

Original-Mitteilungen an die Redaktion.

Zur Kristallsymmetriellehre des Diskontinuums (verallgemeinerte Symmetriellehre).

Von Paul Niggli.

Mit 2 Textfiguren.

Der Kristallsymmetriellehre des Kontinuums steht die Kristallsymmetriellehre des Diskontinuums gegenüber, den 32 Kristallklassen (Kristallsymmetriegruppen) entsprechen die 230 Kristallraumssysteme (Raumgruppen).

Für die erstere gilt (im physikalischen Sinne): Alle einem Symmetrieelement (Symmetrieachse, Symmetrieebene, Symmetriezentrum) parallelen gleichen Elemente (Geraden oder Ebenen oder Punkte) sind wiederum entsprechende Symmetrieelemente. Speziell gilt: Alle Punkte sind sich identisch.

Im Gegensatz dazu stehen die folgenden Sätze, welche die Kristallsymmetriellehre des Diskontinuums einleiten und von einer diskontinuierlichen Struktur der Materie bei periodischer Homogenität verlangt werden.

1. Der Abstand paralleler gleichartiger Symmetrieelemente voneinander kann nicht unter einen endlichen Wert sinken.

2. Die Identität¹ tritt erst in bestimmten Abständen wieder auf, die nicht unendlich klein werden können und die einzig von der Richtung abhängig sind. Es existiert daher um jeden Punkt ein Raum der Nichtidentität von beliebiger Gestalt, aber konstantem endlichen Volumen. Dieser Raum kann immer als Parallelepipiped konstruiert werden und bildet als solches den großen Fundamentalbereich einer regelmäßigen Raumteilung. Jedem Raum der Nichtidentität eines gegebenen Raumsystems gehört die gleiche und volle Zahl von nichtidentischen Symmetrieelementen an.

Der Satz zwei verbürgt die periodische Homogenität und ist der Ausdruck dafür, daß jedem Raumsystem eine Translationsgruppe oder ein Raumgitter zugeordnet werden kann². Die historische Entwicklung der Kristallstrukturlehre hat zur Folge, daß bei der

¹ Zwei Punkte sind nur dann identisch, wenn die Anordnung der übrigen Punkte auch der Lage nach eine gleiche ist, ohne daß eine Drehung oder Spiegelung stattfinden muß. (Identität = Drehung Null).

² Gleichzeitig ergibt sich daraus auch, daß die Achsen 2-, 3-, 4- oder 6-zählig sein müssen.

Ableitung der Raumsysteme meist so vorgegangen wird, daß man zuerst die möglichen speziellen Formen der Raumgitter bestimmt und dann mit ihnen als etwas Gegebenem weiteroperiert. Der nachstehend skizzierte Weg scheint mir konsequenter und einfacher zu sein. Die zwei mitgeteilten Sätze der Kristallsymmetriehlehre des Kontinuums sagen aus, daß es zur Ableitung der 32 Kristallklassen genügt, die möglichen Kombinationen von durch einen Punkt gehenden Symmetrieelementen aufzusuchen. In gleicher Weise muß es möglich sein, die 230 Raumsysteme mathematisch abzuleiten, indem man für den Raum der Nichtidentität alle mit den Symmetriegesetzen in Einklang stehenden Kombinationen von Symmetrieelementen aufsucht. Die spezielle Form des Tripels primitiver Translationen ergibt sich automatisch aus der angewandten Kombination.

Die grundlegenden Symmetrieoperationen sind Drehung um eine Achse und Spiegelung an einer Ebene.

1. Einer n -zähligen Achse (kristallographisch $n = 2, 3, 4, 6$) eigen ist die Rotation um einen bestimmten Winkel derart, daß, wenn diese Rotation n -mal im gleichen Sinne ausgeführt wird, die Identität entsteht. Im Kontinuum wird diesen Bedingungen einzig die Drehungsachse gerecht, im Diskontinuum, in dem auch in der Achsenrichtung identische Punkte einen bestimmten Abstand besitzen, außerdem die Schraubenachse, deren Translationskomponente der n^{te} Teil eines Ein- oder Vielfachen des Identitätsabstandes in Richtung der Achse ist.

2. Einer Symmetrieebene im weiteren Sinne eigen ist die Spiegelung, die zweimal ausgeführt die Identität ergeben muß. Im Diskontinuum gibt es Spiegelebenen und Gleitspiegelebenen, die diese Bedingungen erfüllen, letztere dann, wenn der Betrag der Gleitung die Hälfte einer primitiven Translation (Identitätsabstand) in der Ebene ist. (Gleitspiegelebenen und Spiegelebenen können zusammen auch als spiegelnde Ebenen bezeichnet werden.)

3. Inversion und Drehspiegelung lassen sich als Produkt zweier nacheinander ausgeführten Operationen 1 und 2 auffassen. Gleichgültig, ob man dazu Drehungsachsen oder Schraubenachsen, Spiegelebenen oder Gleitspiegelebenen verwendet, entsteht im ersten Falle ein Symmetriezentrum, im zweiten Falle die Kombination einer $\frac{n}{2}$ -zähligen Drehungsachse mit einer Drehspiegelebene.

Drehungsachsen erster Art, Schraubenachsen, Spiegelebenen, Gleitspiegelebenen, Symmetriezentren, Drehungsachsen zweiter Art sind die Symmetrieelemente des Diskontinuums. Sie derart zu kombinieren, daß der Abstand paralleler gleichartiger Elemente nicht unter einen endlichen Betrag hinuntergehen kann, ist die Aufgabe der Symmetriehlehre des Diskontinuums. Die Aufgabe ist jeweilen

erledigt, wenn alle einem Raume der Nichtidentität angehörigen Symmetrieelemente angegeben sind. Die, nach dem kristallographischen Grundgesetz (das übrigens auch durch die endliche Translationsgruppe gewährleistet wird) möglichen und sich gegenseitig bedingenden, Kombinationen erhält man unter Berücksichtigung einer Reihe von Sätzen, die zweckmäßig zuerst abgeleitet werden. Die meisten dieser Sätze lassen sich so formulieren, daß die Beziehungen zwischen den einfachen Symmetrieelementen (Symmetriellehre des Kontinuums) Spezialfälle davon sind. Sie stellen daher eine ganz geringe Mehrbelastung dar und zeigen auch ihrerseits, daß die Punktsymmetrie nur ein Sonderfall der Raumsymmetrie ist.

Folgende seien hier erwähnt (die von SCHÖENFLIES angegebenen Sätze sind selbst Spezialfälle davon):

1. Zwei unter einem Winkel $\frac{\pi}{n}$ stehende zweizählige Achsenscharen (kreuzend oder schneidend) bedingen darauf senkrecht stehende n -zählige Achsen; gleichzeitig entstehen zweizählige Achsenscharen von im ganzen n -Richtungen, die aller einer Ebene p parallel sind, bzw. (schneidend) in ihr liegen. Einem Projektionspunkt (O) der Kreuzungen von Achsen aller n -Richtungen auf p (bzw. deren Schnittpunkt) ist dann im Abstände OA (in p liegend) eine senkrecht auf p stehende n -zählige Achse zugeordnet, wenn die von A auf die Projektion der n zweizähligen Achsen gefällten Lote jede Achsenprojektion in der Hälfte ihres Schraubungskomponentenabstandes von O aus treffen¹. Die Schraubungskomponente der n -zähligen Achse ist dem doppelten Abstände zweier um $\frac{\pi}{n}$ gedrehten Achsen gleich.

Von besonderer Bedeutung für die Ableitung der Vierergruppen ist der auf die zweizähligen Achsen bezügliche Spezialfall. Er möge daher einzeln formuliert werden:

Zwei rechtwinklig zueinander stehende (windschief oder schneidend) zweizählige Achsenscharen bedingen auf beiden senkrecht stehende zweizählige Achsen, die von der Projektion der Kreuzung, bzw. dem Schnittpunkt, um je den halben Schraubungskomponentenbetrag entfernt sind². Die Achsen besitzen selbst eine Schraubungs-

¹ Schneiden sich die n zweizähligen Achsen in einem Punkt, so wird der Kreuzungspunkt zum Schnittpunkt selbst, die Projektionsebene zur Ebene der zweizähligen Achsen.

Sind alle zweizähligen Achsen Drehungsachsen, so geht die n -zählige Achse durch den Schnittpunkt der zweizähligen Achsen, bzw. bei windschiefer Lage durch den Kreuzungsprojektionspunkt.

² Stets in geometrischer Auffassung: Abstand = Diagonale eines aus den halben Schraubungskomponenten gebildeten Parallelogramms, bzw. (hier) Rechteckes. Die Projektion bezieht sich auf eine zu den Ausgangaachsen parallele Ebene.

komponente gleich dem doppelten kürzesten Abstand zweier Achsen der ersten und zweiten Schar. (Siehe Fig. 1.)

[Zweizählige Drehungsachsen somit senkrecht zu zwei sich schneidenden zweizähligen Achsen, zweizählige Schraubenachsen senkrecht zu zwei windschief zueinander stehenden Achsen]. Die entstehenden Einzelfälle, wenn alle Achsen Drehungsachsen sind, ergeben sich leicht von selbst.

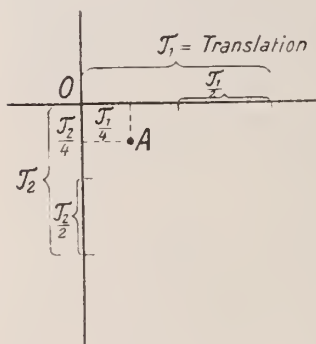


Fig. 1.

2. Eine auf einer spiegelnden Ebene¹ senkrecht stehende zweizählige Achse bedingt ein Symmetriezentrum, das vom Schnittpunkte um die Hälfte der Gleitungs-komponente und die Hälfte der Schraubungs-komponente entfernt ist. Auch hier wird der auf einfache Symmetrie-elemente bezügliche Satz zu einem Spezialfall.

3. Der, die Schnittlinie zweier spiegelnden Ebenen, betreffende Satz sei in der für zweizählige Achsen gültigen Form mitgeteilt. Die Verallgemeinerung ist wie in 1 leicht auf 4-zählige, 6-zählige, 3-zählige Achsen zu übertragen.

Parallel der Schnittlinie zweier (n) senkrecht ($\angle = \frac{\pi}{2} = \frac{n}{n}$) aufeinander stehender spiegelnden Ebenen liegt im beidseitigen (allseitigen) Abstände der Hälfte der dazu senkrechten Gleitungs-komponenten eine zweizählige (n -zählige) Achse mit einer Schraubungs-komponente entsprechend der Höhendifferenz der zur Achse parallelen Gleitungs-komponenten².

4. Jede $2n$ -zählige Drehspiegelachse ist zugleich n -zählige Drehungsachse.

5. Jede Parallelschar zweizähliger Achsen³ besteht aus 4 nicht-identischen⁴ Achsen. Ist eine davon zugleich vierzählig, so ist gleichzeitig noch eine Zweite vierzählig. Ist eine zugleich sechszählig, so gibt es weiter keine sechszähligen Achsen, hingegen existieren dann nach dem folgenden Satze außerdem zwei dreizählige Achsen.

6. Jede Parallelschar dreizähliger Achsen besteht aus drei nichtidentischen Achsen. Von diesen kann eine zugleich sechszählig

¹ Spiegelnde Ebene umfaßt Gleitspiegelebene und Spiegelebene.

² Sind die Gleitrichtungen schief, so handelt es sich um die Teil-komponenten in den zwei ausgezeichneten Richtungen.

³ Achse kurzweg bedeutet Drehungsachse oder Schraubenachse.

⁴ Nichtidentisch bedeutet durch Decktranslationen (Identitätsabstände) nicht ineinander überführbar.

erster Art sein, dann gehören zur Parallelschar außerdem 3 nicht-identische zweizählige Achsen.

7. Jede Parallelschar von spiegelnden Ebenen besteht aus zwei nichtidentischen Ebenen.

8. Jede Parallelschar von Symmetriezentren besteht aus 8 nichtidentischen Symmetriezentren.

Es tritt somit kein Symmetrieelement einzeln im Raume der Nichtidentität (großer Fundamentalebene) auf. Die Scharen selbst können sich noch in verschiedener Weise aus Schraubenachsen und Drehungsachsen oder Gleitspiegelebenen und Spiegelebenen kombinieren. Und schon hier zeigt sich, wie eine bestimmte Kombination zu einer besonderen Form des Tripels primitiver Translationen führt, derart, daß eine vorgängige Ableitung der Raumgittertypen unnötig ist.

Es sollen beispielsweise alle Raumsysteme gebaut werden, die lediglich parallele zweizählige Achsen besitzen. Die Achsen können Schraubenachsen, oder Drehungsachsen und Schraubenachsen oder Drehungsachsen allein sein. Welches sind die möglichen Kombinationen und Anordnungen?

Zunächst seien nur Schraubenachsen vorhanden. Durch den Punkt A (Fig. 2) gehe senkrecht zur Zeichenebene eine zweizählige Schraubenachse (a) mit einer bestimmten Ganghöhe, die ja zugleich den Abstand identischer Punkte in der Achsenrichtung ergibt. Von den Abständen zwischen parallelen zweizähligen Schraubenachsen greife ich die zwei kürzesten heraus, die betreffenden, im übrigen beliebigen, Richtungen seien mit x und z bezeichnet. Durch B gehe die nächste zweizählige Schraubenachse (b), die a parallel läuft und daher nach dem Satz über die Identitätsabstände gleiche Ganghöhe besitzt. Diese Schraubenachse b hat zur Folge, daß im Abstände $2AB = AA'$ eine zweizählige Schraubenachse a' entsteht, die mit a identisch ist. (Zu jedem Punkt auf der Achse a gehört ein identischer Punkt auf a' und umgekehrt. Die Anordnung setzt sich in dieser Richtung von selbst ins Unendliche fort. Auf x gehe die a nächste zweizählige Schraubenachse c durch C. Sie bedingt durch $AA'' = 2AC$ eine mit a identische zweizählige Schraubenachse a''. Der Satz von den Identitätsabständen ergibt nun ohne weiteres die Achsen b', c', a'''. Da aber a und a''' identisch sind, geht durch die Mitte von AA''' notwendigerweise eine weitere zweizählige Schraubenachse d.

In der zu den Achsen senkrechten Ebene (Zeichnungsebene) umfaßt, wie sich leicht beweisen läßt, das Parallelogramm die gesamte Nichtidentität. Das Parallelepiped mit der Ganghöhe der Schraubenachse als Höhe umfaßt gleicherweise die gesamte Raumnichtidentität. Durch dieses Parallelepiped kann aber keine neue Schraubenachse gehen, da wir ja vorausgesetzt haben, AB und AC seien die kürzesten Abstände. Würden wir in irgend einem Punkt

Diesmal sind aber weder AA' noch AA'' primitive Translationen. In der Ebene der Achsen $a \ b \ a' \dots$ schließt die primitive Trans-

lation mit den Achsen einen Winkel ein, dessen $\text{tang} = \frac{g}{AA'}$ ist. ($g =$ Ganghöhe der Schraubenachse). Die spezielle Form der Translationsgruppe ergibt sich somit ohne weiteres aus der angewandten Kombination.

Nur eine mögliche Parallelschar zweizähliger Achsen bleibt zur Besprechung übrig. Alle Achsen sind Drehungsachsen. Wieder gibt es 4 nichtidentische Achsen, die Ableitung führt sofort zur Gruppe \mathcal{C}_2^1 , mit einem primitiven Translationstripel wie in \mathcal{C}_2^2 .

Auf gleiche Weise lassen sich die möglichen Achsenscharen drei- und vierzähliger Achsen bestimmen, wobei ebenfalls die speziellen Kombinationen von Drehungs- und Schraubenachsen die verschiedenen Formen des primitiven Translationentripels automatisch liefern. Die möglichen Kombinationen von Parallelscharen einer Symmetrieebene sind: 1. Gleitspiegelebenen verschiedener Art, 2. Gleitspiegelebenen gleicher Art der Gleitspiegeloperation. 3. Gleitspiegelebenen und Spiegelebenen. 4. Spiegelebenen allein. Jeder Kombination entspricht ein Raumsystem, und die speziellen Formen des Translationentripels ergeben sich wieder als etwas Sekundäres.

Hat man alle Einzelparallelscharen der Symmetrieelemente abgeleitet, so lassen sich diese Scharen unter Berücksichtigung der Sätze, die das Neuaufreten von Symmetrieelementen bedingen, in der jeweiligen zulässigen Weise kombinieren. Das Resultat sind die 230 Raumsysteme¹. Der zu jeder Kombination gehörige Gittertypus stellt sich von selbst ein.

Vom Diskontinuitätsstandpunkte aus ist dies eine konsequente Ableitung, wie sie eine Fundamentalvorlesung über Kristallographie

¹ In Frage kommen hiebei, außer dem allgemeinen Charakter der zu kombinierenden Scharen von Symmetrieelementen, die gegenseitigen Lagebeziehungen der Symmetrieeoperationen und Symmetrieelemente. — So sind beispielsweise alle 4 Raumsysteme $\mathcal{C}_{2,v}^3$, $\mathcal{C}_{2,v}^8$, $\mathcal{C}_{2,v}^{10}$, $\mathcal{C}_{2,v}^6$ durch die Kombinationen $(\mathcal{C}_2^1, \mathcal{C}_s^2, \mathcal{C}_s^2)$ gegeben. Sie unterscheiden sich hinsichtlich der Gleitspiegeloperation und ihrer Lage zu der Achsenrichtung. — $\mathcal{C}_{2,v}^{18}$ und $\mathcal{C}_{2,v}^{20}$ besitzen beide die Kombination $(\mathcal{C}_2^3, \mathcal{C}_s^3, \mathcal{C}_s^3)$, das eine Mal gehen aber die Symmetrieebenen Achsenebenen parallel, die Drehungsachsen und Schraubenachsen enthalten, das andere Mal sind sie parallel denjenigen Achsenebenen, die entweder lauter Drehungsachsen oder lauter Schraubenachsen führen. Das ist zugleich ein Gegensatz, der sich in verschiedenen primitiven Translationentripeln manifestiert; $\mathcal{C}_{2,v}^{18}$ besitzt infolgedessen das flächenzentrierte Gitter, $\mathcal{C}_{2,v}^{20}$ das innenzentrierte Gitter als Translationsgruppe.

vermitteln müßte. Die Reduktion auf 32 Kristallklassen für alle jene Vorgänge und Erscheinungen, bei denen praktisch mit einem Kontinuum gerechnet wird, ist leicht zum Schlusse durchzuführen. Jedes Raumsystem ist durch die Zahl und die gegenseitige Lage aller nichtidentischen Symmetrieelemente im großen Fundamentalebereich charakterisiert, doch ist es im Anschluß an die makroskopische Kristallographie zweckmäßiger, in allen Fällen die Symmetrieelemente anzugeben, die sich in einem Elementarparallelepiped befinden, mit den Identitätsabständen in Richtung der kristallographischen Achsen als Kanten. In dieser Weise sind von mir die kubischen Raumsysteme dargestellt worden. (Siehe eine demnächst erscheinende Arbeit.)

Wählt man den umgekehrten Weg und schickt die Ableitung der 32 Kristallklassen voraus, so erhält man die Raumsysteme, indem an Stelle aller Symmetrieelemente die für das homogene Diskontinuum möglichen Parallelscharen eingesetzt und die erhaltene Kombination auf ihre gegenseitige Bedingtheit geprüft werden. In beiden Fällen ist außer der Kenntnis der Sätze, die das Zusammenvorkommen von Symmetrieelementen betreffen, nur eine vorgängige Ableitung der Einzelscharen (denen übrigens auch Raumsysteme entsprechen) nötig. Irgend ein Raumsystem läßt sich dann direkt ohne weitere Kenntnis von Untergruppen ableiten.

Daß dabei den speziellen Typen der Translationsgruppe keine besondere Rolle zukommt, ist durchaus richtig. Die Raumgitteranordnung von Punkten verbürgt ja lediglich die periodische Homogenität und hängt mit dem speziellen Symmetriecharakter nur indirekt zusammen. (Winkelgröße, Translationengleichheit etc.)

Die Raumsysteme sind für das Diskontinuum das, was die Kristallklassen für das Kontinuum sind. Die speziellen Fälle, die entstehen, wenn den Schwerpunkten von Massenteilchen bestimmte Lagen¹ zukommen, sind das Analoge der verschiedenen Flächenkomplexe und Flächenkombinationen ein und derselben Kristallklasse. Für diese Zwecke muß man daher die Punkte innerhalb des großen Fundamentalebereichs oder des Elementarparallelepipeds nach ihrer Zähligkeit, nach ihrer Symmetrie und nach ihren Freiheitsgraden

¹ Hier kann sich wohl zeigen, daß bestimmte Lagen als Schwerpunktlagen besonders ausgezeichnet sind, so daß die entsprechenden Verbindungslinien bestimmte „Gittertypen“ liefern (beispielsweise das häufige Auftreten einer flächenzentrierten Gitteranordnung im kubischen System auch dann, wenn das zugehörige Translationentripel einfach ist). Das hängt mit den Stabilitätsbedingungen der Anordnungsmöglichkeiten von Massenteilchen zusammen und enthält die eigentlichen, vielleicht nur wenig variablen, Kristallisationsgesetze (siehe einige bereits erschienene Mitteilungen). Gerade weil derartige Anordnungsmöglichkeiten nicht an bestimmte Translationsgruppen gebunden sind, müssen die Raumsysteme unter möglichster Vermeidung des Gitterbegriffes abgeleitet werden.

ordnen. (Für die kubischen Raumgruppen siehe eine demnächst erscheinende Arbeit im N. Jahrb. f. Min. etc.) Auch bei der Annahme von nur quasihomogenem verzwilligtem Bau bleibt nichts anderes übrig als zuerst die Raumsysteme abzuleiten und die Zwillingsgesetze darauf wirken zu lassen. Bis jetzt sind derartige Versuche selten ins Einzelne ausgearbeitet worden, so daß sich noch nicht erkennen läßt, welchen Vorteil diese kompliziertere Auffassung bieten wird.

Leipzig, Institut für Mineralogie und Petrographie.

Pisanit vom Lading in Kärnten.

Von H. Leitmeier in Wien.

Am Lading bei St. Michael im Lavanttale in Kärnten befindet sich im Gneis und Kalkstein eine Kieslagerstätte, deren Haupterze Pyrit- und Kupferkies sind, die am reichsten im Gneis auftreten. Diese Lagerstätte und ihre Erze sind beschrieben worden von F. v. ROSTHORN und J. L. CANAVAL¹, RIEDL² und R. CANAVAL³, am eingehendsten hat sich der Letztgenannte geäußert, der auch den Gneis und seine mineralische Zusammensetzung näher untersucht hat. Neben den kiesigen Erzen findet sich Limonit, Granat, Quarz und Glimmer, die mit dem Pyrit zusammen auftreten. Auch ein wasserhaltiges, von Kupfer gefärbtes, grau- bis spangrünes Tonerdesilikat kommt dort vor, das namentlich R. CANAVAL näher beschrieben hat. Als Zersetzungsprodukte fehlen natürlich Malachit und Azurit nicht; auch Cuprit wurde in dieser Lagerstätte gefunden.

Von einem Besuche mehrerer Bergwerke Kärntens brachte Herr Hofrat Prof. Dr. C. DOELTER eine Eisen-Kupfersulfatstufe mit, deren Untersuchung er mir überließ, wofür ich ihm auch an dieser Stelle bestens danke. Ferner übergab mir Herr Berg- rat HOLLER eine schöne Stufe zur Untersuchung, für die ihm auch bestens gedankt sei.

Auf einer Masse, die aus zersetztem, zum größten Teile in Limonit umgewandeltem Pyrit, der auch etwas Kupferkies enthält, besteht, haben sich Sulfatkristalle gebildet. Man unterscheidet sofort zweierlei Arten dieses Sulfates: blaue, in ihrer Färbung etwas blasser als Kupfervitriol, und daneben grüne, wie Eisenvitriol gefärbte Kristalle. Das grüne Mineral überzieht das blaue, hat sich also später gebildet.

¹ F. ROSTHORN und J. L. CANAVAL, Jahrbuch nat. Museum v. Kärnten. 1853. 173.

² RIEDL, Zeitschrift berg-hüttenmänn. Vereines f. Kärnten. 1873.

³ R. CANAVAL, Jahrbuch nat. Museum v. Kärnten. 1901. 1.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Centralblatt für Mineralogie, Geologie und Paläontologie](#)

Jahr/Year: 1917

Band/Volume: [1917](#)

Autor(en)/Author(s): Niggli Paul

Artikel/Article: [Zur Kristallsymmetriehre des Diskontinuums \(verallgemeinerte Symmetriehre\). 313-321](#)