Original-Mitteilungen an die Redaktion.

Über besondere zentrale Schnitte der Schiebungsellipsoide von Kalkspat und Rutil.

Von **Leonhard Weber** in München.

Die Formveränderung, welche ein Kristall bei der „einfachen Schiebung nach Gleitflächen" erfährt, wird bekanntlich durch ein dreiachsiges Ellipsoid bestimmt und verläuft, im Gegensatz etwa zur thermischen Ausdehnung usw., vielfach weniger symmetrisch, als es den Lösungserscheinungen der betreffenden Substanz entsprechen würde (Eisen, Rutil, Kalkspat). Es befremdet darum schließlich auch nicht, wenn die Symmetrieebenen jenes Ellipsoides gänzlich oder teilweise nicht kristallonomisch orientiert sind. Letzterer Fall trifft z. B. beim Kalkspat zu. Trotzdem gibt es Kristallflächen, die ein solches Ellipsoid in kristallonomisch orientierten Ellipsen schneiden. Das bekannteste Beispiel hierfür ist die Ellipse, welche beim Baumhauer'schen „Messerversuch" auf einer zur Gleitrichtung parallelen Rhomboederfläche aus einem zuvor eingeritzten Kreis entsteht und derart gelagert ist, daß ihre Achsen parallel und senkrecht sind zum Hauptschnitt der betreffenden Rhomboederfläche.

Welcher allgemeinen Bedingung müssen nun die Indizes einer Fläche von Kalkspat und Rutil genügen, wenn sie das Schiebungsellipsoid in einer Ellipse schneiden soll, deren Hauptachsen kristallonomisch orientiert sind?

A. Kalkspat.

Ich setze voraus, daß der Kristall bereits verschoben und derart aufgestellt sei, daß K_1 (110) die eine, K_2 (001) die andere Kreisschnittsebene bedeute. An Stelle des üblichen Miller'schen Achsenkreuzes lege ich der Rechnung ein rechtwinkliges System zugrunde, dessen x- bezw. z-Achse mit der ersten Neben- bezw. Hauptachse des hexagonalen Achsenkreuzes zusammenfällt, so daß also die Winkelhalbierende von $(\bar{a}_3, a_2)$ zur y-Achse wird. Überdies bezeichne ich mit $\xi\,\eta\,\zeta$ die schiefwinkligen Koordinaten eines beliebigen Punktes P im ersten (trigonalen) und mit x y z die kartesischen Koordinaten des nämlichen Punktes im zweiten Achsensystem.

Wie eine einfache geometrische Überlegung zeigt, erhält man für die durch den Ursprung gelegten drei Flächenpaare des Grundrhomboeders R — unter c, wie üblich, die Länge der Hauptachse verstanden — die Gleichungen

$$\begin{aligned} 100:&\quad \xi = 0 &\quad x + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{c} &= 0, \\ 010:&\quad \eta = 0 &\quad -x + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{c} &= 0, \\ 001:&\quad \zeta = 0 &\quad -\frac{2y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{c} &= 0, \end{aligned} \qquad 1$$

und für eine beliebige Fläche (p q r)

$$p\xi + q\eta + r\zeta = 0 \quad \text{bezw.} \quad Ax + By + Cz = 0. \qquad 2.$$

Aus den Gleichungen 1 ergeben sich ohne weiteres die Verhältnisse:

$$\xi : \eta : \zeta = \left(x + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{c}\right) : \left(-x + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{c}\right) : \left(-\frac{2y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{c}\right), \qquad 3.$$

welche in 2 eingesetzt für die Beziehung zwischen (p q r) einerseits und (ABC) anderseits die Proportionen liefern

$$A : B : C = (p - q)\, c\sqrt{3} : (p + q - 2r)\, c : (p + q + r)\sqrt{3}.$$

Dies vorausgesetzt findet man für die beiden Kreisschnittsebenen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} K_1\,(110) &\qquad cy + \sqrt{3}z = 0, \\ K_2\,(001) &\qquad -2cy + \sqrt{3}z = 0 \end{aligned}$$

Von der Fläche

$$E\,(pqr) \equiv (p-q)\,c\sqrt{3}\,x + (p+q-2r)\,cy + (p+q+r)\sqrt{3}\,z = 0$$

werden K_1 und K_2 in zwei Geraden G_1 und G_2 geschnitten, deren Komponenten sich nach dem üblichen Algorithmus der Zonenrechnung ergeben, so daß kommt:

$$\begin{aligned} G_1:&\quad 3r, &\quad (p-q)\sqrt{3}, &\quad -(p-q)\,c, \\ G_2:&\quad -3(p+q), &\quad (p-q)\sqrt{3}, &\quad 2(p-q)\,c \end{aligned} \qquad 4.$$

Längs diesen zwei Geraden schneidet die Ebene E (p q r) das Schiebungsellipsoid in gleichen Radien. Die Hauptachsen der in (p q r) gelegenen Schiebungsellipse sind daher die Winkelhalbierenden von (G_1, G_2), und ihre Komponenten ergeben sich als Summe bezw. Differenz der Komponenten von G_1 und G_2, falls diese Vektoren auf die nämliche Länge gebracht sind. Zwecks dieser Reduktion sind sämtliche Komponenten von G_1 durch

$$\sqrt{9r^2 + 3(p-q)^2 + (p-q)^2 c^2}$$

und die Komponenten von G_2 durch

$$\sqrt{9(p+q)^2 + 3(p-q)^2 + 4(p-q)^2 c^2}$$

zu dividieren. Da nun die Ellipsenachsen kristallonome Richtungen sein sollen, so müssen sich ihre rechtwinkligen Komponenten verhalten wie

$$\pi_1 : \pi_2\sqrt{3} : \pi_3\, c.$$

wo $n_1 : n_2 : n_3$ teilerfremde ganze Zahlen sind. Im vorliegenden Fall ist das einzig dadurch erreichbar, daß die beiden Quadratwurzeln sich nur um einen ganzzahligen Faktor unterscheiden. Aus der Vergleichung der Koeffizienten von c^2 folgt, daß die erste Wurzel mit 2 zu multiplizieren ist. Die gesuchte allgemeine Bedingung lautet daher:

$$12r^2 + 4(p-q)^2 = 3(p+q)^2 + (p-q)^2$$

oder gekürzt

$$r^2 = pq.$$

Alle ganzzahligen Werttripel (pqr), die dieser Gleichung genügen, sind Lösungen unseres Problems. Sie lassen sich sofort hinschreiben und lauten

$$p = \varepsilon\alpha^2, \qquad q = \varepsilon\beta^2, \qquad r = \pm\varepsilon\alpha\beta. \tag{5}$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ und α und β alle ganzzahligen, teilerfremden Wertpaare durchlaufen.

Für die Hauptachsen A_1 und A_2 der in (pqr) gelegenen Schiebungsellipse erhält man:

$$\begin{aligned} A_1' &: \quad -(p+q-2r), \quad (p-q)\sqrt{3}, \quad 0, \\ A_2' &: \quad 3(p+q+2r), \quad (p-q)\sqrt{3}, \quad -4(p-q)c. \end{aligned} \tag{6}$$

Aus der Zugehörigkeit dieser Komponenten zum rechtwinkligen Achsensystem ersieht man leicht, daß die eine der beiden Achsen (hier A_1') in der Basis liegt, was natürlich zum vorneherein als einzig möglich zu erwarten stand.

Mit Hilfe der Gleichung 3 findet man aus 6 die schiefwinkligen Komponenten der fraglichen Hauptachsen, nämlich:

$$\begin{aligned} A_1 &: \quad q-r, \quad r-p, \quad p-q, \\ A_2 &: \quad q+r, \quad -(r+p), \quad -(p-q) \end{aligned}$$

Zu den Ebenen (pqr), welche den Bedingungen 5 genügen, kommt noch ein Flächenbüschel hinzu, das in der Zone $[1\bar{1}0]$ der beiden Kreisschnittsebenen liegt und sich darum der eben gegebenen Ableitung nicht fügt, da die Geraden G_1 und G_2 mit der Zonenachse $[1\bar{1}0]$ zusammenfallen. Das allgemeine Symbol dieser Flächen ist (ppq), wo p und q teilerfremd, im übrigen aber beliebig sind. Die zugeordneten Hauptachsenrichtungen haben die Indizes

$$A_1 : [1\bar{1}0] \quad \text{und} \quad A_2 : [qq\,2p].$$

Ich beweise noch folgenden, interessanten *Satz: Eine von zwei Flächen*

$$p_i = \alpha_i^2, \quad q_i = \beta_i^2, \quad r_i = \alpha_i\beta_i, \quad i = 1,2$$

bestimmte Zone enthält keine weiteren Flächen dieser Form der Indizes.

Wäre $p = \alpha^2$, $q = \beta^2$, $r = \alpha\beta$ (α und β können positiv oder negativ sein) eine dritte Fläche der von E_1 und E_2 gebildeten Zone, so hätte man

$$\begin{aligned} \lambda_1 \alpha_1^2 + \lambda_2 \alpha_2^2 &= \lambda \alpha^2, \\ \lambda_1 \beta_1^2 + \lambda_2 \beta_2^2 &= \lambda \beta^2, \\ \lambda_1 \alpha_1 \beta_1 + \lambda_2 \alpha_2 \beta_2 &= \lambda \alpha \beta. \end{aligned}$$

Die Division der beiden ersten Gleichungen gibt, falls man $\alpha : \beta = M$ setzt,

$$\lambda_1 (\alpha_1^2 - M^2 \beta_1^2) = \lambda_2 (M^2 \beta_2^2 - \alpha_2^2).$$

und aus der Division der ersten durch die dritte Gleichung kommt:

$$\lambda_1 \alpha_1 (\alpha_1 - M \beta_1) = \lambda_2 \alpha_2 (M \beta_2 - \alpha_2).$$

Das Verhältnis dieser beiden abgeleiteten Gleichungen lautet:

$$\frac{\alpha_1 + M \beta_1}{\alpha_1} = \frac{M \beta_2 + \alpha_2}{\alpha_2}$$

und zeigt, daß entweder $M = 0$ oder $\alpha_1 : \beta_1 = \alpha_2 : \beta_2$. Der eine wie der andere Fall hätte zur Folge, daß E_1 und E_2 die nämliche Fläche wären, was der Voraussetzung zuwider ist.

B. Rutil.

Nach Mügge[1] zeigen gewisse Rutilkristalle Schiebungen, bei denen (011) und (0$\bar{3}$1) Kreisschnittsebenen sind.

Als Bezugssystem kann hier das kristallographische Achsenkreuz verwendet werden. Die beiden Kreisschnittsebenen haben dann die Gleichungen:

$$K_1 \, (011) \qquad y + \frac{z}{c} = 0.$$

$$K_2 \, (0\bar{3}1) \qquad -3y + \frac{z}{c} = 0.$$

Von der Ebene E (h k l) werden sie — das Resultat ergibt sich wieder nach dem üblichen Algorithmus — in zwei Geraden G_1 und G_2 geschnitten mit den Komponenten:

$$\begin{aligned} G_1: &\quad k - l, \quad -h, \quad hc, \\ G_2: &\quad k + 3l, \quad -h, \quad -3hc. \end{aligned}$$

Eine analoge Überlegung wie beim Kalkspat ergibt hier für die Existenz kristallonomer Hauptachsen die Gleichung:

$$9(k - l)^2 + 9h^2 = (k + 3l)^2 + h^2,$$

wofür man auch

$$h^2 = k(3l - k)$$

schreiben kann. Hierin sind wegen der Ganzzahligkeit von h die Faktoren k und $3l - k$ von der allgemeinen Form

$$k = \varepsilon \alpha^2 \beta, \qquad 3l - k = \varepsilon \beta \gamma^2,$$

also

$$h = \pm \alpha \beta \gamma \quad \text{und} \quad l = \varepsilon \frac{\beta(\alpha^2 + \gamma^2)}{3}.$$

[1] N. Jahrb. f. Min. etc. 1886. I. 147—153 u. dies. Centralbl. 1902. 72 f.

Man zeigt leicht, daß $\alpha^2 + \gamma^2$ nicht durch 3 teilbar sein kann, wenn nicht α und γ einzeln durch 3 teilbar sind. Da dies zur Folge hätte, daß die drei Indizes h, k und l nicht teilerfremd wären, so setzt man einfacher $\beta = 3$ und bekommt

$$h = \pm 3\alpha\gamma, \quad k = 3\varepsilon\alpha^2, \quad l = \varepsilon(\alpha^2 + \gamma^2).$$

Hierin durchlaufen α und γ alle teilerfremden, ganzzahligen Wertpaare; ε bedeutet die positive oder negative Einheit, aber unabhängig vom Vorzeichen des ersten Index.

Die Richtungen von A_1 und A_2 sind $3\,G_1 \pm G_2$ und haben die Komponenten:

$$A_1: \; k, \; -h, \; 0. \qquad A_2: \; k - 3l, \; -h, \; 3hc.$$

also die Indizes

$$A_1 \; [k\,h\,0], \qquad A_2 \; [k - 3l, \; h, \; 3h].$$

Wie beim Kalkspat, so sind auch hier noch jene Ebenen hinzuzurechnen, welche zur Ebene der Schiebung (100) senkrecht stehen und das allgemeine Symbol (0 k l) haben, wo k und l alle teilerfremden Paare positiver und negativer ganzer Zahlen bedeuten. Die zugehörigen Ellipsenhauptachsen haben die Indizes

$$A_1 \; [100], \qquad A_2 \; [0\,l\,k].$$

Erwähnt sei noch, daß für die Flächen

$$h = \pm 3\alpha\gamma, \quad k = 3\varepsilon\alpha^2, \quad l = \varepsilon(\alpha^2 + \gamma^2)$$

der oben beim Kalkspat ausgesprochene Satz auch Gültigkeit hat.

Bekanntlich ist es Grühn und Johnsen[1] nicht gelungen, die eben behandelte Schiebung durch künstliche Pressung zu bestätigen. Dafür machten sie die bedeutungsvolle Entdeckung, daß beim Rutil noch eine andere Schiebung möglich ist, nämlich jene mit den Kreisschnitten K_1 (011) und K_2 (0$\bar{1}$1). Es ist nun überaus interessant, auch für diesen Fall die Flächen (h k l) zu ermitteln, welche das jetzt viel symmetrischer liegende Schiebungsellipsoid in Ellipsen mit kristallonomen Hauptachsen schneiden.

Führt man zu dem Zweck die Rechnung analog wie soeben durch, so findet man für die Geraden G_1 und G_2 die Komponenten

$$G_1: \; k - l, \; -h, \; hc.$$
$$G_2: \; k + l, \; -h, \; -hc.$$

Die gesuchte Bedingung lautet daher

$$(k - l)^2 = (k + l)^2,$$

d. h. die entsprechenden Ebenen sind — mit Einschluß jener, welche zur Ebene der Schiebung senkrecht stehen — in den Zonen [100], [010], [001] gelegen und umgekehrt.

[1] Dies. Centralbl. 1917. 366.

Die Hauptachsen der einer beliebigen Kristallfläche zugeordneten Schiebungsellipse sind in den hier untersuchten Fällen beide zugleich entweder kristallonom oder nicht kristallonom. Der Fall, wo nur eine Achse kristallonom ist, kann sich nur dann einstellen, wenn nicht beide Kreisschnittsebenen kristallonom sind.

München, den 14. Mai 1919.

(Eingegangen am 26. Mai 1919.)

Kurze Bemerkung zu dem Aufsatz von Herrn Erh. Vortisch über die Mischkristalle (K, Na) Cl in ternären Systemen.

Von **Ernst Jänecke** in Hannover.

Herr Vortisch irrt, wenn er meint, daß ich „um jeden Preis" bei gewissen Dreistoffsystemen aus den experimentell ermittelten Resultaten einen bestimmten Typus konstruieren wolle. Meinen Auseinandersetzungen über das System $BaCl_2$—KCl—NaCl habe ich nichts hinzuzufügen. Es ändert sich auch dadurch nichts Wesentliches, daß mittlerweile (1918) von Nacken gefunden wurde, daß zwischen KCl und NaCl nur oberhalb 500^0 eine kontinuierliche Reihe von Mischkristallen besteht. Tatsächlich „ist es leicht", das System so zu interpretieren, wie ich es getan habe. Herr Vortisch scheint dagegen übersehen zu haben, daß ich im letzten Absatz meiner 1914 verfaßten Erwiderung ausdrücklich bemerkte, daß der von mir erörterte Typus sich nicht in einigen der von mir früher erwähnten Salzmischungen findet.

Zu dem Aufsatz von Herrn Vortisch muß ich jedoch hinzufügen, daß ich niemals eine Figur und einen Typus erörtert habe, wie er ihn in Fig. 1b mit der Unterschrift angibt: Dreistoffsystem mit drei Bodenkörpern besonderer Art nach E. Jänecke. Diese Fig. 1b stellt nämlich einen unmöglichen Fall dar, indem von einem ternären Eutektikum zwei eutektische Linien und eine Übergangslinie ausgehen. Auf die Unmöglichkeit solcher Fälle habe ich bereits früher einmal bei Besprechung ternärer Systeme hingewiesen (in den Beiblättern der Annalen der Physik. **10**. 1916. p. 227). Von einem ternären Eutektikum müssen immer drei eutektische Linien ausgehen, niemals aber eine Übergangslinie und zwei eutektische Linien, wie dieses ausführlich dargelegt ist in dem bekannten Werke: Roozeboom, Phasenlehre. III, 1. p. 70 u. p. 90.

Hannover, im August 1919.