ÖSTERREICHISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE
DENKSCHRIFTEN, 116. BAND, 3. ABHANDLUNG

H. H. L. BUSARD

DER TRAKTAT DE SINIBUS, CHORDIS ET ARCUBUS VON JOHANNES VON GMUNDEN

WIEN 1971

IN KOMMISSION BEI SPRINGER-VERLAG, WIEN/NEW YORK
DRUCK: ERNST BECVAR, A-1130 WIEN

ÖSTERREICHISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE
DENKSCHRIFTEN, 116. BAND, 3. ABHANDLUNG

H. H. L. BUSARD

DER TRAKTAT DE SINIBUS, CHORDIS ET ARCUBUS VON JOHANNES VON GMUNDEN

WIEN 1971

IN KOMMISSION BEI SPRINGER-VERLAG, WIEN/NEW YORK

DRUCK: ERNST BECVAR, A-1130 WIEN

Veröffentlichungen der Kommission für Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften, Heft 10

DER TRAKTAT „DE SINIBUS, CHORDIS ET ARCUBUS" VON JOHANNES VON GMUNDEN

Von H. L. L. Busard (Venlo/Niederlande)

Herrn Prof. Dr. P. Funk zum Andenken gewidmet

1. HISTORISCHER ÜBERBLICK

Der griechische Astronom Hipparch von Nicäa (zwischen 161 und 126 v. Chr. in Rhodus und Alexandrien) hat, wie Theon von Alexandrien in seinem Kommentar zum *Almagest* des Ptolemäus überliefert hat, eine Schrift *Über die Kreissehnen* in zwölf Büchern verfaßt, worin er die Grundlagen für eine Sehnentrigonometrie gab. Aus derselben Quelle wissen wir, daß auch Menelaus von Alexandrien (um 98 n. Chr.) in sechs Büchern das gleiche Thema behandelt hat. Leider sind beide Werke der Gegenwart nicht erhalten. Die Arbeiten seiner Vorgänger vereinigte Ptolemäus (zwischen 125 und 151 n. Chr. in Alexandrien) mit seinen eigenen Forschungen im *Almagest*, einem Werk, das für viele Jahrhunderte die trigonometrische Wissenschaft beherrschte. Das erste Buch ist der Sehnenberechnung und der Anwendung der Sehnentafel bei astronomischen Dreiecksberechnungen gewidmet. Zur Herstellung seiner Tafel teilt Ptolemäus den Kreisumfang in 360 und den Durchmesser in 120 Teile, in welchen er die Sehnen nach dem Sexagesimalsystem ausdrückt. Seine in Buch I, Kap. 11 erhaltene Sehnentafel ist eine von 30 zu 30 Minuten fortschreitende, in den ersten 5 Dezimalen genaue Tafel[1]). Wie er zu dieser Einteilung des Durchmessers gekommen ist, erzählt uns Ibn Yūnis (950—1009) in seinen im Jahre 1007 vollendeten *Zīǧ al-Ḥakimī*: *„Die Alten wichen in der Festsetzung der Zahl, die sie dem Kreisdurchmesser beilegten, voneinander ab. Es setzten sie Hipparch, Ptolemäus, die Verfasser der erprobten Tafeln u. a. zu 120 Teilen fest. Und es sagen einige Gelehrte, daß diese Zahl für die Teile gewählt worden sei, weil sie sich jener Zahl nähere, die man für den Durchmesser erhalten muß, wenn man den Umfang des Kreises in 360 Teile teilt. Es ist nämlich durch Beweis klar geworden, daß das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser annäherend das von $3^p\ 8'\ 30''$ 1 ist; und wenn wir die Linie des Umfangs, d. i. 360 Teile, durch $3^p\ 8'\ 30''$ dividieren, eine Zahl, welche gemäß dem, worüber sich viele von den Männern der Wissenschaft geeinigt haben, das Verhältnis des Umfanges zum Durchmesser ausdrückt, so ergibt sich aus der Teilung ungefähr $114^p\ 35'\ 20''$ Weil es nicht schön ist, diese Zahl zur Zahl des Durchmessers zu machen, wegen ihrer schwierigen Teilbarkeit und weil sie überdies keine ganze Zahl ist, so wählte man die ihr nächstliegende Zahl, die die meisten befriedigte, wegen der großen Zahl der Teiler: das ist 120^p"*[2]).

Der *Almagest* wurde in Europa bekannt durch eine um 1160 auf Sizilien von einem unbekannten Verfasser angefertigte Übersetzung aus dem Griechischen ins Lateinische[3]) und vor allem durch die 1175 in Toledo von Gerard von Cremona angefertigte Übersetzung aus dem Arabischen ins Lateinische.

Auch die Inder waren mit der Sehnenlehre der Griechen bekannt, jedoch ersetzten sie die Sehne durch den Sinus. An und für sich scheint dies nicht so wesentlich zu sein, da die zum Bogen φ gehörende Sehne gleich dem doppelten Sinus des Bogens $\varphi/2$ ist, d. h. sich

---

[1]) K. Manitius, *Ptolemäus Handbuch der Astronomie*, Band I, Leipzig (1963), S. 37—40.

[2]) C. Schoy, *Beiträge zur arabischen Trigonometrie*, in: *Isis* V (1923), S. 371—372. Siehe auch M. Curtze, *Urkunden zur Geschichte der Trigonometrie im christlichen Mittelalter*, in: *Bibliotheca Mathematica*, 3. Folge, 1. Band (Leipzig, 1900), S. 354.

[3]) Ch. H. Haskins, *Studies in the History of mediaeval Science*, New York (1924), S. 157—163, 191—193.

vom Sinus nur durch einen konstanten Faktor unterscheidet. In Wirklichkeit war aber der Übergang von der Sehne zur Halbsehne von weittragender Bedeutung, da er naturgemäß die Einführung von Funktionen gestattete, die die Winkel und Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks miteinander verknüpfen. Auch besaßen die Inder schon früh Tabellen für den Sinus und für den Sinus Versus, d. h. die Differenz zwischen dem Radius und dem Kosinus; denn die ersten Tabellen finden wir bereits in der *Sûryasiddhânta* oder der *Lehre der Sonne* aus dem 4. oder 5. Jahrhundert und in der *Âryabhaṭîya*, die im Jahre 499 von dem dreiundzwanzigjährigen ÂRYABHAṬA verfaßt wurde. In dem zuletzt genannten Werk sind für beide Funktionen je 24 Werte angegeben, und zwar von 3° 45′ = 225′ mit einer Schrittweite von je 225′[4]).

Schon früh wurde die indische Trigonometrie bei den Arabern bekannt, denn ein Bericht ist noch erhalten, in dem uns erzählt wird, wie ein Gelehrter aus Indien dem Kalifen AL-MANṢŪR im Jahre 773 Auszüge aus dem großen astronomischen Hauptwerk Indiens, der *Sidshânta* des BRAHMAGUPTA (geb. 598 n. Chr.), überbrachte und ihn veranlaßte, eine arabische Übersetzung, *Sindhind* genannt, anzuordnen. Um 820 fand eine Neubearbeitung in kürzerer Form statt durch MUḤAMMAD IBN MŪSĀ AL-ḪUWARIZMĪ. Und besonders durch diese Schrift wurde die indische Trigonometrie in arabischen Kreisen weit verbreitet[5]). Indessen kennen wir die Originaltafeln AL-ḪUWARIZMĪS nicht, sondern nur die Überarbeitung des Astronomen MASLAMA IBN AḤMAD AL-MAǦRITĪ, der in Cordoba tätig war und etwa 1007 gestorben ist, und die lateinische Übersetzung dieser Überarbeitung vom ADELARD VON BATH aus dem Jahre 1126. Die Genauigkeit der ersten Arabischen Tabellen war etwa die gleiche wie in der Sehnentafel des PTOLEMÄUS. Eine neue, genauere und elastischere Methode zur Berechnung von Tabellen geht auf ABŪ-L-WAFĀ (940—997/8) zurück. Die Sinustabelle ABŪ-L-WAFĀS hatte eine Schrittweite von 15′. Hervorragende trigonometrische Berechnungen hat IBN JŪNIS in dem im Jahre 1007 vollendeten *Zīg al-Ḥakimī* aufzuweisen. Bei ihm lesen wir schon folgendes: „*Die Alten wichen in der Festsetzung der Zahl, die sie dem Kreisdurchmesser beilegten, voneinander ab. Es setzten sie Hipparch, Ptolemäus, u. a. zu 120 Teilen. Eine Gruppe anderer statuierte 300 Minuten für die Zahl der Teile des Kreisdurchmessers, und sie wandten den Sinus an unter der Annahme, daß der Sinus totus = 150 Minuten sei*“[6]). Für seine Tabelle aber habe er, wie er sagt, den Radius gleich 60 gewählt, so wie es die Trefflichen der Älteren und Späteren getan haben. Die Behauptung von VON BRAUNMÜHL[7]) und BOND[8]), daß der Westaraber AL-ZARKĀLĪ (etwa 1030 bis 1090) der erste war, der sich eines Radius von 150′ bedient hat, trifft also nicht zu. AL-ZARKĀLĪ galt als der berühmteste Astronom seiner Zeit. Es mag sein, daß die Toledanischen Tafeln unter seiner Leitung entstanden sind, aber sicher ist das nicht; denn bereits im 12. Jahrhundert hat man keinen bestimmten Verfasser für die arabischen Toledanischen Tafeln und ihre Erklärungen angeben können, wie sich aus der Mitteilung des RAYMUND VON MARSEILLES vom Jahre 1140 ergibt, daß ein Toleder, der von manchen AZARKEL oder ALBATEGNI genannt wird, Tafeln für Toledo und die arabischen Jahre verfaßt habe[9]). Auch die Behauptung von VON BRAUNMÜHL[10]), daß die Einleitung zu diesen Tafeln, die *Canones sive regulae super tabulas Astronomiae*, in welchen die Berechnung der Tafeln auseinandergesetzt ist, von AL-ZARKĀLĪ selbst stamme, ist nicht sicher. Sie hat sich erst allmählich zu der im 13.—14. Jahrhundert geltenden Form entwickelt

---

[4]) A. P. JUSCHKEWITSCH, *Geschichte der Mathematik im Mittelalter*, Leipzig (1964), S. 163—167.
[5]) A. P. JUSCHKEWITSCH[4], S. 179, 308—312.
[6]) C. SCHOY[2], S. 371, 372.
[7]) A. VON BRAUNMÜHL, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*, Band I, Leipzig (1900), S. 79.
[8]) J. D. BOND (1), *The development of trigonometric methods down to the close of the XVth century*, in: *Isis* IV (1921—1922), S. 313.
[9]) E. ZINNER, *Die Tafeln von Toledo*, in: *Osiris* I (1936), S. 768.
[10]) VON BRAUNMÜHL[7], S. 78.

und ist aus verschiedenen Bausteinen zusammengefügt worden[11]). Als Übersetzer oder Ordner der *Canones* von AL-ZARKĀLĪ gilt GERARD VON CREMONA. Da GERARD 1187 starb, muß spätestens damals die Übersetzung fertig gewesen sein[12]). Eine Erläuterungsschrift zu den *Canones* des AL-ZARKĀLĪ, die Abhandlung *Scripta Marsiliensis super Canones Azarchelis*[13]), findet sich in der Handschrift Erfurt Ampl. 2°. 394, fol. 111ᵛ—119ʳ. Es läßt sich aber nicht entscheiden, ob diese Abhandlung dem RAYMUND VON MARSEILLES oder dem Arzt WILHELM VON ENGLAND, der um 1231 in Marseilles über die *Saphea* des AL-ZARKĀLĪ schrieb, zukommt[14]). Auch im 14. Jahrhundert begegnen wir Werken über die Berechnung der Sinustafeln, die von AL-ZARKĀLĪ abhängig sind, z. B. die von JOHANNES DE LINERIIS im Jahre 1322 verfaßten *Canones Tabularum primi mobilis*[15]) und das von RICHARD VON WALLINGFORD (1292?—1335) vor dem Jahre 1326 verfaßte Werk *Quadripartitum de sinibus demonstratis*[16]). Seinen *Canones* hat JOHANNES DE LINERIIS unbedenklich und ohne Andeutung ihres Ursprunges die Berechnungsweise der Sinusfunktion aus der Übersetzung von GERARD VON CREMONA einverleibt. Merkwürdig genug ist aber seine Sinustabelle für den Durchmesser 120 berechnet und für halbe Grade aufgestellt, wie das auch der Fall ist im Traktat *De sinibus, chordis et arcubus* von JOHANNES VON GMUNDEN, der die *Canones* des JOHANNES DE LINERIIS mehr als nur benutzt hat.

Eine gänzliche Neuschöpfung des trigonometrischen Zahlenmaterials, dessen bisherige Schärfe den erhöhten Anforderungen nicht mehr genügte, ging von den Gelehrten der Wiener Universität im fünfzehnten Jahrhundert aus. Zeitlich steht an ihrer Spitze JOHANNES VON GMUNDEN. Von ihm haben wir den *Tractatus de sinibus, chordis et arcubus*, der das Ziel unserer Untersuchung war. In ihm hat er zweierlei Methoden zur Berechnung von Sinustabellen angeführt: die eine ist die des AL-ZARKĀLĪ, die andere die des PTOLEMÄUS. Die von AL-ZARKĀLĪ nur angedeuteten Rechnungen hat er für die beiden Annahmen durchgeführt und für beide eine Sinustabelle hinzugefügt. Die Behauptung von VON BRAUNMÜHL[17]), daß er, um eine größere Genauigkeit zu erzielen, den Radius gleich 600000 setzte, haben wir in dieser Schrift nicht bestätigt gefunden, und auch nicht in der seines Nachfolgers im Amte, GEORGS VON PEURBACH (1423—1461), dem *Tractatus Georgii Purbachii super Propositiones Ptolemaei de sinibus et chordis*[18]), der im Jahre 1541 in Nürnberg gedruckt worden ist. Der Aufsatz von PEURBACH enthält nur einen wörtlichen Auszug aus dem von JOHANNES VON GMUNDEN. Er gibt vom ersten Teil nur das zweite Kapitel, die Beschreibung der Figur von AL-ZARKĀLĪ und den Abschnitt über die erste, zweite usw. Kardaga. Vom zweiten Teil gibt er die sechs Propositionen und einen kurzen Auszug für die Bestimmung der Sinusse. Der Aufsatz von REGIOMONTAN *Compositio Tabularum Sinuum rectorum* enthält in der 2. Proposition die Berechnung der Sinusse für die Kardaga, wobei der *Sinus totus* gleich $6 . 10^8$ gesetzt wird, in der 3. Proposition die Sinusse von 7° 30′; 3° 45′; 22° 30′; 11° 15′; 37° 30′; 18° 45′; 41° 15′; 33° 45′; 26° 15′ und ihre Komplementen. Die *Tabulae sinuum* enthalten die von 1′ zu 1′ fortschreitenden Sinusse für einen Radiuswert von $6 . 10^6$ und 10^7. Die späte Veröffentlichung der großen Tafel REGIOMONTANS war auch der Grund, daß NIKOLAUS COP-

---

[11]) E. ZINNER[9], S. 766. Siehe auch J. M. MILLAS VALLICROSA, *Estudios sobre Azarquiel*, Madrid—Granada (1943—1950).

[12]) Einen Auszug dieser Übersetzung hat M. CURTZE[2] veröffentlicht, S. 337—348.

[13]) M. CURTZE[2], S. 347—353.

[14]) E. ZINNER[9], S. 771.

[15]) M. CURTZE[2], S. 391—413.

[16]) J. D. BOND, *Quadripartitum Ricardi Walynforde de Sinibus Demonstratis*, in: *Isis* V (1923), S. 99—115; 339—363.

[17]) A. VON BRAUNMÜHL[7], S. 116.

[18]) Der vollständige Titel des Traktats ist: *Tractatus Georgii Peurbachii super propositiones Ptolemaei de Sinubus et Chordis. Item Compositio Tabularum Sinuum per Ioannem de Regiomonte. Adiectae sunt & Tabulae Sinuum duplices per eundem Regiomontanum. Norimbergae apud Iohan. Petreium, anno Christi M. D. XLI.*

PERNICUS seinem großen Werke *De revolutionibus orbium coelestium* (Nürnberg, 1543) eine Sinustafel für $r = 10^5$ mit einem Intervall von 10′ zu 10′ beigegeben hat. Ein Jahr früher hatte sein jüngerer Mitarbeiter RHAETICUS eine von ihm selbst berechnete Sinustafel größerer Genauigkeit ($r = 10^7$, 1′ zu 1′) drucken lassen. RHAETICUS hat danach 1551 den ausführlicheren *Canon doctrinae triangulorum* herausgegeben, der später von TYCHO BRAHE benutzt wurde. Dabei ließ RHAETICUS es jedoch nicht bewenden, sondern begann die Ausarbeitung von weit umfangreicheren Tabellen, die ihren Niederschlag im *Opus Palatinum* vom Jahre 1596 fanden. Ungedruckte Berechnungen von RHAETICUS, die in wichtigen Punkten die Tabellen noch mehr erweitern, kamen dem BARTHOLOMÄUS PITISCUS zuhanden, der im *Thesaurus mathematicus* (1613) das große Tabellenwerk des RHAETICUS berichtigt, erweitert und neu geordnet hat.

2. JOHANNES VON GMUNDEN und sein „*TRACTATUS DE SINIBUS, CHORDIS ET ARCUBUS*“

Die frühe Jugend des JOHANNES VON GMUNDEN ist in Dunkel gehüllt; wir wissen aus der im Jahre 1400 erfolgten Immatrikulation nur das eine, daß sein Vater Schneider war, und können aus dem Umstand, daß zur Promotion zum Magister ein Alter von 21 Jahren erforderlich war, schließen, daß er 1406 dieses Alter schon erreicht hatte, also vor dem Jahre 1385 geboren war. Nach Erlangung des Magisteriums (1406) nahm er 1408 die akademischen Vorlesungen auf. Am 24. August 1409 wurde er besoldeter Lehrer und in das collegium ducale aufgenommen. Es folgte seine Wahl als examinator licentiandorum für die österreichische Nation und im Jahre 1413 zum Dekan. Die Priesterweihe empfing er wahrscheinlich zu Weihnachten 1417. In seinen Vorlesungen behandelte er nach 1417 nur mathematische und astronomische Themen, sodaß er mit Recht als der erste Fachprofessor und Begründer der älteren mathematischen Schule in Wien bezeichnet werden kann. Nach der Ernennung zum Domherrn von St. Stephan 1425 verschwindet der Name des Gelehrten aus den Acta, es wird keine Vorlesung von ihm mehr genannt und erst 1434 erscheint er wieder mit einer Arbeit über das Astrolabium. JOHANNES VON GMUNDEN starb am 23. Februar 1442 und wurde in der Gruft von St. Stephan beigesetzt, seine letzte Ruhestätte ist unbekannt, da keine Gedenktafel auf unsere Zeit gekommen ist[19]).

JOHANNES VON GMUNDEN hat den *Tractatus de sinibus, chordis et arcubus* im Jahre 1437 verfaßt, wie sich aus dem Explicit der Handschrift Cod. Vindob. 5268 ergibt. Seiner Gewohnheit, sich am Ende einer Abhandlung als Autor zu bezeichnen folgend, schließt er den ersten Teil (fol. 84^ra—90^va) mit den Worten: *Explicit tractatus de sinibus et arcubus eorum compositus Wyenne per magistrum Iohannem de Gmunden et finitus per eundem in vigilia sancti Mathei apostoli et evangelisti anno domini 1437*; den zweiten Teil (fol. 91^ra—97^vb) mit: *Explicit tractatus secundus de cordis et sinibus ac arcubus eorum, compositus Wyenne per Magistrum Johannem de Gmunden et finitus per eundem in die sanctae Luciae virginis et martiris Anno Domini 1437*. Der Traktat ist ein für seine Zeit sehr gutes Lehrbuch, das vielleicht aus seinen Vorlesungen hervorgegangen ist, worauf die Weitschweifigkeit des Textes deutet. Viel Neues hat das Werk nicht gebracht, es ist aber das große Verdienst von JOHANNES VON GMUNDEN, daß er durch diese Abhandlung den ersten Anstoß gegeben hat zu einer Neuberechnung der Sinustabelle, die ihre Vollendung im *Thesaurus mathematicus* von PITISCUS aus dem Jahre 1613 gefunden hat. Ihm standen zwei Quellen zu Gebote, eine Übersetzung von Werken von AL-ZARKĀLĪ, der er sich im ersten Teil des Traktats bedient, und eine der vorhandenen Übersetzungen des ptolemäischen *Almagestes*, die er im zweiten Teil benutzt. JOHANNES VON GMUNDEN wie

---

[19]) R. KLUG, *Johannes von Gmunden, der Begründer der Himmelskunde auf deutschem Boden*, in: *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien*, Phil.-hist. Klasse, 222. Band (1945), S. 1—93.

auch AL-ZARKĀLĪ[20]) und DE LINERIIS[21]), fängt sein Werk an mit den Diffinitionen für den *Sinus rectus* (sinus rectus $\alpha = \frac{1}{2}$ crd 2α, d. h. die halbe Sehne des doppelten Bogens); den *Sinus versus* oder *sagitta* (sinus versus $\alpha = 1 - \cos\alpha$, d. h. jener Teil des Durchmessers, welcher zwischen dem Endpunkte des Bogens und dem Sinus liegt); den *Sinus totus* oder *perfectus* (d. h. den sinus von 90° oder die halbe Sehne von 180°); und die Kardaga (d. h. den Bogen von 15°). Das Wort Kardaga ist aus dem indischen kramadjyâ, gerader Sinus, entstanden und bezeichnete somit anfangs jeden Sinuswert, wurde aber dann später demjenigen Sinus allein beigelegt, der gleich seinem Bogen ist. Noch später bezeichnete man damit gewisse andere Sinusse, wie sin 15°, in welcher Bedeutung wir das Wort auch bei VON GMUNDEN antreffen[22]).

Im 2. Kapitel werden die verschiedenen Näherungswerte von π besprochen. Zuerst wird bemerkt, daß das Verhältnis zwischen Kreisumfang und Durchmesser durch die Praktiker gleich 22 : 7 gesetzt wird, ein Wert, der den Geometern nicht genügt, weil es zwischen einer geradlinigen und krummlinigen Linie kein Verhältnis gibt. Er weiß, daß ARCHIMED es zwischen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ eingeschlossen hat; daß PTOLEMÄUS es zu $\frac{377}{120}$ annahm; daß die Inder es mit $\sqrt{10}$ für einerlei erklären; daß wieder andere sagen, jenes Verhältnis sei wie 62832 zu 20000, was schon im ersten Teil der *Âryabhaṭīya* gefunden wird, aber streng genommen ist ein Verhältnis nicht vorhanden, weil das Gerade und das Krumme nicht Größen derselben Art sind. Dagegen waltet zwischen ihnen eine gegenseitige Beziehung; denn der Sinus ist Sinus eines bestimmten Bogens, und der Bogen ist Bogen eines bestimmten Sinus.

Im 3. Kapitel lehrt er nach EUKLID I, 46 über einer gegebenen Strecke das Quadrat zu zeichnen und nach EUKLID II, 14 ein einem rechtwinkligen Parallelogramm gleiches Quadrat

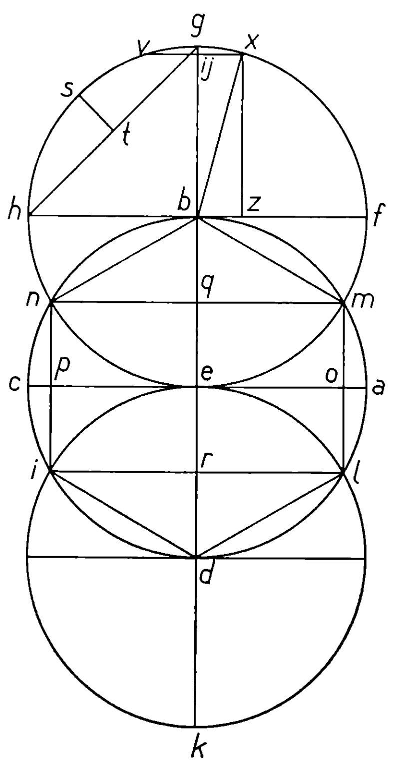

Fig. 1

$n\,p = \sin 30° = \frac{1}{2}\,r;$

$n\,q = \sin 60° = \sqrt{r^2 - n\,p^2};$

$h\,t = \sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2\,r^2};$

$\frac{1}{2}\,a\,m = \frac{1}{2}$ crd $30° = \sin 15° = \sqrt{o\,m^2 + o\,a^2};$

ist ferner arc. $v\,g\,x = 30°$,

so ist arc. $x\,f = 75°$

und $x\,z = \sin 75° = \sqrt{r^2 - \sin^2 15°} = \sqrt{r^2 - x\,y^2}.$

$\sin 90° = 60^p;$

$\sin 30° = 30^p;$

$\sin 60° = \sqrt{(60^p)^2 - (30^p)^2} = 51^p\ 57'\ 41''\ 24''';$

$\sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2\,(60^p)^2} = 42^p\ 25'\ 35'';$

$\sin 15° = \frac{1}{2}\sqrt{(60^p - 51^p\ 57'\ 42'')^2 + (30^p)^2}$

$= 15^p\ 31'44''50''';$

$\sin 75° = \sqrt{(60^p)^2 - (15^p\ 31'\ 45'')^2}$

$= 57^p\ 57'\ 19''\ 57''';$

$\sin 90° = 150';$

$\sin 30° = 75';$

$\sin 60° = \sqrt{(150')^2 - (75')^2} = 129'\ 54''\ 13'''\ 41'''';$

$\sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2\,(150')^2} = 106'\ 3''\ 57''';$

$\sin 15° = \frac{1}{2}\sqrt{(150' - 129'\ 54''\ 14''')^2 + (75')^2}$

$= 38'\ 49''\ 22''';$

$\sin 75° = \sqrt{(150')^2 - (38'\ 49''\ 22''')^2}$

$= 144'\ 53''\ 20'''.$

---

20) M. CURTZE², S. 343.
21) M. CURTZE², S. 404, 405.
22) A. VON BRAUNMÜHL⁷, S. 45.

zu errichten. Diese Konstruktionen werden im 4. Kapitel verwendet um ein Quadrat gleich der Summe oder Differenz zweier gegebenen Quadraten herzustellen unter Hinweis auf EUKLID I, 47 und II, 4. Im 5. Kapitel lehrt er das Ausziehen der Quadratwurzel genau so wie er es in seinem *Tractatus de minutiis phisicis*[23]) in Nachahmung des Traktats *Algorismus de minutiis* von JOHANNES DE LINERIIS gemacht hat[24]).

Nachdem er sich in den vorhergehenden Kapiteln das geometrische und arithmetische Rüstzeug für die Berechnung einer Sinustabelle geschaffen hat, folgt JOHANNES VON GMUNDEN im 6. Kapitel wieder AL-ZARKĀLĪ und DE LINERIIS und bemerkt zuerst, daß es zweierlei Tabellen gibt, die eine für einen Durchmesserwert zu 300 Minuten, die andere für einen zu 120 Graden. Es folgt dann eine sehr ausführliche Beschreibung der Figur von AL-ZARKĀLĪ[25]), an Hand deren er die Sinusse der 6 *Kardagarum circuli*, d. h. der ersten 6 ganzen Vielfachen von 15°, geometrisch herleitet und dann arithmetisch berechnet wie oben.

Bevor JOHANNES VON GMUNDEN zur Berechnung der sin 7° 30′ übergeht, führt er einen neuen Begriff ein und definiert den Sinus der ersten Kardaga = sin 15°; den Sinus der zweiten Kardaga = sin 30° — sin 15°; den Sinus der dritten Kardaga = sin 45° — sin 30°; den Sinus der vierten Kardaga = sin 60° — sin 45°; den Sinus der fünften Kardaga = sin 75° — sin 60°; den Sinus der sechsten Kardaga = sin 90° — sin 75°[26]). Diese Sinusse besitzen folgende Eigenschaften, die ohne Beweis gegeben werden:

sin 15° = sin versus der sechsten Kardaga (d. h. sin 15° = sin vers. 90° — sin vers. 75°); sin der zweiten Kardaga = sinus vers. der fünften (d. h. sin 30° — sin 15° = sin vers. 75° — sin vers. 60°).

sin 30° = sinus versus der fünften und sechsten Kardaga (d. h. sin 30° = sin vers. 75° — sin vers. 60° + sin vers. 90° — sin vers. 75°).

sin vers. 30° = sin der fünften und sechsten Kardaga (d. h. 1 — cos 30° = sin 90° — sin 60°).

sin der dritten Kardaga = sinus versus der vierte (d. h. sin 45° — sin 30° = sin versus 60° — sin versus 45°).

sin versus der dritten Kardaga = sin der vierten Kardaga (d. h. sin versus 45° — sin versus 30° = sin 60° — sin 45°).

sin 45° = sin versus der vierten, fünften und sechsten Kardaga (d. h. sin 45° = sin versus 60° — sin versus 45° + sin versus 75° — sin versus 60° + sin versus 90° — sin versus 75°).

sin versus 45° = sin der vierten, fünften und sechsten Kardaga (d. h. 1 — cos 45° = sin 60° — sin 45° + sin 75° — sin 60° + sin 90° — sin 75°).

Nach dieser Auseinandersetzung über die verschiedenen Kardaga berechnet JOHANNES VON GMUNDEN nach der Formel $\sin^2 a = \sin 30° \cdot \sin \text{versus}\ 2a$: sin 7° 30′; sin 3° 45′; sin 22° 30′; sin 11° 15′; sin 37° 30′; und nach der Formel $\sin^2 (90° - a) = 1 - \sin^2 a$: sin 82° 30′; sin 86° 15′; sin 67° 30′; sin 78° 45′ und sin 52° 30′

Beide Formeln werden von AL-ZARKĀLĪ, DE LINERIIS[27]) und VON GMUNDEN ohne Beweis angewendet. Die zweite Formel folgt bei VON GMUNDEN vielleicht aus seiner Herleitung vom sin 75° aus sin 15°. Ein Beweis für die erste Formel gibt RICHARD VON WALLINGFORD in der dritten Proposition des I. Buches seines *Quadripartitum*[28]). REGIOMONTAN beweist sie in der dritten Proposition der *Compositio Tabularum Sinuum rectorum* in der Proportionsform sin versus 2a : sin a = sin a : sin 30°[29]).

---

[23]) G. J. GERHARDT, *Geschichte der Mathematik in Deutschland*, München (1877), S. 7, 8.

[24]) H. L. L. BUSARD, *Het rekenen met breuken in de Middeleeuwen, in het bijzonder bij Johannes de Lineriis*, in: *Mededelingen van de koninklijke Vlaamse Academie voor Wetenschappen*, XXX (1968), S. 34.

[25]) M. CURTZE[2], S. 344, 406. Siehe auch J. D. BOND[8], S. 313.

[26]) M. CURTZE[2], S. 346, 407; J. D. BOND[16], S. 104, 347.

[27]) M. CURTZE[2], S. 346, 347, 408.

[28]) J. D. BOND[16], S. 101, 343.

[29]) *Tractatus Georgii Peurbachii*[18], S. B 2^v. Siehe auch M. CURTZE[2], S. 374.

Die Ergebnisse seiner Berechnungen hat von Gmunden in zwei Tafeln, für jede Annahme des Durchmessers eine, gesammelt. In dem dann folgenden Abschnitt wird gelehrt, wie die Sinus von Winkeln größer als 90° gefunden werden können: für Winkel zwischen 180° und 90° subtrahiere man 90° vom Winkel; für die zwischen 270° und 180°, 180° und für die zwischen 360° und 270°, 270° und arbeite dann weiter mit dem Sinus der übrigen Winkel[30]).

Am Ende des ersten Teils setzt von Gmunden den Gebrauch der Tafeln auseinander, er fängt an mit der Tafel für die Kardaga und benutzt Proportionalteile und die Differenzen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Tafelgrößen. Wenn er z. B. den sin 49° bestimmen will, nimmt er zuerst den sin 45° = 106′ 3″ 57‴. Die Differenz mit der folgenden Kardaga ist 23′ 50″ 17‴ = 85817‴: es ist daher 85817‴ x $\frac{4}{15}$ auszuführen, d. h. 22884‴ = 6′21″ 24‴ also ist der gewünschte sin 49° = 112′ 25″ 21‴, ein sehr ungenauer Wert[31]). Der sin versus entsteht auf gleiche Weise, aber in umgekehrter Reihenfolge, denn der sin versus der sechsten Kardaga (d. h. sin versus 90° — sin versus 75°) = sin 15° und der sin versus 15° = sin der sechsten Kardaga (d. h. sin 90° — sin 75°). Ist aber der Winkel größer als 90°, so müßte der für den Überschuß über 90° aufgesuchte Sinus zu 150′ bzw. 60° addiert werden (d. h. sin versus (90° + a) = 1 + sin a[32]). Diese Beziehung wurde schon von al-Battānī in seinem astronomischen Werk *Vervollkommnung des Almagest* definiert[33]).

Wenn man aus dem Sinus den Bogen herleiten will, gehe man folgendermaßen vor: man bestimme die nächstliegende Kardaga und ziehe die Minuten etc. vom gegebenen Sinus ab; den Überschuß multipliziere man mit 15 und dividiere durch die Differenz zweier aufeinanderfolgender Kardaga. Ist also z. B. sin a = 139′, so sind zunächst für 129′ 54″ 14‴ vier Kardaga = 60° zu merken. Die überschießenden 9′ 5″ 46‴ sind mit 15° zu multiplizieren und durch die Minuten etc. der nachfolgenden Kardaga d. i. durch 14′ 59″ 6‴ zu dividieren und die so entstehenden 9° 6′ 19″ zu den obigen 60° hinzugefügt, ergeben dann a = 69°6′ 19″[34]). Mit der Sinustabelle verfährt man auf gleiche Weise wie mit der Kardagatabelle, und zwar nimmt man hier für die zwischenliegenden Minuten die Proportionalteile der Differenzen. Der sin versus a wird bestimmt nach der Formel sin versus a = 1 — sin (90° — a) und der sin versus (90° + a) nach der Formel sin versus (90° + a) = 1 + sin a. Die Sehne bestimmt man nach der Formel crd a = 2 sin a/2[35]).

Nachdem von Gmunden im ersten Teil des Traktats die Berechnung der Sinusse mit Hilfe der Kardagatabellen, die auf die Inder zurückgehen, nach al-Zarkālī auseinandergesetzt hat, gibt er im zweiten Teil eine Auseinandersetzung für die genauere Berechnung der Sinustabellen nach Ptolemäus. Den Ausgangspunkt bilden die folgenden sechs Propositionen, die Ptolemäus im 1. Buche des *Almagest*, Kap. X gibt:

1. In der ersten Proposition wird gelehrt, wie man nach den Sätzen Euklids die Seiten des regelmäßigen Drei-, Vier-, Fünf-, Sechs- und Zehneckes in Teilen des Durchmessers ausdrücken kann[36]). Da die Sehnen zweier Bögen, welche sich zu einem Halbkreis ergänzen, quadriert und addiert das Quadrat des Durchmessers ergeben, so hat man hiermit auch die Sehnen der Supplementarbögen der vorigen[37]).

2. Der sogenannte ptolemäische Lehrsatz vom Sehnenviereck, daß in einem Kreis-Viereck die Summe der Rechtecke aus je zwei Gegenseiten gleich dem Rechteck aus den beiden Diagonalen ist, wird aufgestellt und bewiesen[38]).

---

[30]) M. Curtze[2], S. 339, 408, 409.

[31]) M. Curtze[2], S. 339, 409.

[32]) M. Curtze[2], S. 340, 375, 409.

[33]) A. P. Juschkewitsch[4], S. 298.

[34]) M. Curtze[2], S. 340, 409.

[35]) M. Curtze[2], S. 341, 410.

[36]) Siehe auch die 4. Proposition des *Compositio Tabularum Sinuum rectorum* von Regiomontan, S. B 3.

[37]) K. Manitius[1], S. 24—28; Th. Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. II (Oxford, 1921), S. 277—278; P. Dedron et J. Itard, *Mathématiques et Mathematiciens*, Paris (1959), S. 364, 365.

[38]) K. Manitius[1], S. 28; Th. Heath[37], S. 278, 279; J. Itard[37], S. 365; M. Curtze[2], S. 357, 358.

3. Wenn zwei Bögen und die sie unterspannenden Sehnen gegeben sind, so wird auch die Sehne gegeben sein, welche die Differenz der beiden Bögen unterspannt[39]).

4. Wenn irgendeine Sehne gegeben ist, die zur Hälfte des unterspannten Bogens gehörige Sehne zu finden[40]).

5. Wenn zwei Bögen und die sie unterspannenden Sehnen gegeben sind, so wird auch die Sehne gegeben sein, welche die Summe der beiden Bögen unterspannt[41]).

6. Wenn in einem Kreise zwei ungleiche Sehnen gezogen werden, so ist das Verhältnis der größeren Sehne zur kleineren Sehne kleiner als das Verhältnis des Bogens auf der größeren Sehne zu dem Bogen auf der kleineren Sehne[42]).

Alsdann berechnet VON GMUNDEN nach der 1. Proposition die sogenannten sieben primitiven Sehnen: $\text{crd}\,60° = 60^p$; $\text{crd}\,36° = 37^p\,4'\,55''$; $\text{crd}\,72° = 70^p\,32'\,3''$; $\text{crd}\,90° = 84^p\,51'\,10''$; $\text{crd}\,120° = 103^p\,55'\,23''$; $\text{crd}\,144° = 114^p\,7'\,37''$; $\text{crd}\,108° = 97^p\,4'\,55''$; und nach der 2. und 3. Proposition: $\text{crd}\,12° = (\text{crd}\,72°\,\text{crd}\,120° - \text{crd}\,60°\,\text{crd}\,108°) : \text{crd}\,180° = 12^p\,32'\,36''$; $\text{crd}\,24° = (\text{crd}\,60°\,\text{crd}\,144° - \text{crd}\,120°\,\text{crd}\,36°) : \text{crd}\,180° = 24^p\,56'\,58''$ und $\text{crd}\,30° = (\text{crd}\,90°\,\text{crd}\,120° - \text{crd}\,90°\,\text{crd}\,60°) : \text{crd}\,180° = 31^p\,3'\,30''$. Mittels der 4. Proposition werden Sehnen gewonnen, welche die Hälfte der Bogen von früher bestimmten Sehnen unterspannen. Aus der den Bogen von 12° unterspannenden Sehne werden z. B. sukzessive die Sehnen zu den Bogen von 6°, 3°, 1° 30′ und 45′ gewonnen. Um crd 6° zu berechnen, verfährt er folgendermaßen: man bestimme erst $\text{crd}\,168° = \sqrt{(\text{crd}\,180°)^2 - (\text{crd}\,12°)^2} = 119^p\,20'\,34''$ und ziehe diesen Betrag von $\text{crd}\,180° = 120^p$ ab. Es bleibt noch 39′ 26″ übrig. Davon nehme man die Hälfte, welche 19′ 43″ ist, und multipliziere hiermit crd 180° Die Quadratwurzel hieraus ist $6^p\,16'\,47'' = \text{crd}\,6°$. Auf gleiche Weise findet man $\text{crd}\,174° = 119^p\,50'\,8''$; $\text{crd}\,3° = 3^p\,8'\,28''$; $\text{crd}\,177° = 119^p\,57'\,32''$; $\text{crd}\,1°\,30' = 1^p\,34'\,14''$; $\text{crd}\,178°\,30' = 119^p\,59'\,23''$; $\text{crd}\,45' = 47'\,7''$. Aus $\text{crd}\,60° = 60^p$ findet man so $\text{crd}\,30° = 31^p\,3'\,30''$; $\text{crd}\,150° = 115^p\,54'\,40''$; $\text{crd}\,15° = 15^p\,39'\,47''$; $\text{crd}\,165° = 118^p\,58'\,24''$ und $\text{crd}\,7°\,30' = 7^p\,50'\,54''$

Da nun die crd 1° 30′ zur Verfügung steht, kann man mittels der 5. Proposition eine Tafel herstellen mit einem Intervalle von je 1° 30′. Das folgende Beispiel mag das erläutern: Sei $\text{crd}\,3° = 3^p\,8'\,28''$ und $\text{crd}\,1°\,30' = 1^p\,34'\,14''$, dann ist $\text{crd}\,177° = 119^p\,57'\,32''$ und $\text{crd}\,178°\,30' = 119^p\,59'\,23''$ Nach der 5. Proposition ist dann $\text{crd}\,175°\,30' = (\text{crd}\,177° \,.\, \text{crd}\,178°\,30' - \text{crd}\,3° \,.\, \text{crd}\,1°\,30') : \text{crd}\,180° = 119^p\,54'\,27''$ und daraus ergibt sich $\text{crd}\,4°\,30' = 4^p\,42'\,39''$.

Nun kann man auch, wenn irgendeine Sehne gegeben ist, die zum doppelten Bogen gehörige Sehne finden. Wenn man z. B. aus crd 4° 30′ den crd 9° berechnen will, verfährt man so: aus $\text{crd}\,4°\,30' = 4^p\,42'\,39''$ ergibt sich crd 175° 30′, da $\text{crd}\,171° = ((\text{crd}\,175°\,30')^2 - (\text{crd}\,4°\,30')^2) : \text{crd}\,180° = 119^p\,37'\,48''$ ist, findet man daraus für $\text{crd}\,9° = 9^p\,24'\,58''$

Somit bleibt nur noch die Bestimmung der Sehnen jener Winkel übrig, welche innerhalb des Zuwachses von $1\frac{1}{2}°$ liegen. Um diese zu bestimmen, berechnet VON GMUNDEN mit der 6. Proposition crd $\frac{1}{2}°$ und crd 1° folgendermaßen: $\text{crd}\,1°/\text{crd}\,45' < \text{bg}\,1°/\text{bg}\,45' = 4/3$ (Proposition 6.); aber es wurde bereits gefunden: $\text{crd}\,45' = 47'\,7''$, also ist $\text{crd}\,1° < 1^p\,2'\,49''\,20'''$. Ferner ist $\text{crd}\,1°\,30'/\text{crd}\,1° < \text{bg}\,1°\,30'/\text{bg}\,1° = 3/2$ und $\text{crd}\,1°\,30' = 1°\,34'\,14''$; also ist $\text{crd}\,1° > 2/3\,\text{crd}\,1°\,30' = 1^p\,2'\,49''\,20'''$. Da also die Grenzen, zwischen denen die Sehne von 1° eingeschlossen ist, nicht mehr als um einen Sexagesimalteil der zweiten Ordnung voneinander entfernt sind, so kann man $\text{crd}\,1° = 1^p\,2'\,49''$ setzen. Hieraus folgt dann crd $30' = 0^p\,31'\,25''$. Die übrigen Zwischenräume gelangen zur Ausfüllung, indem man z. B. im ersten Intervall durch Bildung der Summe der Sehnen zu den Bogen von 1° 30′ und 30′ die Sehne zum Bogen von 2° gewinnt, und durch Bildung der Differenz der Sehnen zu den

---

[39]) K. MANITIUS[1], S. 29; TH. HEATH[37], S. 279, 280; J. ITARD[37], S. 366; M. CURTZE[2], S. 358, 359.
[40]) K. MANITIUS[1], S. 30; TH. HEATH[37], S. 280; J. ITARD[37], S. 366.
[41]) K. MANITIUS[1], S. 31, 32; TH. HEATH[37], S. 281; J. ITARD[37], S. 367; J. D. BOND[16], S. 104, 348.
[42]) K. MANITIUS[1], S. 33, 34; TH. HEATH[37], S. 281, 282; J. ITARD[37], S. 368, 369.

Bogen von 3° und 30′ die Sehne zu dem Bogen von 2° 30′ bestimmt, usw. Die so berechnete Tafel besteht aus zwei Kolumnen. In der ersten links befinden sich in zwei Spalten die Bögen in Graden und Minuten, die zweite zeigt neben jedem Bogen seine Sehne und hat daher drei Spalten für Sechzigteile, Minuten und Sekunden der Sehnen. Angenommen wird, daß die Veränderung der Sehnen der Bögen innerhalb der tabellarischen Angabe von 30′ zu 30′ der Veränderung der Bögen proportional sei. Die beigegebene Sinustafel wurde nach der Formel $\frac{1}{2}$ crd 2a = sin a berechnet und auch hier wird angenommen, daß die zwischenliegenden Werte proportional berechnet werden können [43]).

Im letzten Abschnitt wird noch gelehrt, wie man mit den Tafeln arbeiten kann.

---

[43]) K. MANITIUS [1], S. 34, 35; TH. HEATH [37], S. 281, 282; J. ITARD [37], S. 369, 370; J. D. BOND [16], S. 111, 112, 354, 355.

(*fol. 84^{r}a*)* Quia de sinibus, cordis et arcubus in praemissis canonibus saepius facta est mentio ipsorumque notitia ad cognitionem motuum caelestium est valde necessaria, ideo ad praesens est danda eorum doctrina.

Unde primo videndum est quid sit sinus. Est autem duplex sinus scilicet rectus et versus. Sinus rectus sive aequalis cuiuslibet portionis circuli est dimidium cordae illius duplicis portionis. Erit igitur dimidium cordae 180 graduum sinus 90 graduum et vocatur sinus totus sive perfectus. Nulla enim corda in circulo est maior quam corda portionis 180 graduum, qui est diameter circuli. Similiter sinus 45 graduum est dimidium cordae 90 graduum. Et sinus 30 graduum est dimidium cordae 60 graduum et sic in omnibus circuli portionibus. Corda autem vocatur quaelibet linea recta in circulo ad circumferentiam ex utraque parte ducta. Arcus vero est portio circumferentiae per cordam illius portionis abscissa. Sed sinus versus est pars diametri inter arcum et praedictam cordam contenta, transiens ad medium cordae et eam secans orthogonaliter et alio nomine vocatur sagitta.

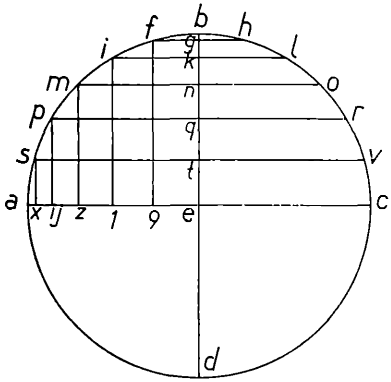

Fig. 2

Diameter vero circuli est linea recta transiens per centrum circuli dividens ipsum in duo aequalia. Exempli gratia: sit circulus *a b c d* descriptus circa centrum *e* et divisus in 4 partes aequales per lineas *a e c* et *b e d* orthogonaliter se secantes super centrum *e* sitque quarta circuli *a b* divisa in 6 partes aequales in punctis *f*; *i*; *m*; *p*; *s* quae partes vocantur cardagae. Cardaga enim est portio circuli constans ex 15 gradibus. Similiter quarta circuli *b c* sit divisa in sex partes aequales in punctis *h*; *l*; *o*; *r*; *v*. Erit quaelibet illarum quindecim graduum. Quaelibet enim quarta circuli continet 90 gradus, quorum sexta pars est 15 gradus. Protractis etiam lineis *f g h*; *i k l*; *m n o*; *p q r*; *s t v* secantes lineam *e b*, protractis insuper lineis *s x*; *p y*; *m z*; *i 1*; *f 9* perpendicularibus ad lineam *a e* per duodecimam primi Euclidis, erit linea *a e c* diameter circuli. Similiter linea *b e d* et quaelibet earum in puncto *e* est divisa in duo aequalia. Et quaelibet medietas est semidiameter circuli et linea *f g h* est corda arcus triginta graduum. Et ille arcus est portio circumferentiae *f b h* cuius medietas est arcus *f b*. Medietas vero praedictae cordae est linea *f g* quae est (*fol. 84^{r}b*) sinus rectus arcus *f b*. Sed linea *b g* est sinus versus eiusdem arcus. Similiter linea *i k l* est corda arcus *i b l* qui est 60 graduum, cuius medietas est linea *i k* quae est sinus rectus arcus *i b* qui est triginta graduum. Sinus vero versus eiusdem arcus est linea *k b*. Eodem modo linea *m n o* est corda arcus *m b o* qui est 90 graduum cuius cordae medietas est linea *m n* quae est sinus rectus arcus *m b* qui est 45 graduum et linea *n b* est sinus versus eiusdem arcus *m b*. Sed linea *p q r* est corda arcus *p b r* qui est 120 graduum et illius cordae medietas scilicet linea *p q* est sinus rectus arcus *p b* qui est 60 graduum. Sinus vero versus eiusdem arcus est linea *q b*. Linea autem *s t v* est corda arcus *s b v* qui est 150 graduum, cuius cordae medietas scilicet linea *s t* est sinus rectus arcus *s b* qui est 75 graduum. Sinus vero versus eiusdem arcus est linea *t b*. Diameter vero *a e c* est corda semicirculi *a b c* qui est 180 graduum. Medietas vero ipsius scilicet semidiameter *a e* est sinus rectus quartae circuli *a b* qui est 90 graduum. Et sinus versus eiusdem quartae est semidiameter *e b*. Procedendo autem e converso a puncto *a* versus *b* linea *x s* est sinus rectus et linea *a x* sinus versus arcus *a s*. Sed linea *y p* est sinus rectus et linea *a y* sinus versus arcus *a p*. Sed linea *z m* est sinus rectus et linea *a z* est sinus

---

*) Außer dem Codex Vindob. 5268 habe ich für die Herstellung des Textes des ersten Teiles noch den Codex Vindob. 5277, fol. 69^{r}–90^{v} herangezogen.

versus arcus *a m*. Linea autem *i 1* est sinus rectus et linea *a 1* est sinus versus arcus *a i*. Linea autem *9 f* est sinus rectus et linea *a 9* sinus versus arcus *a f*. Eodem modo intellige de aliis scilicet de sinibus cuiuscumque cardagae aut arcus alterius seorsum sumpti.

(*fol. 84ᵛa*) Secundo est notandum quod inventa diametri circuli quantitate faciliter habebitur quantitas sinus cuiuslibet portionis circuli. Magistri autem geometriae non potuerunt comprehendere ratione perfecta quanta esset diameter respectu circumferentiae, quia recti ad curvum nulla est proportio. Sed practici posuerunt circumferentiam triplam sesquiseptimam diametro quae proportio est 22 ad 7. Et ergo multiplicant diametrum per 22 et productum dividunt per 7 pro circumferentia habenda. Et e converso circumferentiam multiplicant per 7 et productum dividunt per 22 pro diametro habenda. Vel dividunt circulum per $3\frac{1}{7}$ et habetur quantitas diametri. Et e converso multiplicant diametrum per $3\frac{1}{7}$ et habetur quantitas circuli circumferentiae. Archimedes probat quod circumferentia ter continet diametrum et minus quam 10 70^{mas} et plus quam 10 71^{mas}. Sed Ptolomeus in Almagesti probat, quod 10^{a} circumferentiae habet cordam 37 graduum et fere 4 minuta. Et ergo dicit si ponimus diametrum 120 graduum, erit circumferentia fere 377 graduum qui numerus ad numerum graduum diametri nullam proportionem habet notam. Sed Indi dicunt: si quis sciret radicem numerorum recta radice carentium invenire, ille faciliter inveniret quanta esset diameter respectu circumferentiae. Et sic secundum eos: si diameter fuerit unitas, circumferentia erit radix denarii. Et est differentia inter Indos et practicos geometriae unum minutum et plusquam 7^{a} pars unius minuti. Ex quibus patet diametrum diversimodi inveniri ex circumferentia. Et primo modo communi, ut dictum est, multiplicando circumferentiam per 7 et productum dividendo per 22. Aliter invenitur multiplicando circumferentiam per seipsam et dividendo productum per 10 et numeri ex divisione provenientis quaerendo radicem quae erit circuli diameter. Vel aliter invenies diametrum circuli multiplicando circumferentiam per 20000 et productum divide per 62832 et quod provenit ex hac divisione, erit diameter circuli. Sed non evenit idem numerus diametri ex istis tribus modis inveniendi. Et diversificantur isti modi inveniendi diametrum eo quod authores diversimodi imaginati sunt de proportione inter diametrum et circumferentiam. Primus autem modus est communior. Inventa autem diametro circuli quae (*fol. 84ᵛb*) est corda portionis 180 graduum et est duplex ad portionem 90 graduum. Et igitur medietas ipsius diametri erit sinus portionis 90 graduum. Similiter etiam invenies sinus ceterarum portionum. Potes enim ponere partes diametri secundum quamlibet numeri quantitatem et ex ea facere sinus quantitatem. Nam licet inter sinum et portionem nulla sit proportio proprie loquendo pro eo quod linea curva et recta non sunt eiusdem speciei, est tamen inter eos mutua relatio, quia sinus est portionis sinus et portio est sinus portio. Ideoque cum omnes sinus cuiuslibet portionis sit pars diametri circuli illius cuius ipsa portio est pars. Cum nota fuerit diameter, erit etiam sinus notus, ut patebit ex dicendis.

Tercio notandum est, quia in sequenti demonstratione saepe dicetur: multiplica talem aut talem lineam per seipsam etc. Quod idem est: aliquam lineam multiplicari per seipsam seu duci in seipsam et eam quadrari. Similiter idem est: aliquem numerum quadrari et eum multiplicari per seipsum aut duci in seipsum. Linea vero quadratur seu multiplicatur per seipsam, quando ex ea seu super eam constituitur aut describitur quadratum, cuius ipsa est unum latus. Quadratum autem est figura quattuor habens latera aequalia et quattuor angulos rectos et aequales. Latus seu costa quadrati vocatur unaquaecumque illarum quattuor linearum

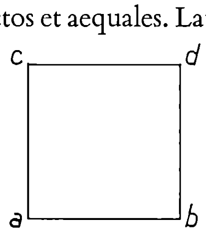

Fig. 3

continentium talem figuram. Ex data autem linea describitur quadratum secundum doctrinam 45^{tae} primi Euclidis illo modo: Sit data linea *a b* ex qua vis quadratum describere. A punctis *a* et *b* lineae *a b* educ per 11^{am} primi Euclidis lineas *a c* et *b d* perpendiculares ad lineam *a b* quae erunt aequidistantes per secundam partem 28 primi Euclidis, et pone utramque earum aequalem lineae *a b* per 2^{am} eiusdem. Deinde protrah elineam *c d* eritque ipsa aequalis et aequidistans lineae *a b* per

33^{am} primi Euclidis. Et quia uterque duorum angulorum *a* et *b* est rectus eritque uterque duorum *c* et *d* rectus per ultimam partem 29 primi Euclidis, ergo per diffinitionem figura *a b c d* est quadratum. Vel aliter sic: duc lineam *a c* perpendicularem super lineam *a b* per 7^{am} primi Euclidis et sit ei aequalis ut prius. Et a puncto *c* per 31^{am} primi Euclidis duc lineam *c d* aequidistantem lineae *a b* et ponatur ei aequalis, et duc lineam *b d* quae per 33^{am} primi Euclidis erit aequalis et aequidistans lineae *a c* et omnes anguli recti (*fol. 85*^{r}*a*) per ultimam partem 29^{ae} primi Euclidis, quare per diffinitionem habes quadratum.

Numerus vero tunc quadratur quando multiplicatur per seipsum seu ducitur in seipsum. Et sic quadratum alicuius numeri est numerus proveniens ex multiplicatione talis numeri per seipsum. Ille vero numerus sic in se ductus seu per seipsum multiplicatus dicitur radix talis quadrati. Est autem radix quadrati idem quod latus quadrati. Et ergo idem est quaerere radicem quadrati et quaerere latus tetragonicum ipsius et e converso. Latus tetragonicum dicitur illud quod si in se ducatur, constituit quadratum aequale figurae datae. Latus autem tetragonicum cuiuslibet figurae aequidistantium laterum et rectangulae quae vocatur parallellogrammum rectangulum de quibus solum est ad propositum secundum artem geometriae sic invenitur: si talis figura est quadrata, tunc quodlibet latus ipsius est latus tetragonicum. Si vero unum latus fuerit maius alio sicut est in figura *a b c d*, tunc minus latus ipsius adiunge maiori secundum rectitudinem. Sitque *b e* aequalis minori duorum laterum quod est *b c* adiuncta maiori quod est *a b* secundum rectitudinem, totam lineam *a e* divide per aequalia in puncto *f* et puncto *f* facto centro describe super lineam *a e* secundum quantitatem lineae *a f* semicirculum *a g e* et latus *c b* produc usque quo secet circumferentiam in puncto *g*, dico igitur quod quadratum lineae *b g* est aequale parallellogrammo *a b c d*; quod sufficient, probatur in commento 14^{ae} seu ultimae 2^{i} Euclidis et per consequens linea *b g* est latus tetragonicum eiusdem parallellogrammi. Qualiter autem in numeris inveniatur radix seu latus tetragonicum, patet in Algorithmo de integris et de minutijs. De hoc dicetur in notabili quinto etc.

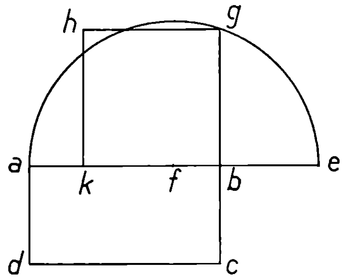

Fig. 4

Quarto notandum est, quoniam in sequenti demonstratione docebitur ut duo quadrata iungantur in unum aut quod unum minuatur ab altero etc. Quod unum quadratum iungitur altero tunc quando describitur unum quadratum aequale ambobus. Hoc autem secundum artem geometriae fit taliter: considera si unum quadratum alteri fuerit aequale, tunc enim quadra diametrum unius eorum et habebis propositum scilicet unum quadratum aequipollens duobus. Unde per 46^{am} seu per penultimam primi Euclidis in omni triangulo (*fol. 85*^{r}*b*) rectangulo quadratum quod a latere recto angulo opposito in se ducto describitur aequum est duobus quadratis quae ex reliquis duobus lateribus conscribuntur. Sit igitur quadratum *a b c d* cuius diameter sit linea *a c*, tunc quadratum lineae *a c* quod est quadratum *a e f c* est aequale duobus quadratis duarum linearum *a b* et *b c* quae quadrata sunt *a b g h* et *b c k l*, quia igitur *a b* et *b c* latera trianguli *a b c* sunt latera eiusdem quadrati scilicet *a b c d* erit quadratum lineae *a c* quae est diameter eiusdem quadrati duplum ad quodlibet eorum et per consequens erit aequale ambobus. Si vero quadrata fuerint inaequalia quemadmodum hic sunt duo quadrata *a b c d* et *e f g h*, tunc unum coniunge alteri hoc modo: per 2^{am} primi Euclidis a dato puncto *g* duc lineam aequalem lineae *b c* propositae, quae sit linea *g k*. Item per 11^{am} eiusdem ex puncto *g* lineae *g h* trahe perpendicularem et sit ad praesens eadem linea scilicet *g k*. Quia facto subtendatur angulo *h g k* basis quae est linea *h k*. Quia igitur angulus *h g k* est rectus, patet per penultimam primi

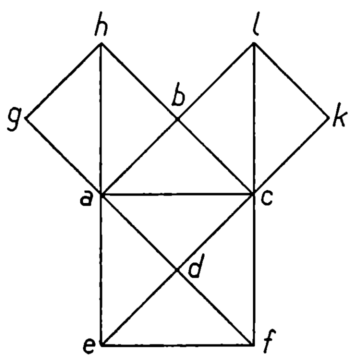

Fig. 5

quod quadratum lineae *h k* valet duo quadrata proposita. Quadra igitur lineam *h k* et sit quadratum *h k l m* illud erit aequale ambobus quadratis propositis.

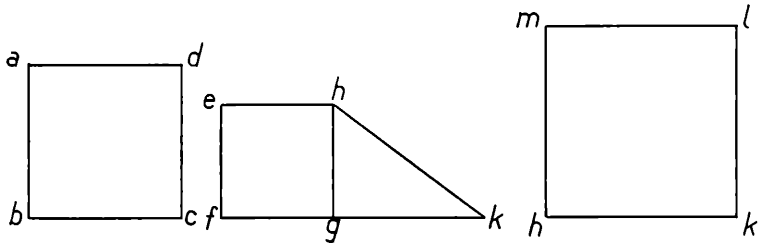

Fig. 6

Alius modus: propositis duobus quadratis sive inaequalibus sive aequalibus unum coniungitur alteri circumscribendo alterum illorum reliquo gnomonice. Et hoc fit taliter: accipe duo quadrata et sit primum *a b c d*, secundum *e f g h* ut prius. Si vis secundum circumscribere primo, protrahe lineam *c d* ultra *d* secundum quantitatem lineae *g h*. Sitque linea *d k* aequalis lineae *g h*, protrahe etiam lineam *b k*. Cum ergo angulus exterior sit rectus sicut etiam interior, erit quadratum *b k* aequale duobus quadratis scilicet quadrato *d b* et quadrato *d k* per penultimam primi Euclidis. Rescinde ergo per 3^{am} primi Euclidis lineam *c d k* ad aequalitatem lineae *b k* eritque *c l* aequalis *b k*, deinde a puncto *l* erige perpendicularem (*fol. $85^{v}a$*) aequalem lineae *c l* per 11^{am} primi Euclidis et per 2^{am} eiusdem et sit linea *l m* quae erit secundum latus quadrati. Et tunc per 31^{am} primi Euclidis duc lineam aequidistantem lineae *c l* et sibi aequalem et sit linea *m n* quae erit tertium latus quadrati. Postea coniunge *n* cum *c* et habebis quadratum *c l m n* quod est quadratum lineae *c l* et aequale quadrato lineae *b k*. Igitur per penultimam primi Euclidis quadratum *c l m n* erit aequale duobus quadratis *b d* et *d k*. Et quia quadratum primum scilicet *a b c d* remanet in propria forma, ergo illud quod additum est, quod est gnomo circumscriptus, est quantitas quadrati secundi et sic secundum quadratum est additum primo quadrato quod est propositum. Gnomo per Euclidem in 2^{o} libro geometriae sic describitur: omnis parallellogrammi spacii ea quidem quae diameter secat per medium, parallellogramma circa eandem diametrum consistere dicuntur. Eorum vero parallellogrammorum quae circa eandem diametrum consistunt quodlibet unum cum duobus supplementis gnomo nominatur. Dividatur igitur parallellogrammum *h k l m* per diametrum *h l* et in puncto *r* in diametro secent se duae lineae *n o* et *p q* aequidistantes duobus lateribus parallellogrammi *h k* et *k l*. Eritque totum parallellogrammum divisum in quattuor parallellogramma quorum duo dicuntur consistere circa diametrum illa scilicet quae diameter dividit in duos triangulos ut sunt *h n r p* et *o l q r*. Reliqua vero dicuntur supplementa scilicet *m n q r* et *k o r p*. Tria autem parallellogramma scilicet duo supplementa cum alterutro eorum, quae secantur per diametrum, gnomonem perficiunt. Duo vero supplementa per 43^{am} primi Euclidis sibi invicem sunt aequalia.

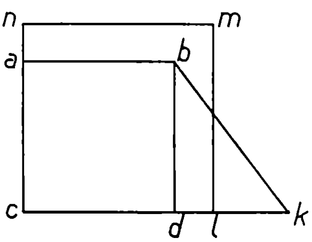

Fig. 7

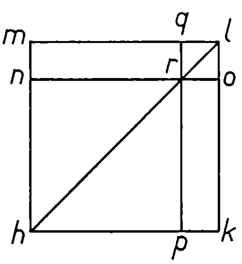

Fig. 8

In sequenti etiam demonstratione dicetur unum quadratum ab alio esse minuendum. Hoc autem per geometriam fit taliter: sit quadratum *h l k m* aequale duobus quadratis suprascriptis quemadmodum ostensum est. Subtrahe ergo ab eo quadratum *a b c d* hoc modo: abscinde per 3^{am} primi Euclidis ex linea *h m* lineam aequalem *a c* et sit linea *h n*. Item ex

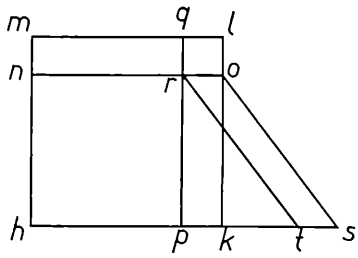

Fig. 9

linea *h k* abscinde aliam aequalem eidem *h n* et sit linea *h p*. Deinde per 31am primi Euclidis ex puncto *n* trahe lineam aequidistantem lineae *h k* et sit linea *n o*. Similiter ex puncto *p* per eandem 31am duc lineam aequidistantem lineae *k l* et sit linea *p q*. Adhuc per (*fol. 85vb*) primam petitionem Euclidis trahe lineam *h l* diagonaliter quae transit per punctum *r*. Cum igitur quadratum *h n r p* ratione compositionis figurae sit aequale quadrato *a b c d* et ipsum totale quadratum *h k l m* ex hypothesi sit aequale duobus quadratis supradescriptis patet, quod gnomo residuus erit aequalis quadrato *e f g h* et hoc est propositum.

Si vero gnomonem illum vis quadrare, primo resolve ipsum in duo parallellogramma quorum primum sit *l m n o* et secundum sit *o r p k*. Deinde cuiuslibet illorum parallellogrammorum quaere latus tetragonicum secundum doctrinam datam in notabili praecedenti. Et latus tetragonicum primi parallellogrammi sit linea *a b* et secundi linea *a c*. Deinde lineam *a c* coniunge orthogonaliter cum extremitate lineae *a b*. Postea protrahe lineam *c b* ipsamque per penultimam primi Euclidis erit latus tetragonicum amborum parallellogrammorum et per consequens totius gnomonis.

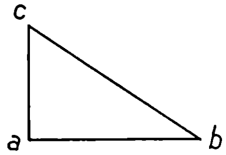

Fig. 10

Aliter et facilius invenies latus tetragonicum gnomonis residui taliter: protrahe lineam *h k* in continuum et directum quousque libuerit et tunc pone pedem circini immobilem ad punctum *o* et secundum quantitatem lineae *o n* fac circulum, vel partem circumferentiae quae secet lineam *h k* in continuum protractam in puncto *s*. Postea a puncto *r* per 31am primi Euclidis duc lineam *r t* aequidistantem lineae *o s* quae erit aequalis eiusdem per 34am primi Euclidis quia lineae *r o* et *t s* etiam sint aequidistantes. Cum igitur quadratum lineae *r t* per penultimam primi Euclidis sit aequale quadratis duarum linearum *r p* et *p t* et quadratum lineae *r p* sit subtractum a toto quadrato *h k l m* quod est aequale quadrato *o s* et per consequens quadrato *r t*, residua scilicet quadratum *p t* et gnomo praedictus erunt aequalia, quia linea *p t* erit latus tetragonicum eiusdem gnomonis quod est propositum.

Quinto notandum est, quod radicem quadratam minutiarum physicarum sic debes extrahere. Si minutiae quarum radicem vis extrahere fuerint diversae denominationes, reduc eas ad eandem denominationem aut si ibi sit una sola denominatio a numero tamen impari denominata, reduc ad minutias eiusdem denominationis a numero pari denominatas. Deinde extrahe radicem quadratam secundum artem datam in Algorithmo de integris (*fol. 86ra*) et proveniet radix quadrata numerata a numero qui post operationem provenerit et denominata a loco medio versus partem integrorum sumpto. Exempli gratia: si numerus cuius quaerebas radicem esset 2a, radix erit minuta. Et si esset quarta, radix erit secunda. Et si esset sexta, radix erit tertia et sic de aliis. Et si aliquid fuerit residuum, tunc talis numerus non fuit quadratus. Sed tu invenisti radicem quadratam cuiusdam numeri minoris propinquioris habentis radicem etc. Adhuc autem ut invenias radicem multum propinquam et praecisam alicuius numeri minutiarum paris denominationis seu reductarum ad parem denominationem seu etiam integrorum scribe istum numerum per suas differentias cui praeponas cifras quotquot volueris in numero tamen pari versus dextram et quanto plures posueris, tanto praecisius habebis radicem et tunc extrahe radicem quadratam ex toto aggregato. Et si sit aliquid residuum pro nihilo computetur. Deinde de radice, quae tibi proveniet, remove tot figuras quot erat ibi medietas cifrarum quas posuisti et depone illas figuras a primis figuris scilicet versus dextram et residuum scilicet quod remanet versus sinistram est radix quam serva ad partem et est integra, si numerus cuius radicem quaeris est integer. Si vero sint minutiae, tunc et radix erit minutiae quae erunt denominatae a loco medio versus integra, ut dictum est prius. Deinde figuras quas removisti multiplica per 60 et de eo quod provenit, remove a parte principii tot figuras quot erant medietates cifrarum quas addidisti ut prius et residuum serva cum alio residuo prius servato et erunt minuta si numerus cuius radix quaerebatur erat integer. Si vero erant minutiae, tunc illud residuum erit minutia denominaca a numero immediate sequenti denominationem radicis prius servatae, ut si radix erat minuta, numerus ille proveniens erit secunda, et si erat secunda, numerus proveniens erit tertia et sic deinceps. Deinde figuras quas ultimo removisti etiam multiplica per 60 et de numero qui provenit amove a parte principii tot figuras quot erant medietates cifrarum quas primo addidisti ut prius et residuum (*fol.* $86^{r}b$) serva cum aliis residuis et erit numerus minutiarum sequentium istam ultimam quam servasti et hoc fac toties quotiens volueris ut habeas praecise radicem in gradibus, minutis, secundis, tertiis, quartis et sic quousque tibi sufficiat.

Sexto est notandum, quod duplices sunt tabulae sinus: quaedam secundum quas diameter circuli dividitur in 300 partes aequales, quae ad voluntatem componentium vocantur minuta et sic in illis tabulis ponuntur huiusmodi minuta cum suis secundis et tertiis, quae tamen minuta non sunt eiusdem rationis cum minutis quorum quodlibet est 60^{a} pars gradus. Et in illis tabulis sinus totus seu perfectus est 150 minutorum et hic est sinus rectus quartae partis circuli sive 90 graduum et est medietas diametri quae est corda portionis 180 graduum. Aliae sunt tabulae secundum quas diameter dividitur in 120 partes quae ad bene placitum componentium vocantur gradus recti sive aequales. Et sic in illis tabulis de sinibus ponuntur gradus, minuta et secunda. Qui tamen gradus non sunt eiusdem rationis cum gradibus quorum quilibet est 30^{a} pars signi. Et in illis tabulis totus sinus rectus est 60 graduum qui est sinus 90 graduum, ad quem diameter, quae est corda 180 graduum, est duplex scilicet 120 graduum. Ex hiis patet quod duo minuta cum dimidio de primis tabulis constituunt unum gradum de tabulis secundis, et sic etiam duo secunda cum dimidio valent unum minutum et sic de aliis. Patet hoc: si 300 dividantur per 120, invenies quod cuilibet gradui ex praedictis gradibus correspondent duo minuta et 30 secunda ex praedictis minutis. Secundo patet causa diversitatis quae habebatur in quibusdam canonibus de sinibus. Quidam enim dicunt quod sinus rectus debet quandoque subtrahi de 150 minutis quae sunt totus sinus rectus et quandoque debet addi ad 150 minuta, illi enim utuntur primis tabulis. Alii vero canones dicunt quod sinus rectus debet addi ad 60 gradus, qui sunt totus sinus rectus vel subtrahi de 60 gradibus, quia illi utuntur secundis tabulis etc. His praemissis ad demonstrandam quantitatem sinus cuiuslibet portionis, pono inferius figuram, cuius talis est descriptio et communiter demonstratio. Sit circulus *a b c d* descriptus circa centrum *e* quem quadra duabus diametris videlicet lineis *a c* et *d b* orthogonaliter se intersecantibus supra centrum *e*. Sit etiam circulus *f g h* supra centrum *b* aequalis priori cuius circumferentia contingit lineam *a c* supra centrum *e*. Describe iterum circulum *i k l* supra (*fol.* $86^{v}a$) centrum *d* aequalem prioribus, cuius circumferentia etiam contingit lineam *a c* supra centrum *e*. Apparet itaque, quod circulus *a b c d* intersecat circulum *f g h* supra punctum *m* et supra punctum *n*. Deinde circulo *a b c d* inscribe hexagonum aequilaterum et aequiangulum per penultimam quarti Euclidis protrahendo duas diametros ipsius a punctis *m* et *n* in quibus ipsum intersecat circulus *f g h* quae sunt lineae *l n* et *i m* quae cum praedicta diametro scilicet *b d* dividunt circulum *a b c d* in 6 partes aequales. Coniunge ergo extremitates

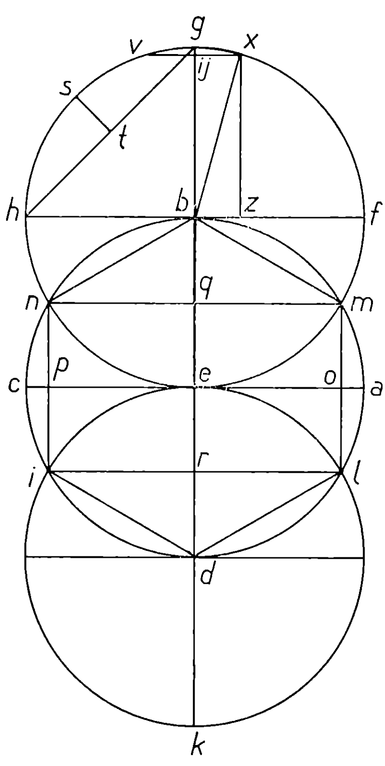

Fig. 11

praedictarum trium diametrorum sex lineis quae sunt *b m*; *m l*; *l d*; *d i*; *i n*; *n b*. Illae sex lineae continent hexagonum aequilaterum et aequiangulum. Ex quo patet quod latus hexagoni est dimidium diametri circuli cui inscribitur. Protrahe denique lineam *m n* secantem lineam *b e* in puncto *q*, similiter lineam *i l* secantem lineam *e d* in puncto *r*. Constat igitur quod portio *m b n* circuli *a b c d* est aequalis portioni *n e m* circuli *f g h*. Eadem enim linea scilicet linea *m n* abscindit eas a circulis aequalibus quare per 27am tertii Euclidis illae portiones seu arcus sunt aequales. Demonstratur etiam quod portio *m b* circuli *a b c d* est aequalis portioni *m e* circuli *f g h*, similiter quod portio *n b* est aequalis portioni *n e*. Est enim linea *e b* aequalis lineae *e m* quia sunt semidiametri circuli *a b c d*. Similiter linea *m b* est aequalis lineae *b n* quia sunt semidiametri circuli *f g h*. Item quattuor lineae *n e* et *e m* et *b m* et *b n* sunt sibi invicem aequales quia sunt aequales lineae *e b* et illae sunt quattuor cordae circulorum aequalium quare per eandem 27 tertii arcus quod resecant sunt aequales. Patet etiam quod linea *m n* dividit lineam *e b* in duo media in puncto *q* et e contra. Sunt enim duo latera *e m* et *b m* trianguli *e m b* aequalia duobus lateribus *e n* et *n b* trianguli *e n b* et basis *e b* est communis utrique triangulo quare per 8am primi Euclidis angulus *e m b* est aequalis angulo *b n e* et angulus *m b e* est aequalis angulo *n b e*, et angulus *m e b* est aequalis angulo *n e b*. Similiter duo latera *m b* et *b n* trianguli *n b m* sunt aequalia duobus lateribus *n e* et *e m* trianguli *n e m* (*fol. 86*v*b*) et basis *m n* est communis utrique quare per 8am primi Euclidis angulus *m b n* est aequalis angulo *n e m* et angulus *b m n* est aequalis angulo *e m n* et angulus *b n m* aequalis angulo *e n m*. Rursus capiantur duo trianguli *b m q* et *e m q*, tunc linea *q m* est latus utriusque et angulus *b m q* est aequalis angulo *e m q* et angulus *m b q* est aequalis angulo *m e q* ut iam probatum est, quare per 26am primi Euclidis angulus circa *q* unius trianguli est aequalis angulo alterius et linea *b q* erit aequalis lineae *e q*, igitur linea *b e* in puncto *q* est divisa in duo aequalia. Eodem modo capiantur duo trianguli *m b q* et *n b q*, tunc latus *b q* est commune utrique et angulus *m b q* est aequalis angulo *n b q* et angulus *b m q* est aequalis angulo *b n q*, quare per 26am primi Euclidis angulus *q* unius est aequalis angulo *q* alterius et lineae *m q* est aequalis linea *n q*, igitur linea *m n* in puncto *q* etiam est divisa per aequalia. Linea quoque *i l* dividit lineam *e d* supra punctum *r* in partes aequales et e converso linea *e d* lineam *i l* quod eodem modo potest probari sicut probatum est de lineis *b e* et *m n* quare unaquaeque linea scilicet *r d* et *e r* est aequalis lineae *e q*, igitur linea *q r* est aequalis semidiametro circuli et est aequalis lineae *n b* et lineae *m l*. Erit ergo portio *n b* et portio *m l* aequalis portioni *n i* per 27am tertii Euclidis, quia earum cordae sunt aequales inter se; et portio *i d* aequalis portioni *d l*. Manifestum igitur est circulum *a b c d* in sex portiones aequales esse divisum et uniuscuiusque illius portionis cordam esse aequalem semidiametro eiusdem. Patet etiam quod linea *n q* est aequalis lineae *p e*, similiter linea *n p* est aequalis lineae *q e* quod sic probatur: linea *q e* cadit super duas lineas *n q* et *p e* et facit cum eis ex eadem parte duos angulos intrinsecos rectos per hypothesim quare per secundam partem 28ae primi Euclidis lineae *q n* et *e p* sunt aequidistantes. Similiter linea *n q* cadens super duas lineas *n p* et *q e* causat cum eis duos angulos intrinsecos rectos, quare per eandem 28am primi Euclidis lineae *q e* et *n p* sunt aequidistantes. Erit igitur superficies *e q n p* aequidistantium laterum quare per 34am primi Euclidis habet latera et angulos ex opposito collocatos aequales, igitur linea *n q* est aequalis lineae *e p* et linea *n p* est aequalis lineae *q e*. Linea vero *q e* est medietas lineae *e b*, ut prius probatum est, quare est quarta pars diametri circuli, igitur et linea *n p* quae est sinus rectus arcus *n c* est quarta pars diametri ipsius circuli. Arcus vero *n c* est dimidium (*fol. 87*r*a*) sextae partis circuli. Similiter portio *a m* est dimidium sextae partis circuli. Linea enim *o m* est aequalis lineae *o l* et linea *p n* aequalis lineae *p i* ex prius dictis, quare et arcus *a m* et *a l* eis correspondentes. Similiter arcus *n c* et *c i* sunt aequales, sed arcus *l a m* est sexta pars circuli, similiter arcus *n c i*; ergo portio *a m*, similiter portio seu arcus *n c* est dimidium sextae partis circuli, quare quaelibet earum est 12a pars circuli id est triginta graduum, igitur quarta pars diametri, sicut est linea *n p*, est sinus rectus portionis triginta graduum, hoc est duarum cardagarum. Est etiam manifestum, quod linea *n q* est sinus rectus arcus *n b*, qui est 60 graduum, et est medietas lineae *m n* quae est corda portionis *m b n* quae est portio 120 graduum. Quantitatem autem istius sinus sic invenies: sinum triginta graduum scilicet lineam *n p* multiplica per seipsam et productum ex illa multiplicatione proveniens subtrahe a sinu toto in se multiplicato et remanebit quadratum sinus 60 graduum, cuius latus seu radix erit sinus portionis seu arcus 60 graduum. Quod sic probatur: capias triangulum *e n q*, illius trianguli angulus *e q n* est rectus per hypothesim, ergo per penultimam primi Euclidis quadratum quod a latere *e n* huic angulo opposito in se ducto describitur est aequale duobus quadratis quae ex reliquis duobus lateribus scilicet *n q* et *q e* describuntur. Subtracto igitur quadrato lineae *q e* quae est sinus portionis 30 graduum a quadrato lineae *e n* quae est sinus totus remanebit quadratum lineae *n q* cuius radix seu latus est ipsa linea scilicet linea *n q* et illa est sinus arcus *n b* qui est 60 graduum, hoc est quattuor cardagarum. Postea in circulo *f g h* protrahe diametrum *f b h* intersecantem diametrum *e b g* orthogonaliter in puncto *b*. Protrahe etiam lineam *g h* quam divide in duo aequalia in puncto *t* per 11^am^ primi Euclidis, divide etiam arcum *g h* per aequalia per 29^am^ tertii Euclidis. Protracta linea *s t* constat quod arcus *g s h* est 90 graduum, quia est quarta pars circuli et eius corda est linea *g t h*, cuius medietas est linea *h t*, quae est sinus arcus *h s* qui est 45 graduum. Illius autem sinus quantitatem sic invenies: multiplica totum sinum seu semidiametrum circuli per seipsum et proveniet quadratum illius semidiametri et postea quadratum illud dupla et proveniet quadratum lineae *h g* cuius radicem quaere quae erit corda portionis 90 graduum scilicet linea *g h* (*fol. 87^r^b*) cuius medietas scilicet linea *h t* est sinus portionis *h s* quae est 45 graduum. Et hoc probatur sic: trianguli *h b g* angulus *b* est rectus, quare per penultimam primi Euclidis quadratum lineae *h g* est aequale quadratis duarum linearum *h b* et *b g*. Sed lineae *h b* et *b g* sunt aequales, quia sunt semidiametri circuli *f g h*, igitur quadrata earum sunt aequalia et per consequens quadratum lineae *h g* est duplum ad quadratum *b g*. Si igitur semidiametrum *b g* multiplicas per seipsum habebis quadratum ipsius quod dupla et habebis quadratum lineae *h g* cuius radix seu latus est ipsamet linea *h g* quae est corda arcus *h g* qui est 90 graduum. Et eius medietas scilicet linea *h t* est sinus portionis *h s* quae est 45 graduum id est trium cardagarum. Patet etiam ex dictis quod portio *a m* est dimidium sextae partis circuli id est 30 graduum. Cordae autem illius portionis quantitatem taliter invenies: protracta enim corda *a m* subtrahe sinum portionis 60 graduum scilicet lineam *e o* aequalem lineae *q m* de semidiametro *a e* (*fol. 87^v^a*) et remanebit linea *a o*. Deinde eandem lineam *a o* quadra, postea lineam *o m* quae est sinus portionis 30 graduum etiam quadra et tunc illa duo quadrata iunge simul et summae collectae radix erit quantitas cordae *a m* quae est corda portionis 30 graduum. Quod sic probatur: trianguli *a o m* angulus *o* est rectus quare per penultimam primi Euclidis quadratum lineae *a m* est aequale quadratis duarum linearum *a o* et *o m*, simul iunctis igitur illis duobus quadratis proveniet quadratum lineae *a m* cuius radix seu latus est ipsamet linea *a m* quae est corda portionis 30 graduum cuius medietas est sinus 15 graduum, hoc est unius cardagae. Postea in circulo *f g h* accipe portionem 30 graduum aequalem portioni *a m* quae sit arcus *v g x* cuius medietas quae est 15 graduum sit arcus *g v* et alia medietas sit arcus *g x*. Protracta igitur linea *v x* ipsa erit corda portionis 30 graduum et eius medietas scilicet linea *y x* est sinus portionis circuli *x g* quae est 15 graduum. Igitur ex hoc manifestum est quod portio circuli *x f* (*fol. 87^v^b*) est 75 graduum, portio enim *f g* est 90 graduum. Deposita ergo ab ea portione *g x* quae est 15 graduum, residuum scilicet portio *x f* erit 75 graduum. Protrahe igitur per 31^am^ primi Euclidis lineam *x z* aequidistantem lineae *b g*, illa erit sinus portionis *x f* cuius quantitatem sic invenies: protrahe lineam *b x*, illa erit aequalis sinui toti cum sit semidiameter circuli. Quadra ergo sinum totum seu semidiametrum, quadra etiam lineam *x y* quae est sinus portionis 15 graduum. Postea quadratum lineae *x y* subtrahe a quadrato semidiametri scilicet lineae *b x* et residui quaere radicem quae radix erit sinus portionis 75 graduum et hic est linea *y b* quae est aequalis lineae *x z* quae est sinus portionis *f x* quae est 75 graduum. Hoc autem probatur sic: lineae *g b* et *x z* sunt aequidistantes super quas cadit linea *b z*, quia igitur duo anguli *g b z* et *x z b* sunt recti per tertiam partem 29^ae^ primi Euclidis, sunt enim duo anguli intrinseci inter duas lineas aequidistantes ex eadem parte sumpti et angulus *g b z* est rectus, igitur et angulus *x z b* erit rectus. Protracta autem linea *x b* causatur triangulus *x b z* cuius angulus *z* est rectus, quare per penultimam primi Euclidis quadratum lineae *x b* est aequale quadratis duarum linearum *x z* et *b z*, minue igitur quadratum *z b* a quadrato lineae *b x* et remanebit quadratum lineae *x z*. Eodem modo potest probari per triangulum *b x y* quod subtracto quadrato lineae *x y* quae est sinus portionis 15 graduum a quadrato lineae *b x* remanebit quadratum lineae *y b* quae est aequalis lineae *z x*. Latus ergo seu radix talis quadrati est ipsamet linea *y b* aut linea *x z* et illa est sinus portionis 75 graduum id est quinque cardagarum et est dimidium cordae portionis 150 graduum.

Pro maiori fundamento et declaratione praedictorum ea quae geometrice demonstrata sunt volo per practicam in numeris ostendere. Cum enim positum sit quod secundum unum modum diameter circuli sit divisa in 120 partes quae vocantur gradus, erit semidiameter circuli quae est sinus totus medietas illarum partium scilicet 60 graduum et hic est sinus portionis 90 graduum. Et superius demonstratum est quod linea *q e* est quarta pars diametri cui est aequalis linea *n p* quae est sinus rectus portionis *n c* quae est 30 graduum, igitur sinus portionis 30 graduum scilicet linea *n p* est quarta pars diametri hoc est 30 graduum de gradibus eiusdem diametri et est dimidium lineae *n i* quae est corda arcus *n c i* qui est 60 graduum. Deinde demonstratum est quod quantitas lineae *n q* quae est sinus (*fol. 88ʳa*) rectus portionis *n b* quae est 60 graduum invenitur subtrahendo quadratum lineae *e q* quae est sinus portionis 30 graduum a quadrato semidiametri *e n* et residui quaerendo radicem. Quadra igitur semidiametrum seu sinum totum qui est 60 graduum et productum eius seu quadratum erit 3600 gradus quod quadratum serva. Quadra etiam lineam *e q* quae est sinus portionis 30 graduum et continet 30 gradus de partibus diametri ut praedictum est et productum seu quadratum ipsius erit 900 gradus et tunc illud quadratum subtrahe a quadrato semidiametri prius servato et remanebunt 2700 gradus qui erunt quadratum lineae *n q* et illius quadrati quaere radicem quadratam secundum doctrinam datam in notabili quinto. Primo enim sibi praepone octo cifras et tunc a producto extrahe radicem et fac consequenter secundum doctrinam ibi datam et habebis radicem quae erit 51 gradus, 57 minuta, 41 secunda et 24 tertia et illa radix est quantitas lineae *n q* quae est sinus rectus portionis *n b* quae est 60 graduum. Postea demonstratum est quod quantitas lineae *h g* quae est corda portionis 90 graduum scilicet portionis *h s g* invenitur duplando quadratum semidiametri et producti quaerendo radicem. Accipe ergo quadratum semidiametri *b g* quod quadratum est 3600 graduum ut dictum est et illud quadratum dupla et proveniunt 7200 gradus qui sunt quadratum lineae *h g* cuius quadrati quaere radicem secundum modum prius dictum quae radix erit 84 graduum 51 minuta et 10 secunda et illa radix est corda portionis 90 graduum scilicet portionis *h s g* et eius medietas est 42 graduum 25 minuta et 35 secunda et est sinus portionis *h s* quae est 45 graduum. Post hoc probatum est, quod quantitas lineae *a m* quae est corda portionis 30 graduum invenitur subtrahendo primo lineam *e o* quae est sinus portionis 60 graduum de semidiametro *e a* et residui scilicet lineae *a o* quadratum iungendo ad quadratum lineae *o m* quae est sinus portionis triginta graduum. Accipe igitur sinum portionis 60 graduum qui est 51 gradus 57 minuta et 42 secunda et ipsum subtrahe a semidiametro seu toto sinu qui est 60 graduum et remanebunt 8 gradus 2 minuta et 18 secunda quae reduc ad secunda si vis praecise operari et proveniunt 28938 secunda quae multiplica per semetipsam et provenient 837407844 quarta quae sunt quadratum illius residui scilicet lineae *a o*, deinde accipe quadratum sinus portionis 30 graduum quod est 900 gradus ut ex prohabitis patet (*fol. 88ʳb*) et hoc quadratum reduc ad consimilem denominatorem cum alio quadrato scilicet ad quarta et provenient 11664000000 quarta. Postea illa duo quadrata iunge simul et provenient 12501407844 quarta quibus praeponas adhuc quattuor cyfras et aggregati quaere radicem et illa erit 111809 secunda et 41 tertia quae reduc ad fractiones grossiores et provenient 31 gradus 3 minuta 29 secunda et 41 tertia quae sunt corda portionis triginta graduum scilicet linea *a m* quorum medietas est 15 gradus 31 minuta 44 secunda et 50 tertia et illa sunt sinus rectus portionis 15 graduum. Demum ostensum est, quod quantitas lineae *x z* quae est sinus portionis 75 graduum scilicet portionis *f x*, invenitur subtrahendo quadratum lineae *y x* quae est sinus portionis 15 graduum a quadrato totius semidiametri scilicet lineae *b x*. Accipe ergo sinum portionis 15 graduum qui est 15 gradus 31 minuta 45 secunda, quae reduc ad eandem denominationem scilicet ad secunda et provenient 55905 secunda et illa multiplica per seipsam et provenient 3125369025 quarta quae sunt quadratum lineae *y x* quae est sinus rectus portionis quindecim graduum scilicet portionis *g x* et illud quadratum serva. Accipe deinde sinum totum qui est 60 graduum et illum etiam reduc ad secunda et provenient 216000 secunda quae etiam multiplica per seipsam et provenient 46656000000 quarta quae sunt quadratum totius sinus. Postea ab isto quadrato subtrahe quadratum lineae *y x* prius servatum et remanebunt 43530630975 quarta et illa erunt quadratum lineae *y b* vel *x z* et illius quadrati quaere radicem. Primo enim praepone sibi quattuor cifras et tunc quaere radicem ipsius quae erit 208639 secunda et 57 tertia quae reducta ad fractiones grossiores faciunt 57 gradus 57 minuta 19 secunda et 57 tertia et illa sunt sinus portionis *x f* quae est 75 graduum.

Consimiliter ostenditur hoc idem secundum aliam divisionem diametri. Cum namque positum sit diametrum secundum unam eius divisionem esse 300 minutorum, erit semidiameter seu sinus totus medietas eorum scilicet 150 minuta. Similiter quaelibet corda portionis 60 graduum erit 150 minutorum et eius medietas scilicet 75 minuta erit sinus portionis 30 graduum, hoc est duarum cardagarum. Deinde ad habendum sinum portionis 60 graduum quadra sinum totum scilicet 150 minuta et productum seu quadratum eius erit 22500 secunda quod quadratum serva. Similiter quadra sinum portionis (*fol. 88ᵛa*) 30 graduum scilicet 75 minuta et quadratum hoc erit 5625 secunda et tunc illud quadratum subtrahe a quadrato totius sinus iam habito et remanent 16875 secunda et illius residui quaere radicem quae erit 129 minuta 54 secunda et 13 tertia 41 quarta et illa est sinus portionis 60 graduum, hoc est quattuor cardagarum et est dimidium cordae 120 graduum. Postea ad habendum sinum portionis 45 graduum dupla quadratum totius sinus prius habitum scilicet 22500 secunda et provenient 45000 secunda de quibus extrahe radicem quae erit 212 minuta 7 sesunda et 55 tertia quae sunt corda portionis 90 graduum cuius medietas est 106 minuta 3 secunda et 57 tertia et haec est sinus portionis 45 graduum id est trium cardagarum. Post hoc ad habendum sinum portionis 15 graduum subtrahe primo sinum portionis 60 graduum scilicet 129 minuta 54 secunda et 14 tertia de toto sinu scilicet de 150 minutis et remanebunt 20 minuta 5 secunda et 46 tertia et illud residuum reduc ad tertia et proveniunt 72346 tertia et tunc illud residuum sic reductum quadra et proveniunt 5233943716 sexta et illud quadratum serva. Deinde quadratum sinus portionis 30 graduum prius habitum scilicet 5625 secunda reduc etiam ad eandem denominationem cum alio quadrato scilicet ad sexta et evenit hoc quadratum 72900000000 sexta. Postea illa duo quadrata iunge simul et provenient 78133943716 sexta quorum quaere radicem et illa erit 279524 tertia quae reducta ad grossiores fractiones facit 77 minuta 38 secunda et 44 tertia quae sunt corda portionis 30 graduum cuius cordae medietas est 38 minuta 49 secunda et 22 tertia et illa est sinus portionis 15 graduum id est primae cardagae. Demum ad habendum sinum portionis 75 graduum primo sinum portionis 15 graduum iam inventum scilicet 38 minuta 49 secunda et 22 tertia reduc ad eandem denominationem scilicet ad tertia et proveniunt 139762 tertia et hoc productum quadra et eius quadratum erit 19533416644 sexta quod quadratum serva. Deinde quadratum totius sinus prius habitum scilicet 22500 secunda reduc etiam ad eandem denominationem cum priori quadrato scilicet ad sexta et provenient 291600000000 sexta. Vel aliter totum sinum scilicet 150 minuta reduc ad tertia et provenient 540000 tertia et hoc productum quadra et proveniet idem scilicet quadratum totius sinus reductum (*fol. 88ᵛb*) ad sexta. Postea ab isto quadrato totius sinus subtrahe quadratum sinus 15 graduum prius servatum et post subtractionem remanent 272066583356 sexta et tunc illius residui quaere radicem quae erit 521600 tertia et illa reducta ad fractiones grossiores 144 minuta 53 secunda et 20 tertia quae est sinus portionis 75 graduum hoc est 5 cardagarum et est dimidium cordae portionis 150 graduum. Hiis habitis minue sinum 15 graduum id est primae cardagae de sinu triginta graduum et residuum erit sinus cardagae secundae. Deinde subtrahe sinum duarum cardagarum a sinu trium cardagarum et remanebit sinus tertiae cardagae. Postea minue sinum trium cardagarum de sinu 60 graduum et remanebit sinus quartae cardagae. Depone etiam sinum 4 cardagarum de sinu 5 cardagarum et residuum erit sinus quintae cardagae. Deme quoque sinum quinque cardagarum de toto sinu et numerus remanens erit sinus sextae cardagae. Ex hiis igitur quae dicta sunt manifesta est quantitas tam sinus recti quam versi cuiuslibet cardagae et quarumlibet simul sumptarum quia sinus rectus primae cardagae est sinus versus sextae cardagae et sinus rectus secundae est sinus versus quintae. Item sinus rectus duarum cardagarum scilicet primae et secundae est sinus versus duarum ultimarum scilicet quintae et sextae et sinus versus duarum primarum est sinus rectus duarum ultimarum. Item sinus rectus tertiae cardagae est sinus versus quartae et sinus versus tertiae est sinus rectus quartae. Similiter sinus rectus trium primarum cardagarum est sinus versus trium ultimarum et sinus versus trium primarum est sinus rectus trium ultimarum. Haec siquidem sunt sex cardagae genera quarum introducta est haec demonstratio.

Prima tabula sinus					Secunda tabula sinus				
Arcus		Sinus			Arcus		Sinus		
g^a	m^a	m^a	2^a	3^a	g^r	m^a	g^r	m^a	2^a
3	45	9	48	38	3	45	3	55	26
7	30	20	9	25	7	30	7	49	53
11	15	29	16	26	11	15	11	42	18
15	0	38	49	22	15	0	15	31	44
22	30	57	24	2	22	30	22	57	39
30	0	75	0	0	30	0	30	0	0
37	30	91	18	38	37	30	36	31	32
45	0	106	3	57	45	0	42	25	35
52	30	119	0	3	52	30	47	36	4
60	0	129	54	14	60	0	51	57	42
67	30	138	34	36	67	30	55	25	58
75	0	144	53	20	75	0	57	57	20
78	45	147	6	50	78	45	58	50	47
82	30	148	42	40	82	30	59	29	12
86	15	149	40	29	86	15	59	52	15
90	0	150	0	0	90	0	60	0	0

Si autem volueris invenire sinum secundum minores circuli portiones sinum sextae cardagae multiplica per sinum 30 graduum et numeri inde producti quaere radicem quae erit sinus 7 graduum et dimidii scilicet 30 minutorum. Deinde eundem sinum 7 graduum et dimidii in se multiplicatum subtrahe de toto sinu in se multiplicato et numeri remanentis radix erit sinus 82 graduum (*fol. 89^{r}a*) et dimidii. Postea sinum 82 graduum et dimidii minue de toto sinu et residuum multiplica per sinum 30 graduum et numeri ex inde proveniente radix erit sinus 3 graduum et 45 minutorum. Deinde quadratum illius sinus trium graduum et 45 minutorum subtrahe de quadrato totius sinus et radix numeri residui erit sinus 86 graduum et quartae unius id est 15 minutorum. Post hoc subtrahe sinum 45 graduum de toto sinu et residuum multiplica per sinum 30 graduum et summae inde collectae radix erit sinus 22 graduum et dimidii. Deinde quadratum illius sinus scilicet 22 graduum et dimidii minue de quadrato totius sinus et radix numeri remanentis erit sinus 67 graduum et dimidii. Postea illum sinum 67 graduum et dimidii subtrahe de toto sinu et numerum remanentem multiplica per sinum 30 graduum et numeri inde excrescentis radix erit sinus 11 graduum et 15 minutorum. Deinde quadratum illius sinus scilicet 11 graduum et 15 minutorum subtrahe a quadrato totius sinus et radix numeri residui erit sinus 78 graduum et 45 minutorum. Post hoc minue sinum 15 graduum de toto sinu et residuum multiplica per sinum 30 graduum et numeri ex inde producti radix erit sinus 37 graduum et dimidii. Deinde quadratum eiusdem sinus subtrahe a quadrato totius sinus et radix residui erit sinus 52 graduum et dimidii. Eodem modo fit in universis circuli partibus usque ad minutissimas circuli portiones et pro exemplo praedictorum ponuntur hic duae parvae tabulae in quibus continentur sinus illorum (*fol. 89^{r}b*) arcuum de quibus in praemissis facta est mentio. In prima namque tabula ponuntur sinus eorum prout diameter circuli dividitur in 300 minuta et ibi sinus totus est 150 minuta. In secunda vero tabula ponuntur sinus prout diameter circuli dividitur in 120 gradus et ibi sinus totus est 60 gradus. Sed in fine illius tractatus ponuntur duae tabulae et duae figurae in quibus continentur sinus recti et versi singularum cardagarum et post hoc ponuntur duae tabulae de sinibus ad singulos gradus usque ad 90 gradus et in illis etiam habentur sinus secundum ambas divisiones diametri de quibus est facta mentio superius in quinto notabili.

Cum vero cuiuscumque arcus sinum rectum sive aequalem scire volueris, accipe arcum qui est ab initio arietis usque in punctum quem volueris et illum voca argumentum per quod invenies quod quaeris. Si fuerit minus tribus signis, operaberis cum eo. Si vero fuerit a tribus signis in 6 signa, tolle ab eo tria signa et operare cum reliquo. Si autem fuerit a 6 signis in 9 signa, de eo subtrahe sex signa et cum arcu residuo facias opus. Sed si fuerit a novem signis in 12 signa, subtrahe ab eo 9 signa et cum residuo operare hoc modo. In prima tabula seu figura cardagarum pro quolibet signo quod fuerit in argumento accipe minuta, secunda et tertia duabus cardagis correspondentia et pro 15 gradibus argumenti minuta, secunda et tertia cardagae sequentis et quod in argumento remanebit minus quam 15 gradus reduc in minuta multiplicando gradus argumenti per 60 et producto adde minuta si qua fuerint ultra gradus in argumento. Reduc etiam minuta, secunda et tertia cardagae imperfectae ad unam denominationem scilicet ad tertia et illud productum multiplica per minuta argumento correspondentia et post multiplicationem proveniunt quarta quae divide per 900 minuta, quia 900 minuta faciunt 15 gradus et sic tot minuta sunt minuta unius cardagae et post divisionem exibunt tertia quae reduc e contra ad fractiones grossiores et minuta, secunda et tertia quae proveniunt adde universitati minutorum etc. sinus cardagarum perfectarum. Si autem post divisionem aliquid remanserit, illud divide per 15 et exibunt quarta quae adde minutis, secundis et tertiis prius habitis si placet et sic habebis sinum rectum seu aequalem arcus sive portionis quae quaesivisti. Eodem modo facias in secunda tabula seu figura cardagarum. Primo enim recipe gradus, minuta et secunda cardagis imperfectis correspondentia quae reduc ad secunda. Deinde gradus et minuta argumenti ultra gradus cardagarum perfectarum scilicet quae sunt infra 15 gradus reduc ad minuta et tunc per illa minuta multiplica secunda cardagis imperfectis correspondentia et productum divide per 900 minuta et proveniunt secunda quae reduc ad fractiones (*fol. 89^{v}a*) grossiores et sic iterum habebis sinum rectum arcus quae quaesivisti.

Et si volueris alicuius arcus scire sinum versum, operaberis omnino ut dictum est, sed ordine retrogrado. Incipies enim a novissima cardagarum et redibis ad primam, quia sinus versus sextae cardagae est eiusdem quantitatis cum sinu recto primae cardagae. Et sinus versus primae cardagae est eiusdem quantitatis cum sinu recto sextae et sic de ceteris per ordinem. Sciendum autem quod cum quaesieris sinum versum et cum fuerit argumentum a tribus signis in sex, accipias pro tribus signis argumenti sinum totum qui est medietas diametri et arcus residui scilicet qui est in argumento ultra tria signa summas sinum aequalem ut praehibitum est, qui duo simul iuncti faciunt eiusdem argumenti sinum versum et non invenies in sinu verso arcum maiorem sex signis nec in sinu aequali maiorem tribus signis. Figurae sequentes sunt scriptae pro exemplo sensibili et litterae in eisdem positae sunt ut arcus et cordas sive sinus possis suis nominibus appellare et numeri appositi denominant quantitates sinuum prout in tabulis sunt positi, licet in tabulis praecisius ponantur ut patet advertenti.

Si autem per sinum volueris invenire portionem ipsius, praemissi canonis doctrinam converte hoc modo. De sinu dato subtrahe minuta etc. primae cardagae correspondentia et pro eis accipe 15 gradus in arcu et tunc de eo quod ex sinu dato remanserit subtrahe minuta etc. secundae cardagae correspondentia et pro illis alios 15 gradus in arcu summe et ita facias in omnes cardagas. Et si ex sinu dato remanserint minuta non perficientia cardagam multiplica ea per 15 et numerum excrescentem divide per minuta etc. quae debentur toti cardagae imperfectae et exibunt gradus quos adde illis quos prius collegisti. Quod autem post divisionem remanserit, multiplica per 60 et numerum excrescentem divide per idem quod prius scilicet per minuta etc. cardagae imperfectae et exibunt minuta. Et quod collectum fuerit ex gradibus et minutis, hoc erit portio aequalis dati sinus. Si vero volueris habere portionem versam, facias omnino similiter, sed ordine retrogrado scilicet incipiendo ab ultima cardagarum redeundo ad primam sicut dictum est prius. Dicitur autem portio versa respectu sinus versi sicut aequalis respectu sinus aequalis quamvis utriusque sinus eadem sit portio secundum rem. Ea autem quae in praesenti canone dicta sunt, intelligantur de prima tabula cardagarum. In secunda vero tabula eadem est operatio nisi quod in eadem (*fol. 89ᵛb*) recipiuntur gradus, minuta et secunda cardagis correspondentia, ubi in prima accipiuntur minuta, secunda vel tertia ipsis correspondentia et semper post multiplicationem seu divisionem unius numeri per alium considera diligenter numeri provenientis denominationem secundum artem datam alibi de fractionibus et earum per se invicem multiplicationibus et divisionibus etc.

Cum autem arcus propositi sinum rectum volueris per tabulas invenire, si in arcu proposito fuerint aliqua signa, resolve ea in gradus et si gradus illi fuerint pauciores 180 gradibus, intra cum eis aliquarum tabularum sinus quamcumque volueris. Si vero fuerint plures 180 gradibus, subtrahe ab eis 180 gradus et cum residuo intra, quaere ergo arcum istum in una tabularum illarum secundum quam operari volueris. Et si eum praecise inveneris in linea numeri, habebis in directo ipsius sinum rectum sibi correspondentem. Si vero arcum propositum non praecise inveneris, quod contingit quando in ipso fuerint gradus et minuta, tunc intra primo cum numero graduum propositorum et accipe sinum quem in directo eius inveneris et eum serva. Deinde intra cum numero graduum maiori propinquiori et accipe etiam sinum in directo eius inventum. Deinde scias differentiam quae est inter primum sinum et secundum subtrahendo minorem a maiori de qua differentia accipe partem proportionalem secundum proportionem minutorum et aliarum fractionum in arcu contentorum ad 60 minuta quam partem proportionalem adde ad sinum primo acceptum si secundus fuerit maior vel ab eo subtrahe si secundus fuerit minor et quod post subtractionem vel additionem proveneris, erit sinus rectus arcus propositi. Si vero volueris sinum versum arcus propositi habere, considera utrum arcus propositus sit minor 90 gradibus vel maior. Si fuerit minor, subtrahe ipsum a 90 gradibus et residui scias sinum rectum quem subtrahe de toto sinu scilicet de 150 minutis, si operaris per primam tabulam vel de 60 gradibus si operaris per secundam tabulam et quod post subtractionem remanserit, erit sinus versus arcus propositi. Si vero arcus propositus fuerit maior 90 gradibus, recipe primo pro 90 gradibus totum sinum rectum scilicet 150 minuta secundum primam tabulam vel 60 gradus secundum aliam et residui scilicet quod est ultra 90 gradus accipe sinum rectum ex eadem tabula ex qua recepisti sinum totum et illum sinum rectum adde ad totum sinum prius receptum et quod provenerit, erit sinus versus arcus propositi.

Si autem cuiuslibet sinus volueris arcum invenire, si sinus propositus fuerit rectus, quaere ipsum in tabula sinus in qua volueris et si eum praecise inveneris, tunc in directo ipsius (*fol. 90ᵛa*) versus sinistram scilicet in linea numeri habetur arcus istius sinus. Si vero sinum propositum non inveneris praecise, accipe primo sinum minorem propinquiorem in tabula inventum et arcum in directo ipsius exeuntem in linea numeri serva. Deinde accipe sinum maiorem propinquiorem in tabula inventum et tunc subtrahe sinum minorem in tabula inventum de sinu maiore etiam in tabula invento et habebis differentiam inter illos duos sinus quam differentiam etiam serva. Postea subtrahe sinum minorem in tabula inventum a sinu primo proposito et habebis etiam differentiam illorum, quam differentiam multiplica per 60 minuta et tunc productum divide per differentiam prius servatam scilicet quae est inter sinum minorem primo inventum et maiorem secundo inventum in tabula. Et tunc in quotiente proveniunt minuta quae adde cum arcu prius servato, et si fuerit residuum, illud iterum multiplica per 60 et productum divide per idem quod prius et tunc in quotiente proveniunt secunda quae adde cum gradibus et minutis prius habitis et proveniet arcus sinus propositi. Si vero sinus propositus fuerit versus et si fuerit minor toto sinu scilicet 150 minutis vel 60 gradibus, tunc subtrahe ipsum de toto sinu scilicet de 150 minutis, si operaris per primam tabulam vel de 60 gradibus, si operaris per secundam tabulam et residui quaere arcum, ut iam dictum est et hunc arcum subtrahe de 90 gradibus et remanebit arcus illius sinus versi. Si autem sinus versus fuerit maior toto sinu scilicet 150 minutis vel 60 gradibus, tunc subtrahe ab eo totum sinum scilicet 150 minuta vel 60 gradus secundum exigentiam tabulae per quam operaris et residui quaere arcum, ut prius dictum est quem arcum adde ad 90 gradus qui sunt arcus totius sinus et habebis illius sinus versi arcum seu portionem.

Si vero alicuius arcus propositi volueris cordam perfectam invenire, tunc arcum propositum media et ipsius medietatis scias sinum rectum quem sinum dupla et duplatum est corda perfecta arcus propositi. Cum autem e converso cordae perfectae propositae volueris arcum invenire, cordam propositam media et illius medietatis scias arcum quem arcum dupla et duplatum est arcus illius cordae perfectae. Et haec de sinibus et suis arcubus sufficiant.

Explicit tractatus de sinibus et arcubus eorum compositus Wyenne per magistrum Iohannem de Gmunden et finitus per eundem in vigilia sancti Mathei apostoli et evangelisti anno domini 1437

(*fol. 90ʳa*) Prima tabula cardagarum sinus
Tabula Azarchelis de sinibus
(siehe S. 96)

(*fol. 90ʳb*) Secunda tabula cardagarum sinus
Tabula Ptholomei de sinibus.
(siehe S. 97)

(*fol. 91ʳa*)* Licet in praecedenti tractatu diffuse scriptum sit et ostensum qualiter cuiuslibet cardagae ac eciam aliorum arcuum minorum sinus debeat inveniri secundum sinam Arzachelis qua ponit in fine suorum Canonum super tabulas toletanas, volo tamen in praesenti tractatu ostendere et demonstrare qualiter cuiuslibet arcus seu porcionis circuli corda et ex consequenti sinus debeat inveniri secundum sententiam Ptholomei in prima dictione Almagesti capitulis 9° et 10°. Et hoc pro exercitio eorum qui arti astronomiae insistere volunt et experiri qualiter antiqui ad noticiam huius artis pervenerunt. Et de hac materia quae saepe in practica ipsius crevit originaliter tabulas composuerunt. Praesuppositis ergo notabilibus in praecedenti tractatu praemissis ad praesens praemittam 6 propositiones quae etiam praemittuntur in principio primi libri Almagesti minoris. Et habuntur finaliter etiam in Almagesti maiori locis et capitulis per allegatum. Quibus demonstratis declarabo qualiter cuiuslibet arcus seu porcionis circuli corda debeat inveniri.

Data circuli dyametro prima propositio latera decagoni, exagoni, penthagoni, tetragoni atque trianguli aequilateri omnium ab eodem circulo circumscriptorum reperiri.

Unde manifestum est quod si nota fuerit circuli dyameter et praenominata latera erunt nota, cordae quoque quae residuis semicirculi arcubus subtenduntur notae. Sit enim semi-

---

*) Außer dem Codex Vindob. 5268 habe ich für die Herstellung des Textes des zweiten Teiles den Traktat von Georg von Peurbach zu Rate gezogen, der mir freundlicherweise von der Bayerischen Staatsbibliothek in München für einige Zeit nach Venlo ausgeliehen wurde.

Prima tabula cardagarum sinus

cardagae	universitas sinus recti			sinus rectus			universitas sinus versi		
	mª	2ª	3ª	mª	2ª	3ª	mª	2ª	3ª
1				38	49	22	150	0	0
2	75	0	0	36	10	38	111	10	38
3	106	3	57	31	3	57	75	0	0
4	129	54	14	23	50	17	43	56	3
5	144	53	20	14	59	6	20	5	46
6	150	0	0	5	6	40			

Tabula Azarchelis de sinibus

arcus	arcus	sinus			arcus	arcus	sinus			arcus	arcus	sinus		
gª	gª	mª	2ª	3ª	gª	gª	mª	2ª	3ª	gª	gª	mª	2ª	3ª
1	179	2	37	5	31	149	77	16	22	61	119	131	11	35
2	178	5	14	5	32	148	79	29	17	62	118	132	26	32
3	177	7	51	2	33	147	81	41	45	63	117	133	39	5
4	176	10	27	50	34	146	83	52	42	64	116	134	49	10
5	175	13	4	25	35	145	86	2	52	65	115	135	56	45
6	174	15	40	45	36	144	88	10	5	66	114	137	1	15
7	173	18	16	50	37	143	90	16	20	67	113	138	4	32
8	172	20	52	35	38	142	92	20	57	68	112	139	4	42
9	171	23	27	55	39	141	94	23	15	69	111	140	2	15
10	170	26	2	50	40	140	96	25	50	70	110	140	57	15
11	169	28	37	57	41	139	98	24	32	71	109	141	49	42
12	168	31	11	52	42	138	100	22	10	72	108	142	39	32
13	167	33	44	32	43	137	102	18	0	73	107	143	26	45
14	166	36	16	57	44	136	104	11	56	74	106	144	11	22
15	165	38	49	22	45	135	106	3	57	75	105	144	53	20
16	164	41	20	44	46	134	107	54	12	76	104	145	32	40
17	163	43	51	21	47	133	109	42	20	77	103	146	9	20
18	162	46	22	9	48	132	111	28	25	78	102	146	43	20
19	161	48	50	6	49	131	113	12	25	79	101	147	14	40
20	160	51	18	10	50	130	114	54	20	80	100	147	43	57
21	159	53	45	59	51	129	116	34	5	81	99	148	9	12
22	158	56	11	27	52	128	118	12	57	82	98	148	32	26
23	157	58	36	37	53	127	119	47	10	83	97	148	52	55
24	156	61	0	37	54	126	121	21	22	84	96	149	10	42
25	155	63	23	32	55	125	122	52	22	85	95	149	25	45
26	154	65	45	20	56	124	124	21	20	86	94	149	38	5
27	153	68	5	55	57	123	125	48	2	87	93	149	47	40
28	152	70	25	15	58	122	127	12	27	88	92	149	54	32
29	151	72	43	17	59	121	128	34	30	89	91	149	58	40
30	150	75	0	0	60	120	129	54	14	90	90	150	0	0

Secunda tabula cardagarum sinus

cardagae	universitas sinus recti			sinus rectus			universitas sinus versus		
	ga	ma	2a	ga	ma	2a	ga	ma	2a
1				15	31	44	60	0	0
2	30	0	0	14	28	16	44	28	16
3	42	25	35	12	25	35	30	0	0
4	51	57	42	9	32	7	17	34	25
5	57	57	20	5	59	38	8	2	18
6	60	0	0	2	2	40			

Tabula Ptholomei de sinibus

arcus	arcus	sinus			arcus	arcus	sinus			arcus	arcus	sinus		
ga	ga	ga	ma	2a	ga	ga	ga	ma	2a	ga	ga	ga	ma	2a
1	179	1	2	50	31	149	30	54	8	61	119	52	28	28
2	178	2	5	38	32	148	31	47	43	62	118	52	58	37
3	177	3	8	25	33	147	32	40	42	63	117	53	27	37
4	176	4	11	7	34	146	33	33	50	64	116	53	55	40
5	175	5	13	46	35	145	34	24	52	65	115	54	22	42
6	174	6	16	20	36	144	35	16	2	66	114	54	48	46
7	173	7	18	4	37	143	36	6	32	67	113	55	13	49
8	172	8	21	1	38	142	36	56	32	68	112	55	37	52
9	171	9	23	10	39	141	37	45	33	69	111	56	0	53
10	170	10	25	8	40	140	38	34	2	70	110	56	22	53
11	169	11	26	54	41	139	39	21	49	71	109	56	43	52
12	168	12	28	29	42	138	40	8	41	72	108	57	3	49
13	167	13	29	49	43	137	40	55	12	73	107	57	22	41
14	166	14	30	55	44	136	41	40	46	74	106	57	40	31
15	165	15	31	44	45	135	42	25	35	75	105	57	57	20
16	164	16	32	18	46	134	43	9	27	76	104	58	13	4
17	163	17	32	33	47	133	43	52	52	77	103	58	27	44
18	162	18	32	28	48	132	44	35	19	78	102	58	41	21
19	161	19	32	2	49	131	45	16	57	79	101	58	53	51
20	160	20	31	16	50	130	45	57	46	80	100	59	5	18
21	159	21	30	7	51	129	46	37	43	81	99	59	15	40
22	158	22	28	35	52	128	47	18	50	82	98	59	24	58
23	157	23	26	38	53	127	47	55	5	83	97	59	33	13
24	156	24	24	15	54	126	48	32	28	84	96	59	40	16
25	155	25	21	25	55	125	49	8	57	85	95	59	48	18
26	154	26	17	8	56	124	49	44	31	86	94	59	51	14
27	153	27	14	22	57	123	50	19	13	87	93	59	55	4
28	152	28	10	6	58	122	50	52	58	88	92	59	57	49
29	151	29	5	19	59	121	51	25	48	89	91	59	59	37
30	150	30	0	0	60	120	51	57	42	90	90	60	0	0

circulus *a b g* erectus supra dyametrum *a d g* circumductus supra centrum *d*. Sitque linea *d b* a centro *d* perpendiculariter erecta supra lineam *a g* per 11^{am} primi Euclidis et semidyameter *d g* sit divisa in duo media in puncto *h* per 10^{am} primi Euclidis et producam lineam *b h* sitque linea *h f* aequalis lineae *h b* subtensae angulo recto per 3^{am} primi Euclidis et protraham lineam *b f* dico ergo quod linea *b d* similiter linea *d g* est latus exagoni et linea *f d* est latus decagoni, sed linea *b f* est latus penthagoni aequilateri (*fol. 91ʳb*). Primum sic probatur: linea *b d* est semidyameter circuli similiter linea *d g*. Semidyameter vero circuli est aequalis lateri exagoni aequilateri et aequianguli eidem circulo inscripti per correlarium 15^{ae} seu penultimae 4^{ti} Euclidis quare constat propositum. Secundum vero sic probatur: quia linea *g d* dividitur in duo aequalia in puncto *h* et additur ei in longum linea *d f*, igitur illud quod fit ex ductu *g f* in *d f* cum quadrato *h d* aequatur quadrato *h f* per 6^{am} secundi Euclidis quare etiam aequatur quadrato *b h* cum sit posita aequalis lineae *h f*. Duo vero quadrata duarum linearum *b d* et *d h* simul iuncta aequantur quadrato lineae *b h* per 46^{am} seu penultimam primi Euclidis quare illud quod fit ex ductu lineae *g f* in lineam *d f* cum quadrato *d h* aequatur duobus quadratis *d b* et *d h* simul iunctis. Cum ergo minuitur ex unoquoque eorum quadratum *d h* remanet illud quod fit ex ductu *g f* in *d f* aequale quadrato *d b* quare et quadrato *d g*. Quia igitur illud quod fit ex ductu lineae *g f* in lineam *d f* est aequalis quadrato lineae *d g* erunt tres lineae *g f* et *g d* et *d f* continuae proportionales per secundam partem 16^{ae} 6^{ti} Euclidis. Et quia cum latus exagoni et latus decagoni aequilateri quos ambos unus et idem circulus circumscribit sibi invicem in longum et directum coniungantur tota linea ex eis composita secundum proportionem habentem medium et duo extrema erit divisa maiorque eius porcio erit latus exagoni per 9^{am} 13^{i} Euclidis, linea autem *g f* in puncto *d* est divisa secundum proportionem habentem medium duoque extrema cuius maior porcio est latus exagoni, igitur per conversam eiusdem 9^{ae} propositionis 13^{i} Euclidis linea *d f* erit latus decagoni aequilateri eidem circulo inscripti, quod erat secundum propositum.

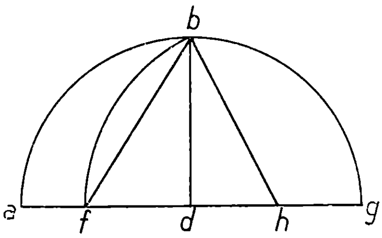

Fig 12

Tercium vero scilicet quod linea *b f* sit latus penthagoni aequilateri sic probatur: quoniam latus penthagoni aequilateri tanto potentius est latera exagoni quantum potentius latus decagoni aequilateri si sint in eidem circulo omnes inscripti per 10^{am} 13^{i} Euclidis. Et angulus *b d f* trianguli *b d f* est rectus, igitur per 46^{am} primi Euclidis quadratum lineae *b f* est aequale duobus quadratis *b d* et *d f* simul iunctis. Sed linea *b d* est latus exagoni, linea vero *d f* est latus decagoni ut probatum est, quare per conversam eiusdem 10^{ae} propositionis 13^{i} Euclidis linea *b f* erit latus penthagoni aequilateri ab eodem circulo circumscripti et sic patet tercium propositum.

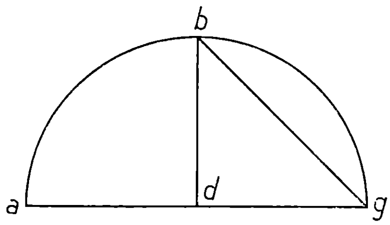

Fig. 13

Latus vero tetragoni aequilateri taliter invenitur. Descripto semicirculo super dyametrum *a d g* protractaque linea *d b* a centro *d* et perpendiculariter erecta super lineam *a g* ut prius (*fol. 91ᵛa*) illa dividit semicirculum *a b g* in duo media in puncto *b* quare arcus *g b* est quarta pars circuli, protracta igitur linea *b g* ipsa erit latus tetragoni aequilateri eidem circulo inscripti per 6^{am} quarti Euclidis. Sed latus trigoni aequilateri sic inscribitur: descripto semicirculo *a d g* super dyametrum *a g* intra eundem semicirculum coaptetur linea recta aequalis semidyametro ipsius per primam quarti Euclidis quae tangat dyametrum *a g* in uno termino ipsius scilicet in puncto *g*. Sitque linea *g d*, illa erit latus exagoni aequilateri eidem circulo inscripti et abscindet a semicirculo *a d g* arcum *g d* qui est sexta pars circuli scilicet 60 graduum,

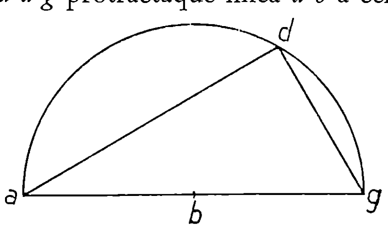

Fig 14

residuum vero eiusdem semicirculi erit arcus *a d* et hoc est tertia pars circuli hoc est 120 gradus, subtensa igitur corda eidem arcui *a d* ipsa erit latus trigoni aequilateri eidem circulo inscripti. Circulorum enim aequalium arcus aequales cordas habent aequales per 28$^{\mathrm{am}}$ tertii Euclidis. Sicque patet totum propositum.

Correlarium vero sic probatur: quia tota dyameter est nota, erit etiam semidyameter seu eius medietas nota. Et illa est aequalis lateri exagoni aequilateri quare et latus exagoni erit notum. Item quia semidyameter *b d* similiter semidyameter *d g* est nota, erit etiam eius medietas scilicet linea *d h* nota et per consequens quadrata duarum linearum *b d* et *d h* erunt nota et illa sunt aequalia quadrato lineae *b h* per 46$^{\mathrm{am}}$ primi Euclidis, igitur et quadratum lineae *b h* erit notum, quare et linea *b h* et per consequens linea *h f* sibi aequalis erit nota, subtracta autem linea *h d* a linea *h f* residuum erit *d f*. Et quia linea *h d* est nota, linea etiam *h f* est nota, igitur linea *d f* quae est latus decagoni erit nota. Rursumque duae lineae *f d* et *d b* sunt notae, erunt earum quadrata nota, sed illa quadrata simul iuncta sunt aequalia quadrato lineae *f b* per 46$^{\mathrm{am}}$ primi Euclidis, igitur quadratum lineae *f b* est notum. Et per consequens linea *f b* erit nota et illa est latus penthagoni. Item quia semidyametri *b d* et *d g* sunt notae, erunt quadrata earum nota, illa vero quadrata sunt sibi invicem aequalia et ipsa simul iuncta sunt aequalia quadrato *b g* quare quadratum *b g* est duplum ad quadratum semidyametri scilicet lineae *d g*, similiter lineae *b d*, igitur et quadratum *b g* erit notum et per consequens linea *b g* quae est latus quadrati erit nota. Praeterea in semicirculo *a d g* dyameter *a g* est nota, linea etiam *g d* quae est latus exagoni est nota. In triangulo vero *a d g* angulus *d*, qui consistit super arcum semicirculi, est rectus (*fol. 91^{v}b*) per 30$^{\mathrm{am}}$ tertii Euclidis quare per 46$^{\mathrm{am}}$ primi Euclidis quadratum *a g* est aequale quadratis *a d* et *d g* simul iunctis. Subtracto igitur quadrato *d g* a quadrato *a g* remanet quadratum *a d*, igitur ipsum erit notum et per consequens linea *a d* quae est latus trigoni erit nota. Item descripto semicirculo *a d b g* super dyametrum *a g* coaptentur sibi duae lineae *b g* et *d g* et sit linea *b g* latus penthagoni, linea vero *d g* sit latus decagoni, protrahe igitur lineas *a b* et *a d*. Et quia linea *d g* est latus decagoni, ipsa erit cordae 10$^{\mathrm{ae}}$ partis circuli. Hoc est arcus 36 graduum et per consequens linea *a d* quae est corda residui, erit corda arcus 144 graduum. Similiter quia linea *b g* est latus penthagoni, ipsa erit corda quintae partis circuli scilicet arcus 72 graduum, igitur linea *a b* erit corda residui semicirculi hoc est 108 graduum, sed duo anguli *a b g* et *a d g* sunt recti per 30$^{\mathrm{am}}$ tertii Euclidis, quare per 46$^{\mathrm{am}}$ primi Euclidis quadratum dyametri *a g* est aequale duobus quadratis *a b* et *b g* simul iunctis. Similiter est aequale duobus quadratis *a d* et *d g* simul iunctis, dyameter autem *a g* est nota, similiter lineae *d g* et *b g* sunt notae ex dictis, quare et quadrata earum erunt nota. Subtracto igitur quadrato *d g* a quadrato *a g* remanet quadratum *a d*. Similiter subtracto quadrato *b g* a quadrato *a g* remanet quadratum *a b* quare quadrata *a b* et *a d* erunt nota, igitur et latera earum scilicet lineae *a b* et *a d* erunt notae et illae sunt cordae subtensae residuis semicirculi arcubus. Sicque patet tota propositio cum suo correlario.

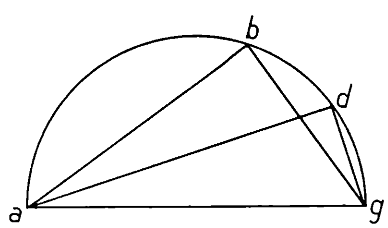

Fig. 15

Secunda propositio: Si quadrilaterum infra circulum describatur rectangulum quod continetur sub duabus eius dyametris est aequale duobus rectangulis pariter acceptis qui sub utrisque eius lateribus oppositis continentur.

Sit itaque circulus *a b g d* in quo describam quadrilaterum *a b g d* et protraham duas eius dyametros *a g* et *b d*, dico ergo rectangulum quod fit ex *a g* in *b d* aequatur duobus rectangulis quorum unum fit ex ductu *a b* in *g d* et alterum fit ex ductu *a d* in *b g* simul acceptis. Quod sic demonstratur: ponam enim angulum *a b e* aequalem angulo *d b g* protracta linea *b e* et hoc fit secundum doctrinam 23$^{\mathrm{ae}}$ primi Euclidis. Et quia angulus *d b g* aequatur angulo *a b e* adiecto igitur seu communicato angulo *e b d* unicuique ipsorum, erit angulus *a b d* aequalis angulo *e b g*. Angulus autem (*fol. 92^{r}a*) *b d a* est aequalis angulo *b g e*

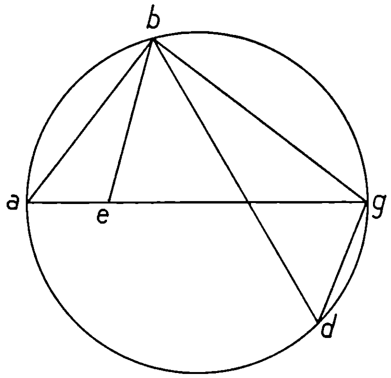

Fig. 16

per 20^{am} tertii Euclidis, quia super eundem arcum consistunt scilicet super arcum *b g d a* quare residuum anguli eorum sunt aequales per secundam partem 32^{ae} primi Euclidis. Triangulus igitur *a b d* est aequiangulus triangulo *b g e*, quare latera eorum aequos angulos respicientia sunt proportionalia per 4^{am} sexti Euclidis, ergo latera *a d* et *e g* sunt proportionalia, similiter latera *b d* et *b g* sunt proportionalia, igitur per 15^{am} sexti Euclidis rectangulum quod continetur sub lineis *a d* et *b g* aequum est ei quod sub lineis *b d* et *e g* continetur. Et etiam quia angulus *a b e* est aequalis angulo *d b g* ex ypothesi, et angulus *b a e* aequatur angulo *b d g* per 20^{am} tertii Euclidis, quia super eundem arcum consistunt scilicet arcum *b a d g*, igitur triangulus *a b e* est aequiangulus triangulo *b d g*, ergo per 4^{am} sexti Euclidis proportio *b a* ad *a e* est sicut proportio *b d* ad *d g*, quare rectangulum quod fit ex ductu *a b* in *g d* aequatur ei quod fit ex ductu *b d* in *a e* per 15^{am} sexti Euclidis. Iam vero demonstratum fuit, quod rectangulum quod fit ex *a d* in *b g* est aequale ei quod fit ex ductu *b d* in *g e*. Ergo totum rectangulum quod fit ex ductu *a g* in *b d* est aequale duobus rectangulis quorum unum fit ex ductu *b d* in *e g* et aliud ex ductu *b d* in *a e* simul iunctis per primam secundi Euclidis. Et per consequens rectangulum quod continetur sub duabus dyametris *a g* et *b d* est aequale duobus rectangulis quorum unum continetur sub *a b* et *d g* et aliud sub *a d* et *b g* simul iunctis. Et hoc fuit propositum.

Tertia propositio: Si in semicirculo cordae arcuum inaequalium notae fuerint, corda quoque arcus quo maior minorem superat erit nota.

Sit semicirculus *a b g d* descriptus super dyametrum *a d*, suntque protractae duae cordae *a b* et *a g* notae et producam cordam *b g*, dico ergo quod etiam corda *b g* erit nota. Quod

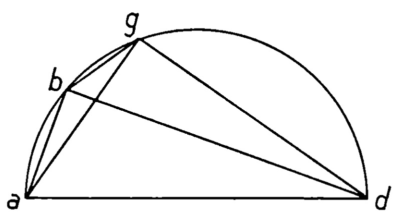

Fig. 17

sic probatur: protraham enim duas cordas *b d* et *g d*, manifestum est igitur quod ipsae etiam sunt notae per correlarium primae huius, quia quaelibet earum est corda residui semicirculi. Et quia in circulo est quadrilaterum *a b g d* in quo sunt duae dyametri *a g* et *b d* erit per praemissam illud rectangulum quod fit ex *a g* in *b d* aequale duobus rectangulis qui fuerit ex *a b* in *g d* et ex *a d* in *b g* simul iunctis. Sed rectangulum quod fit ex *a g* (*fol. 92ʳb*) in *b d* est notum. Et illud quod fit ex *a b* in *g d* est notum quo ablato de praecedenti remanet illud quod fit ex *a d* in *b g*, igitur et ipsum erit notum. Et quia dyameter *a d* est nota, diviso autem eo quod fit ex *a d* in *b g* per dyametrum *a d* provenit linea *b g* igitur et corda *b g* erit nota. Sicque patet propositum.

Quarta propositio: Si in semicirculo corda alicuius arcus nota fuerit, corda quoque quae eius medietati subtenditur erit nota.

Sit enim semicirculus *a b g* descriptus super dyametrum *a g* et sit arcus *b g* cordam habens notam, quod arcum dividam in duo media supra punctum *d* per 29^{am} tertii Euclidis et pro-

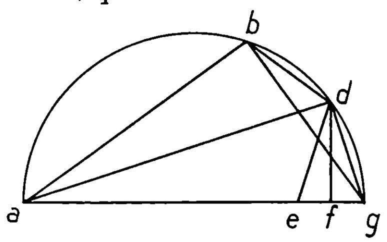

Fig. 18

traham cordas *a b*, *a d*, *b d* et *d g* et producam perpendicularem *d f* supra dyametrum *a g* per 12^{am} primi Euclidis, dico igitur quod linea *f g* est medietas superflui lineae *a g* super lineam *a b*. Quod sic probatur: ponam enim lineam *a e* aequalem lineae *a b* per tertiam primi Euclidis et producam lineam *d e* et quia linea *a b* est aequalis lineae *a e* posita linea *a d* communi, erunt duae lineae *a b* et *a d* trianguli *a b d* aequales duabus lineis *a e* et *a d* trianguli *a d e* quaelibet videlicet suae relativae aequalis. Et angulus *b a d* est aequalis angulo *e a d* per 26ᵃᵐ tertii Euclidis, quia sunt in eodem circulo constituti super arcus aequales scilicet super arcus *b d* et *d g*, igitur per 4ᵃᵐ primi Euclidis basis *b d* trianguli *a b d* erit aequalis basi *d e* trianguli *a e d*. Et quia linea *b d* aequatur lineae *d g* per 28ᵃᵐ tertii Euclidis, quia sunt cordae duorum arcuum aequalium, igitur linea *d g* est aequalis lineae *d e* per communem animi conceptionem. Quia ergo triangulus *d g e* habet duo latera aequalia, erunt duo anguli *d e g* et *d g e* aequales per 5ᵃᵐ primi Euclidis. Quare demissa perpendicularis *d f* super lineam *e g* dividit eam in duo media. Sunt enim anguli super *e* et super *f* trianguli *d e f* aequales angulis *f* et *g* trianguli *d f g* et latus *e d* unius aequale lateri *d g* alterius, igitur per 26ᵃᵐ primi Euclidis basis *e f* aequatur basi *f g*. Sed tota linea *e g* est superfluum lineae *a g* super lineam *a b*, ergo linea *f g* est medietas superflui lineae *a g* super lineam *a b*. Et quoniam corda arcus *b g* est nota, erit corda residui semicirculi quae est linea *a b* nota, quae est aequalis *a e*. Et quia dyameter *a g* est nota (*fol. 92ᵛa*) erit linea *e g* quae est residuum dyametri nota, quare eius medietas quae est linea *f g* erit nota, quae est medietas superflui lineae *a g* super lineam *a b*. Quia ergo in triangulo *a d g* angulus *d* est rectus per 30ᵃᵐ tertii, quia consistit in semicirculo super arcum et ab illo angulo egreditur perpendicularis *d f* super lineam *e g*, erit angulus *f* trianguli *d f g* etiam rectus. Et angulus *d g f* est communis utrique triangulo, quare triangulus *a d g* est aequiangulus triangulo *d g f*, igitur per 4ᵃᵐ sexti Euclidis proportio lineae *a g* ad lineam *g d* erit sicut proportio lineae *g d* ad lineam *g f*. Ergo per primam partem 16ᵃᵉ sexti Euclidis rectangulum quod continetur sub lineis *a g* et *g f* aequum est quadrato lineae *g d*. Sed illud quod fit ex ductu lineae *a g* in *g f* est notum, igitur quadratum lineae *g d* erit notum, quapropter longitudo *g d* cordae est nota, quae subtenditur medietati arcus *b g* et hoc fuit propositum.

Quinta propositio: Si duae cordae duorum arcuum in semicirculo fuerint notae, corda quoque quae toti subtenditur arcui composito ex illis duobus arcubus erit nota.

Describam circulum supra dyametrum *a d* et sit eius centrum *f* et accipiam a puncto *a* duos arcus notos duas cordas habentes notas quae sint *a b* et *b g* et copulabo unam cordam earum alteri, dico ergo quod si protraxerim cordam *a g* et ipsa erit nota. Quod sic probatur: protraham enim a puncto *b* dyametrum circuli quae sit linea *b f e* et protraham lineas *b d*, *d g*, *d e*, *g e*. Manifestum est igitur quod ex notitia lineae *b g* nota erit linea *g e* et ex notitia lineae *a b* habetur notitia lineae *b d* et ex notitia lineae *b d* scietur linea *d e* per correlarium primae huius, sed lineae *a b* et *b g* sunt notae ex ypothesi, ergo praedictae lineae scilicet *g e*, *b d*, *d e* sunt notae. Cum ergo sit quadrilaterum *b g d e* circulo inscriptum cuius sunt duo dyametri *b d* et *g e*, rectangulum quod fit ex ductu unius dyametri in alteram erit aequale duobus quadrangulis quae fuerint ex ductu omnium duorum laterum oppositorum cuiusque in alterum per secundam huius. Quia igitur dyametri *b d* et *g e* sunt notae, erit rectangulum quod fit ex eis notum. Et per consequens duo rectangula (*fol. 92ᵛb*) quae fuerint ex ductu *b g* in *d e* et ex ductu *g d* in *b e* simul erunt nota. Et quia *b g* et *d e* sunt notae, erit rectangulum quod fit ex eis notum. Quod si subtrahatur ab eo quod fit ex *b d* in *g e* remanet illud quod fit ex *b e* in *g d* quare et ipsum erit notum. Et quia linea *b e* est nota, quia est dyameter circuli per quam si dividatur illud quod fit ex *b e* in *g d* provenit quantitas lineae *g d*, igitur et ipsa erit nota, quare per correlarium primae huius linea *a g* quae est corda residui arcus de semicirculo erit nota. Vel aliter et facilius, quia cordae *e d* et *e g* sunt notae, igitur per 3ᵃᵐ huius corda *g d* erit nota, ergo et corda residui arcus de semicirculo scilicet linea *a g* erit nota quod est propositum. Et nota quod linea *e d* est aequalis lineae *a b* quia quaelibet earum est corda residui arcus semicirculi ultra arcum *b d*.

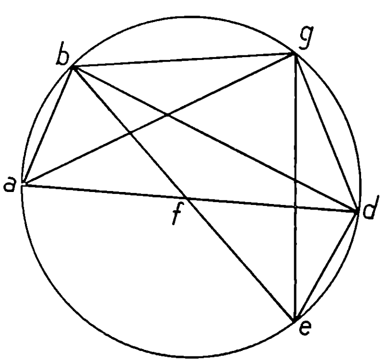

Fig. 19

Sexta propositio: Si protrahantur in circulo duae lineae inaequales proportio cordae longioris ad cordam breviorem erit minor proportione arcus longioris ad arcum breviorem.

Describam enim circulum *a b g d* in quo sint protractae duae cordae inaequales quarum brevior sit *a b* et earum longior sit *b g*, dico ergo quod proportio cordae *b g* ad cordam *b a* est minor proportione arcus *b g* ad arcum *b a*. Quod sic probatur: dividam enim angulum *a b g* in duo media per lineam *b d* secundum doctrinam 9ae primi Euclidis. Et protraham lineas *a e g* et *a d* et *g d*. Quia ergo angulus *a b g* divisus est in duo media, erit angulus *a b d* aequalis angulo *d b g*. Et quia consistunt super circumferentiam eiusdem circuli, igitur arcus *a b g d* et arcus *d a b g* super quos cadunt erunt aequales per 25am tertii Euclidis. Deposito ergo ab utroque arcu *a b g* communi remanebit arcus *a d* aequalis arcui *d g*, igitur corda *a d* erit aequalis cordae *d g* per 28am tertii Euclidis, quare per 5am primi Euclidis angulus *d a g* erit aequalis angulo (*fol. 93ra*) *d g a*, protraham autem a puncto *d* lineam *d f* perpendicularem super lineam *a g* per 12am primi Euclidis, illa dividit lineam *a g* in puncto *f* in duo media. Sunt enim duo anguli *d a f* et *a f d* trianguli *a d f* aequales duobus angulis *d g f* et *d f g* trianguli *d f g* et latus *a d* primi est aequale lateri *d g* secundi, quare latus *a f* primi est aequale lateri *f g* secundi et angulus *d* unius angulo *d* alterius aequalis per 26am primi Euclidis et per consequens linea *g e* erit maior linea *e a* quia prima est maior medietate lineae *a g* et secunda est minor eadem medietate. Quia vero angulus *e f d* trianguli *e d f* est rectus, igitur erit maior angulus eiusdem trianguli, ut potest deduci ex secunda parte 32ae primi Euclidis quare linea *d e*, quae opponitur huic angulo, erit maior linea *d f* per 18am primi Euclidis. Angulus autem *a e d* extrinsecus ad triangulum *e d f* est aequalis duobus angulis *e f d* et *e d f* eiusdem trianguli per primam partem 32ae primi Euclidis, igitur erit maior angulo recto quare erit maior angulus trianguli *a e d* quo linea *a d* eidem angulo opposita erit maior linea *e d* per 18am primi Euclidis. Quare igitur linea *a d* est longior linea *e d* et linea *e d* est longior linea *f d*. Circulus descriptus supra punctum *d* secundum longitudinem lineae *d e* procul dubio lineam *a d* secabit, sed lineam *d f* non attinget. Circumducam ergo circa punctum *d* circulum *h e c* qui secabit lineam *d a* in puncto *h*. Et producam lineam *d f* altius usque ad punctum *c*. Quia ergo sector *e d c* est maior triangulo *e d f* et triangulus *a d e* est maior sectore *h d e*, igitur per primam partem 8ae quinti Euclidis proportio trianguli *e d f* ad sectorem *h d e* est minor proportione sectoris *e d c* ad sectorem *h d e*. Et per secundam partem eiusdem 8ae proportio trianguli *e d f* ad triangulum *a d e* est minor proportione eiusdem trianguli ad sectorem *h d e*. Quare per communem animi conceptionem quidquid est minus minore, hoc etiam est minus maiore, erit proportio trianguli *e d f* ad triangulum *a d e* minor proportione sectoris *e d c* ad sectorem *h d e*, proportio autem trianguli *e d f* ad triangulum *a d e* est sicut proportio lineae *e f* ad lineam *e a* per primam sexti Euclidis. Proportio vero sectoris *e d c* ad sectorem *h d e* est sicut proportio arcus *e c* ad arcum *h e*. Et proportio arcus *e c* ad arcum *h e* est sicut proportio anguli *f d e* ad angulum *a d e* per ultimam sexti Euclidis. Ergo proportio lineae *f e* ad lineam *e a* est minor proportione anguli *f d e* ad angulum *e d a*, igitur coniunctim proportio lineae *f a* ad lineam *e a* erit minor proportione anguli *f d a* ad angulum *a d e*, quare proportio lineae duplae praedictae lineae *a f* quae est linea *a g* ad lineam *a e* minor erit proportione (*fol. 93rb*) anguli *g d a* qui est duplus anguli *a d f* ad angulum *a d e*, ergo disiunctim proportio lineae *g e* ad lineam *a e* erit minor proportione anguli *g d e* ad angulum *e d a* et quia in triangulo *a b g* linea *b e* ducta ab angulo *a b g* ad basim *a g* dividit eundem angulum per aequalia erunt duae partes ipsius basis scilicet lineae *g e* et *e a* reliquis eiusdem trianguli lateribus scilicet lineis *b g* et *b a* proportionales per 3am sexti Euclidis, igitur proportio lineae *g e* ad lineam *e a* est sicut proportio cordae *g b* ad cordam *b a* et proportio anguli *g d b* ad

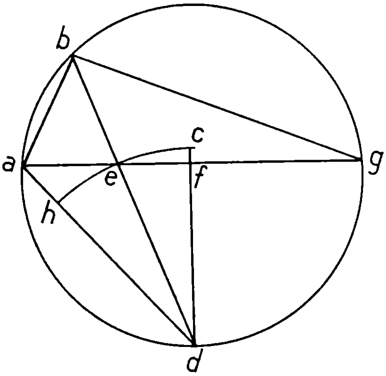

Fig. 20

angulum *b d a* est sicut proportio arcus *b g* ad arcum *b a* per ultimam sexti Euclidis, quare proportio cordae *b g* ad cordam *b a* est minor proportione arcus *b g* ad arcum *b a* quod erat demonstrandum.

Constat modo ex praemissis propositionibus et earum demonstrationibus ostendere qualiter cuiuslibet arcus circuli noti quantitas cordae eidem subtensae debeat inveniri. Supposito semper quod circulus sit 360 graduum quae est communis omnium circulorum divisio. Et quod dyameter circuli quae est corda semicirculi sit 120 partium seu graduum ad quem numerum omnis dyametri secta intelligitur. Ex primae igitur propositionis et sui correlarii demonstratione habetur quod latus exagoni aequilateri circulo inscripti quod est corda sextae partis circuli scilicet arcus 60 graduum est aequalis semidyametro eiusdem circuli et quia dyameter circuli est 120 graduum de partibus dyametri erit eius medietas 60 graduum et haec est quantitas semidyametri circuli scilicet lineae *b d* et etiam lineae *b g*, et per consequens lateris exagoni seu cordae 60 graduum. Latus vero decagoni aequilateri sic invenies: quia quadratum lineae *b d* quae est semidyameter circuli et quadratum lineae *d h* quae est medietas semidyametri simul iuncta sunt aequalia quadrato lineae *b h* et quadrato lineae *h f*, deposita autem linea *d h* a linea *h f* remanet linea *d f* quae est latus decagoni. Accipe ergo primo semidyametrum circuli quae est 60 graduum et eam quadra et erit eius quadratum 3600 gradus. Deinde recipe medietatem semidyametri et quia semidyameter est 60 graduum, erit eius medietas 30 graduum et illam medietatem etiam quadra et quadratum eius erit 900 gradus. Postea illa duo quadrata iunge simul et proveniunt 4500 gradus et hoc aggregatum erit quadratum lineae *b h* similiter lineae *h f*, cuius quaere radicem secundum doctrinam datam in notabili quinto praecedentis tractatus et illa radix est 67 gradus 4 minuta et 55 secunda vicimus. Et haec est quantitas lineae *b h* similiter lineae *h f*. Post hoc medietatem (*fol. 93ᵛa*) semidyametri scilicet lineam *d h* quae est 30 graduum ut dictum est subtrahe a linea *h f* et residuum erit 37 gradus 4 minuta et 55 secunda et hoc est quantitas lineae *d f* quae est latus decagoni. Et est corda 10ae partis circuli scilicet arcus 36 graduum. Latus autem penthagoni aequilateri taliter reperies: quia enim quadratum lineae *b f* est aequale quadrato lineae *b d* quae est semidyameter circuli seu latus exagoni et quadrato lineae *d f* quae est latus decagoni simul iunctis. Accipe ergo quadratum semidyametri prius habitum scilicet 3600 gradus, deinde accipe quantitatem lineae *d f* quae est 37 gradus 4 minuta et 55 secunda quae reduc ad secunda et erunt 133495 secunda et tunc illud quadra et eius quadratum erit 17820915025 quarta et illa e contrario reducta ad diversas denominationes valent 1375 gradus 4 minuta 14 secunda et huic adde quadratum semidyametri prius habitum et aggregatum erit 4975 gradus 4 minuta 14 secunda et hoc erit quadratum lineae *b f* scilicet lateris penthagoni. Quod reductum ad secunda facit 17910254 secunda cuius quaere radicem quae erit 70 gradus 32 minuta et 3 secunda et haec est quantitas lineae *b f* quae est latus penthagoni et est corda quintae partis circuli hoc est arcus 72 graduum. Sed latus tetragoni aequilateri seu quadrati invenies hoc modo: quia quadratum lineae *b g* quae est latus quadrati est aequale quadratis duarum semidyametrorum *b d* et *d g* simul iunctis, dupla igitur quadratum semidyametri ergo est duplum ad quadratum semidyametri et productum erit 7200 gradus. Et hoc est quadratum lineae *b g* cuius radix est 84 gradus 51 minuta et 10 secunda, quae est quantitas lineae *b g* lateris quadrati quod est corda quartae partis circuli id est arcus 90 graduum. Latus vero trigoni aequilateri invenies per hunc modum, quia in semicirculo *a d g* quadratum lineae *g d* quae est latus exagoni aequilateri et quadratum lineae *a d* quae est latus trigoni aequilateri simul iuncta sunt aequalia quadrato dyametri *a g*, quadra ergo dyametrum quae est 120 graduum et quadratum eius erit 14400 gradus a quo subtrahe quadratum semidyametri seu lateris exagoni scilicet 3600 gradus et residuum erit 10800 gradus quod est quadratum lineae *a d* scilicet lateris trianguli aequilateri et est triplum ad quadratum semidyametri cuius radix est 103 gradus 55 minuta et 23 secunda et haec est quantitas lateris trigoni quod est corda tertiae partis circuli scilicet arcus 120 graduum (*fol. 93ᵛb*). Eodem modo in semicirculo *a b d g* reperies quantitatem lineae *a d* quae in eodem circulo est corda arcus 144 graduum quia eius quadratum et quadratum lineae *d g* quae est corda arcus 36 graduum simul iuncta sunt aequalia quadrato dyametri *a g* quare subtracto quadrato cordae seu lineae *d g* a quadrato dyametri remanet quadratum lineae *a d* quae est corda arcus 144 graduum. Corda autem arcus 36 graduum seu latus decagoni est 37 graduum 4 minuta et 55 secunda cuius quadratum est 1375 gradus 4 minuta et 14 secunda, ut ostensum est prius. Subtrahe igitur hoc quadratum a quadrato dyametri scilicet de 14400 gradibus et residuum erit 13024 gradus 55 minuta et 46 secunda quod est quadratum cordae subtensae arcui 144 graduum et hoc reduc ad secunda et proveniunt 46889746 secunda cuius radix est 114 gradus 7 minuta et 37 secunda quae est quantitas cordae subtensae arcui 144 graduum. Similiter si subtraxeris quadratum lateris penthagoni quod est corda arcus 72 graduum a quadrato dyametri remanebit quadratum cordae residui arcus semicirculi scilicet arcus 108 graduum propter sonsimilem causam. Latus autem penthagoni aequilateri est 70 gradus 32 minuta et 3 secunda ut prius dictum est quae reduc ad secunda et fuerint 253923 secunda quorum quadratum est 64476889929 quarta quae e contrario reducta ad diversas denominationes faciunt 4975 gradus 4 minuta et 7 secunda. Quibus subtractis a quadrato dyametri prius habito residuum erit 9424 gradus 55 minuta 53 secunda quae sunt quadratum cordae residui arcus semicirculi scilicet arcus 108 graduum, quod reductum ad secunda valent 33929753 secunda cuius radix est 97 gradus 4 minuta 55 secunda quae est quantitas cordae subtensae arcui 108 graduum et per eundem modum habita notitia cordae cuiuscumque arcus semicirculi. Si eius quadratum subtrahitur a quadrato dyametri residuum erit quadratum cordae subtensae residuo arcui semicirculi eiusdem et eius radix ostendit quantitatem eiusdem cordae.

Amplius ex sequentibus propositionibus constat ex certorum arcuum differentiis cordas multas posse inveniri. Per secundam enim propositionem et per tertiam possunt inveniri plures cordae superfluae arcuum secundum se ipsas cordas notas habentium. Et hoc taliter propositis namque cordis duabus arcuum inaequalium notis. Si vis invenire cordam arcus quo maior excedit minorem primo scias cordas arcuum residuorum semicirculi respectu utriusque cordae propositae subtrahendo scilicet quadratum cordae propositae a quadrato dyametri, tunc remanebit quadratum cordae residui arcus semicirculi ultra arcum cordae propositae per correlarium primae huius cuius radix ostendit quantitatem cordae eiusdem arcus residui (*fol. 94ʳa*). Illud autem quod fit ex ductu cordae arcus maioris in cordam residui arcus minoris est aequale illis duobus quae fiunt ex ductu cordae arcus minoris in cordam residui arcus maioris et ex ductu dyametri in cordam arcus quo maior excedit minorem ut potest deduci ex secunda et tertia. Subtracto ergo eo quod fit ex ductu cordae arcus minoris in cordam residui arcus maioris remanet hoc quod fit ex ductu dyametri in cordam arcus superflui scilicet quo arcus maior excedit minorem quod si dividatur per dyametrum remanebit quantitas cordae illius arcus superflui. Exempli gratia: sit semicirculus *a b c d* descriptus super dyametrum *a d* et in eo protracta sit linea *a b* quae fit corda arcus 60 graduum seu latus exagoni. Et linea *a c* quae sit latus penthagoni seu corda arcus 72 graduum et linea *b c* quae est corda arcus *b c* qui est superfluum seu excessus lineae *a c* super lineam *a b*. Sint etiam protractae lineae *b d* et *c d* quae sunt cordae arcuum residuorum semicirculi. Corda igitur *a b* continet 60 gradus et corda *a c* habet 70 gradus 32 minuta et 3 secunda. Corda autem *b d* quae est corda residui arcus semicirculi ultra arcum *a b* est latus trigoni et continet 103 gradus 55 minuta et 23 secunda. Sed corda *c d* quae est corda arcus 108 graduum qui arcus est residuum semicirculi super arcum *a c* continet 97 gradus 4 minuta et 55 secunda et dyameter *a d* est 120 graduum, quae omnia patent ex dictis. Si ergo ex hiis omnibus notis vis scire quantitatem cordae superflui scilicet arcus *b c* qui est 12 graduum quia in tanto arcus *a c* qui est 72 graduum superat arcum *a b* qui est 60 graduum. Tunc primo omnia praedicta reduc ad secunda si vis praecise operari. Et erit corda *a b* 216000 secunda, corda vero *a c* 253923 secunda et corda *b d* 374123 secunda, sed corda *c d* 349495 secunda, dyameter autem *a d* 432000 secunda. Multiplicato igitur *a c* per *b d* provenient 94998434529 quarta et hoc est aequale (*fol. 94^{r}b*) eis quae fiunt ex ductu *a b* in *c d* et ex ductu *a d* in *d c* per secundam huius. Subtracto igitur eo quod fit ex ductu *a b* in *c d* ab illo quod fit ex ductu *a c* in *b d* remanet hoc quod fit ex ductu *a d* in *b c*. Quo diviso per dyametrum *a d* provenit in quotiente quantitas lineae *b c*. Multiplica ergo *a b* per *c d* et provenient 75490920000 quarta quae subtrahe a producto priori scilicet ab eo quod fit ex *a c* in *b d* et residuum erit 19507514529 quarta et hoc est illud quod fit ex ductu *a d* in *b c*. Quod divide per *a d* et provenient in quotiente 45156 secunda quae reducta e contrario valent 12 gradus 32 minuta 36 secunda et haec est quantitas cordae subtensae arcui 12 graduum qui est superfluum seu excessus arcus *a c* super arcum *a b* etc.

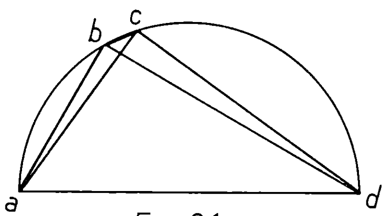

Fig. 21

Eodem modo invenies cordam arcus 24 graduum per latus decagoni et per latus exagoni semicirculo per modum cordarum coaptatis. Sit namque semicirculus *e f g h* cuius dyameter sit linea *e h* et linea *e f* sit latus decagoni seu corda arcus 36 graduum et linea *e g* sit latus exagoni seu corda arcus 60 graduum et linea *f g* sit corda arcus superflui scilicet quo arcus *e g* superat arcum *e f* et est 24 gradus. Sit etiam protracta linea *f h* quae est corda residui semicirculi super arcum *e f* et est corda arcus 144 graduum. Et linea *g h* quae est corda arcus residui semicirculi ultra arcum *e g*. Constat ex prius dictis quod corda *e f* continet 37 gradus 4 minuta 55 secunda et corda *f h* arcus residui continet 114 gradus 7 minuta 37 secunda. Corda vero *e g* habet 60 gradus, sed corda *g h* continet 103 gradus 55 minuta 23 secunda. Quibus reductis ad secunda erit corda *e f* 133495 secunda *f h* 410857 secunda, sed corda *e g* 216000 secunda *g h* 374123 secunda et dyameter *e h* 432000 secunda. Duc ergo *e g* in *f h* et productum erit 88745112000 quarta et hoc serva. Duc etiam *e f* in *g h* et productum erit 49943549885 quarta quod subtrahe a praecedenti producto iam servato et residuum erit 38801562115 quarta et hoc divide per dyametrum et numerus quotiens erit 89818 secunda, quae valent 24 gradus 56 minuta 58 secunda et hoc est corda arcus *f g* quae est 24 graduum et est differentia inter arcum *e f* et arcum *e g* (*fol. 94^{v}a*). Consimiliter per latus exagoni seu cordam arcus 60 graduum et per latus tetragoni seu cordam arcus 90 graduum invenies cordam arcus 30 gradus qui est superfluum arcus maioris super minorem protracta enim linea *e k* quae sit latus tetragoni. Similiter corda arcus residui quae sit *k h* illa etiam erit latus tetragoni seu corda arcus 90 graduum et continet 84 gradus 51 minuta 10 secunda quae valent 305470 secunda. Ceteris vero remanentibus ut prius duc igitur *e k* in *g h* et productum erit 114283352810 quarta quod serva, deinde duc *e g* in *k h* et productum erit 65981520000 quarta. Et hoc subtrahe a praecedenti producto iam servato et residuum erit 48301832810 quarta, quod divide per dyametrum et numerus quotiens est 111809 secunda et 48 tertia provenient ex residuo quae valent 31 gradus 3 minuta et 30 secunda fere. Et hoc est corda arcus 30 graduum qui est differentia arcus 60 graduum et arcus 90 graduum. Sicque in omnibus consimilibus debes operari, si vis invenire cordam arcus qui est differentia inter arcus inaequales cordas habentes notas etc.

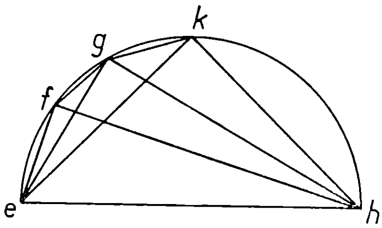

Fig. 22

Consequenter ex quarta huius et eius demonstratione habetur qualiter habita corda alicuius arcus propositi inveniri debet corda medietatis eiusdem arcus ut scilicet habita et nota corda arcus 12 graduum qualiter inveniri debet corda arcus 6 graduum et consequenter corda arcus trium graduum et postea eius qui habet unum gradum et 30 minuta et deinde eius qui constat ex dimidio gradus et eius quarto hoc est ex 45 minutis. Et hoc fit taliter: primo debet inveniri corda arcus residui semicirculi ultra arcum cordae propositae subtrahendo scilicet quadratum cordae propositae a quadrato dyametri et residui quaerendo radicem quae erit corda arcus residui semicirculi per correlarium primae huius et tunc eadem corda habita subtrahe eam a dyametro et residui quaere medietatem quam medietatem duc in dyametrum et productum erit aequale quadrato cordae medietatis arcus propositi ut patet ex demonstratione quarta huius. Et tunc illius producti quaere radicem et illa ostendit quantitatem medietatis arcus propositi. Exempli gratia: corda arcus 12 graduum continet 12 gradus 32 minuta et 36 secunda. Si igitur vis habere cordam medietatis eiusdem arcus scilicet arcus 6 graduum, tunc primo quadra praedictam cordam et eius quadratum erit 157 gradus 20 minuta 7 secunda omissis aliis fractionibus, deinde illud quadratum subtrahe a quadrato dyametri et residuum est 14242 gradus 39 minuta et 53 secunda et hoc est quadratum residui arcus semicirculi scilicet arcus 168 graduum cuius radix est 119 gradus 20 minuta 34 secunda quae est corda eiusdem arcus quam subtrahe a dyametro et residuum erit 0 gradus 39 minuta 26 secunda cuius medietas est 0 gradus 19 minuta 43 secunda quam medietatem (*fol. 94*^{v}*b*) multiplica per dyametrum primo utrumque reduc ad secunda et post multiplicationem productum erit 511056000 quarta quorum radix est 22607 secunda quae valent 6 gradus 16 minuta 47 secunda quae est corda arcus 6 graduum. Deinde si vis habere cordam arcus trium graduum, accipe quadratum cordae iam habitae scilicet arcus 6 graduum quod quadratum est 39 gradus 26 minuta 6 secunda et hoc subtrahe a quadrato dyametri et residuum erit 14360 gradus 33 minuta 54 secunda cuius radix est 119 gradus 50 minuta 8 secunda quae est corda residui arcus semicirculi ultra 6 gradus scilicet arcus 174 graduum. Qua subtracta a dyametro remanet 0 gradus 9 minuta 52 secunda cuius medietas est 0 gradus 4 minuta 56 secunda quam medietatem duc in dyametrum et productum erit 127872000 quarta cuius radix est 11308 secunda quae valent 3 gradus 8 minuta 28 secunda et haec est corda arcus trium graduum. Postea ad habendum cordam unius gradus et semis recipe quadratum cordae iam habitae quod est 9 gradus 52 minuta 0 secunda et subtrahe ipsum a quadrato dyametri et residuum erit 14390 gradus 8 minuta 0 secunda cuius radix est 119 gradus 57 minuta 32 secunda et haec est corda arcus residui ultra 3 gradus scilicet arcus 177 graduum qua subtrahe a dyametro et residuum erit 0 gradus 2 minuta 28 secunda cuius medietas est 0 gradus 1 minuta 14 secunda qua multiplica per dyametrum et productum erit 31968000 quarta cuius radix est 5654 secunda quae valent 1 gradus 34 minuta 14 secunda quae est corda arcus unius gradus et semis, hoc est 30 minutorum.

Demum si vis habere cordam arcus medietatis et quartae unius gradus hoc est 45 minutorum accipe quadratum cordae iam habitae et hoc est 2 gradus 28 minuta 0 secunda quod subtrahe a quadrato dyametri et residuum erit 14397 gradus 32 minuta 0 secunda cuius radix est 119 gradus 59 minuta 23 secunda quae est corda arcus residui semicirculi ultra 1 gradum et 30 minuta scilicet arcus 178 graduum et 30 minutorum qua subtrahe a dyametro et residuum erit 0 gradus 0 minuta 37 secunda cuius medietas est 18 secunda et 30 tertia quae reducta ad tertia duc in dyametrum et provenient 133200 tertia et hoc est aequale quadrato cordae arcus 45 minutorum quod reduc ad quarta et proveniunt 7992000 quarta quorum quaere radicem quae erit 2827 secunda quae valent 47 minuta et 7 secunda et haec est corda arcus 45 minutorum.

Eodem modo habita corda arcus 60 graduum si vis habere cordam arcus 30 graduum, recipe cordam residui arcus semicirculi ultra 60 gradus qui arcus est 120 graduum cuius corda, ut patet ex dictis prius, est 103 gradus 55 minuta et 23 secunda (*fol. 95*^{r}*a*) et illam cordam subtrahe a dyametro et residuum erit 16 gradus 4 minuta 37 secunda cuius recipe medietatem quae est 8 gradus 2 minuta 19 secunda fere quam medietatem reductam ad secunda duc in dyametrum et productum erit 3472680 tertia et hoc est aequale quadrato cordae arcus 30 graduum cuius quaere radicem quae erit 31 gradus 3 minuta 30 secunda et haec est corda arcus 30 graduum et illam cordam potes invenire dupliciter scilicet per modum iam dictum et etiam per modum in praecedenti capitulo dictum. Habita autem corda arcus 30 graduum, si vis habere cordam arcus 15 graduum quaere primo cordam arcus residui semicirculi ultra 30 gradus scilicet arcus 150 graduum. Et hoc illo modo primo cordam arcus 30 graduum iam habitam reductam ad secunda quadra et quadratum eius erit

12501476100 quarta quae valent 964 gradus 37 minuta 12 secunda etc. Et illud quadratum depone a quadrato dyametri scilicet de 14400 gradibus et residuum erit 13435 gradus 22 minuta 48 secunda et hoc est quadratum cordae residui scilicet arcus 150 graduum cuius radix est 115 gradus 54 minuta 40 secunda quae est corda arcus 150 graduum, quam subtrahe a dyametro et residuum erit 4 gradus 5 minuta 20 secunda cuius accipe medietatem quae est 2 gradus 2 minuta 40 secunda qua reduc ad secunda et provenient 7360 secunda. Et tunc multiplica eam per dyametrum et provenient 883200 secunda et hoc est quadratum cordae arcus 15 graduum, cuius radix est 15 gradus 39 minuta 47 secunda fere quae est corda arcus 15 graduum. Et illa corda habita, si vis habere cordam arcus 7 graduum et 30 minutorum quaere primo cordam residui arcus semicirculi scilicet arcus 165 graduum per correlarium primae huius. Cordam namque iam habitam reductam ad secunda quadra et eius quadratum erit 3179493769 quarta quae reducta valent 245 gradus 19 minuta 53 secunda fere. Et hoc quadratum subtrahe a quadrato dyametri et residuum erit 14154 gradus 40 minuta 7 secunda et hoc est quadratum cordae residui arcus scilicet 165 graduum cuius radix est 118 gradus 58 minuta 24 secunda quae est corda praedicti arcus. Postea illam cordam subtrahe a dyametro et residuum erit 1 gradus 1 minutum 36 secunda quorum medietas est 30 minuta et 48 secunda quae reducta ad secunda multiplica per dyametrum et productum erit 221760 secunda et hoc est quadratum cordae subtensae arcui 7 graduum et 30 minutorum cuius radix est 7 gradus 50 minuta 54 secunda et hoc est corda arcus 7 graduum et 30 minutorum. Et consimiliter habita corda arcus 36 graduum potes invenire cordam arcus 18 graduum, deinde cordam 9 graduum et postea cordam arcus 4 graduum et 30 minutorum et sic de aliis consimilibus eodem modo est procedendum (*fol. 95^{r}b*). Deinde ex quinta huius et ipsius demonstratione habetur qualiter per arcum unius gradus et dimidii et eius cordam multorum arcuum cordae possunt inveniri. Ut si corda arcus unius gradus et dimidii componitur cum quacumque cordarum notarum aut si arcus illarum cordarum duplantur vel triplantur et sic deinceps. Aut si ad arcum habentem cordam notam addatur arcus sibi aequalis aut arcus maior aut minor eo cordam etiam habens notam. Quomodo corda totius arcus ex eisdem arcubus compositi debeat inveniri, illud autem generaliter debet fieri hoc modo. Primo quaere cordam residui arcus semicirculi ad arcum cordae primo propositae per correlarium primae huius, quadratum scilicet primae cordae subtrahendo a quadrato totius dyametri et residui quaerendo radicem, deinde etiam quaere cordam residui arcus semicirculi super arcum secundae cordae primae superadditae per eundem modum. Postea cordam residui primi arcus duc in cordam residui secundi arcus et productum serva, post hoc cordam primo propositam duc in cordam secundam primae superadditam et illud quod provenit subtrahe a producto priori iam servato. Et tunc illud quod remanet divide per dyametrum et numerus quotiens ostendit quantitatem cordae superflui arcus semicirculi ultra arcum totalem compositum ex illis duobus arcubus. Quadratum ergo ipsius subtrahe a quadrato dyametri et residui quaere radicem quae erit corda totius arcus compositi. Exempli gratia: sit proposita primo corda arcus trium graduum quae habet 3 gradus 8 minuta et 28 secunda, corda vero secunda sibi superaddita sit corda arcus unius gradus et dimidii quae habet 1 gradus 34 minuta 14 secunda. Si vis habere cordam totius arcus ex hiis duobus arcubus compositi primo quadra cordam primo propositam et eius quadratum erit 9 gradus 52 minuta 0 secunda. Et hoc subtrahe a quadrato dyametri quod est 14400 gradus et residuum erit 14390 gradus 8 minuta 0 secunda cuius quaere radicem quae erit 119 gradus 57 minuta 32 secunda. Et haec est corda arcus 177 graduum qui est residuum arcus semicirculi ultra arcum trium graduum, deinde quadra cordam arcus unius gradus et dimidii et quadratum eius erit 2 gradus 28 minuta 0 secunda quod subtrahe a quadrato dyametri prius habito et residuum erit quadratum cordae residui arcus cuius quaere radicem quae erit 119 gradus 59 minuta 23 secunda et haec est corda residui arcus semidyametri super arcum unius gradus et dimidii scilicet arcus 178 gradus et dimidii, postea cordam residui arcus super arcum cordae primo propositae duc in cordam residui arcus (*fol. 95^{v}a*) semicirculi ultra arcum unius gradus et dimidii primo enim reduc utrumque ad secunda et tunc multiplica unum per reliquum et productum erit 186544085476 quarta et illud serva, deinde cordam primo propositam duc in cordam secundam sibi adiunctam et productum erit 63935432 quarta. Et hoc productum subtrahe a producto praecedenti iam servato et residuum erit 186480150044 quarta quod divide per dyametrum reductam ad secunda quae continet 432000 secunda. Et numerus quotiens post divisionem proveniens erit 431667 secunda quae valent 119 gradus 54 minuta 27 secunda. Et haec est corda residui arcus semicirculi super arcum quattuor graduum et dimidii scilicet arcus 175 graduum et 30 minutorum, deinde accipe quadratum ipsius quod est 14377 gradus 48 minuta 31 secunda et hoc subtrahe a quadrato dyametri quod est 14400 gradus et residuum erit 22 gradus 11 minuta 29 secunda cuius quaere radicem quae erit 4 gradus, 42 minuta 39 secunda et haec est corda arcus 4 graduum et 30 minutorum. Eodem modo in aliis consimilibus si ad aliquem arcum habentem cordam notam addatur arcus maior aut minor eo etiam cordam habens notam invenies cordam totius arcus ex hiis compositi, si vero aliquem arcum duplaveris aut sibi arcum ei aequalem addideris. Verbi gratia: si arcum 4 graduum et 30 minutorum cordam iam habentem notam duplaveris aut sibi arcum ei aequalem addideris et volueris scire cordam arcus duplicis aut totius arcus ex illis duobus arcubus aequalibus compositi scilicet arcus 9 graduum, primo cordam arcus 4 graduum et 30 minutorum scilicet 4 gradus 42 minuta et 39 secunda quadra et eius quadratum erit 22 gradus 11 minuta 31 secunda quod reductum ad secunda facit 79891 secunda et hoc serva. Deinde illud quadratum iam servatum subtrahe a quadrato dyametri et residuum erit 14377 gradus 48 minuta et 29 secunda. Quod residuum etiam serva et est quadratum residui arcus semicirculi ultra arcum 4 gradus et 30 minutorum scilicet arcus 175 graduum et 30 minutorum. Postea quadratum cordae primo propositae prius servatum subtrahe a quadrato cordae residui arcus etiam servato et residuum illius erit 14355 gradus 36 minuta 58 secunda quae reducta faciunt 51680218 secunda. Et hoc divide per dyametrum reductam ad secunda scilicet per 432000 secunda. Et numerus quotiens erit 119 gradus 37 minuta 48 secunda. Et haec est corda arcus 171 graduum scilicet arcus residui semicirculi ultra arcum 9 gradus (*fol. 95ᵛb*) quam cordam quadra. Et quadratum eius erit 14311 gradus 20 minuta 13 secunda. Quod quadratum subtrahe a quadrato dyametri prius habito. Et residuum erit 88 gradus 39 minuta 47 secunda quod reductum ad secunda continet 319187 secunda. Et illius quaere radicem quae erit 9 gradus 24 minuta 58 secunda et haec est corda arcus 9 graduum. Consimiliter cuiuscumque alterius arcus dupli ad aliquem arcum cordam habentem notam poteris cordam invenire etc.

Postremo ex sexta propositione potest haberi qualiter per cordam arcus unius gradus et medii et per cordam arcus medietatis et quartae unius gradus inveniri debet corda unius gradus. Si enim haberetur corda arcus 30 minutorum qui est tertia pars arcus unius gradus et dimidii, omnes cordae arcuum aliorum veraciter essent notae, quia in tabula arcuum et cordarum ponuntur arcus secundum augmentum medietatis gradus id est 30 minoturum Quare si reperiretur corda arcus medietatis gradus inveniretur cum ea per capitulum praecedentem quantitates cordarum reliquorum arcuum quae sunt inter cordas notas quas nominamus secundum veritatem numerationis linearum. Et per hoc compleremus omnes cordas semicirculi secundum superfluum medietatis gradus. Hoc autem secundum veritatem non reperitur, quoniam etsi corda arcus unius gradus et medii sit nota, corda tamen eius tertia scilicet arcus 30 minutorum sub numeri computo et secundum veritatem numerationis non est reperta. Eiusdem tamen rei notitia praesenti intentioni est necessaria, summo igitur studio et industria quamvis non contineat vere quantitatem omnium cordarum, possibile tamen est ut per ipsum inveniatur quantitas cordarum parvorum arcuum ita ut secundum veritatem nihil quod sensibile sit quantitas deficiat. Inventus est modus quo corda arcus unius gradus per cordam arcus unius gradus et medii et per cordam arcus medietatis et quartae partis unius gradus reperta est et est talis: describam circulum *a b d g* in quo protraham tres cordas quae sint *a b*, *a d* et *a g* et pono ut corda *a b* subtendatur arcui medietatis et quartae unius gradus et

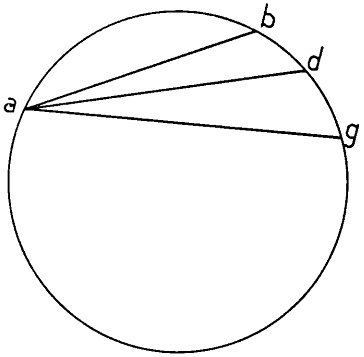

Fig. 23

corda *a d* (*fol. 96ʳa*) subtendatur arcui unius gradus et corda *a g* subtendatur arcui unius gradus et medii et quia proportio cordae *a d* ad cordam *a b* minor est proportione arcus *a d* ad arcum *a b* per sextam huius, arcus autem *a d* ad arcum *a b* est sesquitertius, continet enim tantum quantum est arcus *a b* et eius tertia. Quoniam igitur superius est ostensum quod corda *a b* est 0 gradus 47 minuta et 7 secunda et si superaddatur sibi eius tertia pars quae est 15 minuta 42 secunda et 20 tertia, productum erit 1 gradus 2 minuta 49 secunda et 20 tertia. Et hoc est in sesquitertia proportione ad cordam *a b*, sed corda *a d* minor est quam sesquitertia ad cordam *a b* quare erit minor quam 1 gradus 2 minuta 49 secunda et 20 tertia. Rursum quia proportio cordae *a g* ad cordam *a d* minor est quam proportio arcus *a g* ad arcum *a d* per eandem sextam huius, arcus vero *a g* ad arcum *a d* est sesquialterus, continet enim tantum quantum est arcus *a d* et eius medietas. Ex dictis autem superius patet quod corda *a g* est 1 gradus 34 minuta 14 secunda. Et si ab ea subtrahatur eius tertia pars quae est 31 minuta 24 secunda et 40 tertia, residuum erit 1 gradus 2 minuta 49 secunda et 20 tertia et ad illud corda *a g* est sesquialtera. Igitur corda *a d* respectu cordae *a g* erit maior quam 1 gradus 2 minuta 49 secunda et 20 tertia. Quia igitur corda unius gradus respectu cordae unius medietatis et quartae unius gradus minor est quam 1 gradus 2 minuta 49 secunda et 20 tertia et respectu cordae unius gradus et medietatis maior est quam 1 gradus 2 minuta 49 secunda et 20 tertia, manifestum est quod conveniens est ut pro corda unius gradus circuli accipiamus 1 gradus et 2 minuta et 49 secunda secundum quantitatem qua dyameter est 120 gradus. Sic enim minus quam in duabus tertiis unius tertii error erit quare multo minus quam in uno secundo, sed in inquisitione cordarum quod minus quam secundum fuerit postponitur. Et ex hoc etiam patet quod corda arcus dimidii gradus erit 0 gradus 31 minuta 25 secunda fere. Et per illius quantitatem complebitur residuum reliquarum cordarum quae cadunt inter duas cordas notas. Cordam namque arcus duorum graduum sciemus per compositionem arcus unius gradus et dimidii cum arcu unius medietatis gradus, sed cordam arcus duorum graduum et dimidii sciemus per superfluum arcus trium graduum super arcum medietatis unius gradus scilicet subtrahendo arcum medietatis gradus ab arcu trium graduum et illae duae cordae ambae cadunt inter cordam arcus unius gradus et dimidii et cordam arcus trium graduum, quae ambae sunt notae ex dictis superius et similiter sciemus quantitates reliquarum cordarum, facilis ergo est secundum praemissorum tenorem cordarum ad suos arcus agnitio. Cum enim (*fol. 96ʳb*) dubitaverimus de errore existente in aliquo numero alicuius cordarum descriptarum in tabulis earum poterimus per haec capitula rectificire illud et scire eius veritatem aut per arcum cordam habentem notam inquirendo cordam arcus residui semicirculi, aut per duos arcus inaequales cordas habentes notas investigando cordam arcus superflui quae scilicet est differentia inter eosdem duos arcus, aut per arcum cordam notam habentem perscrutando cordam medietatis eiusdem arcus, aut per arcum cordam notam habentem inveniendo cordam arcus dupli ad eundem, aut per duos arcus notos duas cordas notas habentes et ad invicem coniunctos sciendo cordam totius arcus ex eisdem duobus arcubus compositi, aut sciendo superfluum inter ipsam cordam et aliam datarum cordarum, aut sciendo cordam totius arcus qui est ad complendum circulum cum alio arcu noto cordam habente notam etc.

Autem quantitas cordarum levius sciatur et brevius. Quoniam notitia quantitatum earum multociens in practica astronomiae est necessaria et ut praeparatae sint disposui tabulam arcuum et cordarum auctam per medietates et medietates graduum hoc est per 30 et 30 minuta et continet tota tabula 6 tabulas partiales. Et unaquaeque earum habet 5 lineas. In primis enim duabus lineis ponuntur numeri graduum et minutorum arcuum per 30 et 30 minuta se excedentium, in aliis tribus lineis ponuntur gradus, minuta et secunda cordarum eis correspondentium et earum quantitates ostendentium. Cordae vero aliorum arcuum inter illos arcus residuorum inveniuntur per partem proportionalem de differentia inter duas cordas propinquiores in tabula positas secundum proportionem arcus residui ultra arcum minorem in tabula positum ad 30 minuta ut infra patebit. Illa autem tabula extenditur per gradus totius semicirculi scilicet per 180 gradus et semper medietas cordae alicuius arcus est sinus rectus medietatis eiusdem arcus. Et ideo praefatae tabulae cordarum adiunxi tabulam de sinibus etiam auctam per 30 et 30 minuta extensam tamen solum usque ad gradus unius quartae partis circuli scilicet usque ad 90 gradus. Tota autem illa tabula continet tres tabulas partiales et quaelibet earum habet 7 lineas. In primis enim duabus lineis ponuntur gradus et minuta arcuum ab uno gradu usque ad 90 gradus descendentium, in aliis vero duabus lineis ponuntur gradus et minuta arcuum a 90 gradibus usque ad 180 gradus exclusive ascendentium. Sed in ultimis tribus lineis ponuntur sinus cum quantitatibus eorum scilicet cum gradibus, minutis et secundis quantitates eorum ostendentibus et praedictis arcubus correspondentibus. Sinus vero aliorum arcuum in tabula non positorum inveniuntur per partem proportionalem ut postea docebitur. Sequitur descriptio praedictarum tabularum (*fol. 96v*).

Tabula arcuum et cordarum perfectarum aucta per 30 minuta

(siehe S. 111)

(*fol. 97r*)

Tabula de sinibus seu cordis mediatis aucta per 30 minuta

(siehe S. 112)

(*Fol. 97v a*) Si alicuius arcus propositi cordam volueris per tabulam arcuum et cordarum invenire, quaere numerum graduum et minutorum arcus propositi in primis duabus lineis eiusdem tabulae et si talem numerum ibidem praecise inveneris, habebis in directo ipsius cordam sibi correspondentem. Si vero arcum propositum non posses praecise invenire quod contingit quando in arcu proposito cuius cordam quaeris fuerunt gradus et minuta, et ista minuta fuerunt plura aut pauciora 30 minutis, tunc intra primo cum numero minori propinquiori et accipe cordam quam in directo inveneris et eam serva. Deinde intra cum numero maiori propinquiori et cordam in directo inventam scribe sub alia. Deinde scias differentiam quae est inter primam cordam et secundam subtrahendo minorem a maiore de qua differentia accipe partem proportionalem secundum proportionem minutorum in arcu proposito infra 30 minuta contentorum ad 30 minuta per communem doctrinam canonum de parte proportionali data, qua partem proportionalem adde cordae primo acceptae et habebis cordam arcus propositi. Si vero alicuius cordae volueris arcum invenire per praedictam tabulam, quaere cordam propositam in tribus ultimis lineis eiusdem tabulae et si eam praecise inveneris, accipe illud quod in primis duabus lineis in directo ipsius inveneris et hoc erit arcus quaesitus. Si vero cordam propositam praecise non inveneris, accipe minorem propinquiorem et arcum in directo existentem serva, quam cordam subtrahe a corda proposita et residuum serva quia est differentia inter cordam minorem in tabulam repertam et cordam propositam. Deinde accipe differentiam quae est inter cordam minorem propinquiorem in tabulam acceptam et cordam maiorem propinquiorem existentem in tabulam scilicet subtrahendo minorem a maiori et hanc differentiam etiam serva. Postea differentiam primo servatam multiplica per 30 minuta et productum divide per differentiam secundo servatam et quod provenerit, adde arcui quem servasti et proveniet arcus cordae propositae. Si vero alicuius arcus propositi volueris sinum rectum per eandem tabulam invenire, arcum propositum dupla et duplati quaere cordam secundum doctrinam iam datam quam cordam media et habebis sinum rectum arcus propositi. Similiter si alicuius sinus arcum volueris per eandem tabulam invenire, sinum propositum dupla et duplati quaere arcum quem arcum media et medietas illa erit arcus sinus propositi. Sinus enim semper est medietas cordae arcus duplicis porcionis (*fol. 97v b*).

Tabula arcuum et cordarum perfectarum aucta per 30 minuta

Arcus		Cordae			Arcus		Cordae			Arcus		Cordae			Arcus		Cordae			Arcus		Cordae			Arcus		Cordae		
g	m^a	g	m^a	2^a	g	m^a	g	m^a	2^a	g	m^a	g	m^a	2^a	g	m^a	g	m^a	2^a	g	m^a	g	m^a	2^a	g	m^a	g	m^a	2^a
0	30	0	31	24	30	30	31	33	50	60	30	60	27	11	90	30	85	13	20	120	30	104	11	2	150	30	116	2	44
1	0	1	2	49	31	0	32	4	8	61	0	60	54	17	91	0	85	35	24	121	0	104	26	34	151	0	116	10	40
1	30	1	34	14	31	30	32	34	22	61	30	61	21	19	91	30	85	57	23	121	30	104	41	59	151	30	116	18	28
2	0	2	5	38	32	0	33	4	35	62	0	61	48	17	92	0	86	19	15	122	0	104	57	16	152	0	116	26	8
2	30	2	37	2	32	30	33	34	46	62	30	62	16	10	92	30	86	41	2	122	30	105	12	26	152	30	116	33	40
3	0	3	8	28	33	0	34	4	55	63	0	62	42	0	93	0	87	2	42	123	0	105	27	30	153	0	116	41	4
3	30	3	39	52	33	30	34	35	1	63	30	63	8	45	93	30	87	24	17	123	30	105	42	26	153	30	116	48	20
4	0	4	11	16	34	0	35	5	5	64	0	63	35	26	94	0	87	45	45	124	0	105	57	14	154	0	116	55	28
4	30	4	42	39	34	30	35	35	6	64	30	64	2	2	94	30	88	7	7	124	30	106	11	55	154	30	117	2	28
5	0	5	14	4	35	0	36	5	5	65	0	64	28	34	95	0	88	28	24	125	0	106	26	29	155	0	117	9	20
5	30	5	45	27	35	30	36	35	1	65	30	64	55	1	95	30	88	49	34	125	30	106	40	56	155	30	117	16	4
6	0	6	16	47	36	0	37	4	55	66	0	65	21	24	96	0	89	10	39	126	0	106	55	15	156	0	117	22	40
6	30	6	48	10	36	30	37	34	47	66	30	65	47	43	96	30	89	31	37	126	30	107	9	27	156	30	117	29	8
7	0	7	19	33	37	0	38	4	36	67	0	66	13	57	97	0	89	52	29	127	0	107	23	32	157	0	117	35	28
7	30	7	50	54	37	30	38	34	22	67	30	66	40	7	97	30	90	13	15	127	30	107	37	30	157	30	117	41	40
8	0	8	22	15	38	0	39	4	5	68	0	67	6	12	98	0	90	33	55	128	0	107	51	20	158	0	117	47	43
8	30	8	53	36	38	30	39	33	46	68	30	67	32	12	98	30	90	54	29	128	30	108	5	2	158	30	117	53	39
9	0	9	24	57	39	0	40	3	24	69	0	67	58	8	99	0	91	14	56	129	0	108	18	37	159	0	117	59	26
9	30	9	56	15	39	30	40	33	0	69	30	68	23	59	99	30	91	35	17	129	30	108	32	5	159	30	118	5	6
10	0	10	27	32	40	0	41	2	33	70	0	68	49	45	100	0	91	55	32	130	0	108	45	25	160	0	118	10	37
10	30	10	58	48	40	30	41	32	3	70	30	69	15	27	100	30	92	15	40	130	30	108	58	38	160	30	118	16	1
11	0	11	30	5	41	0	42	1	30	71	0	69	41	4	101	0	92	35	42	131	0	109	11	44	161	0	118	21	16
11	30	12	1	21	41	30	42	30	54	71	30	70	6	36	101	30	92	55	38	131	30	109	24	42	161	30	118	26	23
12	0	12	32	36	42	0	43	0	15	72	0	70	32	3	102	0	93	15	27	132	0	109	37	32	162	0	118	31	22
12	30	13	3	50	42	30	43	29	33	72	30	70	57	26	102	30	93	53	11	132	30	109	50	15	162	30	118	36	13
13	0	13	35	4	43	0	43	58	49	73	0	71	22	44	103	0	93	54	47	133	0	110	2	50	163	0	118	40	55
13	30	14	6	16	43	30	44	28	1	73	30	71	47	56	103	30	94	14	17	133	30	110	15	18	163	30	118	45	30
14	0	14	37	27	44	0	44	57	10	74	0	72	13	4	104	0	94	33	41	134	0	110	27	39	164	0	118	49	56
14	30	15	8	38	44	30	45	26	16	74	30	72	38	7	104	30	94	52	58	134	30	110	39	52	164	30	118	50	14
15	0	15	39	47	45	0	45	55	19	75	0	73	3	5	105	0	95	12	9	135	0	110	51	57	165	0	118	58	24
15	30	16	10	56	45	30	46	24	19	75	30	73	37	58	105	30	95	31	13	135	30	111	3	54	165	30	119	2	26
16	0	16	42	3	46	0	46	53	16	76	0	73	52	46	106	0	95	50	11	136	0	111	15	44	166	0	119	6	20
16	30	17	13	9	46	30	47	22	9	76	30	74	17	29	106	30	96	9	2	136	30	111	27	26	166	30	119	10	6
17	0	17	44	14	47	0	47	51	0	77	0	74	42	7	107	0	96	27	46	137	0	111	39	1	167	0	119	13	44
17	30	18	16	17	47	30	48	19	47	77	30	75	6	39	107	30	96	46	24	137	30	111	50	28	167	30	119	17	13
18	0	18	46	19	48	0	48	48	30	78	0	75	32	7	108	0	97	4	55	138	0	112	1	47	168	0	119	20	34
18	30	19	17	21	48	30	49	17	11	78	30	75	55	29	108	30	97	23	20	138	30	112	12	59	168	30	119	23	47
19	0	19	48	21	49	0	49	45	48	79	0	76	19	46	109	0	97	41	38	139	0	112	24	3	169	0	119	26	52
19	30	20	19	19	49	30	50	14	21	79	30	76	43	58	109	30	97	59	49	139	30	112	35	0	169	30	119	29	49
20	0	20	50	16	50	0	50	42	51	80	0	77	8	5	110	0	98	17	54	140	0	112	45	48	170	0	119	32	37
20	30	21	21	12	50	30	51	11	18	80	30	77	32	6	110	30	98	35	52	140	30	112	56	29	170	30	119	35	17
21	0	21	52	6	51	0	51	39	40	81	0	77	56	2	111	0	98	53	42	141	0	113	7	2	171	0	119	37	49
21	30	22	22	58	51	30	52	8	0	81	30	78	19	52	111	30	99	11	27	141	30	113	17	27	171	30	119	40	13
22	0	22	53	49	52	0	52	36	16	82	0	78	43	38	112	0	99	29	5	142	0	113	27	44	172	0	119	42	29
22	30	23	24	39	52	30	53	4	29	82	30	79	7	18	112	30	99	46	35	142	30	113	37	54	172	30	119	44	36
23	0	23	55	27	53	0	53	32	38	83	0	79	30	52	113	0	100	3	59	143	0	113	47	56	173	0	119	46	35
23	30	24	26	13	53	30	54	0	46	83	30	79	54	21	113	30	100	21	16	143	30	113	57	50	173	30	119	48	26
24	0	24	56	58	54	0	54	28	44	84	0	80	17	45	114	0	100	38	26	144	0	114	7	37	174	0	119	50	8
24	30	25	27	41	54	30	54	56	42	84	30	80	41	3	114	30	100	55	28	144	30	114	17	15	174	30	119	51	43
25	0	25	58	22	55	0	55	24	36	85	0	81	4	15	115	0	101	12	25	145	0	114	26	46	175	0	119	52	10
25	30	26	28	1	55	30	55	52	26	85	30	81	27	22	115	30	101	29	15	145	30	114	36	9	175	30	119	54	27
26	0	26	59	38	56	0	56	20	12	86	0	81	50	24	116	0	101	45	57	146	0	114	45	24	176	0	119	55	38
26	30	27	30	14	56	30	56	47	54	86	30	82	13	19	116	30	102	2	33	146	30	114	54	31	176	30	119	56	39
27	0	28	0	48	57	0	57	15	33	87	0	82	36	9	117	0	102	19	1	147	0	115	3	30	177	0	119	57	32
27	30	28	31	20	57	30	57	43	7	87	30	82	58	54	117	30	102	35	22	147	30	115	12	22	177	30	119	58	18
28	0	29	1	50	58	0	58	10	38	88	0	83	21	33	118	0	102	51	37	148	0	115	21	6	178	0	119	58	55
28	30	29	32	18	58	30	58	38	5	88	30	83	44	6	118	30	103	7	44	148	30	115	29	41	178	30	119	59	23
29	0	30	2	44	59	0	59	5	27	89	0	84	6	34	119	0	103	23	44	149	0	115	38	9	179	0	119	59	44
29	30	30	33	8	59	30	59	32	45	89	30	84	28	55	119	30	103	39	37	149	30	115	46	29	179	30	119	59	56
30	0	31	3	30	60	0	60	0	0	90	0	84	51	10	120	0	103	55	23	150	0	115	54	40	180	0	120	0	0

Tabula de sinibus seu cordis mediatis aucta per 30 minuta

Arcus				Sinus				Arcus				Sinus				Arcus				Sinus			
g	mª	g	mª	g	mª	2ª		g	mª	g	mª	g	mª	2ª		g	mª	g	mª	g	mª	2ª	
0	30	179	30	0	31	24	30	30	30	149	30	30	27	8	30	60	30	119	30	52	13	17	
1	0	179	0	1	2	49		31	0	149	0	30	54	8	30	61	0	119	0	52	28	38	
1	30	178	30	1	34	14		31	30	148	30	31	21	0		61	30	118	30	52	43	45	
2	0	178	0	2	5	38		32	0	148	0	31	47	43		62	0	118	0	52	58	37	
2	30	177	30	2	37	2		32	30	147	30	32	14	17		62	30	117	30	53	13	14	30
3	0	177	0	3	8	23	30	33	0	147	0	32	40	42		63	0	117	0	53	27	37	30
3	30	176	30	3	39	46	30	33	30	146	30	33	6	58	30	63	30	116	30	53	41	46	
4	0	176	0	4	11	7	30	34	0	146	0	33	33	6		64	0	116	0	53	55	40	
4	30	175	30	4	42	28	30	34	30	145	30	33	59	4		64	30	115	30	54	9	18	30
5	0	175	0	5	13	46		35	0	145	0	34	24	52	30	65	0	115	0	54	22	42	30
5	30	174	30	5	45	2	30	35	30	144	30	34	50	32		65	30	114	30	54	35	52	
6	0	174	0	6	16	18		36	0	144	0	35	16	1	30	66	0	114	0	54	48	46	
6	30	173	30	6	47	32		36	30	143	30	35	41	22		66	30	113	30	55	1	25	
7	0	173	0	7	18	43	30	37	0	143	0	36	6	32	30	67	0	113	0	55	13	49	30
7	30	172	30	7	49	53	30	37	30	142	30	36	31	32		67	30	112	30	55	25	58	30
8	0	172	0	8	21	1	30	38	0	142	0	36	56	23		68	0	112	0	55	37	52	
8	30	171	30	8	52	7		38	30	141	30	37	21	3	30	68	30	111	30	55	49	30	30
9	0	171	0	9	23	9	30	39	0	141	0	37	45	33	30	69	0	111	0	56	0	53	30
9	30	170	30	9	54	10	30	39	30	140	30	38	9	53		69	30	110	30	56	12	1	30
10	0	170	0	10	25	8		40	0	140	0	38	34	2	30	70	0	110	0	56	22	54	
10	30	169	30	10	56	3		40	30	139	30	38	18	1		70	30	109	30	56	33	31	
11	0	169	0	11	26	54	30	41	0	139	0	39	21	49		71	0	109	0	56	43	52	
11	30	168	30	11	57	43	30	41	30	138	30	39	45	26		71	30	108	30	56	53	58	
12	0	168	0	12	28	29		42	0	138	0	40	8	52	30	72	0	108	0	57	3	48	30
12	30	167	30	12	59	11		42	30	137	30	40	32	7	30	72	30	107	30	57	13	23	
13	0	167	0	13	29	49		43	0	137	0	40	55	12		73	0	107	0	57	22	42	
13	30	166	30	14	0	24		43	30	136	30	41	18	4	30	73	30	106	30	57	31	45	
14	0	166	0	14	30	55		44	0	136	0	41	40	46	30	74	0	106	0	57	40	33	
14	30	165	30	15	1	22		44	30	135	30	42	3	17		74	30	105	30	57	49	4	30
15	0	165	0	15	31	45		45	0	135	0	42	25	35		75	0	105	0	57	57	20	
15	30	164	30	16	2	4		45	30	134	30	42	47	42		75	30	104	30	58	5	20	
16	0	164	0	16	32	17	30	46	0	134	0	43	9	37	30	76	0	104	0	58	13	4	
16	30	163	30	17	2	27	30	46	30	133	30	43	31	21		76	30	103	30	58	20	32	
17	0	163	0	17	32	32	30	47	0	133	0	43	52	52	30	77	0	103	0	58	27	44	
17	30	162	30	18	2	2	30	47	30	132	30	44	14	12		77	30	102	30	58	34	40	
18	0	162	0	18	32	27	30	48	0	132	0	44	35	19	30	78	0	102	0	58	41	20	
18	30	161	30	19	2	18		48	30	131	30	44	56	14	30	78	30	101	30	58	47	44	
19	0	161	0	19	32	2	30	49	0	131	0	45	16	57	30	79	0	101	0	58	53	51	30
19	30	160	30	20	1	42		49	30	130	30	45	37	28		79	30	100	30	58	59	43	
20	0	160	0	20	31	16	30	50	0	130	0	45	57	46		80	0	100	0	59	5	18	30
20	30	159	30	21	0	45		50	30	129	30	46	17	51		80	30	99	30	59	10	38	
21	0	159	0	21	30	7	30	51	0	129	0	46	37	43	30	81	0	99	0	59	15	41	
21	30	158	30	21	59	24	30	51	30	128	30	46	57	23	30	81	30	98	30	59	20	27	30
22	0	158	0	22	28	35		52	0	128	0	47	16	50	30	82	0	98	0	59	24	58	
22	30	157	30	22	57	39	30	52	30	127	30	47	36	4	30	82	30	97	30	59	29	12	
23	0	157	0	23	26	38		53	0	127	0	47	55	5	30	83	0	97	0	59	33	10	
23	30	156	30	23	55	30		53	30	126	30	48	13	53		83	30	96	30	59	36	52	
24	0	156	0	24	24	15		54	0	126	0	48	32	27	30	84	0	96	0	59	40	17	
24	30	155	30	24	52	54		54	30	125	30	48	50	49		84	30	95	30	59	43	26	
25	0	155	0	25	21	25	30	55	0	125	0	49	8	57		85	0	95	0	59	46	18	30
25	30	154	30	25	49	50		55	30	124	30	49	26	51		85	30	94	30	59	48	54	30
26	0	154	0	26	18	8		56	0	124	0	49	44	32	30	86	0	94	0	59	51	14	30
26	30	153	30	26	46	19		56	30	123	30	50	1	59	30	86	30	93	30	59	53	57	30
27	0	153	0	27	14	22		57	0	123	0	50	19	13		87	0	93	0	59	55	4	
27	30	152	30	27	42	18		57	30	122	30	50	36	12	30	87	30	92	30	59	56	35	
28	0	152	0	28	10	6		58	0	122	0	50	52	58	30	88	0	92	0	59	57	49	
28	30	151	30	28	37	46	30	58	30	121	30	51	9	30	30	88	30	91	30	59	58	46	
29	0	151	0	29	5	19		59	0	121	0	51	25	48	30	89	0	91	0	59	59	27	
29	30	150	30	29	32	43	30	59	30	120	30	51	41	52		89	30	90	30	59	59	52	
30	0	150	0	30	0	0		60	0	120	0	51	57	41	30	90	0	90	0	60	0	0	

Cum autem alicuius arcus propositi sinum rectum volueris per tabulam de sinibus invenire, si in arcu proposito fuerint aliqua signa resolve ea in gradus et si illi gradus fuerint pauciores 180 gradibus, intra cum eis eandem tabulam. Si vero fuerint plures 180 gradibus, subtrahe ab eis 180 gradus et cum residuo intra, quaere ergo arcum propositum in praedictam tabulam in lineis numeri. Et si eum ibidem praecise inveneris, habebis in directo ipsius sinum sibi correspondentem. Si autem ipsum non praecise inveneris, tunc intra cum duplici introitu ut dictum est, et de differentia quae est inter sinum maiorem et minorem, accipe partem proportionalem secundum proportionem minutorum ultra arcum minorem in tabulam inventum in arcu proposito contentorum ad 30 minuta. Quam partem proportionalem adde ad sinum primo acceptum si secundus fuerit maior vel subtrahe eam a sinu primo accepto si secundus fuerit minor eo. Et quod post additionem vel subtractionem provenerit, erit sinus rectus arcus propositi. Sinum vero versum sic invenies: si arcus propositus fuerit minor 90 gradibus, subtrahe ipsum a 90 gradibus et residui scias sinum rectum quem subtrahe de 60 gradibus. Si vero arcus propositus fuerit maior 90 gradibus, subtrahe ab eo 90 gradus et residui accipe sinum rectum quem adde ad totum sinum scilicet ad 60 gradus, et quod post subtractionem aut additionem provenerit, erit sinus versus arcus propositi. Si autem volueris invenire arcum alicuius sinus propositi si sinus propositus fuerit rectus, fac praecise eodem modo sicut dictum est in capitulo praecedenti quaerendo arcum per cordam. Sed si sinus propositus fuerit versus et fuerit minor 60 gradibus, tunc subtrahe ipsum de 60 gradibus et residui quaere arcum quem subtrahe de 90 gradibus et remanebit arcus illius sinus versi. Si vero fuerit maior 60 gradibus, tunc subtrahe ab ipso 60 gradus et residui quaere arcum ut dictum est, quem arcum adde 90 gradibus et habebis arcum illius sinus versi. Et si alicuius arcus propositi volueris cordam perfectam per hanc tabulam invenire, arcum propositum media et ipsius medietatis quaere sinum quem dupla et duplatum est corda arcus propositi. Cum autem e contrario alicuius cordae propositae volueris arcum invenire, cordam propositam media et illius medietatis scias arcum quem arcum dupla et duplatum est arcus illius cordae propositae. Et haec de cordis et sinibus ac suis arcubus sufficiant.

Explicit tractatus secundus de cordis et sinibus ac arcubus eorum, compositus Wyenne per Magistrum Johannem de Gmunden et finitus per eundem in die sanctae Luciae virginis et martiris Anno Domini 1437.