

noch eine große, etwas bröcklige Hornblende-Biotitbombe. Die Reihe dieser Ausscheidungen weiter fortzusetzen, soll aber nicht Aufgabe dieser Arbeit sein. Es sollte vielmehr gezeigt werden, wie mannigfach in ihrer Zusammensetzung, sowohl in der Kombination der einzelnen Mineralien, als in der Häufigkeit der einzelnen Komponenten, die Urausscheidungen im Tuff selbst eines und desselben Aufschlusses wechseln können.

Mineralogisches Institut der Universität Marburg i. Hessen.

Studien über Asterismus.

Von **Paul Kaemmerer** in Dresden.

Mit 22 Textfiguren.

Die folgenden Darlegungen schließen sich an die von E. KALKOWSKY veröffentlichte Abhandlung über opaleszierenden Quarz¹ an. Ein großer Teil dieser Abhandlung beschäftigt sich mit der Ursache des Asterismus, die auch die Ursache der Opaleszenz ist. „Asterismus wird durch Reflexion und Beugung einfallenden Lichtes an Dingen irgendwelcher Art, die kristallographisch geordnet in ihrem Wirte stecken, hervorgerufen².“ Hypomikroskopische (ultramikroskopische) nadelförmige Dinge, die E. KALKOWSKY „Asteriten“ nennt, sind es, die den Asterismus des opaleszierenden Quarzes bewirken. Es wird zwischen Epasterismus und Diasterismus unterschieden, je nachdem der Asterismus im auffallenden oder durchfallenden Lichte beobachtet wird. Die Lichterscheinung als solche wird Aster genannt (Epaster oder Diaster). Ihre einzelnen kurvenartigen Teile heißen Asterstrahlen oder Asterkurven (a. a. O.).

1. Asterkurven an planparallelen Platten von brasilianischem Rosenquarz.

E. KALKOWSKY hat die Asterkurven des opaleszierenden Quarzes eingehend beschrieben³. Zum Beispiel erscheinen an einer Reihe von planparallelen Platten aus brasilianischem Rosenquarz, wenn man sie dicht vors Auge bringt und eine Lichtquelle fixiert, in der Hauptsache drei je nach der Orientierung der Platte und der Einfallrichtung des Lichtes verschieden gestaltete Asterkurven, die sich im Bilde der Lichtquelle Q durchschneiden. Unter den

¹ E. KALKOWSKY, Opaleszierender Quarz, Zeitschr. f. Krist. 55. p. 28—50. 1915.

² a. a. O. Abschnitt II.

³ a. a. O. Abschnitt IV.

einzelnen Fällen treten fünf Haupttypen deutlich hervor. Erstens bemerkt man den eigentlichen „Aster“, einen von drei Geraden gebildeten regelmäßigen sechsstrahligen Stern (Fig. 1 a). Dreht man eine Platte, die diese Erscheinung zeigt, beliebig, so sieht man die Strahlen des Sterns sich krümmen. Dies kann so weit gehen, daß sie sich zum zweiten Male in einem Punkt schneiden. Dann hat man den zweiten Typus (Fig. 1 b). Die dritte Hauptform ist die, daß eine der drei Kurven geschlossen ist, während die beiden andern sich zweimal auf ihr schneiden (Fig. 1 c). Viertens kommt der Fall vor, daß sich eine der Kurven zu einem „Punkt“

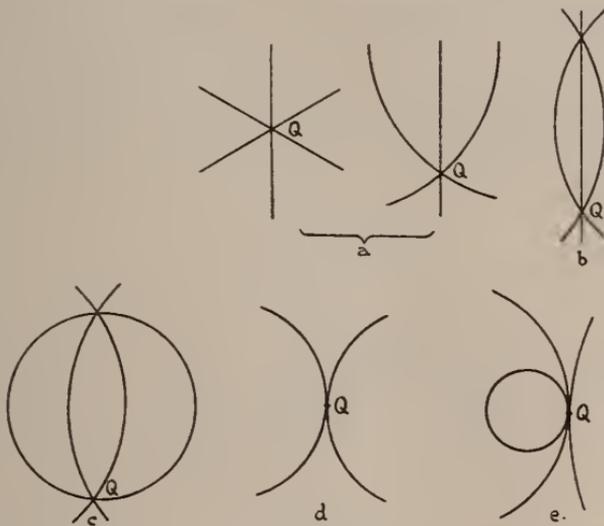


Fig 1. Die typischen Gestalten der Asterkurven in brasilianischem Rosenquarz. Q Bild der Lichtquelle.

zusammenzieht, durch den die beiden andern hindurchgehen (Fig. 1 d). Endlich fünftens kann man beobachten, daß alle drei Kurven durch einen Punkt gehen, in dem sie einander berühren (Fig. 1 e).

Es erhob sich die Frage, ob es nicht möglich sei, durch irgendwelche Annahmen über Orientierung und Art der Asteriten wenigstens annähernd zu einer formelmäßigen Darstellung der Lichtkurven zu gelangen. Genau genommen sind diese ohne Zweifel transzendent. Jedoch bietet es außerordentliche Schwierigkeiten, alle mitwirkenden Ursachen in die Rechnung einzubeziehen. Zu beachten war, daß bei der Kleinheit der Teilchen neben der Reflexion auch die Beugung des Lichtes in Betracht kommt. Die Doppelbrechung im Quarz sowie die Dispersion konnten zunächst wegen ihrer geringen Größe unberücksichtigt bleiben. Über die Natur der reflektierenden Teilchen konnte nur

die Annahme gemacht werden, daß sie wie sehr kleine spiegelnde Kreiszyylinder wirken und einfachbrechende Körper sind. E. KALKOWSKY¹ ist zu der Anschauung gekommen, daß sie „intermolekulare Hohlräume“ seien.

Im folgenden soll über die auf dieser Grundlage erhaltenen Resultate berichtet werden.

Für die Überlassung von mehreren planparallelen Platten aus brasilianischem Rosenquarz zum Vergleich von Rechnung und Beobachtung sei auch an dieser Stelle Herrn Geheimen Hofrat Prof. Dr. KALKOWSKY ergebenst gedankt.

2. Reflexion und Brechung des Lichtes durch einen sehr dünnen einfachbrechenden Kreiszyylinder.

A. Theoretisches. Wenn ein sehr dünner spiegelnder Kreiszyylinder gegeben ist, so kann man alle möglichen Grenz-ebenen (Tangentialebenen), die für Reflexion des Lichtes in Betracht

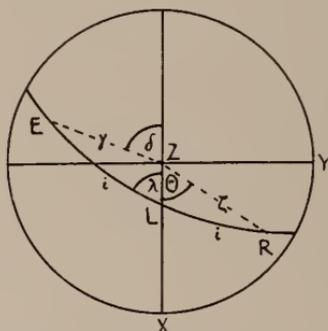


Fig. 2. Zur Ableitung der Gleichung des Kegels der reflektierten Strahlen.

kommen, als annähernd durch eine Gerade, die Zylinderachse hindurchgehend, ansehen. Alle möglichen Einfallslotte liegen dann in einer zur Zylinderachse senkrechten Ebene, und alle möglichen Einfallsebenen bei bestimmter Einfallrichtung des Lichtes bilden ein Bündel mit der Einfallrichtung als Achse.

Wird ein solcher Zylinder von einem Bündel paralleler Strahlen von bestimmter Richtung getroffen, so treten alle möglichen Reflexionen gleichzeitig ein und die reflektierenden Strahlen bilden einen Kegel. Dessen Gleichung soll zunächst bestimmt werden.

In Fig. 2 ist in einer stereographischen Projektion dargestellt die Einfallrichtung E des Lichtes und das Einfallslot L für irgend-

¹ a. a. O. Abschnitt VII.

eine Grenzebene. E und L bilden den Winkel i miteinander und bestimmen die Einfallsebene e , in der sich auch, ebenfalls um i von L abstehend, der reflektierte Strahl R befindet. Die Y-Achse des Koordinatensystems XYZ stellt die Richtung der Zylinderachse dar, die XZ-Ebene ist die Ebene der Einfallslotte. Die Ebenen EZ und RZ bilden mit der XZ-Ebene die Winkel δ und Θ . Der Winkel ZE wird mit γ , der Winkel ZR mit ζ und der Winkel zwischen der XZ-Ebene und der Einfallsebene mit λ bezeichnet.

Aus Dreieck ELZ folgt:

$$\text{I.} \quad \sin i \cdot \sin \lambda = \sin \gamma \cdot \sin \delta,$$

aus Dreieck RLZ:

$$\text{II.} \quad \sin i \cdot \sin \lambda = \sin \zeta \cdot \sin \Theta,$$

Aus I und II ergibt sich:

$$\sin \gamma \cdot \sin \delta = \sin \zeta \cdot \sin \Theta.$$

Führt man nach den Formeln

$$x = r \cdot \sin \zeta \cos \Theta$$

$$y = r \cdot \sin \zeta \sin \Theta$$

$$z = r \cdot \cos \zeta$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

rechtwinklige Koordinaten ein, so erhält man als Gleichung des Kegels der reflektierten Strahlen:

$$\text{III.} \quad (x^2 + z^2) \sin^2 \delta \sin^2 \gamma - y^2 (1 - \sin^2 \delta \sin^2 \gamma) = 0.$$

Da aus dem Dreieck RYZ

$$\cos YR = \sin \zeta \sin \Theta$$

folgt, so gilt auch, wenn $YR = \varepsilon$ gesetzt wird, nach I bis III

$$\text{IV.} \quad (x^2 + z^2) \cos^2 \varepsilon - y^2 \sin^2 \varepsilon = 0.$$

Diese Gleichung stellt einen Kreiskegel mit der Achse Y und dem Öffnungswinkel 2ε dar.

Man kann dieses Resultat in dem Satze aussprechen:

Fällt auf einen sehr dünnen reflektierenden Kreiszyylinder ein Bündel paralleler Lichtstrahlen ein, die mit der Zylinderachse den Winkel ε bilden, so entsteht ein Kreiskegel von reflektierten Strahlen, dessen Achse die Zylinderachse und dessen Öffnungswinkel 2ε ist.

Es gibt demnach eine unendliche Zahl von Einfallsrichtungen, die denselben Reflexionskegel hervorbringen, nämlich alle die, die den Winkel ε mit der Zylinderachse bilden, also selbst auf einem dem Reflexionskegel

kongruenten, bezüglich der XZ-Ebene symmetrisch gelegenen Kegel liegen.

Schreibt man dem Zylinder den Brechungsindex n zu, so

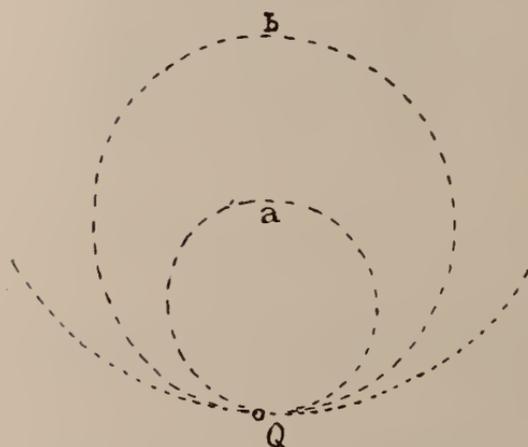


Fig. 3. Reflexe einer unendlich fernen Lichtquelle Q an einer Nadel bei verschiedenem Einfallswinkel.

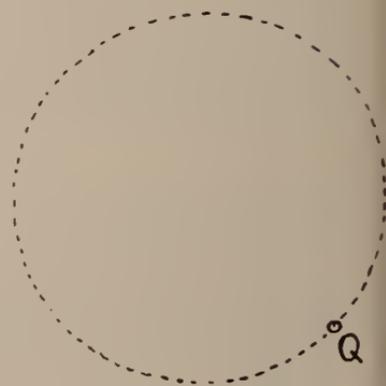


Fig. 4. Wie Fig. 3. Die Nadel liegt schräg seitlich in den Lichtstrahlen.

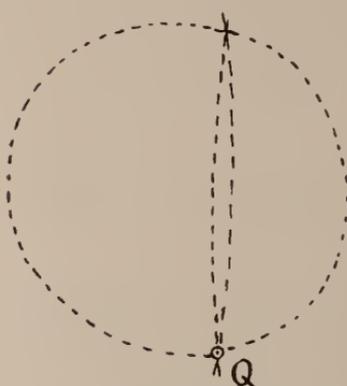


Fig. 5. Reflexe an drei in einer Ebene unter 60° gekreuzten Nadeln. Die Nadelebene fast horizontal.

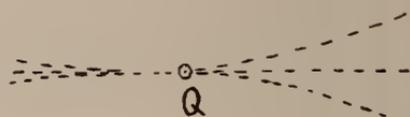


Fig. 6. Wie Fig. 5. Die Nadelebene vertikal, etwas schräg gegen die Lichtstrahlen. Eine Nadel vertikal.

erhält man auf analoge Weise wie oben die Gleichung eines Kegels der gebrochenen Strahlen

$$(x^2 + z^2) \cos^2 \varepsilon - y^2 (n^2 - \cos^2 \varepsilon) = 0,$$

der ebenfalls ein Kreiskegel mit der Achse Y ist.

Die weitere Untersuchung des aus dem Zylinder austretenden Lichtes zeigt, daß dessen Strahlen im Bereich der hier gemachten Annäherung mit den Strahlen des Reflexionskegels zusammenfallen. Die Hauptwirkung eines der angenommenen Zylinder ist also die Erzeugung des Reflexionskegels IV.

B. Beobachtungen. Um diese theoretischen Betrachtungen etwas zu kontrollieren, wurde folgende Versuchsanordnung gewählt. Eine Lichtquelle wurde durch einen Schirm mit kleiner kreisförmiger Öffnung abgeblendet. Die von der Öffnung ausgehenden Strahlen wurden durch einen Kollimator parallel gemacht. In den Weg der Strahlen wurde als reflektierender Körper eine dünne polierte Metallnadel gebracht. Diese befand sich dicht vor dem Objektiv eines photographischen Apparats, der auf Unendlich eingestellt war. An Stelle der Platte wurde ein durchscheinendes Papierblatt eingefügt, auf dem die erscheinenden Lichtkurven nachgezeichnet wurden. Der direkten photographischen Aufnahme begegneten Schwierigkeiten wegen der Schwäche der Lichtkurven gegenüber dem Hauptbild des Spaltes.

Bei einer Nadel, deren Achse in die horizontale Einfallrichtung des Lichtes gebracht und dann allmählich etwas dagegen geneigt wurde, erschienen bei drei verschiedenen Einfallswinkeln die drei Kurven der Fig. 3 (Q ist das Bild der Lichtquelle). Aus den Konstanten des photographischen Apparats kann man berechnen, daß die Nadel für die Kurve a $4-5^{\circ}$, für die Kurve b $8-9^{\circ}$ gegen die Lichtstrahlen geneigt war.

Auch eine seitlich schräg in das einfallende Lichtbündel gestellte Nadel gab einen die Erwartungen erfüllenden Reflex (Fig. 4).

Im Hinblick auf die drei beim Quarz auftretenden Lichtkurven wurden noch die Reflexe von drei in einer Ebene unter 60° gekreuzten Nadeln untersucht.

Lag dabei die Ebene der drei Nadeln schwach geneigt gegen die Horizontalebene, so erschien das in Fig. 5 wiedergegebene Kurvensystem, dessen Ähnlichkeit mit Fig. 1c in die Augen fällt.

Stand dagegen die Ebene der Nadeln vertikal, ein



Fig. 7. Reflexe an drei dünnen Glasstäbchen; sonst wie Fig. 5.

wenig gegen das einfallende Licht gedreht und eine Nadel selbst vertikal, so erhielt man die drei Kurven der Fig. 6. Diese gehören zum Typus 1 b.

An drei sehr dünnen Glasstäbchen ließen sich dieselben Erscheinungen nachweisen, wie sie die drei Nadeln zeigten. So wurde z. B. Fig. 7 erhalten, die der Fig. 5 durchaus entspricht.

3. Beugungserscheinungen.

A. Theoretisches. Die Beugungserscheinungen, die eine Schar von parallelen Stäbchen gibt, kann man annähernd erschließen, wenn man die Beugungserscheinungen der ebenen Gitter in Betracht zieht. Die Schar der Stäbchen kann dann als eine Reihe hintereinander liegender Gitter angesehen werden. Das, was gewöhnlich als charakteristische Gittererscheinungen betrachtet und verwertet wird, die seitlichen Beugungsmaxima bezw. die Beugungsspektren, kommt allerdings hier nicht in Frage, da diese je für jedes folgende Gitter hier an andern Stellen liegen, sich also gegenseitig stören und mischen.

Die Beugungserscheinung an einem Gitter wird zurückgeführt auf die Beugung durch einen rechteckigen Spalt¹. Man betrachtet gewöhnlich den Fall, daß die Lichtquelle Q und der Punkt P, in dem beobachtet wird, beide unendlich fernliegen (FRAUNHOFER'sche Beugungserscheinung). Die Seiten des Rechtecks seien der X- und Y-Achse des Koordinatensystems parallel und der Mittelpunkt des Rechtecks sei der Anfangspunkt O. Die lange Rechteckseite sei b. Der Winkel POY sei β , der Winkel QOY = ϵ , λ die Wellenlänge des benutzten Lichtes.

Es tritt dann eine Beugungserscheinung ein, die quer zur Längsrichtung des Spaltes von Dunkelheitsstellen durchsetzt wird, die der Bedingung genügen:

$$\text{V.} \quad \cos \beta = \pm \frac{h \lambda}{b} - \cos \epsilon$$

$$(h = 1, 2, 3 \dots)$$

Da $\lambda : b$ sehr klein ist, auch für h große Werte nicht in Frage kommen, so folgen diese Dunkelflächen sehr dicht aufeinander, und es erscheint im wesentlichen ein schmaler Lichtraum, der begrenzt wird von den Flächen, die die Bedingung erfüllen:

$$\text{VI.} \quad \cos \beta = \pm \frac{\lambda}{b} - \cos \epsilon.$$

Alle die Richtungen β bilden einen Kreiskegel um die Y-Achse. Für jede Einfallrichtung ϵ also ergeben sich zwei Kegel, die den lichterfüllten Raum abgrenzen. In einer Ebene, die der Beobach-

¹ Vergl. z. B. P. DRUDE, Lehrbuch der Optik. p. 199 ff. 1900.

tung in unendlicher Ferne entspricht, z. B. auf der Platte eines auf Unendlich eingestellten photographischen Apparats, müssen die Kegel sich als Kegelschnitte darstellen.

Bei senkrechtem Einfall des Lichtes hat man $\varepsilon = 90^\circ$ und

$$\cos \beta = \pm \lambda : b.$$

Diese Richtungen β sind in Kreis Kegeln enthalten, deren Öffnungswinkel fast 180° ist, da ja $\lambda : b$ sehr klein ist. Die Lichterscheinung wird ein praktisch geradliniger Streifen parallel der x-Achse sein.

Da $\lambda : b$ sehr klein ist, kann man das Ergebnis so zusammenfassen:

Ist ε von 90° verschieden, so sagt VI, daß ein gekrümmter Lichtstreifen erscheint, der von den Kurven, die VI genügen, begrenzt wird.

Fällt auf einen Spalt paralleles Licht in der Richtung ε gegen die Y-Achse (Längsrichtung des Spaltes), so erfüllt das gebeugte Licht fast genau einen Kreiskegel, dessen Achse die Y-Achse und dessen Öffnungswinkel 2ε ist.

Demnach werden auch alle einfallenden Strahlen, die den gleichen Winkel ε gegen die Y-Achse haben, denselben Beugungskegel mit der Öffnung 2ε hervorbringen.

Nun gibt eine Reihe kongruenter und gleichorientierter Spalten dieselbe Beugungserscheinung wie ein einzelner Spalt, nur mit anderer Intensität¹. Die obigen Betrachtungen bleiben also für Gitter bestehen. Ferner wirkt nach einem Theorem von BABINET² eine Schar von rechteckigen Schirmen ebenso wie in gleicher Weise verteilte rechteckige Öffnungen.

Endlich tritt noch hinzu, daß bei den praktisch herstellbaren Gittern die Gitterstäbe oder die Gitteröffnungen reflektieren und dabei eine zweite Beugungserscheinung auf der der Lichtquelle zugewendeten Seite des Gitters hervorbringen³. Diese unterliegt denselben Gesetzen wie die Beugung hinter dem Gitter. Es schließt sich also an einen unter dem Winkel ε gegen die Spaltenrichtung am Gitter reflektierten Strahl ebenfalls ein Beugungskegel an, der den oben geschilderten Beugungskegel hinter dem Gitter zu einem vollen Kreiskegel mit der Öffnung 2ε ergänzt.

Man erhält im ganzen das bemerkenswerte Resultat, daß

¹ a. a. O. p. 203.

² a. a. O. p. 204.

³ Dies wird z. B. bei den von ROWLAND auf Metall hergestellten Konkavgittern benutzt. Vergl. a. a. O. p. 208.

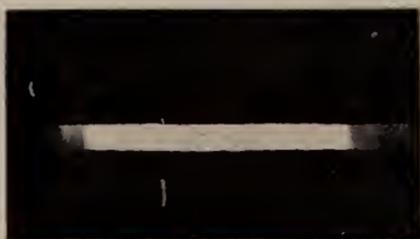


Fig. 8. Beugung des von einem Spalt ausgehenden parallelen Lichtes durch ein Glasgitter bei senkrechtem Einfall.



Fig. 9—10. Wie bei Fig. 8 bei einem Einfallswinkel von ca. 70° .



Fig. 11—12. Wie Fig. 8 bei einem Einfallswinkel von ca. 85° . Außer der Beugung des durchgehenden Lichtes (D) zeigt sich auch die Beugung des reflektierten Lichtes (R).

die Gestalt der Lichtkurven, die ein ebenes Gitter bei Beleuchtung mit parallelem Licht und bei Beobachtung im Unendlichen liefert, dieselbe ist, wie sie bei der Reflexion an einem dünnen Zylinder auftritt. Der Richtung der Zylinderachse entspricht beim Gitter die Richtung seiner Striche.

In den hier durchgeführten Betrachtungen wurde keine Rücksicht genommen auf die Dunkelkurven, die das Beugungsbild in der Richtung der Gitterstäbe durchziehen und die auch Anlaß zu den bekannten Gitterspektren geben. Diese Erscheinungen kommen hier zunächst nicht weiter in Frage.

Als wichtiges Ergebnis aber ist für das Weitere festzuhalten, daß die Beugungserscheinungen an reflektierenden Stäbchen von den Reflexionserscheinungen überlagert werden¹.

B. Beobachtungen. Zur Bestätigung der Theorie wurden einige photographische Aufnahmen von Beugungserscheinungen an Glasgittern gemacht. Die Versuchsanordnung war: Glühlampe, Spalt, Kollimator, Gitter dicht vor dem Objektiv des auf Unendlich eingestellten photographischen Apparats.

Herrn Hofrat Prof. Dr. BIEDERMANN bin ich zu vielem Danke verpflichtet, da er mir zu diesen Versuchen zwei Gitter von verschiedener Spaltenzahl aus der physikal. Sammlung der Königl. Tierärztlichen Hochschule zu Dresden in liebenswürdiger Weise zur Verfügung stellte.

In Fig. 8 ist zu sehen, wie bei senkrechtem Einfall des Lichtes eine gerade Lichtlinie erscheint. Die Figuren 9 bis 12 sind bei schrägem Einfall erhalten und zeigen Kegelschnitte als Lichtkurven. In Fig. 11 und 12 erkennt man, daß die Beugungserscheinungen vor und hinter dem Gitter (R und D) zu einer kreisförmigen oder elliptischen Kurve zusammenstreben.

Es wurde auch der Versuch gemacht, mit drei hintereinanderliegenden, unter 60° gekreuzten Gittern den Figuren 1 entsprechende Bilder zu erhalten. Doch scheiterte dies, außer für 1a (vergl. Fig. 21), daran, daß wegen der nicht entfernbaren Gitterrahmen das Licht nicht in genügend schräger Richtung durch die Gitter hintereinander gesandt werden konnte.

4. Reflexion und Beugung des Lichtes an räumlichen Systemen paralleler Stäbchen.

A. Ein System. In Abschnitt 2 wurde gefunden, daß, wenn ein dünnes zylindrisches Stäbchen ein Bündel paralleler

¹ E. KALKOWSKY hat dies bereits vermutet; a. a. O. Abschn. III, Ende.

Strahlen reflektiert, das zurückgeworfene Licht einen Kreiskegel erfüllt, dessen Achse die Zylinderachse und dessen Öffnungswinkel das Doppelte des Winkels der einfallenden Strahlen gegen die Zylinderachse ist, und daß demnach jeder Strahl, der den gleichen Winkel mit der Achse bildet, auch den gleichen Reflexionskegel erzeugt.

Daraus folgt, daß in einem räumlichen System paralleler Zylinder bei Einfall paralleler Strahlen überall durch die erste und alle folgenden Reflexionen lauter kongruente Reflexionskegel entstehen. Man kann auch sagen: Eine ebene Welle, die unter einem Winkel ε gegen ein System paralleler Zylinder einfällt, wird so reflektiert, daß die reflektierten Wellennormalen einen Kreiskegel bilden, dessen Achse die Richtung der Zylinderachsen und dessen Öffnung 2ε ist.

Da nach Abschnitt 3 die an den Zylindern eintretenden Beugungserscheinungen von den Reflexen überlagert werden, so hat die Beugung weiter keinen Einfluß auf den Inhalt des obigen geometrischen Reflexionssatzes.

B. Drei Systeme. Auf Grund der in Abschnitt 2 erwähnten Beobachtungen an drei in einer Ebene unter 60° gekreuzten Stäbchen, die sich mit den Erscheinungen am Rosenquarz gut vergleichen ließen, wird man für diesen mit der Annahme nicht fehlgehen, daß die reflektierenden Körperchen drei Systeme untereinander paralleler Stäbchen bilden, deren Achsen, durch einen Punkt gelegt, einer Ebene angehören und unter 60° gekreuzt sind. Sie würden also dieselbe gegenseitige Lage haben wie die drei kristallographischen Horizontalachsen des Quarzes. Zu diesem Resultat war auch E. KALKOWSKY durch seine Beobachtungen gekommen¹.

Der Augenschein lehrt, daß die Reflexionserscheinungen an den drei verschiedenen Systemen wesentlich unabhängig voneinander auftreten. Es wird also gestattet sein, um zu einem Überblick der möglichen Erscheinungen zu gelangen, die Systeme ohne gegenseitige Beziehung nebeneinander einzuführen.

Jedes System sei durch seine Achsenrichtung repräsentiert. Die drei Achsen A_1, A_2, A_3 mögen durch den Mittelpunkt M einer Kugel gehen. Jeder Kreiskegel, der zu einer Achse gehört, wird auf der Kugel einen Breitenkreis bestimmen von der Breite $90^\circ - \varepsilon$, wenn der Kegel die Öffnung 2ε hat. Zu allen drei Achsen gehören also drei Systeme von Breitenkreisen, die auf der Kugel durcheinander laufen.

Man erhält dann einen Überblick über alle möglichen Re-

¹ a. a. O. Abschnitt VII.

flexionserscheinungen, wenn man in beliebigen Punkten der Kugeloberfläche, die die Normalen einfallender ebener Wellen darstellen, die drei Parallelkreise konstruiert, die sich in ihnen schneiden. Diese entsprechen einem Tripel von Kegeln, auf denen die reflektierten Wellennormalenrichtungen liegen.

Man bemerkt vor allen Dingen, daß im allgemeinen zwei Schnittpunkte der Breitenkreise existieren, die zur Ebene

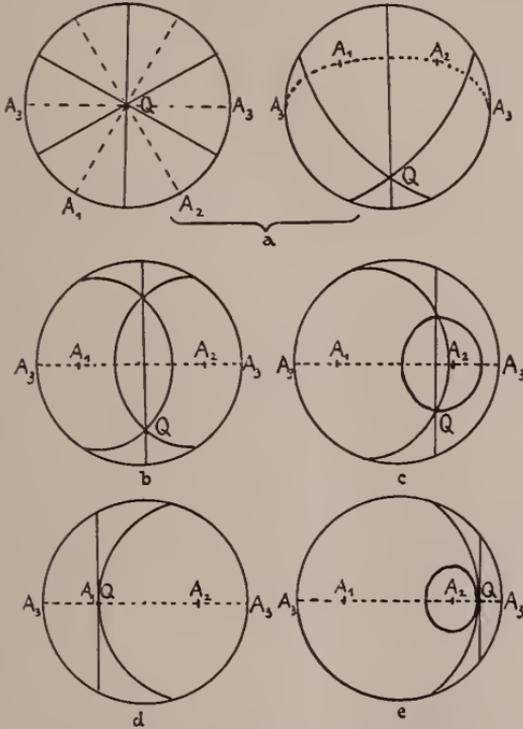


Fig. 13. Kugelprojektionen von typischen Gestalten der Reflexionskegel, die von einer unendlich fernen Lichtquelle Q an drei Systemen von parallelen Stäbchen hervorgebracht werden, deren Richtungen A_1, A_2, A_3 in einer Ebene unter 60° gekreuzt liegen.

der Achsen A_1, A_2, A_3 symmetrisch liegen und die sich in speziellen Fällen zu einem Punkt vereinigen, nämlich, wenn die erzeugende Wellennormale in die Ebene der Achsen fällt.

In Fig. 13 a—e sind perspektivische Ansichten einer Kugel mit solchen Kegelsystemen dargestellt, die den Lichtkurven der Fig. 1 a—e entsprechen. Man sieht, wie die verschiedenen Typen aus der verschiedenen Lage des einfallenden Strahles Q zur Ebene der drei Achsen A_1, A_2, A_3 hervorgehen. In a z. B. liegt Q senk-

recht zu dieser Ebene, in d fällt Q mit A_1 zusammen, in e liegt es beliebig in der Ebene der Achsen.

In $a-c$ sind zwei Schnittpunkte vorhanden, von denen in a nur einer sichtbar ist, in d und e existiert überhaupt nur einer.

Das Auftreten aller fünf Typen ist daran gebunden, daß die drei Achsen in einer Ebene liegen. Untersucht man Fälle, wo eine andere Lage der Achsen, z. B. Orientierung nach den Kanten eines Würfels angenommen wird, so erhält man Figuren ganz anderer Art, bei denen gerade die typischen Schnitte und Berührungen der Kurven zu je dreien nicht vorkommen¹.

5. Die Erscheinungen, die durch eine planparallele Platte von Rosenquarz bei Einfall ebener Wellen in der Brennebene eines photographischen Objektivs hervorgerufen werden.

A. Stellung der Aufgabe. Bisher ist alles so dargestellt worden, als ob die Stäbchensysteme sich in Luft befinden. Um nun der Einwirkung der Quarzsubstanz Rechnung zu tragen, müßte man ihre Doppelbrechung in Betracht ziehen. Da diese ja nicht sehr groß ist, so sei zunächst einmal die die Rechnung erleichternde Annahme gemacht, daß der Quarz einfachbrechend mit dem Brechungsindex ω sei. Ferner sollen die Lichtkurven nicht mit Hilfe einer im Endlichen liegenden Lichtquelle hervorgebracht werden und mit dem Auge beobachtet gedacht werden, sondern es soll eine ebene Welle auf eine planparallele Quarzplatte einfallen, und die Erscheinungen sollen in der Brennebene eines auf Unendlich eingestellten photographischen Objektivs betrachtet werden, in der zu diesem Zwecke eine Mattscheibe oder durchscheinendes Papier angebracht sei.

Die ebene Welle, die auf die erste Grenzfläche der Quarzplatte einfällt, wird hier zu einer ebenen Welle anderer Fortpflanzungsrichtung, entsprechend dem Brechungsindex ω , gebrochen. Im Quarz bringt sie unter der Annahme einfacher Brechung gerade wie in Luft durch Reflexion an den eingelagerten Teilchen ebene Wellen hervor, deren Normalen für jedes reflektierende System auf einem Kreiskegel der früher ausführlich erläuterten Art liegen. Beim Austritt aus der Quarzplatte werden alle diese Wellennormalen wieder gebrochen und liegen nun auf einem anderen Kegel, dessen Art noch zu bestimmen ist. Jede ebene Welle, die zu diesem Kegel gehört, wird zuletzt durch das Objektiv des

¹ Eine andere Anordnung von Achsen wird in Abschnitt 8 behandelt werden.

photographischen Apparats als ein Punkt der Brennebene abgebildet. Die allen Wellen entsprechenden Bildpunkte erscheinen dann in der Brennebene zu Kurven vereinigt.

Der eben geschilderte Vorgang soll nun für den Fall einer reflektierenden Schar von parallelen Stäbchen rechnerisch verfolgt werden, da ja mit der Behandlung eines Systems die der übrigen miterledigt wird.

B. Brechung eines Kreiskegels ebener Wellen aus einer Quarzplatte in Luft und Abbildung nach dem ABBÉ'schen Sinussatz. Wenn ein rechtwinkliges Koordinatensystem XYZ zugrunde gelegt wird, die Z-Achse das Einfallslot und die XY-Ebene die Grenzebene Quarz—Luft darstellt, so hat ein in Quarz befindlicher Kreiskegel, dessen Öffnung 2ε ist und dessen Achse A um den Winkel σ gegen die Z-Achse in der XY-Ebene geneigt ist (vergl. die stereographische Projektion Fig. 14) folgende Gleichung:

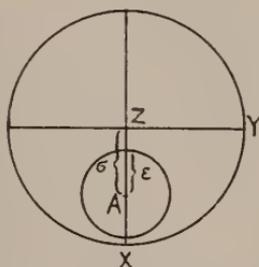


Fig. 14. Stereographische Projektion eines Kreiskegels mit der Achse A und der Öffnung 2ε .

$$\text{VII.} \quad x^2 (\cos^2 \varepsilon - \sin^2 \sigma) + y^2 \cos^2 \varepsilon + z^2 (\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \sigma) - 2xz \sin \sigma \cos \sigma = 0.$$

Für den Fall, daß ebene Wellen eine Kristallplatte mit dem mittleren Brechungsindex ω durchlaufen und nach der Brechung in Luft durch ein Objektivlinsensystem von der Brennweite f in dessen Brennebene als Punkte abgebildet werden, hat ABBÉ eine Formel angegeben, nach der man aus der Neigung V einer Wellennormale ON gegen die optische Achse OZ des abbildenden Objektivs den Abstand $O'N'$ des Bildpunktes N' dieser Wellennormale vom Mittelpunkt O' der Objektivbrennebene berechnen kann. Diese Formel¹ lautet:

$$\sin V = \frac{O'N'}{\omega f}.$$

Wie ich früher schon bei anderer Gelegenheit dargelegt habe²,

¹ Vergl. z. B. TH. LIEBISCH, Grundriß d. phys. Krist. p. 392 ff. 1896.

² P. KAEMMERER, Über d. Best. d. Winkels d. opt. Achsen usw. Fortschritte d. Min. III. p. 143. 1913.

kann sie geometrisch so gedeutet werden, daß eine Wellennormale ON , die den Winkel V mit der Objektivachse bildend vom Mittelpunkt O einer Kugel mit dem Radius ωf ausgehend, an der Oberfläche dieser Kugel in parallele Lage zur Objektivachse gedreht wird und dann durch die zum Einfallslot senkrechte, in O' die Kugel berührende Ebene im Bildpunkt N' hindurchtritt.

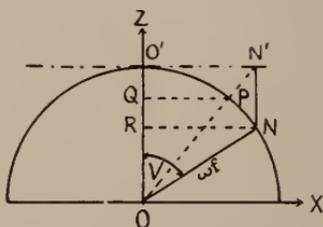


Fig. 15. Zur Abbildung ebener Wellen nach dem ABBE'schen Sinussatz.

Die Kurve, die alle Punkte N' in der Brennebene bilden, kann demnach so erhalten werden, daß man den Kegel, dessen Mantellinien die Geraden ON' sind, mit der Brennebene schneidet. Dieser Kegel geht aus dem ursprünglichen Kreiskegel VII dadurch hervor, daß jeder Kugelpunkt N in einen andern Punkt P , den Schnittpunkt der Kugel mit ON' , übergeführt und dann mit O verbunden wird.

Wie sich aus Fig. 15 ergibt, sind die Koordinaten xyz eines Punktes N mit den Koordinaten $\xi \eta \zeta$ des entsprechenden Punktes P durch die Relationen verbunden:

$$\text{VIII.} \quad \begin{cases} x \cos O'O N' = \xi \\ y \cos O'O N' = \eta \\ z \cos O'O N' = \sqrt{\zeta^2 - \xi^2 - \eta^2} \end{cases}$$

Transformiert man hiernach den Kegel VII und führt für die laufenden Koordinaten wieder xyz ein, so erhält man:

$$\text{IX.} \quad x^2 + y^2 \cos^2 \sigma + z^2 (\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \sigma) \pm 2 x z \cos \varepsilon \cos \sigma = 0.$$

Diese Gleichung stellt zwei kongruente zur XY -Ebene symmetrisch gelegene Kegel 2. Ordnung dar. Das zweifache Vorzeichen geht daraus hervor, daß für dasselbe Paar xy zwei verschiedene Werte z auf der Kugel möglich sind.

Um die Kurven in der Brennebene des Objektivs zu erhalten, hat man den Kegel IX mit der Ebene $z = \omega f$ zum Schnitt zu bringen. Es erscheint als Gleichung einer solchen Kurve, wenn man der Wurzel das negative Zeichen zuschreibt, das für die Seite der positiven z gilt:

$$\text{X.} \quad x^2 + y^2 \cos^2 \sigma + \omega^2 f^2 (\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \sigma) - 2 \omega f x \cos \varepsilon \cos \sigma = 0.$$

Dies ist eine Ellipse mit den Achsen $\omega f \sin \sigma \cos \sigma$ und $\omega f \sin \sigma$, also dem Achsenverhältnis $\cos \sigma : 1$, wobei $\cos \sigma$ der x-Achse entspricht.

Bei der ganzen Ableitung ist zu beachten, daß sie nur gilt, wenn die Kristallplatte senkrecht zur optischen Achse des Objektivs liegt. In diesem Falle also beobachtet man je nach der kristallographischen Orientierung der Platte und der Richtung des einfallenden Lichtes Ellipsen verschiedener Größe mit dem Achsenverhältnis $\cos \sigma : 1$.

Liegen die Stäbchen parallel der Plattengrenze, so ist $\sigma = 90^\circ$ und die Kurve wird geradlinig mit der Gleichung:

$$\text{XI.} \quad x = \omega f \cos \varepsilon.$$

Für senkrechten Einfall des Lichtes hat man $\sigma = \varepsilon$ zu setzen und erhält als Gleichung der Ellipsen:

$$\text{XII.} \quad x^2 + y^2 \cos^2 \sigma - 2 x \omega f \sin \sigma \cos \sigma = 0,$$

die für $\sigma = 90^\circ$ in die Gerade

$$\text{XIII.} \quad x = 0$$

übergeht.

Stehen die Stäbchen senkrecht zur Plattengrenze, so ist $\sigma = 0^\circ$ und aus X entsteht:

$$\text{XIV.} \quad x^2 + y^2 - \omega^2 f^2 \sin^2 \varepsilon = 0$$

ein Kreis.

Dieser wird zum Punkt

$$\text{XV.} \quad x = 0, y = 0,$$

wenn das Licht senkrecht einfällt ($\varepsilon = 0^\circ$).

Liegt nun die Platte schief zur Achse des Objektivs, so gelten die obigen Formeln nicht mehr. Vielmehr muß man in diese durch Koordinatentransformation die Konstanten einführen, die die Lage der Objektivachse gegen die Plattengrenze bestimmen. Dadurch komplizieren sich die Formeln bedeutend. Jedenfalls aber bleibt der aus dem Kristall austretende Kegel immer von zweiter Ordnung, und die Abbildung durch das Objektiv liefert immer Kegelschnitte im allgemeinen.

C. Beobachtungen. Die zur Bestätigung der Theorie unternommenen Versuche wurden wie die im Abschnitt 2 beschriebenen angestellt. Die auf der Mattscheibe des photographischen Apparates erscheinenden Kurven wurden nachgezeichnet.

So erhielt man bei verschiedenen schiefen Lagen der Platte von der einen Asteritenschar z. B. die in Fig. 16 ver-

einigten Kurven, die man wohl mit großer Annäherung als Ellipsen bezeichnen darf.

Die Kurven erscheinen, je kleiner sie sind, durch Nebenwirkungen um so mehr verbreitert auf der Mattscheibe. Es wurden meist die äußeren Umrandungen nachgezogen, z. T. auch die mittleren Linien zwischen beiden Konturen. Auch die kleinste erreichbare Kontur (Fig. 16, VI) stellte noch einen ziemlich großen Lichthof dar, wo theoretisch ein Punkt zu erwarten war.

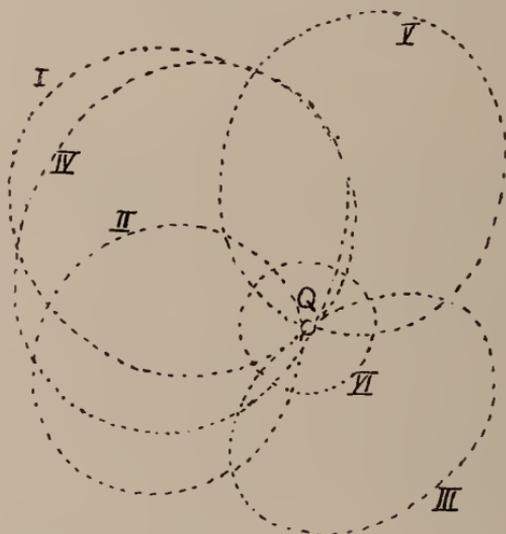


Fig. 16. In der Brennebene eines photographischen Objektivs beobachtete Asterkurven bei parallelem Licht.

Auf die die Kurven möglicherweise verbreiternden Nebenursachen wird noch zurückzukommen sein.

Um eine genauere Prüfung der Theorie durchzuführen, wurde noch eine Aufnahme der Kurven bei normaler Lage der Platte gemacht (Fig. 17).

Fig. 17 zeigt die dabei gewonnenen drei Kurven I—III. Nach der Theorie sind diese als Ellipsen von der Formel XII, p. 539, aufzufassen, die im Bild der Lichtquelle O' einen Scheitel besitzen. Daher kann man zunächst die Richtungen der drei von ihm ausgehenden kleineren Ellipsenachsen annähernd zeichnen. Diese sind in Fig. 17 die Geraden a_1, a_2, a_3 . Damit hat man die drei Azimute erhalten, nach denen die Asteriten im Quarz gelagert sind.

Mit Hilfe der Richtungen a_1 — a_3 kann in einem stereographischen Gradnetz die Ebene gesucht werden, in der sie alle drei liegen und gleichzeitig Winkel von 60° mit-

einander bilden (Fig. 17, $A_1 A_3$). Danach läßt sich auch der Winkel σ für jede Ellipse aus dem Gradnetz entnehmen. Es wurde gefunden:

$$\sigma_1 = 20^\circ 40', \sigma_2 = 76^\circ 30', \sigma_3 = 45^\circ.$$

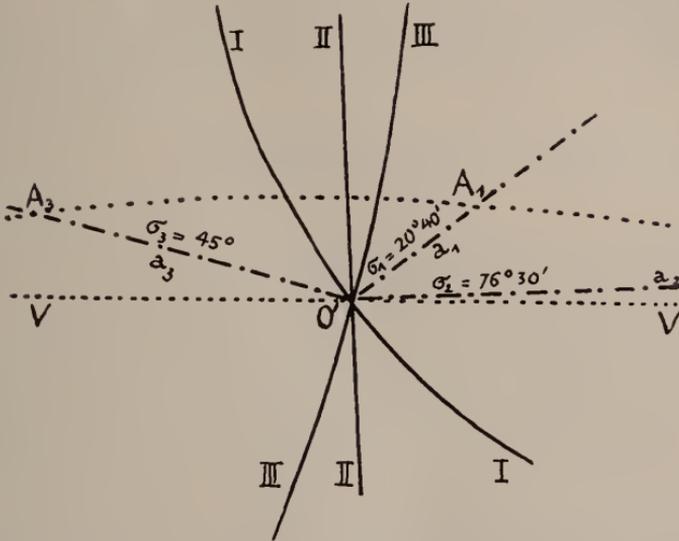


Fig. 17. Asterkurven I—III durch paralleles Licht bei senkrechtem Einfall in einer planparallelen Platte von brasilianischem Rosenquarz hervorgebracht und wie Fig. 16 aufgenommen. a_1, a_2, a_3 Achsen der elliptischen Kurven. A_1, A_3 stereographische Projektion der zu I und III gehörigen Kegellachsen und von deren Ebene, die auch die Achse A_2 enthält. $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ Projektion der Achsenwinkel gegen das Einfallslot. V, V Projektion der Vertikalebene.

Daraus folgen wieder die Achsenlängen der drei Ellipsen nach den Formeln (p. 538, 539) $\omega f \sin \sigma$ und $\omega f \sin \sigma \cos \sigma$. Setzt man für ω den Mittelwert 1,554 und für f die Brennweite des Objektivs 14,3 cm ein, so ergibt sich:

	kleine Achse	große Achse
Kurve I	7,35 cm	7,84 cm
„ II	5,03	21,55
„ III	11,05	15,65

Konstruierte man hiernach mit Hilfe der schon gezeichneten Richtungen der kleineren Achsen die drei Ellipsen, so deckten sie sich im Bereich der aufgenommenen Kurven mit diesen.

Damit ist bewiesen, daß die Formel XII, p. 539, die bei senkrechtem Einfall des Lichtes erscheinenden Kurven

genügend richtig darstellt und daß also auch die bedingende Annahme richtig ist, daß die drei Asteritenrichtungen im Quarz in einer Ebene unter 60° gekreuzt liegen. Diese Ebene bildet im vorliegenden Falle mit der Grenzebene der Quarzplatte einen Winkel von 76° , und die Asteritenrichtungen sind unter den Winkeln $20^{\circ}40'$, $76^{\circ}30'$ und 45° gegen die Plattennormale geneigt.

(Schluß folgt.)

Besprechungen.

Kriegsgeologie.

A. Hambloch und C. Mordziol: Über Trinkwasserversorgung im Felde nebst Vorschlägen über die Verwendbarkeit vulkanischer Filtermaterialien. (Verlag von George Westermann, Braunschweig, Berlin, Hamburg).

Die zeitgemäße und wertvolle Schrift enthält einen Überblick über die Vorschriften zur Regelung der Trinkwasserversorgung der Truppen im Felde und besondere Hinweise auf den Wert der Geologie für die Gewinnung neuer Wasservorräte und für den Schutz vorhandener Quellen gegen Verseuchungsgefahr; ferner einen Überblick über die wichtigsten Methoden der Wasserreinigung mit Rücksicht auf ihre Brauchbarkeit im Felde: Fahrbare Trinkwasserbereiter, KleinfILTER, Filterwagen, Sandfiltrationen, natürliche Bodenfiltration, Ozonverfahren. Als Ersatz für Sandfilter wird sodann das „Vulkanit“-Material in Vorschlag gebracht, das nach den bisherigen Versuchen vielseitige Anwendungsmöglichkeiten zur Gewinnung von Trink- und Gebrauchswasser verspricht. Zur Enthärtung von solchen Wässern sind außer dem Permutitverfahren auch Traßfilter verwendbar.

Von den allgemein wichtigeren Angaben des Buches sei folgendes hervorgehoben:

Die Vorschriften und Erlasse zur Regelung der Trinkwasserfrage der Kriegssanitätsordnung vom 27. Januar 1907 gestatten eine Übersicht über die zur Anwendung kommenden Maßnahmen. Es kommen zur Sprache:

Grundsätze für Trinkwasserbeurteilung, Prüfung zentraler Wassergewinnungsanlagen, namentlich solcher mit Sandfiltration, Brunnenschutz, Kenntlichmachung guter Trinkwasserstellen, Grundwassergewinnung in Flußebenen bei günstiger Bodenbeschaffenheit, Anlage abessinischer Bohrbrunnen bei geeigneten geologischen Verhältnissen, Wasserwagen und Trinkwasserbereiter, Reinigung von Trink- und Gebrauchswasser durch Filter, Abkochen, chemische Mittel, Schnellfiltration zwecks Vorklärung.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Centralblatt für Mineralogie, Geologie und Paläontologie](#)

Jahr/Year: 1915

Band/Volume: [1915](#)

Autor(en)/Author(s): Kaemmerer Paul

Artikel/Article: [Studien über Asterismus. 524-542](#)