© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/;www.zobodat.at

Original-Mitteilungen an die Redaktion.

Ueber die Grössenordnung der Gravitations-Anisotropie in Kristallen.

Von **O. Mügge** in Göttingen.

Mit 1 Textfigur.

Mackenzie[1] hat 1894 die Frage aufgeworfen, ob die Anziehung, welche ein Kristall (Kalkspat) auf eine andere Substanz ausübt, von der Lage der letzteren zu seiner optischen Achse abhängt, so daß er in der einen Richtung so wirken würde, als wäre er von größerer Masse als in der andern. Es würde sich das durch eine Abweichung vom Newton'schen Gesetz bemerklich machen, indem eine Kugel aus anisotroper Substanz nicht mehr so anziehen würde, als wäre ihre Masse in ihrem Mittelpunkte konzentriert. Daraufhin unternommene Versuche ergaben zwar, daß die Anziehung von Kalkspatkristallen auf Blei und andere Kalkspäte unabhängig von der Orientierung der Achse des Kalkspates war, indessen gestatteten die Versuche nur Abweichungen von mehr als $\frac{1}{2}$ % der Gesamtanziehung zu erkennen.

Genauere Versuche haben darüber später J. H. Poynting und P. L. Gray[2] angestellt. Sie beruhen auf der Erwägung, daß, wenn eine Anisotropie im Schwerefelde bei Kristallen existiert, zwei kristalline Massen eine richtende Wirkung aufeinander ausüben müssen und daß man eine solche in der Tatsache finden könnte, daß Kristalle beim Wachsen Teilchen aus ihrer Mutterlauge in orientierter Stellung auf sich niederschlagen. Durch Versuche konnten indessen auch sie eine Anisotropie nicht nachweisen; es ergab sich vielmehr, daß die Anziehungen zwischen zwei Quarzkugeln bei paralleler und gekreuzter Lage ihrer Hauptachsen nicht mehr als 1 : 16500 voneinander abweichen können. Die folgenden Bemerkungen sollen zeigen, daß eine Anisotropie der Schwere zwar zu erwarten, ihre Größenordnung aber eine ganz außerordentlich kleine ist.

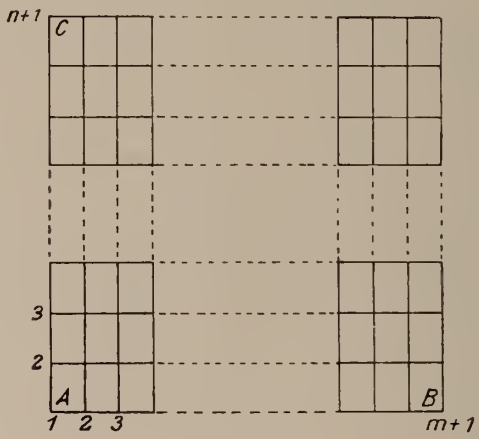
Fig. 1 soll einen Querschnitt durch einen Kristall von quadratischem Umriß vorstellen, in welchem die kleinsten Teilchen —

[1] Mackenzie, John Hopkins Univ. Circulars. **13**. p. 76. 1894. (N. Jahrb. f. Min. etc. 1901. I. -380-.)

[2] J. H. Poynting und P. L. Gray, Phil. Trans. Roy. Soc. London. A. **192**. p. 245. 1899. (N. Jahrb. f. Min. etc. l. c.)

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/;www.zobodat.at

der Kürze halber im folgenden Molekeln genannt —, netzförmig parallel den Seiten des Quadrats angeordnet sind; der Querschnitt liege in einem Erdradius und A B sei dem Schwerpunkt der Erde zugewandt. Senkrecht zur Zeichnungsebene mögen der in der Figur angedeuteten gleichartige Gitterebenen in gleichen Abständen aufeinander folgen, wir betrachten aber nur eine dieser Ebenen, welche also der Dicke von nur einer Molekelschicht entsprechen soll. Der Querschnitt Fig. 1 betrage 1 cm^2, auf seiner Seite A B mögen sich $m + 1$ Molekeln befinden, auf der Seite A C (in der Richtung des Erdradius) dagegen $(n + 1)$ Molekeln. Wir wählen als Längeneinheit $\frac{1}{m \cdot n}$ cm, dann befinden sich also die Teilchen auf A B in einem Abstande von n Einheiten, die auf A C im Ab-



stande von m Einheiten, die Länge des Erdradius, oder genauer der Abstand zwischen der mittleren Molekel der Reihe A B und dem Schwerpunkt der Erde (gemessen in unserer sehr kleinen Einheit) betrage r.

Setzen wir das Produkt aus der Masse einer Molekel und der Masse der Erde gleich 1, so ist die Anziehung für die mittlere Molekel der Reihe A B proportional $\frac{1}{r^2}$, für die anderen Molekel der Reihe A B ist ihr Abstand vom Schwerpunkt der Erde um einen kleinen Betrag größer als r, dieser ist aber verschwindend klein, auch gegenüber dem Abstand zweier benachbarter Molekelreihen parallel A B. Die Gesamtanziehung zwischen allen Molekeln der Reihe A B einerseits und der im Schwerpunkt der Erde vereinigt gedachten Masse der Erde anderseits beträgt daher $(m + 1) \cdot \frac{1}{r^2}$.

Für alle Molekeln der nächsten A B parallelen Reihe beträgt

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/;www.zobodat.at

dagegen die Anziehung $(m+1)\frac{1}{(r+m)^2}$, für die dritte Reihe ebenso $(m+1)\frac{1}{(r+2m)^2}$ usw. bis $(m+1)\frac{1}{(r+n.m)^2}$.

Die Summe der Anziehungen für sämtliche Molekeln der Lamelle in der Stellung, wo sich der Schwerpunkt der Erde auf der in der Mitte von AB errichteten Normalen befindet, wollen wir Σm nennen, sie beträgt demnach:

$$\Sigma m = (m+1)\left[\frac{1}{r^2}+\frac{1}{(r+m)^2}+\frac{1}{(r+2m)^2}+\cdots\frac{1}{(r+n.m)^2}\right].$$

Kehrt man die Seite AC der kristallinen Lamelle dem Schwerpunkt der Erde zu, indem man die Lamelle um ihren geometrischen Mittelpunkt um 90° in der Ebene der Zeichnung dreht, so beträgt die Anziehung für die Molekeln der ersten Reihe $(n+1)\frac{1}{r^2}$, für die zweite Reihe $(n+1)\frac{1}{(r+n)^2}$ usf., für die letzte Reihe $(n+1)\frac{1}{(r+m.n)^2}$. Die Gesamtanziehung in der Richtung senkrecht AC, welche wir Σn nennen wollen, ist also:

$$\Sigma n = (n+1)\left[\frac{1}{r^2}+\frac{1}{(r+n)^2}+\frac{1}{(r+2n)^2}+\cdots\frac{1}{(r+m.n)^2}\right].$$

Machen wir nun die Annahme, daß $m = 10^8$ ist, was ungefähr den Dimensionen der Molekel entspricht, daß dagegen der Abstand der Molekeln in der Richtung AC zehnmal so groß sei (in den meisten Fällen ist vermutlich der Unterschied der Abstände erheblich geringer!), also $n = 10^7$, so wird r, der Radius der Erde, der in Zentimetern von der Größenordnung 10^8 ist, in unserer Einheit gleich $10^8 \times 10^7 \times 10^8 = 10^{23}$ zu setzen sein. Es liegen also für Σm und Σn zwei, praktisch genommen, unendliche Reihen vor, über welche ich meinem verehrten Kollegen C. Runge folgende Mitteilungen hinsichtlich ihrer oberen und unteren Grenzwerte verdanke:

„Es ist:

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{r+m}=\frac{m}{r(r+m)}<\frac{m}{r^2}<\frac{m}{r^2-\left(\frac{m}{2}\right)^2}=\frac{1}{r-\frac{m}{2}}=\frac{1}{r+\frac{m}{2}}$$

ebenso:

$$\frac{1}{r+m}-\frac{1}{r+2m}=\frac{m}{(r+m)(r+2m)}<\frac{m}{(r+m)^2}<\frac{m}{(r+m)^2-\left(\frac{m}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{r+\frac{m}{2}}-\frac{1}{r+\frac{3m}{2}}$$

ebenso:

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/;www.zobodat.at

$$\frac{1}{r+2m} - \frac{1}{r+3m} = \frac{m}{(r+2m)(r+3m)}$$

$$< \frac{m}{(r+2m)^2} < \frac{m}{(r+2m)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} = \frac{1}{r+\frac{3m}{2}} - \frac{1}{r+\frac{5m}{2}}$$

usw.,

folglich, wenn man summiert:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r+(n+1)m} < m\left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+m)^2} + \frac{1}{(r+2m)^2} + \cdots \frac{1}{(r+n.m)^2}\right]$$

$$< \frac{1}{r-\frac{m}{2}} - \frac{1}{r+(n+\frac{1}{2})m}$$

oder nach Multiplikation mit $\frac{m+1}{m}$

$$\frac{\frac{n+1}{r}\cdot\frac{m+1}{r}}{1+m\,\frac{n+1}{r}} < (m+1)\left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+m)^2} + \frac{1}{(r+2m)^2} + \cdots \frac{1}{(r+n.m)^2}\right]$$

$$< \frac{\frac{n+1}{r}\cdot\frac{m+1}{r}}{\left(1-\frac{m}{2r}\right)\left(1+\frac{2n+1}{2r}m\right)}.$$

Durch Vertauschung von m und n erhält man ebenso Σn.

Nach Umformung der oberen und unteren Grenzwerte in

$$\frac{(m+1)(n+1)}{r^2+r.m.n+r.m} < \Sigma m < \frac{(m+1)(n+1)}{r^2+r.m.n-\frac{2n+1}{4}m^2} \qquad \text{I}$$

und

$$\frac{(m+1)(n+1)}{r^2+r.m.n+r.n} < \Sigma n < \frac{(m+1)(n+1)}{r^2+r.m.n-\frac{2m+1}{4}n^2} \qquad \text{II}$$

erkennt man, daß die unteren Grenzwerte, wir nennen sie Σmu und Σnu, von Σm und Σn sich nur unterscheiden durch den letzten Summanden des Nenners. Ist, wie in Fig. 1 angedeutet, $m > n$, so gilt ersichtlich

$$\Sigma mu < \Sigma nu.$$

Die oberen Grenzwerte, Σmo und Σno, unterscheiden sich ebenfalls nur durch den letzten Summanden des Nenners. Die Differenz dieser beiden Summanden ist:

$$\frac{2n+1}{4}m^2 - \frac{2m+1}{4}.n^2,$$

ihr Vorzeichen ist identisch mit dem von

$$2n.m^2 + m^2 - 2m.n^2 - n^2 = (m-n)(2m.n+m+n).$$

Ist also $m > n$, so ist $\frac{2n+1}{4}m^2 > \frac{2m+1}{4}.n^2$ und für die oberen Grenzen gilt

$$\Sigma mo > \Sigma no.$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/;www.zobodat.at

Die Grenzen von Σn liegen also zwischen denen von Σm und die größtmögliche Anisotropie der Gravitation liegt also zwischen den beiden Werten

$$\Sigma mo : \Sigma nu > 1 \text{ und } \Sigma mu : \Sigma no < 1.$$

Durch Einsetzen der Werte aus I und II erhält man hierfür

$$\frac{\Sigma mo}{\Sigma nu} = \frac{r^2 + r.m.n + r.n}{r^2 + r.m.n - \frac{2n+1}{4} m^2} = \frac{r^2 + r.m.n + r.n}{r^2 + r.m.n - \frac{n.m^2}{2} - \frac{m^2}{4}}$$

Da r sehr groß ist gegenüber m und n, kann man in erster Annäherung $\frac{m^2}{4}$ vernachlässigen, und erhält so:

$$\frac{\Sigma mo}{\Sigma nu} = \frac{r^2 + r.m.n + r.n}{r^2 + r.m.n - \frac{n.m^2}{2}}$$

Setzt man hierin $r = 10^{23}$, $m = 10^8$, $n = 10^7$, so entsteht:

$$\frac{\Sigma mo}{\Sigma nu} = \frac{10^{23} + 10^{15} + 10^7}{10^{23} + 10^{15} - 0{,}5}$$

oder, wenn man jetzt auch 0,5 vernachlässigt:

$$\frac{\Sigma mo}{\Sigma nu} = \frac{10^{16} + 10^8 + 1}{10^{16} = 10^8}$$

Analog entsteht

$$\frac{\Sigma mu}{\Sigma no} = \frac{10^{15} + 10^7}{10^{15} + 10^7 + 1}$$

Die Anziehung in beiden Richtungen stimmt also bis auf mindestens eine Einheit der 15. Dezimale überein, so daß einstweilen keine Hoffnung besteht, die Differenz nachzuweisen. Das Verhältnis kann sich möglicherweise der Einheit noch viel stärker nähern, da ja die beiden Grenzwerte von Σn zwischen denen von Σm liegen; absolute Gleichheit tritt ein, wenn m und n beide unendlich werden, eine Anisotropie ist aber zu erwarten, wenn die Kristalle tatsächlich aus diskreten Teilchen aufgebaut sind. Wenn $m = n < \infty$ ist, werden zwar die Anziehungen in der Richtung der Normalen von AB und AC einander gleich, nicht aber in den zwischenliegenden Richtungen, auch nicht bei regulären Kristallen. Die Anziehung wird hier z. B. in der Richtung einer Würfelkante etwas verschieden sein von der in der Richtung der Würfelflächendiagonalen, indessen müßte die Anisotropie noch erheblich geringer ausfallen als in dem berechneten Beispiel, da hier $m : n = \sqrt{2}$ ist. Ähnliches gilt für Anziehungsrichtungen in der Basis hexagonaler, tetragonaler und trigonaler Kristalle.

Mit der Geringfügigkeit der Gravitations-Anisotropie mag es zusammenhängen, daß eine Abhängigkeit der kristallographischen

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/;www.zobodat.at

Orientierung aufgewachsener Kristalle von der Schwere niemals beobachtet ist[1].

Eine Verschiedenheit der Anziehung in Richtung und Gegenrichtung ist nicht zu erwarten, solange die Molekeln als Kugeln angesehen werden dürfen; nimmt man aber die Molekeln selbst als azentrisch an, so wird allerdings eine solche auftreten können, aber ihre Größenordnung müßte noch kleiner sein, als vorhin abgeleitet[2].

Man kann fragen, ob nicht in dem Falle, daß auch r sehr klein, aber immerhin noch groß gegenüber m und n ist, also bei der Anziehung kleiner Kugeln von isotropem oder quasiisotropem Material auf „Kristallkeime" von molekularen Dimensionen eine stärkere Bevorzugung gewisser Richtungen der Keime hinsichtlich der Anziehung eintreten kann. (Solche Verhältnisse wären z. B. denkbar bei der Verdichtung meteorischer Staubmassen, die sich in großer Entfernung von anderen Himmelskörpern befinden und also ihrer Anziehung entzogen sind, aber in die Nähe gröberer Staubteilchen geraten.) Setzt man dementsprechend z. B.

$$r = 10^6,\ m = 10,\ n = 3,$$

(dann ist also die Kantenlänge des quadratischen Blättchens gleich $10 \times 3 \times 10^{-8}$ cm $= 3 \times 10^{-7}$ cm und seine Entfernung vom Schwerpunkt des anziehenden gröberen Staubteilchens $r = 10^{-3}$ cm $= 0{,}01$ mm), so lassen sich jetzt nicht nur Grenzwerte von Σm und Σn, sondern letztere selbst noch berechnen. Aber man findet auch jetzt noch keine Abweichung zwischen beiden, welche über 1 : 5 Millionen hinausginge und erst für $m = 10$, $n = 3$ und $r = 1000$ weicht das Verhältnis beider um 1 : 10000 von der Einheit ab. Dann ist aber die Entfernung des feineren Stäubchens vom Schwerpunkt des größeren schon submikroskopisch, nämlich

---

[1] Eine merkliche Einwirkung der Schwere auf die Winkel der Kristalle durch ungleiche Anziehung der unteren und oberen Molekelschichten scheint nach Obigem auch ausgeschlossen, nicht aber eine Deformation durch das Gewicht des Kristalls selbst. Eine solche ist sogar von Brezina (Sitzungsber. Wien. Akad. **64**. p. 297. 1871) behauptet und Brauns (N. Jahrb. f. Min. etc. 1887. I. p. 145) hat dies durch Messungen an regulären Oktaedern von Bleinitrat zu erhärten gesucht. Indessen könnten die beobachteten Abweichungen von den theoretischen Winkelwerten auf der Beeinflussung der Lage von Vizinalflächen durch die (von der Schwere abhängigen) Strömungen der Mutterlauge beruhen. Entscheidende Messungen müßten nicht an gewachsenen, sondern an Spalt- oder andern, nur von der Struktur abhängigen Flächen angestellt werden.

[2] Zwar ist festgestellt, daß manche Kristalle mit polaren Achsen das eine Ende derselben hinsichtlich der Aufwachsung bevorzugen, indessen ist dieses Ende keineswegs immer das untere oder obere (d. h. dem Erdmittelpunkt nähere oder fernere); es kann dies vielmehr, wie Johnsen (N. Jahrb. f. Min. etc. Beil.-Bd. XXIII. p. 278. 1907) hervorgehoben, mit der verschiedenen Lösungsgeschwindigkeit in Richtung und Gegenrichtung dieser Achse zusammenhängen.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/;www.zobodat.at

nur 0,1 μ. Kristalline, raumgitterartige Struktur wird also eine kristallographische Orientierung infolge des Gesetzes der Massenanziehung erst bei nahezu molekularen Abständen und Dimensionen der anziehenden Massen bewirken können.

Man könnte geneigt sein zu schließen, daß bei den eingangs erwähnten Versuchen demnach keine Aussicht sei, eine merkliche Anisotropie zu finden. Indessen sind die vorstehenden Betrachtungen auf jene Versuche nicht ohne weiteres anwendbar. Es liegen bei ihnen wesentlich kompliziertere Verhältnisse vor; einmal weil bei einem Teil der Versuche beide Massen anisotrop waren, zweitens weil die Entfernung ihrer Mittelpunkte nicht groß war gegenüber ihren Dimensionen und also die Voraussetzung nicht mehr zutrifft, daß alle Punkte einer Reihe der ersten Masse, wie AB in Fig. 1 merklich gleich weit vom Mittelpunkt der zweiten entfernt und somit die Anziehungsrichtungen für alle Teilchen auch nicht mehr einander parallel sind.

Ueber Indikatoren zur mechanischen Gesteinsanalyse und spezifischen Gewichts-Bestimmung.

Von **V. Goldschmidt** in Heidelberg.

In diesem Centralbl. 1912. p. 508 publiziert G. Linck ein hübsches und nützliches Kästchen mit

Indikatoren zur Bestimmung des spezifischen Gewichts von Flüssigkeiten,

und bemerkt dazu in der Einleitung:

„Man kommt häufig in die Lage, sich eine Lösung von bekanntem spezifischen Gewicht herzustellen, oder das spezifische Gewicht eines Körpers annähernd bestimmen zu müssen. Da es aber umständlich und zeitraubend ist, dies mit der hydrostatischen Wage auszuführen, so hat man sich vielfach Indikatoren hergestellt, die aber meist zu weite Abstände zwischen den einzelnen Skalenteilen zeigen und meines Wissens nicht in den Handel kamen.“

Linck's Indikatoren sind 24 Würfelchen aus Glas in einem Kästchen. Preis bei Krantz in Bonn 20 Mk. Sie haben folgende spezifische Gewichte:

No.	Sp. G.	No.	Sp. G.	No.	Sp. G	No.	Sp. G.	No.	Sp. G.	No.	Sp. G.
1	2,240	5	2,480	9	2,617	13	2,870	17	3,180	21	3,350
2	2,330	6	2,518	10	2,690	14	2,935	18	3,205	22	3,480
3	2,387	7	2,550	11	2,750	15	3,040	19	3,240	23	3,530
4	2,410	8	2,576	12	2,785	16	3,110	20	3,275	24	3,555

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Centralblatt für Mineralogie, Geologie und Paläontologie

Jahr/Year: 1913

Band/Volume: 1913

Autor(en)/Author(s): Mügge Johannes Otto Conrad

Artikel/Article: Ueber die Grössenordnung der Gravitations-Anisotropie in Kristallen. 33-39