

## Original-Mitteilungen an die Redaktion.

### Zur Gruppierung der 32 Kristallklassen.

Von **Hermann Tertsch** in Wien.

Mit 1 Textfigur.

Es mag vielleicht sehr überflüssig erscheinen, neuerdings eine Frage aufzugreifen, welche schon von verschiedensten Gesichtspunkten aus eingehende Behandlung erfahren hat. Aber gerade die starken Divergenzen, welche in der Symmetrieklassen-Gruppierung einzelner Forscher zutage treten (es sei nur an die Arbeiten von BECKENKAMP, FEDOROW, GROTH, TSCHERMAK, WÜLFING u. a. erinnert), zeigen, daß immer noch keine völlige Klärung in der Anordnung gewonnen wurde; sie lassen aber auch sofort die eine große, unvermeidliche Schwierigkeit erkennen, daß man nämlich durch eine einzige Reihung nicht allen Forderungen, die man an eine folgerichtige Gruppierung stellen kann, zu genügen vermag. Gewisse Grundforderungen müssen aber befriedigt werden, wenn die Anordnung tunlichst auf objektiver Grundlage erfolgen soll. 1. Es muß ein einfaches und möglichst anschauliches Ableitungsprinzip zugrunde gelegt werden. 2. Die Ableitung muß zu einer ungezwungenen und eindeutigen Festlegung der genetisch zusammengehörigen Symmetriegruppen (Kristallsysteme) führen. 3. Die physikalischen Beziehungen der Symmetrieklassen, wie auch die in den einzelnen Systemen ersichtlichen Analogien müssen in der Anordnung zum Ausdruck kommen.

Eine diesen Forderungen sehr weitgehend entsprechende Ableitung gab TSCHERMAK<sup>1</sup>. Wenn hier trotzdem nochmals ein ähnlicher Versuch vorgelegt wird, begründet sich dies dadurch, daß TSCHERMAK zwar die konsequente Ableitung durch die Entwicklung des weniger in die Augen springenden Zonengesetzes vornimmt, daß hingegen analoge Versuche, die sonst üblichen und der einfachen Anschauung leichter zugänglichen Symmetrieelemente: Deckachse ( $D^x$ ), Symmetriezentrum (C) und Symmetrieebene (S) zu verwenden, bis nun zu keiner ebenso eindeutigen und in sich geschlossenen Gruppierung geführt haben. Man vergleiche hiezu die

<sup>1</sup> Einheitliche Ableitung der Kristallisations- und Zwillingsgesetze. Zeitschr. f. Krist. 39. p. 433 ff. Vergl. auch die letzten Auflagen von TSCHERMAK's „Lehrbuch der Mineralogie“.

Angaben von BECKENKAMP, FEDOROW, GROTH und WÜLFING<sup>1</sup>, wobei die ersten beiden das trigonale System dem hexagonalen einordnen, GROTH und WÜLFING in der Abgrenzung des trigonalen und hexagonalen Systems zu anderen Resultaten als TSCHERMAK kommen. Gleichwohl wäre besonders für den Anfänger eine möglichst leichtfaßliche, methodische Anordnung, die trotzdem den obigen Anforderungen entspricht, sehr erwünscht, und damit sollen sich die folgenden Zeilen beschäftigen.

Vor allem darf man bei dem Versuche einer solchen Gruppierung außer dem gewählten Ableitungsprinzip von keinerlei Voraussetzung ausgehen. Es ist also auch unangebracht, die Kristallsysteme rein geometrisch festzulegen und erst nachträglich die Kristallklassen in diese Einteilung hineinzuzwängen. Der alte Vorgang der Aufstellung einer Vollform, welche durch Unterdrückung einzelner Symmetrieelemente zur Ableitung der Unterabteilungen dienen soll, führt deshalb zu Inkonsequenzen, da insbesondere die physikalischen Beziehungen hiebei völlig unberücksichtigt bleiben. Gerade diese aber müssen eingehend gewürdigt werden, darf man doch nie die Tatsache aus den Augen verlieren, daß eine voraussetzungslose, rein geometrische Ableitung der Kristallsymmetrie überhaupt ausgeschlossen ist. Daß wir diese Kristallsymmetrie auf 32 Klassen zu beschränken vermögen, daß nur  $D^2$ ,  $D^3$ ,  $D^4$ ,  $D^6$  mögliche Deckachsen darstellen, all dieses wird erst durch den Raumgitteraufbau plausibel, welcher seinerseits wieder ohne die Vorstellung eines physikalischen Körpers (nicht bloß geometrischen Raumes) undenkbar ist. Mehr denn je ist in der Gegenwart auf diese Bezugnahme zum physikalischen Verhalten Wert zu legen, da gerade die Röntgenogramme von Kristallen die Raumgitternatur der Kristallkörper einwandfrei festgelegt haben und damit die Grundlage der ganzen Gitter- und Punktsysteme experimentell sichergestellt erscheint.

Überblickt man die Symmetriecharakteristika der einzelnen Klassen in der üblichen Darstellungsweise, so fällt auf, daß mit Ausnahme von 3 Klassen sämtliche anderen durch das Vorhandensein von Deckachsen ausgezeichnet erscheinen. Dieses Symmetrieelement soll deshalb zur Grundlage für die gesamte Ableitung genommen werden.

Die Gesetze, welche für die konsequente Ableitung der verschiedenen Deckbewegungen gelten, hat schon LIEBISCH in seiner „Geometrischen Kristallographie“ abgeleitet, weshalb hier einfach

---

<sup>1</sup> BECKENKAMP, Statische und kinetische Kristalltheorien. Bornträger, Berlin 1913. — FEDOROW, Zeitschr. f. Krist. 28. (1897.) p. 36; 31. (1899.) p. 21. — GROTH, Physikalische Kristallographie. Engelmann, Leipzig. — WÜLFING, Die 32 kristallographischen Symmetrieklassen. Bornträger, Berlin 1914.

darauf verwiesen werden soll<sup>1</sup>. Zur mathematischen Behandlung dienen ausschließlich  $D^2$ ,  $D^3$ ,  $D^4$ ,  $D^6$ . Die  $D^1$  hat insofern mathematisch keine Bedeutung, als jede beliebige, durch die Kristallmitte gezogene Linie nach einer Drehung von  $360^\circ$  den Kristall mit sich selbst zur Deckung bringt. Sie dient aber sehr bei der konsequenten Ableitung und deshalb soll die  $D^1$  nachstehend Verwendung finden.

Die geometrische Behandlung der Deckbewegungen führt zur Aufstellung einseitiger oder polarer (einpoliger) und zweiseitiger (zweipoliger) Achsen. Die interessanten Achsen der

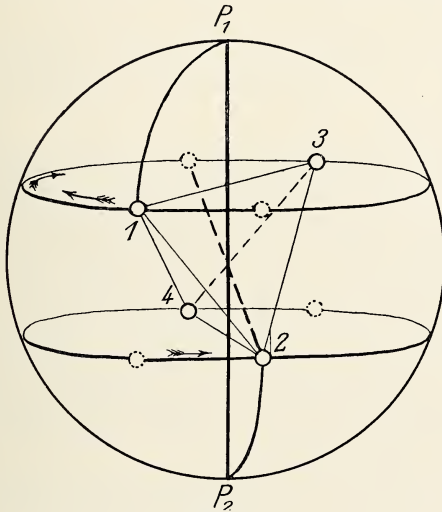


Fig. 1.

zusammengesetzten Symmetrie (Inversions- und Drehspiegelungsachsen) nehmen zwischen den beiden erstgenannten Achsentypen eine eigentümliche Zwischenstellung ein. Macht man sich den geometrischen Vorgang klar, der z. B. bei einer vierzähligen Inversionsachse ( $J^4$ ) zu beobachten ist, so ergibt sich, daß hier eine polare vierzählige Deckachse vorliegt, bei der die beiden Enden abwechselnd dem Begrenzungselement zugeordnet, d. h. als aktive Pole behandelt werden. Man gehe von einem Begrenzungselement und dem diesem zugeordneten Pole der Inversionsachse ( $J^4$ ) aus. Die nächste, kristallographisch gleichwertige Lage des Begrenzungselementes findet man bekanntlich, wenn man eine

<sup>1</sup> Alle diese rein geometrischen Beziehungen, wie auch der Nachweis des ausschließlichen Auftretens von 32 Kombinationen der Symmetrielemente werden als bekannt vorausgesetzt.

Drehung um  $90^0$  mit  $J^4$  als Achse vornimmt und statt der neu erhaltenen Lage das hierzu zentrisch symmetrisch gelegene, parallele Gegenelement verwendet. Das heißt aber nichts anderes, als daß man, statt das Element dem Pole  $P_1$  zuzuordnen, eine gleichwertige, aber mit entgegengesetztem Drehungssinn ausgestattete Zuteilung zu dem Pole  $P_2$  vornimmt (vergl. Fig. 1). Das nächste kristallographisch gleiche Begrenzungselement ist wieder in der gleichen Weise dem Pole  $P_1$  zugeordnet, das vierte dem Pole  $P_2$  usw. Daraus erklärt sich die oben behauptete Mittelstellung dieser Deckachsentyper (Inversionsachse) zwischen den ein- und zweipoligen Achsen, was man vielleicht durch das Beiwort „wechselpolige“ Achse charakterisieren könnte. Es ist natürlich klar, daß geometrisch die wechselpoligen und die Inversionsachsen vollkommen identisch sind; der vorgeschlagene Name soll nur die Beziehungen dieser Achsentyper zu den ein- und zweipoligen Achsen in den Vordergrund rücken.

Eine Zweipoligkeit der Achsen, wo also die Begrenzungselemente gleichzeitig beiden Polen der Deckachse zugeordnet sein sollen, kann durch eine  $D^x$  allein nicht zustande kommen. Entsprechend den bekannten Beziehungen zwischen den Symmetrieelementen untereinander ist eine Zweipoligkeit der  $D^x$  genetisch entweder mit einem  $C$  oder mit einer neuen, zur  $D^x$  normalen  $D^{2n}$  oder einer zur  $D^x$  normalen  $\Sigma$  verknüpft<sup>1</sup>. Im Falle einer geradzähligen Achse ( $D^{2n}$ ) fallen letztere beiden Möglichkeiten in eine zusammen, da die 3 Elemente  $D^{2n}$ ,  $C$  und die zu  $D^{2n}$  normale  $\Sigma$  derartig miteinander verknüpft sind, daß das Auftreten von zweien derselben das dritte automatisch einfügt. Nur die unpaarzahligen  $D$  machen hievon eine Ausnahme.

Zieht man auch die  $D^1$  in den Kreis der Betrachtungen, so gelingt es leicht, unter Verwendung wechselpoliger Achsen (Inversionsachsen) sämtliche Kristallklassen durch eine Deckachsensymmetrie zu kennzeichnen. Gleichzeitig liefert dieses völlig einheitliche Ableitungsprinzip eine sehr einfache und eindeutige Festlegung der Kristallsysteme. Die Benützung der Deckachsensymmetrie enthält auch in sich die engste Bezugnahme zu den physikalischen Verhältnissen, da ja in der Kristallphysik die Bestimmung gleichwertiger Vektoren oder Tensoren die Hauptrolle spielt.

Die Ableitung erfolgt in einzelnen Stufen, deren Aufeinanderfolge einfach durch den Charakter der Deckachsen als einpolige, wechselpolige oder zweipolige Linien fixiert ist. Der Einfachheit wegen seien in der Folge einpolige (polare) Deckachsen durch

<sup>1</sup> Im Folgenden werden die zu den charakteristischen Deckachsen normalen Symmetrieebenen mit  $\Sigma$ , jene mit ihnen parallel laufenden mit  $S$  bezeichnet, bzw. erhalten  $D^x$  und  $S$  den gleichen Index (z. B.  $D_n^2$ ,  $S_n$  die aufeinander normal stehenden Nebendeckachsen und Nebensymmetrieebenen.)

das Symbol  $\uparrow D^x$ , wechselfolig durch  $\wedge D^y$  und zweipolig einfach durch  $D^z$  gekennzeichnet.

### 1. Stufe: Einzelne (bzw. gleichartige) einpolige Deckachsen.

$\uparrow D^1$  bedeutet, daß irgendein Begrenzungselement durch Rollen um eine beliebige zentrale Linie nach voller Drehung um  $360^\circ$  mit sich selbst zur Deckung kommt, d. h. jede Wiederholung des Begrenzungselementes ist ausgeschlossen. Einer  $\uparrow D^1$  entspricht also die Symmetrie  $= \textcircled{0}$ , wodurch die pediale Klasse (GROTH) charakterisiert ist<sup>1</sup>. Da in einem Kristall unendlich viele  $D^1$  denkbar sind, besagt dies, daß im Kristallbau keine Richtung irgendwie bevorzugt oder festgelegt ist, bzw. daß alle gleichberechtigt erscheinen. Das Fehlen bevorzugter Vektoren oder Tensoren läßt auch die Wahl der Koordinatenachsen ganz willkürlich erfolgen, wodurch das triklone System charakterisiert ist<sup>2</sup>.

$\uparrow D^2$  besagt, daß im Kristallbau eine bevorzugte Richtung besteht. Normal zu dieser ist bekanntlich immer eine Kristallfläche möglich, welche demnach eine entsprechende, ausgezeichnete Ebene des Kristallbaues ist. Dadurch ist die Koordinatenachsenwahl schon eingeschränkt, da eine Achse durch die  $\uparrow D^2$  vorgezeichnet ist. Die anderen beiden können nur in der bevorzugten Ebene  $\perp D^2$  liegen, ohne daß für sie weitere Bedingungen festgelegt sind. Dadurch charakterisiert sich das monokline Koordinatensystem (monoklin sphenoidisch).

$\uparrow D^3$  bringt eine Gruppe von Begrenzungselementen nach  $120^\circ$  Drehung mit sich zur Deckung. Es liegt hier eine sehr ausgeprägte Wirtelachse vor, d. h. ein Kristallbau mit einer bevorzugten Richtung und mehreren hiezu in gleicher Weise geneigten, gleichwertigen Richtungen. Wir stellen alle Symmetrieklassen mit einer einzelnen, echten dreizähligen Deckachse in das trigonale System (trigonal pyramidal).

$\uparrow D^4$  liefert in analoger Art die Grundlage für das tetragonale System, welches wieder durch eine einzelne, echte vierzählige Achse fixiert ist. Das Achsenkreuz ist abermals dem Prinzip nach festgelegt, insofern entsprechend der Symmetrie eine bevorzugte und zwei dazu normale, gleichartige Richtungen als Koordinaten gewählt werden müssen (tetragonal pyramidal).

$\uparrow D^6$ . Ganz gleichartige Verhältnisse bietet das durch eine echte  $D^6$  ausreichend gekennzeichnete hexagonale System (hexagonal pyramidal).

<sup>1</sup> Mit wenigen Ausnahmen halte ich mich an die so einleuchtende Namensgebung, welche GROTH eingeführt hat, da diese in ihrer konsequenten Anlage und Durchführung die klarste Versinnlichung der vorhandenen Symmetrie im Klassennamen ermöglicht.

<sup>2</sup> Vergl. hiezu BECKENKAMP und FEDOROW (l. c.) und die Bemerkungen am Schlusse dieser Notiz.

$4 \uparrow D^3$ <sup>1</sup>. Die geometrische Ableitung lehrt, daß bei polaren  $D^x$  nur eine Kombination polarer  $D^3$  denkbar ist, und zwar müssen deren wirksame Pole in den Richtungen der Tetraederecken einander zugeordnet sein. Hierbei stellen sich automatisch<sup>2</sup> noch weitere  $3 D^2$  ein, welche zueinander normal stehen, gleichwertig sind und in ihren Richtungen den Würfelkanten entsprechen<sup>3</sup>. In diesen drei gleichen  $D^2$  ist das Koordinatenkreuz schon vorgeschrieben. Darin dokumentiert sich das tesserale System (tesseral tetartoedrisch = tetraedrisch pentagondodekaedrisch).

## 2. Stufe: Einzelne (bezw. gleichwertige) wechselfolige Achsen.

$\wedge D^1$ . Der Kristall ist um eine zentrale Linie um  $360^\circ$  zu drehen und dann statt des ursprünglichen Begrenzungselementes das hierzu zentrisch symmetrische Gegenelement zu verwenden. D. h.  $\wedge D^1 = C$ . Da auch hier keinerlei Richtung bevorzugt ist, liegt triklone Symmetrie vor (triklin pinakoidal).

$\wedge D^2$ . Verwendet man wieder den Gegenpol des Begrenzungselementes, welches man durch eine Drehung um  $\wedge D^2$  in die um

<sup>1</sup> Wie auch sonst üblich, werden gleichartige Achsen in ihrer Zahl durch Vorsetzung des entsprechenden Koeffizienten ausgedrückt. Ungleichwertige Achsen dagegen werden getrennt angeschrieben.

<sup>2</sup> Es ist für die Ableitung wichtig, die zur Charakterisierung notwendigen Symmetrieelemente wohl von den wirklich vorhandenen, durch automatisches Hinzutreten vermehrten Symmetriemerkmale zu unterscheiden. Speziell der arbeitende Kristall-Physiker und -Chemiker wird darauf ausgehen, die voneinander unabhängigen, also notwendigen Symmetrieelemente zu bestimmen, die anderen verstehen sich dann von selbst. Darauf hat insbesondere VOIGT (Lehrbuch der Kristallphysik) hingewiesen. In unserer Symmetrietabelle sind die automatisch hinzutretenden Elemente eingeklammert. Selbstverständlich bleibt es ganz der Willkür überlassen, welche Elemente man als ursprünglich, welche als bedingt ansieht. Man hätte oben ja auch von  $3 D^2$  ausgehen können, denen dann  $4 \uparrow D^3$  als bedingt zugeordnet wären. Die Wahl der notwendigen Elemente richtet sich eben nach dem Standpunkt, von dem aus die Prüfung der Symmetrie vorgenommen wird — niemals aber darf der arbeitende Kristallphysiker auf diese Scheidung der notwendigen und der bedingten Elemente vergessen.

<sup>3</sup> Es ist dringend zu empfehlen, sich neben diesen Zeilen der Symmetrieprojektionen zu bedienen, wie sie in TSCHERMAK's Lehrbuch oder in WÜLFING's „32 Kristallsymmetrieklassen“ usw. enthalten sind, damit die gegenseitigen Beziehungen der Symmetrieelemente klar vor Augen stehen. Gerade weil aber die charakteristischen Projektionen schon so oft und in so vorzüglicher Weise dargestellt wurden, verzichtete ich darauf, in dieser Notiz die wohlbekanntesten Figuren neuerlich einzufügen.

180° verwendete Lage gebracht hat, so sind die beiden zusammengehörigen Begrenzungs-elemente, wie leicht gezeigt werden kann, symmetrisch zu einer Ebene, welche auf der  $\wedge D^2$  normal steht. Es ist dies die bekannte Tatsache, daß sich eine zweizählige Inversionsachse durch eine zu ihr normale Symmetrieebene ersetzen läßt, also  $\wedge D^2 = \Sigma^1$ . Damit ist eine Ebene und gleichzeitig eine hierzu normale Richtung im Kristall bevorzugt, was zum monoklinen Koordinatenkreuz führt (monoklin domatisch).

Vielleicht erscheint die Heranziehung der wechselfoligen (Inversions-) Achsen in diesen Fällen, wo der Ersatz derselben so einfach ist, gekünstelt. Aber abgesehen davon, daß es die konsequente Durchführung des gewählten Ableitungsprinzipes fordert, abgesehen auch davon, daß man die  $\wedge D^4 = J^4$  doch nicht umgehen kann, der Begriff also eingeführt werden muß, erhält man hierbei noch das wertvolle Nebenresultat, daß eigentlich C und S nur besondere Formen der Deckachsensymmetrie darstellen. Natürlich wird man weiterhin in der Praxis, nachdem einmal die streng folgerichtige Ableitung und Reihung vorgenommen ist, statt der weniger anschaulichen wechselfoligen (Inversions-) Achsen lieber C und S verwenden.

$\wedge D^3$  läßt sich ersetzen durch  $D^3 + C$ , liefert also die Symmetrie des Dolomites (trigonal rhomboedrisch).

$\wedge D^4$ , die bekannte vierzählige Inversionsachse, läßt sich in keiner Art ersetzen, muß also unbedingt beibehalten werden. Ihr Charakter als eine  $D^4$  läßt über die Zuteilung zum tetragonalen Systeme keinen Zweifel zu (tetragonal bisphenoidisch).

$\wedge D^6$ . Hier liegt ein sehr interessanter Fall vor, da sich diese sechszählige Inversionsachse durch  $D^3 + \Sigma$  (horizontale Symmetrieebene) ersetzen läßt. Dieser zutage tretenden  $D^3$  zuliebe wurde die fragliche Klasse (trig. bipyramidal) sowohl von GROTH als auch neuerdings von WÜLFING dem trigonalen System zugewiesen, wogegen sie TSCHERMAK an das hexagonale angliedert. VOIGT (l. c.) zieht aus theoretisch physikalischen Gründen diese Klasse gleichfalls zum hexagonalen System, was nach vorstehender Ableitung selbstverständlich ist, da eben  $D^3 + \Sigma$  keine echte trigonale, sondern eine versteckt sechszählige Achse ist. Nur die echten  $D^3$  gehören in das trigonale System, diese  $D^3 + \Sigma = \wedge D^6$  ist aber eine hexagonale Achse. Aus den VOIGT'schen Deduktionen geht hervor, daß physikalisch genommen diese Symmetrieklasse dem trigonalen System ganz ferne steht. Alle physikalischen Vorgänge zentrisch symmetrischer Natur (z. B. Röntgenographien von Kristallen) verleihen dieser Symmetrieklasse die gleiche Symmetrie wie beim Apatit, über dessen hexa-

<sup>1</sup> Bezüglich der Schreibung (Symbolisierung) vergl. die Anmerkung p. 148.

gonalen Bau keinerlei Zweifel besteht<sup>1</sup>. Schließlich sei noch angemerkt, daß durch Zuweisung dieser Symmetrieklasse zum trigonalen System die sonst so überaus weitgehende Analogie zwischen dem trigonalen und tesserale System einerseits, wie zwischen dem hexagonalen und tetragonalen andererseits völlig durchrissen wird, worauf WÜLFING selbst aufmerksam machte. TSCHERMAK nennt diese Klasse: trigonotyp tetartoedrisch, GROTH: trigonal bipyramidal. In beiden Benennungen kommt leider die Zugehörigkeit zum hexagonalen System nicht zum Ausdruck, weshalb ich in Ermanglung einer besseren Bezeichnung statt trigonal den Ausdruck hemihexagonal vorschlagen möchte, so daß der Klassenname: hemihexagonal bipyramidal lauten würde.

$4 \wedge D^3 = 4 D^3 + C$ . Da jede  $\wedge D^3 = D^3 + C$  ist, erhöht sich automatisch die Symmetrie sehr bedeutend. Schon im Falle der  $4 \uparrow D^3$  traten selbsttätig  $3 D^2$  hinzu. Durch das nun eingeschaltete C wird der Fall verwirklicht, daß ein C mit paarzähligen D ( $3 D^2$ ) gemeinsam auftreten soll, was wieder automatisch den Zutritt von  $3 \Sigma$  ( $\perp$  zu  $3 D^2$ ) zur Folge hat.  $4 \wedge D^3 = 4 D^3 + C + (3 D^2, 3 \Sigma)$ . Das ist die Symmetrie des Pyrites (tesseral dyakisdodekaedrisch). Die Zuteilung zum tesserale System ist durch die  $3 D^2$  sichergestellt.

Nun gilt es, die Kristallklassen mit zweipoligen  $D^x$  abzuleiten. Wie oben auseinandergesetzt wurde, kann die Zweipoligkeit durch Zufügung von C (bzw.  $\Sigma$ ) oder von neuen  $D^{2n}$  erzielt werden. Es sind demnach für die zweipoligen Achsen zwei Entwicklungsstufen zur Verfügung: 1. Zweipoligkeit durch Hinzufügung von C, 2. Zweipoligkeit durch Kombination mit neuen  $D^{2n}$ .

Die Verwendung einer S bleibt unberücksichtigt, da dies bei  $D^1$  und  $D^3$  zu einer  $\wedge D^2$  und  $\wedge D^6$ , also zu ganz aus der Art fallenden Achsen führt, bei den  $D^{2x}$  aber das gleiche Resultat zeitigt wie das C.

### 3. Stufe: Zweipolige Einzelachsen = Stufe 1 in Verbindung mit C.

Sowohl bei  $\uparrow D^1$  und  $\uparrow D^3$  wie auch bei  $4 \uparrow D^3$  führt die Addition eines C zu Symmetrieklassen, welche schon in Stufe 2 erhalten wurden, bringen also keine neue Kombination hervor.

$D^2 + C$  liefert automatisch eine zu  $D^2 \perp \Sigma$ , aber auch damit ist nur eine Richtung und eine dazu senkrechte Ebene im Kristall

<sup>1</sup> Vergl. hiezu HAGA und JÄGER, „On the Symmetrie of the Röntgen patterns of Trigonal and Hexagonal Crystals . . .“ Proceed. R. Acad. d. Sc. Amsterdam, XVIII. 1915. p. 542 ff., und RINNE, „Beiträge zur Kenntnis der Kristall-Röntgenogramme.“ Kgl. sächs. Ges. d. Wiss. Leipzig. 67. 1915. p. 303 ff.



fixiert, was zum monoklinen System führt (monoklin prismatisch).

$D^4 + C = D^4C (\Sigma)$ , die Symmetrie des Scheelits (tetragonal bipyramidal).

$D^6 + C = D^6C (\Sigma)$  entspricht der Symmetrie des Apatits (hexagonal bipyramidal)<sup>1</sup>.

Bisnun kamen ausschließlich Einzelachsen oder mehrere gleichartige, unpaarzahlige Achsen in Betracht. Die Kombination mehrerer, speziell paarzahliger Achsen erhöht die Symmetrie sofort um ein Beträchtliches.

#### 4. Stufe: Zweipoligkeit durch Kombination der Stufe 1 mit $D^{2n}$ .

Kombiniert man eine  $D^1$  mit einer  $D^{2n}$ , so gilt dies so viel als eine  $\uparrow D^{2n}$ , liefert also keine neuen Symmetriegruppen, sondern solche, die schon in Stufe 1 besprochen wurden.

$D^2 + D^2$ . In diesem Falle, wo zwei ungleiche  $D^2$  in Kombination treten und höherzahlige Achsen ausgeschlossen sein sollen, liefert bekanntlich die geometrische Ableitung noch eine dritte, zu den ersten beiden normale  $D^2$ . Diese dreierlei, ungleichen  $D^2$  stehen aufeinander senkrecht und stellen drei voneinander völlig unabhängige, ausgezeichnete Richtungen dar. Selbstverständlich ist dadurch das Koordinatenkreuz fixiert und unterscheidet sich von allen bisher erhaltenen Kristallachsenlagen durch die Ungleichwertigkeit der drei rechtwinkligen Koordinatenrichtungen. Hiedurch ist ein neues Kristallsystem festgelegt, welches gewisse genetische Beziehungen zum monoklinen System nicht verleugnen kann<sup>2</sup>, nämlich das rhombische System (rhombisch bisphenoidisch).

$D^3 + 3 \uparrow D^2$ . Es läßt sich mathematisch leicht nachweisen, daß die  $D^3$  ohne Hinzufügung anderer Elemente nur mit drei polaren, auf ihr normalen  $D^2$  kombiniert werden kann. Hier liegt die dem  $\alpha$ -Quarz zukommende Symmetrieklasse vor (trigonal trapezoedrisch), welche als erstes Beispiel einer

<sup>1</sup> Es ist nicht ohne Interesse, daß bisher alle je einem System angehörigen Unterabteilungen bei allen tensoriellen Vorgängen, wo sich also Richtung und Gegenrichtung nicht mehr unterscheiden lassen, völlig gleich verhalten. Alle drei monoklinen oder tetragonalen oder hexagonalen Gruppen zeigen z. B. die gleiche Röntgenogrammsymmetrie wie die zuletzt besprochenen Klassen der drei Systeme. Es sei nochmals betont, daß die  $\Delta D^6 = D^3 + \Sigma$  sich hiebei unbedingt dem hexagonalen System einordnet.

<sup>2</sup> Vergl. hier die Beziehungen der rhombischen und monoklinen Pyroxene und Amphibole, oder den nahen Anschluß der Glimmer an den rhombisch-pseudohexagonalen Bau.

charakteristischen Schraubensymmetrie bekannt wurde. Überhaupt zeigen sämtliche Klassen dieser 4. Stufe den gleichen Schraubensymbolcharakter, sind also sämtlich möglich zirkular-polarisierend und mit enantiomorphen Formen ausgestattet.

$D^4 + 2D^2 = D^4$ ,  $2D^2_n (2D^2_z)^1$ . Durch diese Deckachsensymmetrie ist die tetragonal trapezoedrische Klasse charakterisiert.

$D^6 + 3D^2 = D^6$ ,  $3D^2_n (3D^2_z)$  liefert die dem  $\beta$ -Quarz entsprechende, hexagonal trapezoedrische Symmetrie.

Bei  $4 \uparrow D^3$  haben sich schon von selbst  $3D^2$  eingestellt, eine Hinzufügung von  $D^2$  brächte also keine neue Symmetrieklasse, wohl aber ist geometrisch noch eine Kombination mit  $D^4$  möglich.

$4D^3 + 3D^4 = 4D^3$ ,  $3D^4 (6D^2)$ , wobei sich automatisch in den Richtungen der Flächendiagonalen des Würfels neue  $D^2$  hinzugesellen (gyroedrische = pentagonikositetraëdrische Klasse des tesseralen Systems). Die  $3D^4$  haben mit den ursprünglichen  $3D^2$  die gleiche Lage und dienen als Koordinatenachsen.

Mit Ausnahme der etwa automatisch hinzutretenden Symmetrieebenen enthalten die bisher abgeleiteten Kristallklassen bloß verschiedenartige ein-, wechsel- oder zweipolige Deckachsen und deren Kombinationen.

Untersucht man nun die Kombinationsmöglichkeiten von Symmetrieelementen unter Hinzufügung der bisher nicht verwendeten Symmetrieebenen, dann ist zu beachten, daß, wie schon öfters betont, S nur dann als unabhängige Komponente beigefügt werden kann, wenn man die zu kombinierenden S und  $D^{2n}$  nicht normal zueinander stellt. D. h. die neu einzuführenden Symmetrieebenen müssen die mit ihnen kombinierte  $D^x$  in sich selbst enthalten, also mit diesen  $D^x$  gleichgerichtet (parallel) sein<sup>2</sup>. Diese Überlegung führt zu den Stufen 5—7, indem die Stufen 1—3 mit S //  $D^x$  kombiniert werden. (Schluß folgt.)

<sup>1</sup> Die Indizes n, bzw. z bedeuten Neben- oder Zwischen-Deckachsen. Analog erfolgt auch in diesen Zeilen die Unterscheidung in  $\Sigma$ ,  $S_n$ ,  $S_z$  als Haupt-, Neben- und Zwischen-Symmetrieebenen. Man vergesse nicht, daß die einander zugeordneten  $D^2_n$  und  $S_n$  ( $D^2_z$  und  $S_z$ ) aufeinander normal stehen. Solange keine Indizes zur Verwendung kommen, sind solche zugeordnete Elemente durch  $D^x$ ,  $\Sigma$  gekennzeichnet (vergl. Anm. p. 148).

<sup>2</sup> Durch Hinzufügung von Symmetrieebenen //  $D^x$  wird das Ableitungsprinzip nicht durchbrochen, da ja jede Symmetrieebene einer auf ihr normalen, wechselfolgigen  $D^2$  gleichwertig ist. Man kann also die weitere Entwicklung auch definieren: Kombination mit normalen  $\wedge D^2$ , wodurch die Strenge des Ableitungsprinzipes klar hervortritt. Der Anschaulichkeit wegen wird statt  $\wedge D^2$  die Symmetrieebene genannt.

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Centralblatt für Mineralogie, Geologie und Paläontologie](#)

Jahr/Year: 1916

Band/Volume: [1916](#)

Autor(en)/Author(s): Tertsch Hermann Julius

Artikel/Article: [Zur Gruppierung der 32 Kristallklassen. 145-154](#)