen 2-zähliger Deckbewegungsachsen unter 120° ; 3 weitere Scharen 2-zähliger Deckbewegungsachsen liegen normal zu den ersteren und schneiden sich in den Inversionszentren; daher verlaufen normal zu ihnen 3 Scharen von Symmetrieebenen, die sich in sämtlichen 3-zähligen Achsen schneiden. Schließlich geht 1 Schar von Hauptsymmetrieebenen parallel der Schichtung durch sämtliche Kugelzentren hindurch.

¹ Das Niveau einer Schicht sei durch die Centren ihrer Kugeln definiert.

Diesem System läßt sich keine kristallographische Symmetrieklasse und kein Raumgitter zuordnen. Obige Lagerung würde den Molekeln eines Spinells zukommen, der aus molekularen Zwillingslamellen nach einer Oktaederfläche aufgebaut ist und oktaedrisches Raumgitter besitzt.

Dichteste Lagerung herrscht in den Hauptsymmetrieebenen, also in den Schichtflächen.

Fig. 2 stellt 2 der Zeichenebene parallele Niveaus dar, die normal zur Schichtung und normal zu einer Nebensymmetrieebene gerichtet sind. Setzt man den Kugelradius = 1, so ist der horizontale Fundamentalabstand der Kugelzentren = 2, der vertikale = $4\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Fig. 3 stellt 2 der Zeichenebene parallele Niveaus dar, die

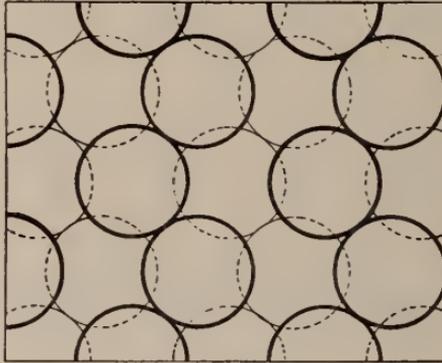


Fig. 3.

normal zur Schichtung und normal zum vorigen Schnitt gerichtet sind. Hier ist der Vertikalabstand = $4\sqrt{\frac{2}{3}}$ wie oben, der

Horizontalabstand = $2\sqrt{3}$.

Grenzfall B. Die Kugeln der 1., 4., 7. Schicht liegen genau vertikal übereinander, ebenso diejenigen der 2., 5., 8. Schicht. Symmetrie des unendlich ausgedehnten Systems: Normal zur Schichtung verläuft 1 Schar 3-zähliger Deckbewegungsachsen, die zugleich 6-zählige Drehspiegelungsachsen sind und durch sämtliche Kugelzentren hindurchgehen; 3 weitere der obigen gleichwertige Achsenscharen sind zu jener und zueinander unter dem Oktaederwinkel geneigt. Ferner gehen durch sämtliche Kugelzentren 3 gleichwertige und zueinander senkrechte Scharen 4-zähliger Deckbewegungsachsen sowie 6 gleichwertige und zueinander unter 60° bzw. 90° geneigte Scharen 2-zähliger Deckbewegungsachsen, schließlich senkrecht zu den 4- und 2-zähligen

Achsen $3 + 6$ Scharen von Symmetrieebenen. Die Deckbewegungsachsen sind die Schnittlinien der Symmetrieebenen; sie schneiden sich nicht nur in sämtlichen Kugelzentren, sondern überdies in allen denjenigen Punkten, die von 14 Kugelzentren genau so umgeben sind wie ein Würfelzentrum von den Eckpunkten und Flächenzentren des Würfels. Sämtliche Achsenschnittpunkte sind Inversionszentren.

Diesem System läßt sich die reguläre Holoedrie und das oktaedrische Raumgitter, d. h. dasjenige der Würfel mit zentrierten Flächen zuordnen.

Dichteste Lagerung herrscht parallel den 4 Scharen von Oktaederebenen, deren einer die Schichtung folgt.

Fig. 4 stellt 3 der Zeichenebene parallele Niveaus dar, die

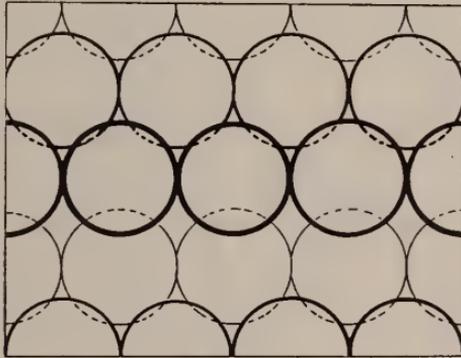


Fig. 4.

normal zur Schichtung und normal zu einer der Symmetrieebenen gerichtet sind. Setzt man wieder den Kugelradius = 1, so ist der horizontale Fundamentalabstand der Kugelzentren = 2, der vertikale = $6 \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Fig. 5 stellt 2 der Zeichenebene parallele Niveaus dar, die normal zur Schichtung und normal zum vorigen Schnitt gerichtet

sind. Hier ist der Vertikalabstand = $6 \sqrt{\frac{2}{3}}$ wie oben, der

Horizontalabstand = $2 \sqrt{3}$.

Kombinationen C. In dem Aufbau von Erbsen- und Rogensteinen werden sich bei dichtester Lagerung die beiden Fälle A und B gemischt zeigen, da die Kugeln — etwa im Gegensatz zu Kristallmolekeln — keine merkliche Anziehung aufeinander ausüben und daher beide Lagerungen A und B gleich wahrscheinlich sind. Greift man also 3 beliebige aufeinanderfolgende Schichten aus diesem System heraus, so können die Kugeln der 3. Schicht genau vertikal über denjenigen der 1. Schicht

liegen oder auch nicht; betrachtet man 6 aufeinanderfolgende Schichten, so können also z. B. die Kugeln der 1., 3. und 6. Schicht genau übereinander liegen. Symmetrie der unendlich ausgedehnten Systeme: Normal zur Schichtfläche verläuft 1 Schar 3-zähliger Deckbewegungsachsen, die sämtlich gleichzeitig durch Kugelzentren und Lückenzentren hindurchgehen. In diesen Achsen schneiden sich 3 Scharen von Symmetrieebenen.

Diese kombinierten Systeme C sind inhomogen, da 2 beliebige Kugeln von der Gesamtheit der Nachbarkugeln im allgemeinen nicht in gleicher Weise umgeben sind.

Die Erbsensteine der hiesigen Sammlung sind aus zu verschieden großen oder zu unregelmäßigen Körnern aufgebaut und die Rogensteine zu zementreich¹, als daß sich obige Lagerung C

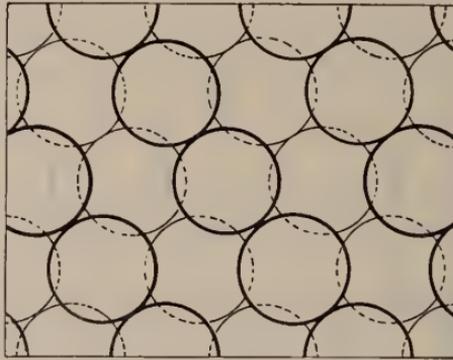


Fig. 5.

im Handstück oder im Dünnschliff hätte nachweisen lassen, zudem ist oft die Schichtung nicht zu erkennen.

Daß jene Lagerung C, die sich übrigens auch in Sandsteinen, Arkosen und Konglomeraten, sowie in der Porenanordnung vulkanischer oder künstlicher Schlacken vorfinden könnte, in Erbsensteinen oder Rogensteinen zuweilen annähernd verwirklicht ist, ergibt sich wohl aus dem folgenden.

II. Die Entstehung des „dodekaedrischen Kalkes“.

Wachsen zwei Sphärolithe entweder primär oder unter Aufzehrung des Zementes sekundär gegeneinander an, so stellt die entstehende Grenzfläche eine Schale eines zweischaligen Hyperboloïds² dar, wofern nur die radialen Wachstumsgeschwindigkeiten der beiden im allgemeinen ungleich großen

¹ Dies spricht gegen äolischen Ursprung.

² Dieses ist in etwas anderer Weise als hier von B. POPOFF gezeigt worden (Min. Mitt. 23. 157. 1904).

Kugeln zu jeder Zeit vom Momente der ersten gegenseitigen Berührung ab einander gleich sind. Fig. 6 zeigt zwei Kreise K_1 und K_2 als Zentralschnitte durch zwei Sphärolithe mit den Radien r_1 und r_2 sowie den Zentren O_1 und O_2 . Treffen sich nun zwei wachsende Radialfasern in C , so muß $\overline{CO_1} = r_1 + \varrho$ und $\overline{CO_2} = r_2 + \varrho$ sein, wo ϱ proportional der radialen Wachstumsgeschwindigkeit ist; ebenso ist $\overline{C'O_1} = r_1 + \varrho'$ und $\overline{C'O_2} = r_2 + \varrho'$ etc.

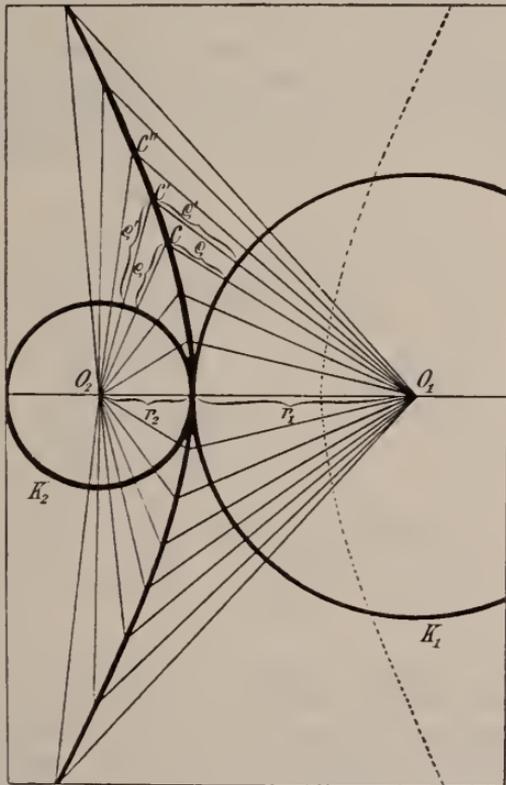


Fig. 6.

Folglich ist $\overline{CO_1} - \overline{CO_2} = \overline{C'O_1} - \overline{C'O_2} = \overline{C''O_1} - \overline{C''O_2}$ etc. Da also für die Punkte $C, C', C'' \dots$ die Differenz ihrer Entfernungen von O_1 und O_2 konstant ist, so bilden erstere den einen von zwei Hyperbelästen mit den Brennpunkten O_1 und O_2 . Die Punkte $C, C', C'' \dots$ erhält man als die Zentren der gemeinsamen Kreise, die man an K_1 und K_2 so heranlegt, daß letztere dieselben von außen¹ berühren. Durch Rotation des Astes

¹ Diejenigen Kreise, welche von K_1 und K_2 von innen berührt werden, ergeben den zweiten, in unserm Falle aber nicht realisierten Hyperbelast (in der Fig. 6 gestrichelt).

C, C', C'' . . . nm die Achse O_1O_2 erhält man als gemeinsame Begrenzungsfläche der beiden Sphärolithe eine Hyperboloïdschale, die sich um den kleineren Sphärolithen herumwölbt. Sehr instruktiv sind in dieser Hinsicht die von H. HAUSWALD¹ photographierten Sphärolithe der Hippursäure und des Cinchonidins, sowie diejenigen Sphärolithe, welche das Benzoïn oder das Salol liefert. Sind die Sphärolithe gleich groß, so ergibt sich als Spezialfall der Hyperboloïdschale eine Ebene.

Gehen wir nun wieder zur dichtesten Lagerung gleich großer Kugeln über, wo jede der letzteren von 12 anderen berührt wird, so erhalten wir stets aus jeder Kugel ein Dodekaeder, und alle diese Dodekaeder schließen lücken-

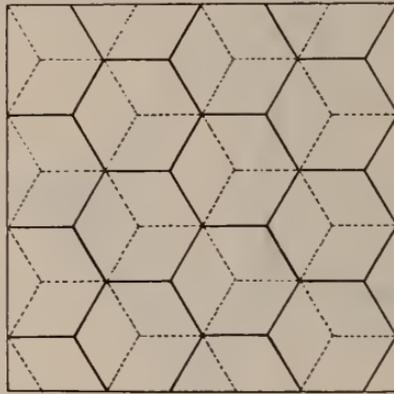


Fig. 7.

los aneinander. Aus Fig. 1 ergibt sich dann Fig. 7, da aus den Kreisen Sechsecke werden. Übrigens läßt sich Fig. 7 auch als eine Schicht von Dodekaedern betrachten, deren Polkanten durch gestrichelte und deren gemeinsame Fugen durch ausgezogene Linien dargestellt sind; man erkennt dann leicht, daß sich die Dodekaeder einer zweiten Schicht lückenlos in die von je drei Dodekaedern der ersten Schicht gebildeten Mulden einfügen lassen.

Im Falle der regulären Packung B sind die Dodekaeder gewöhnliche Rhombendodekaeder, die alle einander parallel orientiert sind.

Im Falle der trigonalen Packung A sind es Dodekaeder, die man nachahmen kann, indem man ein gewöhnliches Rhombendodekaeder senkrecht zu einer dreizähligen Achse in der Mitte durchschneidet und die beiden Hälften um 60° um jene Achse gegeneinander dreht, oder

¹ H. HAUSWALD, Interferenzerscheinungen: 2. Serie, Taf. 57 und 58, Magdeburg 1904.

indem man aus einem parallel (111) verwachsenen Zinkblendezwilling ein Spaltungsstück herstellt (Fig. 8). Diese Dodekaeder sind nicht sämtlich einander parallel orientiert, sondern bilden zwei um 60° um die dreizählige Achse gegeneinander gedrehte Anordnungen.

Setzen wir die (dem Radius der ursprünglichen Kugeln gleiche) Zentraldistanz der Dodekaederflächen $= 1$, so ergibt sich in beiden obigen Fällen das Dodekaedervolumen $= \frac{8}{\sqrt{2}}$. Da die Anzahl n

der bei dichtester Lagerung in irgend einem Volumen Φ enthaltenen Kugeln vom Radius ϱ gleich der Zahl der obigen Dodekaeder von der Flächenzentraldistanz ϱ ist, so ergibt sich

$$n = \frac{\Phi \sqrt{2}}{8 \varrho^3}.$$

Innerhalb des Bereiches Φ beträgt daher die Summe der Kugelvolumina

$$\phi_1 = \frac{\pi \Phi \sqrt{2}}{6}$$

und diejenige der Zwischenräume

$$\phi_n = \Phi - \frac{\pi \Phi \sqrt{2}}{6}.$$

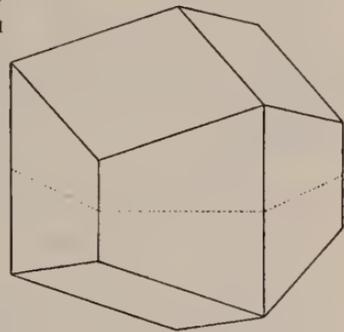


Fig. 8.

Die Volumina ϕ_1 und ϕ_n sind also unabhängig vom Radius ϱ und die zwei Quotienten $\frac{\phi_1}{\Phi}$ und $\frac{\phi_n}{\Phi}$ sind vollkommene Konstanten; man findet

$$\frac{\phi_1}{\Phi} = \frac{74,0 \dots}{100} \quad \text{und} \quad \frac{\phi_n}{\Phi} = \frac{25,9 \dots}{100}.$$

Es kann also bei der Bildung von Erbsen- und Rogensteinen nur dann dichteste Lagerung zustande kommen, wenn die ursprüngliche Zementmenge weniger als 26% des gesamten Sedimentes ausmacht.

Nach dem Vorhergehenden liefert uns das kombinierte System C gleichgroßer Sphärolithe von dichtester Packung, wenn die letzteren fortwachsen, zweierlei genau definierte Dodekaeder von gleicher Häufigkeit.

Daß dodekaederartige Polyeder in entsprechenden Gesteinen tatsächlich mehrfach zu beobachten sind, zeigt das Folgende.

An manchen Stücken des Karlsbader Erbsensteins kann man makroskopisch eine deutliche Facettierung der Kugeln wahrnehmen; andere weisen zwischen je drei Kugeln im Dünnschliff u. d. M. dreieckige Zwickel auf, in welchen sich längs

den Winkelmedialen je drei Sektoren abgrenzen; zw. gekr. Nic. erreicht beim Drehen des Tisches jeder Sektor gleichzeitig mit der benachbarten Kugelpartie ein Helligkeitsminimum und verrät sich dadurch als Fortsatz der betreffenden Kugel. Die gegenseitige polygonale Abgrenzung jener Kugelauswüchse wird nun den Atmosphärlilien mehr Angriffspunkte darbieten als die Grenze zwischen einer Kugel und ihrer orientierten Fortwachsung, denn im ersteren Fall stoßen ganz verschieden orientierte Partien aneinander. So erklärt sich der mitunter zu beobachtende polygonale Zerfall von Karlsbader Pisolithen.

Nach T. WADA¹ bilden sich bei Taira (Prov. Shinano) — und ähnlich bei Ichinokawa (Prov. Iyo) — an heißen Quellen Erbsensteine mit Erbsen von bis 4 cm großem Radius, deren größere zuweilen Annäherung an Dodekaeder mit fünfseitigen (?) Facetten zeigen; die Ecken erscheinen etwas gerundet, die Kanten ein wenig gebogen und die Flächen im Zentrum leicht eingedrückt.

J. NIEDZWIEDZKI² beschrieb radialstrahlige oder auch konzentrischschalige Anhydritkugeln, die sich häufig gegenseitig abzuplatten scheinen.

In dem „roten Muschelmarmor“ (obere alpine Lias) des Schafberges bei Salzburg tritt sogen. „dodekaedrischer Kalk“ auf. Ein in der Königsberger Sammlung befindliches Stück³ dieses Gesteins repräsentiert einen hellgelben dichten Kalk mit Spuren von Fe_2O_3 , aber frei von MgCO_3 , und zeigt einen Aufbau aus etwa erbsengroßen Polyedern, die lückenlos aneinandergesetzt sind und sich mit einiger Mühe voneinander trennen lassen; die Facetten sind nicht ganz eben und von etwas verschiedener Größe und Umgrenzung. An zwölf Polyedern wurden folgende Flächenzahlen ermittelt: 10, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 13. Es handelt sich also im allgemeinen um dodekaederähnliche Polyeder, und man wird daher im Hinblick auf die Facettierung mancher Karlsbader, sowie japanischer Erbsen ursprüngliche Sphärolithe von Aragonit oder Kalkspat vermuten. Die Facettenzahlen 10 und 11 erklären sich aus nicht ganz dichter Lagerung der Kugeln, die Zahl 13 aus etwas ungleicher Größe derselben. Jene Annahme betreffend den Ursprung des „dodekaedrischen Kalkes“ wird durch die mikroskopische Betrachtung eines Gesteinsdünnschliffs bestätigt. Jedes der polygonalen Felder zeigt nämlich radialstrahligen Aufbau aus Kalkspatstengeln, den man übrigens, wenn

¹ T. WADA, Minerals of Japan, 65. Tokyo 1904.

² J. NIEDZWIEDZKI, Min. Mitt. 97. 1877.

³ Dasselbe wurde mir s. Z. auf meine Bitte hin von Herrn Geheimrat RINNE in liebenswürdiger Weise zur Verfügung gestellt.

auch weniger deutlich, bereits mit bloßem Auge an Bruchflächen der Polyeder beobachten kann.

Die Peripherie der ursprünglichen Kugeln ist nicht mehr zu erkennen, ebensowenig einstiges Zement. Allothigene Ansatzpartikeln sind in den Zentren der Polyeder nicht bemerkbar.

Daß sich am Schafberge bei Salzburg an Stelle des „dodekaedrischen Kalkes“ auch Oolithe oder Pisolithe mit nicht facettierten Kugeln finden, ist kaum wahrscheinlich¹. Die wohl unzweifelhafte lokale Beschränktheit des „dodekaedrischen Kalkes“ dürfte vielleicht mehr auf ursprüngliche Erbsensteine als Rogensteine hinweisen, ebenso der für Dodekaederbildung allzugroße Zementgehalt der meisten (nichtäolischen) Oolithe.

Vielleicht kann auf ähnliche Weise, wie „dodekaedrischer Kalk“ aus Erbsensteinen oder Rogensteinen hervorgeht, in Basalten an die Stelle sphärolithischen oder variolithischen Gefüges kokkolithischer Zerfall treten.

Die Beimischung von Ca im Kalifeldspat und die Myrmekitbildung.

Von Arthur Schwantke in Marburg.

Mit der Rolle, die das Calcium im Kalifeldspat spielt, hat man sich bisher, wie es scheint, im allgemeinen wenig beschäftigt. Wo eine bestimmte Ansicht darüber ausgesprochen wurde, war es bei der Annahme homogener Mischkristalle nach der Analogie der Plagioklase vom theoretischen Standpunkte aus auch das zunächst gegebene, zu dem Kalisilikat $K_2Al_2Si_6O_{16}$ als beigemischte Komponente das Anorthitsilikat $CaAl_2Si_2O_8$ anzunehmen. Insbesondere ist diese Annahme auch von J. H. L. VOGT bei der Betrachtung der Feldspatmischungen und Entmischungen gemacht worden (Physikalisch-chemische Gesetze der Kristallisationsfolge in Eruptivgesteinen. TSCHERMAK's Mineralog. und petrograph. Mitteil. N. F. 24. 1905. p. 505 ff.). In den Analysen wird sich dann der Einfluß der Anorthitmenge durch das Sinken der Ziffer der Kieselsäure erkennen lassen, ganz wie bei den Plagioklasen, während die Bei-

¹ Auf eine diesbezügliche Anfrage schickte mir Herr Professor FUGGER in Salzburg in liebenswürdiger Weise einen Riesenoolith mit bis walnußgroßen, konzentrisch-schaligen Ellipsoiden und bemerkte, daß derselbe angeblich vom Schafberge stamme; doch ließ sich das Alter dieses Gesteins nicht feststellen und daher auch nicht mit demjenigen des „dodekaedrischen Kalkes“ identifizieren.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Centralblatt für Mineralogie, Geologie und Paläontologie](#)

Jahr/Year: 1909

Band/Volume: [1909](#)

Autor(en)/Author(s): Johnsen Arrien

Artikel/Article: [Ueber dichteste Kugelpackung in Erbsen- und Rogensteinen und die Entstehung des „dodekaedrischen Kalkes“. 302-311](#)