© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/;www.zobodat.at

den Fingern gepreßt wurde, dürfte die dabei dem Präparat mitgeteilte Körperwärme ausgereicht haben, eine Schmelzung durch bloße Pressung vorzutäuschen.

In mehreren Kristallisationen von $SrBr_2 . 6 H_2O$ wurden niemals Spuren niederer als rhomboedrischer Symmetrie weder in der Verteilung noch Streifung der Flächen beobachtet, ebensowenig (an Platten bis 2 mm Dicke) Zirkularpolarisation.

Die Anwendung der Häufungsmethode auf zweikreisige Kristallmessung.

Von **T. J. Woyno** in Zürich.

Mit 7 Textfiguren.

Bei kristallographischer Untersuchung kegelförmig gerundeter Zinkblendezwillinge von Tiffin (Ohio) zeigten die beobachteten Flächenlagen erhebliche Schwankungen, die einerseits durch die kegelförmige Gestalt der Kristalle, andererseits durch Zwillingsbildung bedingt waren. Es lag also ein Fall vor, bei welchem die Fehler des Goniometers ohne Bedenken vernachlässigt werden konnten; ferner waren die beobachteten Schwankungen mit Sicherheit als systematische Fehler des Materials zu bewerten. Diese beiden Umstände erlaubten nicht, ohne vorhergehende Kritik einen Mittelwert aus den Beobachtungsresultaten zu bilden, auch war es notwendig, die Verhältnisse übersichtlicher darzustellen, als es die bloßen Zahlen tun, um sich über die Größe und den Charakter der Schwankungen zu orientieren. Da die ganze Untersuchung wegen der Beschaffenheit des Materials nur zweikreisig ausgeführt werden konnte, so ließen sich ihre Resultate graphisch als Punktmengen auf der Kugel darstellen. Es war nur notwendig, diese Punktmengen in beliebig großem Maßstabe abzubilden, um die gewünschte Übersicht zu erlangen. Das einfache Verfahren, welches zu diesem Zwecke ausgearbeitet wurde, soll im folgenden erörtert werden; die Aufgabe selbst läuft darauf hinaus, die von E. A. Wülfing kürzlich eingeführte Häufungsmethode[1] auf die zweikreisige Messung auszudehnen.

Vor allem mag hervorgehoben werden, daß das Wesen der Häufungsmethode von der speziellen Beobachtungsart, auf welche sie angewandt wird, unabhängig ist. Diese Feststellung ist notwendig, wenn man sie von dem Felde der einkreisigen Messung auf andere Gebiete übertragen will; diese Gebiete brauchen nicht einmal der Kristallographie anzugehören, da die Methode sich

[1] Sitz.-Ber. Heidelberg. Akad. d. Wiss. 1916. Abt. A. 11. Abh.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/;www.zobodat.at

ebensogut für jede exakte Forschung an Naturobjekten eignet. In allen Fällen wird an einer Reihe von Objekten, welche wir in bezug auf gewisse meßbare Größen als einander gleich betrachten, eine Anzahl von Beobachtungen angestellt; diese Beobachtungen können sich auf mehrere verschiedenartige Größen beziehen. In der Regel wird ein und dieselbe Beobachtung nicht an dem gleichen Objekt wiederholt. Die zu einer bestimmten Größe gehörenden Beobachtungsresultate müssen, falls die Objekte wirklich innerhalb gewisser Grenzen gleich sind, eine Häufung um einen Mittelwert herum aufweisen, d. h. ihre in Zahlen ausgedrückten Werte dürfen erstens nicht zu weit auseinanderliegen und zweitens müssen innerhalb der Zahlenreihe Wiederholungen derselben Werte vorkommen. Letztere Forderung wird freilich nur dann erfüllt, wenn die Meßmethode der Beschaffenheit der Objekte richtig angepaßt ist, d. h. wenn bei der Messung die Genauigkeit der Ablesungen nicht übertrieben wurde. Man kann in dieser Hinsicht Häufungen mit und ohne Wiederholung unterscheiden; erstere verdienen bei der Aufstellung von physiographischen Daten den Vorzug, weil sie leichter zur richtigen Bewertung der Untersuchung führen. Eine einfache Überlegung zeigt die Möglichkeit der beiden Häufungsarten. Messen wir z. B. 50mal den Oktaederwinkel an mehreren Kanten mehrerer nicht allzu gut ausgebildeter Spinellkristalle und lesen jedesmal nur auf 1′ genau ab, so können wir erwarten, daß sich die Werte $70^0 31'$ und $70^0 32'$ in der erhaltenen Zahlenreihe mehrfach wiederholen; würden wir aber dieselbe Messung an demselben Material bis auf 1″ genau ausführen, dann wäre es möglich, daß keiner von den erhaltenen Werten auch nur zweimal auftritt, weil die Anzahl der Werte, welche für die Ablesungen in Frage kommen, 60mal größer ist als im ersten Falle. Das Auftreten oder Nichtauftreten von Wiederholungen ist also von der Genauigkeit der Messung abhängig; andererseits kann auch die Brauchbarkeit einer Untersuchung in bezug auf das untersuchte Material durch das Ablesungsintervall charakterisiert werden, bei welchem bestimmte Wiederholungen auftreten. Das graphische Bild der Häufung ändert sich selbstverständlich entsprechend der zugehörigen Zahlenreihe; daraus folgt, daß man nur Bilder mit gleichem Ablesungsintervall unmittelbar miteinander vergleichen darf. Als Beispiel für die Veränderung mag die Fig. 4 p. 10 der zitierten Abhandlung von E. A. Wülfing angeführt werden, welche sich auf Messungen des Spaltwinkels am Anorthit bezieht. In Fig. 1a sind diese Verhältnisse für das Ablesungsintervall von $\frac{1}{2}'$ dargestellt, wobei keine deutliche Häufung zu sehen ist; in Fig. 1b ist das Intervall gleich 10′ genommen worden; dadurch wird auf Kosten der Genauigkeit eine ausgesprochene Häufung beim Werte $85^0 50'$ erzeugt, der freilich entsprechend dem Ablesungsintervall jetzt nur noch als $85\frac{5}{6}^0$ geschrieben werden darf.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/;www.zobodat.at

Es wäre eine interessante Aufgabe, von diesem Gesichtspunkte aus mehrere Beobachtungsreihen zu studieren; dies wird aber erst dann möglich sein, wenn eine größere Anzahl kristallographischer Arbeiten vorliegt, in welchen entsprechend der von E. A. Wülfing aufgestellten Forderung (l. c. p. 21 und 28) alle Einzelwerte der Messung veröffentlicht sind. Solche statistische Studien würden letzten Endes zur richtigen Bewertung des kristallographischen Untersuchungsmaterials führen; gleichzeitig könnten Forderungen, die man an zuverlässige physiographische Daten stellt, zahlenmäßig begründet werden.

Die bildliche Darstellung der Häufung dient zur Veranschaulichung der Resultate und zur Erleichterung der Kritik und der Auswahl für die Mittelwertbildung. Sie wird um so komplizierter, je vielseitiger die Untersuchung der Objekte ist, d. h. je mehr heterogene Werte in einem Bilde vereinigt werden müssen. Als Beispiel dafür können die graphischen Darstellungen der chemischen Gesteins-

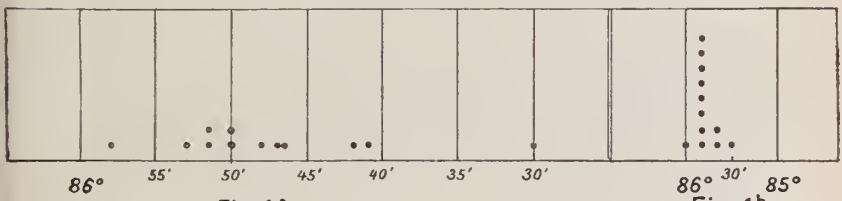

Fig. 1a Fig. 1b

analysen dienen, welche bereits ihre eigene Literatur besitzen und immer noch vermehrt oder modifiziert werden. Wo diese graphischen Darstellungen zu Zwecken der Klassifikation benutzt werden, dort hat man mit Häufungen zu tun; darüber geben z. B. die bekannten Projektionen im Osann'schen Dreieck in der Originalabhandlung von A. Osann (Tscherm. M. P. M. 1900—1903, **19—22**) und in den „Kristallinen Schiefern" von U. Grubenmann (II. Teil, Berlin 1907 u. 2. Aufl. 1910) ohne weiteres Aufschluß. Als Objekt gilt dort die einzelne Gesteinsgruppe, deren chemisches Bild durch mehr oder weniger ausgeprägte Häufung zustande kommt.

Aber auch homogene, nur eine Größe darstellende Resultate können dadurch an die graphische Darstellung größere Ansprüche stellen, daß das Einzelresultat aus mehr als einer Zahl besteht. Dies ist bei der zweikreisigen Kristallmessung der Fall, wo es sich darum handelt, die Lage einer Kristallfläche aus Beobachtungen an mehreren Kristallen zu bestimmen. Jedes Einzelresultat besteht hier aus zwei koordinierten Zahlen, den Positionswinkeln der Fläche; eine Häufung entsteht, wenn aus der Messung eine Anzahl Winkelpaare hervorgeht, die z. T. gleich groß, z. T. wenig voneinander verschieden sind. Der Unterschied gegenüber der einkreisigen

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/;www.zobodat.at

Messung ist analog demjenigen, welcher zwischen den reellen und den komplexen Größen der Analysis besteht; ebenso wie dort ist auch zur graphischen Darstellung der Lage der Flächenpole ein Koordinatenfeld, also ein zweidimensionales Gebilde, nötig. Die aus der einkreisigen Messung hervorgehenden Winkelgrößen erfordern hingegen zu ihrer Darstellung nur eine Koordinate, die andere bleibt bei dem von E. A. Wülfing angegebenen Verfahren für die Darstellung der Anzahl gleicher Winkelwerte übrig.

Noch komplizierter würden sich die Verhältnisse gestalten, wenn man, z. B. für die Zwecke der Trachtenlehre, die Kristalle nicht als Komplexe von Richtungen, sondern als stereometrische Gebilde betrachten wollte. In diesem Falle wären drei Koordinaten zur Darstellung der Flächenlage nötig, der Vergleich zwischen Flächen würde sich auf Zahlentripel erstrecken, das Häufungsbild wäre dreidimensional.

Das erste Beispiel für die Darstellung eines Kugelbereiches im großen Maßstabe, wie sie für die Häufungsmethode erforderlich ist, wurde gleichzeitig mit der Einführung der zweikreisigen Messung in die Kristallographie behandelt. E. v. Fedorow hat nämlich in seiner Abhandlung „Universal-(Theodolith-)methode in der Mineralogie und Petrographie“ (I. Teil. Zeitschr. f. Krist. 1893. **21**. 574—678) in Fig. 29 p. 653 in origineller Weise die Lage der Vizinalflächen am Spinelloktaeder dargestellt, indem er auf dem in ganz kleinem Maßstabe gezeichneten Kleinkreise von 54°44′ die Umgebung der Flächen (111) lokal stark vergrößerte, so daß 1 mm gleich dem Winkelabstand von 2½′ wurde. Für die Darstellung von nur wenigen Flächenpolen mag sich dieses Verfahren gut eignen; für ausgedehntere Messungsreihen kann es nicht gebraucht werden, weil das Häufungsgebiet unter Umständen zu große Dimensionen annimmt oder bei noch stärkerer Vergrößerung dargestellt werden muß; bei starker Differenzierung der Flächenlage wird es nötig sein, 1 mm gleich 1′, ja sogar ½′ gleich zu setzen. Man verzichtet dann lieber auf die Betonung des Zusammenhanges mit der Gesamtprojektion, wie er durch den Kleinkreis angedeutet wird, und zeichnet die Punktmenge des Häufungsgebietes für sich allein, völlig losgetrennt von der Kugel. Es ist übrigens nicht schwer, in ein solches Detailbild, welches sich zur ganzen Projektion so verhält, wie eine geographische Teilkarte zur Abbildung einer Erdhalbkugel, Richtungsbezeichnungen einzutragen, die den Zusammenhang wieder herstellen.

Das graphische Verfahren zur Darstellung der Punktmengen, die aus zweikreisiger Messung erhalten werden, muß folgenden Forderungen genügen:

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/;www.zobodat.at

erstens müssen die Abbildungen verschiedener Punktmengen untereinander in bezug auf die Art und den Grad der Häufung vergleichbar sein,

zweitens soll die Möglichkeit vorhanden sein, die zu derselben Kristallform gehörenden Häufungsbilder auch dann zu einem Gesamtbilde zu vereinigen, wenn die einzelnen Flächen dank der Symmetrie des Kristalls oder der Zwillingsbildung mit verschiedenen Positionswinkeln aus der Messung hervorgehen.

In der praktischen Ausführung werden diese beiden Forderungen erfüllt durch die Wahl eines einheitlichen Koordinatensystems, welches an jedem Ort der Kugel unverändert bleibt, die relative Lage aller Punkte einer Punktmenge möglichst genau wiedergibt und auf einfache Weise von einer Stelle der Kugel auf eine andere verschoben werden kann. Die abgebildeten Punkte müssen außerdem durch einfache rechnerische Operationen in Symmetrieebenen gespiegelt und um den Anfangspunkt des Koordinatensystems gedreht werden können. Da es sich dabei immer um Abbildung von kleinen Bereichen der Kugeloberfläche handelt, so kann man von vornherein ein ebenes Koordinatensystem anwenden und hat in erster Linie die Wahl zwischen den rechtwinkligen und den Polarkoordinaten. Entscheidend für die Wahl ist die Einfachheit der Rechnung, mittels welcher man die neuen Koordinaten an jedem Ort der Kugel aus den ursprünglichen Positionswinkeln φ und ϱ der zweikreisigen Messung erhält. Dieser Punkt erscheint wesentlich angesichts der Tatsache, daß man bei der Häufung unter Umständen eine große Anzahl von Beobachtungen verarbeiten muß. Die rechtwinkligen ebenen Koordinaten haben sich in dieser Hinsicht als vorteilhafter erwiesen, weshalb auch die Umrechnung der Positionswinkel der Messung in Abszissen und Ordinaten, und die Operationen der Drehung und Spiegelung nur für dieses System besprochen werden sollen.

Das rechtwinklige Koordinatensystem wird erhalten, indem wir einen bestimmten Punkt p_1 (Fig. 2) innerhalb des Häufungsgebietes zum Anfangspunkt wählen und durch p_1 zwei Großkreise unter 90^0 führen. Eine von diesen Großkreisachsen mag die Lage eines Meridians $Z\,p_1\,Y$ durch den Pol Z der Messung haben, die andere steht senkrecht auf diesem Meridian. Auf diese Weise werden um p_1 herum Verhältnisse hergestellt, die der Netzteilung auf dem Äquator der Kugel entsprechen. Als positiv bezeichnen wir die Richtung p_1X rechts vom Meridian für die Abszissenachse und die Richtung p_1Y gegen den Pol Z für die Ordinate. Diese Orientierung der Koordinatenachsen wird für die ganze Kugel beibehalten, so daß auch auf der unteren Kugelhälfte dieselben Richtungen als positiv gelten. Um nun zum Auftragen der Punktmenge von p_1 immer eine fertige Vorlage zu haben, deren Maßstab je nach den Umständen geändert werden kann, legen wir der Abbildung das

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/;www.zobodat.at

gleichmäßig geteilte Koordinatennetz in Form vom Millimeterpapier zugrunde und nehmen an, daß die neuen Koordinaten den im Winkelmaß ausgedrückten Entfernungen proportional sind. Den angewendeten Maßstab können wir dann angeben, indem wir sagen, wievielen Minuten oder Minutenteilen ein Millimeter entspricht. Wir wollen dieses Verfahren als „gleichmäßige Projektion" eines Kugelbereiches bezeichnen; es ist ohne weiteres klar, daß diese Projektion von anderen üblichen Projektionen verschieden ist und daß der Unterschied um so kleiner wird, je kleiner das projizierte Gebiet. Theoretisch interessant ist der Vergleich der gleichmäßigen

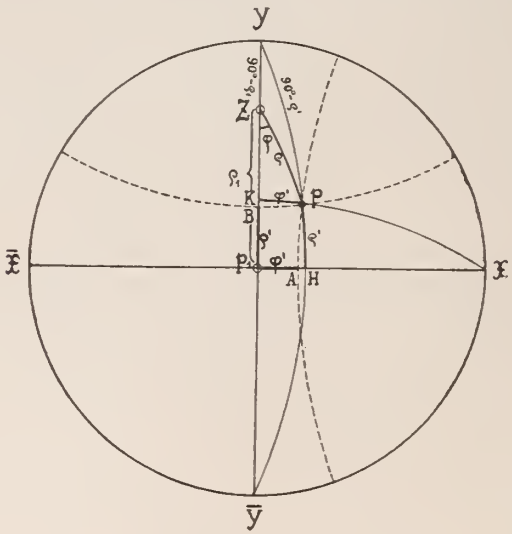

Fig. 2.

Projektion mit den beiden Projektionen, welche geradlinige rechtwinklige Netzteilung zu liefern vermögen, nämlich mit der orthographischen und gnomonischen.

In der orthographischen Projektion wird diese Netzteilung durch zwei Systeme von Kleinkreisen erzeugt, deren Zentren auf dem Grundkreis in 90° Entfernung voneinander liegen. In der Fig. 2, welche diese Verhältnisse in stereographischer Projektion darstellt, sind pA und pB zwei solche Kleinkreise um die Zentren X und Y, p_1A p B ist ein Rechteck in der orthographischen Projektion.

In der gnomonischen Projektion stehen alle durch X$\bar{X}$ und Y$\bar{Y}$ gehenden Großkreise, z. B. p H und p K, senkrecht aufeinander, p_1 H p K wird zu einem ebenen Rechteck.

Daraus folgt, daß wir für den Punkt p bei der orthographischen Auffassung p_1A und p_1B, bei der gnomonischen p_1H und p_1K als

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/;www.zobodat.at

Achsenabschnitte nehmen sollten; die Koordinaten des Punktes p sind im ersten Falle sin (p_1A) und sin (p_1B), im zweiten tg (p_1H) und tg (p_1K) [1].

In der gleichmäßigen Projektion sind die Koordinaten gleich den Katheten eines ebenen rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse gleich der Entfernung p_1p des Punktes p vom Koordinatenanfang ist. Hier setzt sich das Rechteck der Projektion aus den beiden Achsenabschnitten und aus zwei Kurvenstücken zusammen, die auf der Kugel zwischen den Bogen pA und pH bezw. pB und pK verlaufen und weder Klein- noch Großkreise sind. Die exakte Berechnung der Koordinaten aus den Positionswinkeln φ ϱ der Messung wäre hier sehr umständlich, weil die sphärische Trigonometrie keine Handhabe dazu bietet; deshalb wird man sich lieber mit einem Näherungsverfahren begnügen, welches darin besteht, daß man die Berechnung der Koordinatenabschnitte $\varphi' = p_1A$ und $\varrho' = p_1B$ nach orthographischer Auffassung ausführt und die im Winkelmaß ausgedrückten Strecken φ' ϱ' direkt als gleichmäßige Koordinaten verwendet. Der Fehler, den man dabei in bezug auf die Lage des Punktes begeht, ist kleiner, als wenn man die Berechnung an gnomonische Auffassung anlehnen wollte, wenigstens solange es sich um kleine Werte φ' ϱ' handelt. Man kann sich nämlich durch Rechnung überzeugen, daß für ein und dieselben kleinen Achsenabschnitte φ' ϱ' der Winkelabstand $r = p_1 p$ (Fig. 3) des zugehörigen Punktes p der gleichmäßigen Projektion vom Anfangspunkte p_1 weniger verschieden ist vom Abstand $r' = p_1 p'$ der orthographischen Projektion als vom Abstand $r'' = p_1 p''$ der gnomonischen. Es ist

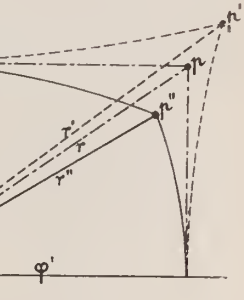

Fig. 3.

$$r = \sqrt{\varphi'^2 + \varrho'^2} \qquad \text{(gleichmäßig)},$$

$$\sin r' = \sqrt{\sin^2\varphi' + \sin^2\varrho'} \qquad \text{(orthographisch)},$$

$$\operatorname{tg} r'' = \sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi' + \operatorname{tg}^2\varrho'} \qquad \text{(gnomonisch)}.$$

Je größer φ' ϱ', desto größer wird der Unterschied zwischen r, r' und r''. Ist eine von den Koordinaten, z. B. $\varrho' = 0$, dann wird $r = r' = r'' = \varphi'$, was bedeutet, daß in der Richtung der Koordinatenachsen alle drei Projektionen dasselbe Resultat liefern.

[1] Die gnomonischen Tangentenkoordinaten sind die sog. „Gudermann'schen Achsenkoordinaten" (vgl. R. Heger, Analytische Geometrie auf der Kugel. Leipzig 1908. p. 110).

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/;www.zobodat.at

Am größten wird dagegen der Unterschied, wenn sich die beiden Größen φ' und ϱ' gleichmäßig an der beim Ersetzen der Werte φ' und ϱ' durch ihre trigonometrischen Funktionen sin und tg entstehenden Veränderung betätigen, d. h. wenn $\varphi' = \varrho'$ wird. Dann ist:

$$r = \sqrt{2}\,\varphi',$$

$$\sin r' = \sqrt{2}\sin\varphi' \quad \text{und} \quad r' = \arcsin(\sqrt{2}\sin\varphi'),$$

$$\operatorname{tg} r'' = \sqrt{2}\operatorname{tg}\varphi' \quad \text{,,} \quad r'' = \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}\varphi').$$

Es wäre sehr umständlich, wenn man den Vergleich zwischen den Differenzen $r' - r$ und $r - r''$ formell begründen wollte, weil die Funktionen r, r' und r'' zu verschiedenartig sind. Für unsere Zwecke darf man sich wohl mit genauer Berechnung einer Anzahl Werte begnügen, wobei man freilich über den weiteren Verlauf der Funktionen außerhalb des untersuchten Intervalls nichts aussagen darf. Folgende Tabelle enthält die Zusammenstellung einer solchen Rechnung für eine Reihe von Werten φ'. Man sieht, daß $r' > r > r''$ ist und daß $r' - r < r - r''$; beide Differenzen sind recht unbedeutend.

φ'	r'	r' — r	r	r — r''	r''
10'	14' 8,53"	0,00"	14' 8,53"	0,00"	14' 8,53"
20	28 17,07	0,01	28 17,06	0,02	28 17,04
30	42 25,62	0,04	42 25,58	0,06	42 25,52
1° 0	1° 24 51,43	0,26	1° 24 51,17	0,52	1° 24 50,65
1 30	2 7 17,63	0,88	2 7 16,75	1,74	2 7 15,01
2 0	2 49 44,41	2,07	2 49 42,34	4,32	2 49 38,02
2 30	3 32 11,95	4,03	3 32 7,92	8,06	3 31 59,86
3 0	4 14 40,50	6,99	4 14 33,51	13,93	4 14 19,57
5 0	7 4 48,04	32,19	7 4 15,85	1' 4,76	7 3 11,09

Damit ist die Berechtigung der Anlehnung unserer Koordinatenberechnung an orthographische Auffassung bewiesen.

Berechnung der Koordinaten φ' ϱ'.

Für die orthographische Auffassung haben wir folgende Verhältnisse (vgl. Fig. 2):

Z ist der Pol des aus der Messung erhaltenen Koordinatensystems, φ und ϱ die Positionswinkel des Punktes p, wobei für das Azimut φ der Großkreis YZp_1 durch Z und den neuen Anfangspunkt p_1 zum nullten Meridian gemacht wird. Der Anfangspunkt p_1 liegt im Gebiete der abzubildenden Punktmenge und kann, solange die Freiheit seiner Wahl nicht durch Beziehungen zu anderen Punktmengen beeinträchtigt wird, einfach unter den mittleren Werten φ ϱ ausgesucht oder durch Mittelwertbildung aus

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/;www.zobodat.at

sämtlichen $\varphi\,\varrho$ bestimmt werden. Die neuen Koordinatenachsen sind p_1X und p_1Y, die neuen Koordinaten $p_1A = \varphi'$, $p_1B = \varrho'$. Man gelangt also zum Punkte p von den Enden der Achsenabschnitte auf Kleinkreisbogen Ap und Bp. Nun ist, da diese Kleinkreise überall den gleichen Abstand von ihren Großkreisen $Y\bar{Y}$ bezw. $X\bar{X}$ haben, auch $pK = \varphi'$, $pH = \varrho'$.

Dann ist im rechtwinkligen sphärischen Dreieck ZKp

$$\sin\varphi' = \sin\varphi \,.\, \sin\varrho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Diese Formel gilt für alle Orte der Kugel; φ' läßt sich direkt aus der Poldistanz ϱ der Messung und dem auf den Meridian des neuen Anfangspunktes bezogenen Azimut φ berechnen, ist aber von der Poldistanz ϱ_1 von p_1 unabhängig.

Die Koordinate ϱ' erhalten wir aus dem Dreieck YZp, in welchem $Yp = 90^0 - \varrho'$, $Zp = \varrho$, $YZ = 90^0 - \varrho_1$, $\sphericalangle YZp = 180^0 - \varphi$, nach dem Cosinussatz; es ist

$$\sin\varrho' = \sin\varrho_1 \cos\varrho - \cos\varrho_1 \sin\varrho \cos\varphi \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Diese Formel ist, im Gegensatz zu (1), außer von $\varphi\,\varrho$ auch noch von ϱ_1 direkt abhängig.

Die Formeln (1) und (2) sind in den meisten Fällen weiterer Vereinfachung fähig.

Vereinfachte Formeln für φ' und ihre Anwendungsgebiete.

Aus der Formel (1) ist ersichtlich, daß ein bestimmter Wert φ' aus verschiedenen Wertepaaren $\varphi\,\varrho$ hervorgehen kann; die Grenzen für diese Werte sind

$$\varphi' \leqq \varphi \leqq 90^0$$
$$\text{und} \quad 90^0 \geqq \varrho \geqq \varphi'.$$

φ' ist bei einem kleinen Kugelbereich immer klein. Ist einer von den Positionswinkeln ebenfalls wesentlich kleiner als der andere, so können in (1) die Sinus der kleinen Winkel durch die Winkel selbst ersetzt werden, so daß man erhält

$$\text{bei } \varphi < \varrho: \quad \varphi' \infty \varphi \sin\varrho \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1a)$$
$$\text{bei } \varrho < \varphi: \quad \varphi' \infty \varrho \sin\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1b)$$

Diese Formeln haben den Vorteil, daß man φ' direkt in der gewünschten Einheit (Minuten oder Minutenteilen) aus dem in derselben Einheit ausgedrückten Positionswinkel φ bezw. ϱ berechnen kann. Dazu kann man z. B. die Tafel der natürlichen Sinuswerte in Verbindung mit Multiplikationstafeln benutzen. Besonders vorteilhaft für diese Rechnung erweist sich jedoch die Anwendung des logarithmischen Rechenschiebers, welchem überhaupt für kristallographische Rechnungen eine größere Verbreitung zu wünschen wäre. Es soll hier eine Regel für die Rechenschieberrechnung nach der Formel (1a) gegeben werden, unter dem Vorbehalt, daß das An-

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/;www.zobodat.at

wendungsgebiet dieser Rechnung von demjenigen der genauen Formel (1) später genau abgegrenzt werden soll.

Für allgemeine trigonometrische Rechnungen eignet sich am besten ein Rechenschieber, bei welchem auf der Rückseite der sog. Zunge drei trigonometrische Skalen vorhanden sind, nämlich die Sinusskala S, die Tangentenskala T und die gemeinsame ST-Skala für Sinus und Tangenten kleiner Winkel von 34′ bis 5°45′. Alle drei Skalen sollen auf die untere Zahlenskala der Vorderseite bezogen sein. Diese Anordnung ist z. B. bei dem Rechenschieber System „Rietz" No. 23 der Firma A. Nestler in Lahr getroffen; die folgende Regel gilt für dieses System, kann aber mit entsprechenden Änderungen auch auf jedes andere System mit trigonometrischen Skalen übertragen werden.

Um $\varphi' = \varphi \sin \varrho$ zu berechnen, beginnt man mit der Einstellung von ϱ, und zwar zieht man die Zunge des Rechenschiebers nach rechts heraus, bis auf ihrer Rückseite der betreffende Wert ϱ auf der Sinusskala gegenüber dem oberen Strich des Einschnittes eingestellt ist. Dann erscheint der Wert $\sin \varrho$ auf der Vorderseite der Zunge gegenüber dem rechten unteren Endpunkt der festen Skala. Dieser Wert muß mit φ multipliziert werden. was dadurch geschieht, daß man φ (in Minuten oder Minutenteilen) mit dem Glasläufer auf der festen unteren Skala einstellt und bei dieser Einstellung das Resultat φ' auf der unteren Skala der Zunge abliest. Das Ganze ist eine Multiplikation, bei welcher der erste Faktor auf der Zunge, der zweite auf der festen Skala, das Resultat wiederum auf der Zunge liegt. Befindet sich nach der Einstellung von $\sin \varrho$ der Wert φ links außerhalb des Zungenendes, so muß die Zunge mit Hilfe des Glasläufers um ihre ganze Länge nach links verschoben werden.

Wenn mehrere Rechnungen für eine Punktmenge ausgeführt werden sollen, so empfiehlt es sich, die Beobachtungen mit annähernd gleichen Werten ϱ gruppenweise zusammenzufassen; dadurch wird die Anzahl der nötigen Verschiebungen auf ein Minimum reduziert. Da man nämlich ϱ ohnehin genauer aus der Messung bekommt, als es auf dem Rechenschieber eingestellt werden muß, um die gewünschte Genauigkeit für φ' zu erlangen, so kann man für wenig voneinander verschiedene Werte ϱ die Zunge auf ein und demselben Näherungswert stehen lassen und die dazugehörigen φ und φ' durch Verschiebung des Läufers ermitteln. Wie weit man dabei gehen darf, muß in jedem Fall besonders bestimmt werden.

Eine weitere Vereinfachung entsteht, wenn der Winkel ϱ nur wenige Grade von 90° verschieden ist; dann ist φ' erst für größere Werte φ von φ selbst verschieden. In diesem Falle stellt man $\sin \varrho$ wie oben angegeben ein und sucht mit dem Läufer die untere Grenze, von der an φ' nicht mehr gleich φ gesetzt werden darf.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/;www.zobodat.at

Die unter diesem Grenzwerte liegenden φ bleiben unverändert, die größeren φ werden auf gewöhnliche Weise umgerechnet.

Diese Erörterung genügt wohl zur Orientierung über den Gang der Rechenschieberrechnung, unter der Voraussetzung freilich, daß man die sonstige Benutzung dieses Hilfsmittels kennt. Die Formel (1 b) wird unter Vertauschung von φ und ϱ nach derselben Regel gerechnet.

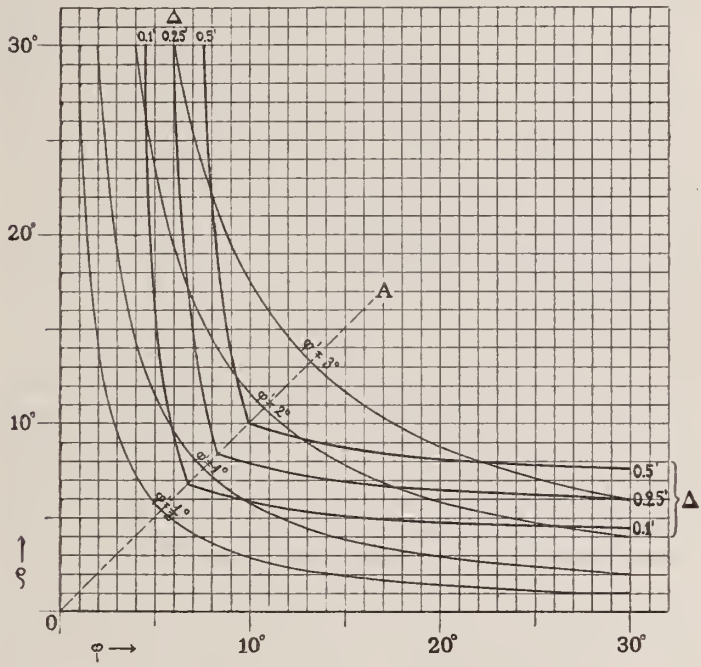

Fig. 4.

In den meisten Fällen kommt man mit den vereinfachten Formeln (1 a) und (1 b) aus; nur wenn φ nicht stark von ϱ verschieden ist, muß die allgemeine Formel (1) angewandt werden. Um zu entscheiden, wann dies der Fall ist, wurde ein Diagramm (Fig. 4) konstruiert, welches den Verlauf der Kurven für die Formel (1) und die Genauigkeitsgrenzen der Näherungsformeln graphisch darstellt.

Für jeden konstanten Wert φ' liefert die Gleichung (1) eine gleichseitige Hyperbel in rechtwinkligen Asymptotenkoordinaten. In Fig. 4 sind vier solche Hyperbel für die Werte $\varphi' = \frac{1}{2}^0, 1^0, 2^0$ und 3^0 dargestellt; das Diagramm erstreckt sich nur auf die am Koordinatenanfang liegenden Teile für die Werte $\varphi\,\varrho$ zwischen 0^0 und 30^0. Es wurden im ganzen 35 Punkte nach der Gleichung (1)

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/;www.zobodat.at

mit fünfstelligen Logarithmen berechnet, ihre Koordinaten $\varphi\ \varrho$ sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

$\varphi' = 3^0$		$\varphi' = 2^0$		$\varphi' = 1^0$		$\varphi' = \frac{1}{2}^0$	
φ	ϱ	φ	ϱ	φ	ϱ	φ	ϱ
1°	—	1°	—	1°	90° 0′	1°	30° 0′
2	—	2	90° 0′	2	30 0	2	14 28,8
3	90° 0′	3	41 49,4	3	19 28,8	3	9 35,9
4	48 36,8	4	30 1,2	4	14 29,3	4	7 11,2
5	36 54,2	5	23 36,3	5	11 33,1	5	5 54,8
6	30 2,7	6	19 30,3	6	9 36,7	6	4 47,3
7	25 26,0	7	16 38,5	7	8 14,0		
8	22 5,3	8	14 31,3	8	7 12,2		
9	19 32,7	9	12 53,5				
10	17 31,5	10	11 35,7				
11	15 55,2	11	10 32,3				
12	14 34,8						
13	13 27,2						

Es ist ohne weiteres klar, daß man für jede Hyperbel nur die Hälfte bis zum Punkte $\varphi = \varrho$ bestimmen muß; die andere Hälfte ergibt sich durch Vertauschen der Werte φ und ϱ. Nun handelt es sich darum, zu ermitteln, für welche Wertepaare $\varphi\ \varrho$ die vereinfachten Formeln (1 a) und (1 b), welche mit dem Rechenschieber berechnet werden sollen, zu ungenau sind; mit anderen Worten, wo auf den Hyperbeln φ' diejenigen Punkte liegen, bei welchen die approximative Rechnung zu einem bestimmten Fehlerbetrag führt. Diese Punkte können zur vorläufigen Orientierung unter Anwendung der genau berechneten Zahlen der Tabelle durch eine Anzahl Proberechnungen mit dem Rechenschieber ermittelt werden; so kann man sich z. B. leicht überzeugen, daß in der Kolonne $\varphi' = 3^0$ die Werte $\varphi\ \varrho$ oberhalb des Trennungsstriches, also bis und mit $\varphi = 8^0$, $\varrho = 22^0\,5{,}3'$, nach der Formel $\varphi' = \varphi \sin \varrho$ gerechnet den Wert $\varphi' = 3^0 = 180'$ mit einer Genauigkeit von $0{,}5'$ liefern; in der zweiten Kolonne $\varphi' = 2^0$ ist dieselbe Genauigkeit noch bei $\varphi = 9^0$, $\varrho = 12^0\,53{,}5'$ erreichbar; in den Kolonnen $\varphi' = 1^0$ und $\varphi' = \frac{1}{2}^0$ gibt es überhaupt keine Wertepaare $\varphi\ \varrho$, aus welchen sich φ' nach den Näherungsformeln nicht bis auf $0{,}5'$ genau berechnen ließe. Dieses Ergebnis steht mit den Angaben des Diagramms Fig. 4 im Einklang, wo die Hyperbeln $\varphi' = 3^0$ und $\varphi' = 2^0$ die Grenzkurve $\Delta = 0{,}5'$ in der Nähe der soeben angegebenen Punkte schneiden und von dem Gebiet der approximativen Rechnung, welches sich zwischen den Koordinatenachsen des Diagramms und der Grenzkurve $\Delta = 0{,}5'$ befindet, auf das be-

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/;www.zobodat.at

nachbarte Gebiet der genauen Rechnung übertreten; die Hyperbeln $\varphi' = 1^0$ und $\frac{1}{2}^0$ verlaufen für die Genauigkeit 0,5′ ganz im Gebiete der approximativen Rechnung. Je größer die verlangte Genauigkeit, d. h. je kleiner Δ, desto größer wird das auf der konkaven Seite der Grenzkurven liegende Gebiet der genauen Rechnung.

Dieses Probierverfahren reicht zur genauen Ermittlung des Verlaufes der Grenzkurven nicht aus, insbesondere für kleinere Werte Δ. Deshalb müßte der Unterschied zwischen den Formeln (1) und (1 a) durch Rechnung bestimmt werden. Wir bekommen durch Reihenentwicklung:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{aus (1):} & \sin\varphi' = \sin\varphi \sin\varrho = \sin\varrho\left(\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - + \ldots\right) \\ \text{aus (1 a):} & \\ \sin\varphi' + \Delta = \sin(\varphi \sin\varrho) = \sin\varrho\left(\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3 \sin^2\varrho}{3!} + \frac{\varphi^5 \sin^4\varrho}{5!} - + \ldots\right) & \end{array}\right\} \quad (3)$$

Durch diese beiden Formeln ist vor allem Δ definiert, welches wir bis jetzt eigentlich nur zur bequemeren Bezeichnung einer Grenzkurve gebraucht haben. Hier erweist sich Δ als im Sinusmaß ausgedrückte Differenz zwischen $\sin\varphi'$ der genauen Formel (1) und demjenigen Ausdruck, welchen man bekommt, wenn man den Sinus des aus der Näherungsformel (1 a) berechneten Winkels $\varphi' \infty \varphi \sin\varrho$ bildet, also $\sin(\varphi \sin\varrho)$. Dazu muß noch bemerkt werden, daß bei gleichzeitiger Substitution von φ' und φ statt $\sin\varphi'$ und $\sin\varphi$ beim Übergang von der Gleichung (1) zur Gleichung (1 a) die rechte Seite der Gleichung mehr vergrößert wird als die linke, weil $\varphi > \varphi'$ ist. Deshalb ist $\varphi' < \varphi \sin\varrho$ und infolgedessen auch $\sin\varphi' < \sin(\varphi \sin\varrho)$. Zur Wiederherstellung der Gleichheit muß also eine positive Größe Δ zu $\sin\varphi'$ addiert werden.

Aus den Gleichungen (3) ergibt sich nun für Δ:

$$\begin{aligned} \Delta &= \sin\varrho\left[\frac{\varphi^3}{3!}(1-\sin^2\varrho) - \frac{\varphi^5}{5!}(1-\sin^4\varrho) + \frac{\varphi^7}{7!}(1-\sin^6\varrho) - + \ldots\right] \\ &= \sin\varrho\cos^2\varrho\left[\frac{\varphi^3}{3!} - \frac{\varphi^5}{5!}(1+\sin^2\varrho) + \frac{\varphi^7}{7!}(1+\sin^2\varrho+\sin^4\varrho) - + \ldots\right] \end{aligned}$$

Diese Reihe gibt abwechselnd zu große oder zu kleine Werte für Δ, je nachdem, ob man sie vor einem negativen oder positiven Glied abbricht. Δ kann also mit jeder gewünschten Genauigkeit zwischen zwei Werten eingeschlossen werden, z. B. in erster Annäherung

$$\frac{\varphi^3}{3!}\sin\varrho\cos^2\varrho - \frac{\varphi^5}{5!}\sin\varrho\cos^2\varrho\,(1+\sin^2\varrho) < \Delta < \frac{\varphi^3}{3!}\sin\varrho\cos^2\varrho.$$

Alles, was hier über den Vergleich von (1 a) mit (1) gesagt wurde, gilt ebenso für die Näherungsformel (1 b), dabei wird

$$\frac{\varrho^3}{3!}\sin\varphi\cos^2\varphi - \frac{\varrho^5}{5!}\sin\varphi\cos^2\varphi\,(1+\sin^2\varphi) < \Delta < \frac{\varrho^3}{3!}\sin\varphi\cos^2\varphi.$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.zobodat.at

Um dieses Resultat für die Konstruktion der Grenzkurven Δ im Diagramm zu verwerten, macht man die Annahme, daß Δ nicht im Sinus-, sondern im Bogenmaß ausgedrückt ist; bei ganz kleinen Differenzen Δ, die den Betrag von 1′ nicht übersteigen, wie dies hier der Fall ist, ist diese Annahme erlaubt. Ferner setzt man $\Delta \backsim \frac{\varphi^3}{3!} \sin\varrho \cos^2\varrho$, bezw. $\Delta \backsim \frac{\varrho^3}{3!} \sin\varphi \cos^2\varphi$, wodurch Δ stets zu groß herauskommt; dies gibt die Sicherheit, daß man den Fehler der Näherungsformel nicht unterschätzt. Von diesen beiden Formeln kann eine zur Berechnung einer Anzahl koordinierter Werte $\varphi\,\varrho$ dienen, die ein konstantes Δ geben. Für das Diagramm Fig. 4 wurde $\Delta = 0{,}5'$, $0{,}25'$, $0{,}1'$ gesetzt und eine größere Anzahl Punkte für die drei Grenzkurven Δ berechnet; die angenommenen Werte von Δ dürften für die bei kristallographischen Messungen vorkommenden Genauigkeiten genügen. Jede Grenzkurve Δ besteht aus zwei Kurvenstücken, welche sich auf der Geraden 0A schneiden; dabei entspricht das längs der Koordinatenachse ϱ laufende Stück der Formel $\Delta \backsim \frac{\varphi^3}{3!} \sin\varrho \cos^2\varrho$, dasjenige längs der φ-Achse $\Delta \backsim \frac{\varrho^3}{3!} \sin\varphi \cos^2\varphi$. Durch die Gerade 0A wird das ganze Gebiet der approximativen Rechnung in zwei symmetrische Hälften geteilt, wovon die eine zur Näherungsformel (1 a), die andere zu (1 b) gehört.

Das Diagramm Fig. 4 ist folgendermaßen zu benutzen. Hat man aus zweikreisiger Messung eine Reihe Werte $\varphi\,\varrho$ erhalten, aus welchen die Koordinaten φ' berechnet werden sollen, so unterwirft man zunächst alle Wertepaare einer Durchsicht mit Hilfe des Diagramms und stellt fest, welche Punkte $\varphi\,\varrho$ für die verlangte Genauigkeit in das Gebiet der genauen Rechnung fallen. Diese müssen dann, falls das ganze Häufungsbild exakt durchgearbeitet werden soll, nach der Formel (1): $\sin\varphi' = \sin\varphi \,.\, \sin\varrho$ umgerechnet werden, für die übrigen Punkte gelten die Näherungsformeln (1 a): $\varphi' = \varphi \,.\, \sin\varrho$, bezw. (1 b): $\varphi' = \varrho \sin\varphi$.

Unter Umständen kann man überhaupt auf die Rechnung nach der genauen Formel verzichten und alle Werte φ' ohne Rücksicht auf die möglichen Fehler nach der Näherungsformel berechnen. Dies ist z. B. dann der Fall, wenn es sich darum handelt, die Verhältnisse bei einer einzigen Punktmenge graphisch darzustellen, welche mit keinen anderen Punktmengen zu einem Gesamtbilde vereinigt werden soll. Dann braucht man nämlich nicht zu befürchten, daß ein weit vom Anfangspunkt liegender Punkt der zuerst eingetragenen Punktmenge, dessen Lage nicht ganz richtig dargestellt ist, in die Mitte einer später auftretenden Häufung fällt. Hat man aber mit der Zusammenfassung der Punktmengen zu tun, so empfiehlt sich die Anwendung des Diagramms. (Schluß folgt.)

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Centralblatt für Mineralogie, Geologie und Paläontologie

Jahr/Year: 1918

Band/Volume: 1918

Autor(en)/Author(s): Woyno T. J.

Artikel/Article: Die Anwendung der Häufungsmethode auf zweikreisige Kristallmessung. 107-120