

logischer Zusammensetzung der vulkanischen Gesteine am Kontakt wurden überhaupt nicht wahrgenommen.

Zusammenfassend kann über den Charakter der oben beschriebenen Kontakterscheinungen gesagt werden, daß der Grad der Umschmelzung der ursprünglichen quarzitischen Gesteine ein sehr verschiedener sein kann, der, wie es scheint, nicht in direktem Zusammenhang mit den Dimensionen der Einschlüsse steht, weil kleine Einschlüsse oft nur wenig Veränderungen zeigen. Bei starker Umschmelzung bildet sich aus dem Glase hauptsächlich Tridymit, daneben ist auch Cordierit reichlich vorhanden. Einschlüsse, in denen fast gar keine Reste des ursprünglichen Quarzes übriggeblieben sind, kommen vor. Auch bei sehr starker Umschmelzung des sauren Einschlusses hat eine Resorption durch das umschließende basische vulkanische Magma nicht stattgefunden.

Koordinatentransformation in regelmäßigen Punktsystemen.

Von A. Johnsen in Kiel.

Symbolik des Punktsystems und Bedeutung der Teilgitter.

Jedes regelmäßige Punktsystem besteht aus den Gitterpunkten von n parallelen kongruenten Gittern I_1, I_{II}, \dots, I_n und ist daher formal mit Gitterebenen, Gitterlinien und Parametern ausgestattet.

Als Koordinatenachsen X, Y, Z wählen wir drei nicht komplanare Gitterlinien irgendeines Gitters, etwa I_1 , die nicht konjugiert zu sein brauchen; ihre Parameter heißen a, b, c . Schneidet nun irgendeine Gitterebene des Punktsystems auf X, Y, Z die Abschnitte $\lambda_1 a, \lambda_2 b, \lambda_3 c$ ab, so sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ entweder rational (aber im allgemeinen nicht ganzzahlig) oder in beliebiger Annäherung rational zu setzen. Wir nennen $h = \frac{1}{\lambda_1}, k = \frac{1}{\lambda_2}, l = \frac{1}{\lambda_3}$ die „Indizes“ der Gitterebene und (h, k, l) ihr Symbol; die „Einheitsgitterebene“ mit den Abschnitten a, b, c wird demnach durch $(1, 1, 1)$ symbolisiert, und die drei Gitterebenen $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ laufen den Koordinatenebenen YZ, ZX, XY parallel. Hat irgendein Gitterpunkt des Punktsystems die Koordinaten $x = ua, y = vb, z = wc$, so sind u, v, w seine „Indizes“ und $[u, v, w]$ ist sein Symbol; u, v, w sind entweder rational (aber im allgemeinen nicht ganzzahlig) oder in beliebiger Annäherung rational zu setzen; der Koordinatenursprung heißt also $[0, 0, 0]$. Die durch ihn und den Gitterpunkt $[u, v, w]$ laufende Gitterlinie symbolisieren wir durch $[u_0, v_0, w_0]$, wo die Indizes u_0, v_0, w_0 teilerfremde ganze Zahlen sind und $u_0 : v_0 : w_0 = u : v : w$ ist. Der Parameter der Gitterlinie $[u_0, v_0, w_0]$ werde mit $[u_p, v_p, w_p]$ bezeichnet; die Indizes u_p, v_p, w_p

sind identisch mit den Indizes desjenigen Gitterpunktes $[u_p, v_p, w_p]$, dessen Abstand vom Nullpunkt nach Richtung und Länge gleich dem Parameter der Gitterlinie $[u_0, v_0, w_0]$ ist. Somit haben z. B. die Parameter a, b, c der Koordinatenachsen, die sog. „Achsenparameter“, die Symbole $[1.0.0]$, $[0.1.0]$, $[0.0.1]$ ¹.

Wenn die zu Koordinatenachsen gewählten Gitterlinien konjugiert sind, ist $u_p = u_0$, $v_p = v_0$, $w_p = w_0$, d. h. dann sind u_p, v_p, w_p ganzzahlig und teilerfremd, sonst aber im allgemeinen nicht. Andernfalls bestimmen nämlich die Achsen X, Y, Z , bzw. deren Parameter a, b, c nicht das ganze Gitter T_1 , sondern ein „Teilgitter“ G_1 derart, daß m parallele kongruente Teilgitter $G_1', G_1'', G_1''', \dots$ das Gesamtgitter T_1 bilden. Wählt man z. B. in einem flächenzentrierten Würfelgitter die offenbar nicht konjugierten Kanten eines flächenzentrierten Würfels zu Achsenparametern, so bestimmen diese ein einfaches Würfelgitter, und vier solche einfachen Würfelgitter bauen, als kongruente Teilgitter G', G'', G''', G'''' parallel ineinandergestellt, das flächenzentrierte Würfelgitter T auf. In solchen Fällen hat man zur Ermittlung des Parameters $[u_p, v_p, w_p]$ einer gegebenen Gitterlinie $[u_0, v_0, w_0]$ des Gitters T festzustellen, wieviele der m Teilgitter G', G'', \dots sich an der Punktbesetzung jener Gitterlinie beteiligen. Gehört z. B. der Nullpunkt $[0, 0, 0]$ von T zu dem Teilgitter G' , so beteiligen sich Gitterpunkte von G' auch an der Gitterlinie $[u_0, v_0, w_0]$ von T . Gehört irgendein Gitterpunkt $[u_i, v_i, w_i]$ von T zum Teilgitter G'' , so nehmen an der Gitterlinie $[u_0, v_0, w_0]$ auch Gitterpunkte von G'' stets und nur dann teil, wenn

$$I) \begin{cases} v_0 u_i - u_0 v_i = r_1 \\ w_0 v_i - v_0 w_i = r_2 \\ u_0 w_i - w_0 u_i = r_3 \end{cases}$$

wo r_1, r_2, r_3 positive oder negative ganze Zahlen einschließlich Null sind. Hat man auf diese Weise festgestellt, daß sich im ganzen g der m Teilgitter an der durch $[0, 0, 0]$ laufende Gitterlinie $[u_0, v_0, w_0]$ beteiligen, so sind die Indizes des Parameters $[u_p, v_p, w_p]$ dieser Gitterlinie gegeben durch

$$II) \quad u_p = \frac{u_0}{g}, \quad v_p = \frac{v_0}{g}, \quad w_p = \frac{w_0}{g}.$$

Die Teilgitter spielen auch in der Röntgenometrie der Kristalle eine Rolle. Dasjenige Gitter, welches röntgenometrisch zunächst festgestellt wird, ist oft nur ein Teilgitter von T . Die aus BRAGG's Formel oder aus DEBYE-SCHERRER's quadratischer Form berechneten primitiven Abstände d_1, d_2, d_3 dreier reflektierender Scharen ergeben nämlich, wenn deren Neigungswinkel ermittelt

¹ Gitterpunkte. Parameter und Gitterlinien unterscheiden sich also im Symbol allgemein durch die Interpunktion.

sind, häufig nur das Volumen eines Teilgitterparallelepipedons. Erst ein Vergleich dieses Volumens mit dem absoluten Atomvolumen und die Anwendung des Strukturfaktors liefern unter anderem auch die Anzahl und die Ineinanderstellung solcher Teilgitter G und somit die Beschaffenheit der Gitter T . Ist beispielsweise T eines Kristalles ein flächenzentriertes Würfelgitter, so ergibt die Reflexion erster Ordnung an den Kristallflächen (111), (131) und (133) drei Größen $\sin \vartheta_{111}$, $\sin \vartheta_{131}$ und $\sin \vartheta_{133}$, die in dem gleichen Verhältnis zueinander stehen wie in dem Falle eines einfachen Würfelgitters: letzteres wird sich erst bei weiterer Untersuchung als ein Teilgitter G verraten derart, daß im ganzen vier gleiche Teilgitter G' , G'' , G''' , G'''' in bestimmter Weise zu einem flächenzentrierten Gitter T vereinigt sind.

Transformation bei Drehung der Koordinatenachsen.

Der Nullpunkt $[0, 0, 0]$ bleibt erhalten. Dann ist die Transformation eindeutig bestimmt durch die alten Symbole $[u_1 \cdot v_1 \cdot w_1]$, $[u_2 \cdot v_2 \cdot w_2]$, $[u_3 \cdot v_3 \cdot w_3]$ derjenigen Parameter, welche in dem neuen Koordinatensystem als Achsenparameter $[1.0.0]$, $[0.1.0]$, $[0.0.1]$ fungieren: es seien also die neun Indizes $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, u_3, v_3, w_3$ gegeben. Wir setzen zur Abkürzung die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

und ihre neun Unterdeterminanten

$$D \begin{cases} \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} = d_{11}, & \begin{vmatrix} v_3 & w_3 \\ v_1 & w_1 \end{vmatrix} = d_{12}, & \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} = d_{13} \\ \begin{vmatrix} w_2 & u_2 \\ w_3 & u_3 \end{vmatrix} = d_{21}, & \begin{vmatrix} w_3 & u_3 \\ w_1 & u_1 \end{vmatrix} = d_{22}, & \begin{vmatrix} w_1 & u_1 \\ w_2 & u_2 \end{vmatrix} = d_{23} \\ \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = d_{31}, & \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} = d_{32}, & \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = d_{33} \end{cases}$$

Nun erhält die Gitterebene (h_i, k_i, l_i) das neue Symbol (h'_i, k'_i, l'_i) , wo

$$(1) \begin{cases} h'_i = h_i u_i + k_i v_i + l_i w_i \\ k'_i = h_i u_2 + k_i v_2 + l_i w_2 \\ l'_i = h_i u_3 + k_i v_3 + l_i w_3 \end{cases}$$

Löst man (1) nach h_i, k_i, l_i auf und setzt $h'_i = k'_i = l'_i = 1$, so findet man, daß die Gitterebene (h_i, k_i, l_i) zur Einheitsebene $(1, 1, 1)$ in dem neuen System wird, wenn $h_i = h, k_i = k, l_i = l$, wo

$$1a) \begin{cases} h = (d_{11} + d_{12} + d_{13}) D^{-1} \\ k = (d_{21} + d_{22} + d_{23}) D^{-1} \\ l = (d_{31} + d_{32} + d_{33}) D^{-1} \end{cases}$$

Analog ergibt sich, daß die Gitterebenen (h_1, k_1, l_1) , (h_2, k_2, l_2) , (h_3, k_3, l_3) die neuen Symbole $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ erhalten, wenn

$$(1b) \begin{cases} h_1 u_1 + k_1 v_1 + l_1 w_1 = 1, & h_1 u_2 + k_1 v_2 + l_1 w_2 = 0, & h_1 u_3 + k_1 v_3 + l_1 w_3 = 0 \\ h_2 u_1 + k_2 v_1 + l_2 w_1 = 0, & h_2 u_2 + k_2 v_2 + l_2 w_2 = 1, & h_2 u_3 + k_2 v_3 + l_2 w_3 = 0 \\ h_3 u_1 + k_3 v_1 + l_3 w_1 = 0, & h_3 u_2 + k_3 v_2 + l_3 w_2 = 0, & h_3 u_3 + k_3 v_3 + l_3 w_3 = 1 \end{cases}$$

Löst man (1b) nach den neun Unbekannten auf, so folgt

$$(1c) \begin{cases} h_1 = d_{11} D^{-1}, & k_1 = d_{21} D^{-1}, & l_1 = d_{31} D^{-1} \\ h_2 = d_{12} D^{-1}, & k_2 = d_{22} D^{-1}, & l_2 = d_{32} D^{-1} \\ h_3 = d_{13} D^{-1}, & k_3 = d_{23} D^{-1}, & l_3 = d_{33} D^{-1}. \end{cases}$$

Der Gitterpunkt $[u_i, v_i, w_i]$ erhält das neue Symbol $[u'_i, v'_i, w'_i]$, wo

$$(2) \begin{cases} u'_i = h_1 v_i + k_1 v_i + l_1 w_i \\ v'_i = h_2 v_i + k_2 v_i + l_2 w_i \\ w'_i = h_3 v_i + k_3 v_i + l_3 w_i. \end{cases}$$

Ebenso wie die Indizes eines Gitterpunktes $[u_i, v_i, w_i]$ müssen sich infolge der eingeführten Symbolik auch die Indizes eines Parameters $[u_p, v_p, w_p]$ transformieren.

Der Dualismus zwischen Gitterpunkten und Gitterebenen ist offensichtlich ein vollkommener. Betrachtet man z. B. in (1b) die neun Indizes $h_1, k_1, l_1, h_2, \dots, l_3$ als bekannt und die neun Indizes $u_1, v_1, w_1, u_2, \dots, w_3$ als gesucht, so resultiert $u_1 = \delta_{11} \cdot J^{-1}$, $v_1 = \delta_{21} \cdot J^{-1}$ etc., wo J die aus den neun Bekannten gebildete Determinante und δ_{11}, δ_{21} etc. deren neun Unterdeterminanten sind.

Transformation bei Verschiebung des Nullpunktes.

Die Richtungen der Koordinatenachsen bleiben erhalten. Verlegt man den Koordinatenursprung des Punktsystems von $[0, 0, 0]$ nach dem Gitterpunkt $[u, v, w]$, so erhält die Gitterebene (h_i, k_i, l_i) das neue Symbol (h'_i, k'_i, l'_i) , wo

$$(3) \begin{cases} h'_i = h_i (1 - u h_i)^{-1} \\ k'_i = k_i (1 - v k_i)^{-1} \\ l'_i = l_i (1 - w l_i)^{-1}. \end{cases}$$

und der Gitterpunkt $[u_i, v_i, w_i]$ ist zu symbolisieren durch $[u'_i, v'_i, w'_i]$, wo

$$(4) \begin{cases} u'_i = u_i - u \\ v'_i = v_i - v \\ w'_i = w_i - w. \end{cases}$$

Die kristallphysikalische Anwendbarkeit des Vorstehenden leuchtet ein, wenn man bedenkt, daß die Gesamtheit der Atomzentren jedes Kristalles ein regelmäßiges Punktsystem darstellt.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Centralblatt für Mineralogie, Geologie und Paläontologie](#)

Jahr/Year: 1918

Band/Volume: [1918](#)

Autor(en)/Author(s): Johnsen Arrien

Artikel/Article: [Koordinatentransformation in regelmäßigen Punktsystemen. 46-49](#)