ÖSTERREICHISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE
DENKSCHRIFTEN, 116. BAND, 5. ABHANDLUNG

WOLFGANG KAUNZNER

ÜBER EINEN FRÜHEN NACHWEIS ZUR SYMBOLISCHEN ALGEBRA

EIN BEITRAG ZUR GESCHICHTE DER ALGEBRA

HERRN PROFESSOR DR. KURT VOGEL, MÜNCHEN, ZUM 85. GEBURTSTAG AM 30. 9. 1973 IN VEREHRUNG UND DANKBARKEIT GEWIDMET

WIEN 1975

IN KOMMISSION BEI SPRINGER-VERLAG, WIEN/NEW YORK

DRUCK: ERNST BECVAR, A-1130 WIEN

ÖSTERREICHISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE
DENKSCHRIFTEN, 116. BAND, 5. ABHANDLUNG

WOLFGANG KAUNZNER

ÜBER EINEN FRÜHEN NACHWEIS ZUR SYMBOLISCHEN ALGEBRA

EIN BEITRAG ZUR GESCHICHTE DER ALGEBRA

HERRN PROFESSOR DR. KURT VOGEL, MÜNCHEN, ZUM 85. GEBURTSTAG AM 30. 9. 1973 IN VEREHRUNG UND DANKBARKEIT GEWIDMET

WIEN 1975

IN KOMMISSION BEI SPRINGER-VERLAG, WIEN/NEW YORK

DRUCK: ERNST BECVAR, A-1130 WIEN

Druck: Ernst Becvar, A-1130 Wien

ISBN 3-211-86440-7
ISBN 0-387-86440-7

VORWORT

Die mittelalterliche Gelehrsamkeit fand ihre Stütze fast ausschließlich in den Klöstern. Man spricht nicht zu Unrecht von der Klostergelehrsamkeit des Mittelalters, denn einige Orden hatten sich der Erhaltung und Pflege nicht nur der geistlichen, sondern auch der weltlichen Wissenschaften verschrieben. Die Benediktiner brachten in ihren süddeutschen Klöstern vor allem der Bewahrung, Förderung und Vertiefung der naturwissenschaftlichen und mathematischen Kenntnisse großes Interesse entgegen. Erinnert sei an die Leistungen, wie sie uns aus Augsburg, Melk, Regensburg, Reichenbach, Tegernsee und etlichen anderen Wirkungsstätten entweder durch bloße Überlieferung — etwa der noch heute im Volksmund so genannte „mathematische Turm“ in Reichenbach in der Oberpfalz — oder durch die sichtbaren Zeugnisse in Form von erhaltenen Bücherbeständen offenbart werden.

Im gleichen Konvent steht auch das Kloster Admont in der Steiermark. Ausgelöst durch ungünstige finanzielle Verhältnisse, mußten etliche der dortigen mittelalterlichen Handschriften in den 30er Jahren dieses Jahrhunderts verkauft werden. Auf dem Umweg über die Bodleian Library in Oxford kann nun die vorliegende Studie über die wahrscheinlich älteste bislang bekannte symbolische Algebra in unserem Sprachraum einer österreichischen Stelle zum Druck dargebracht werden.

Herrn Professor Dr. Günther Hamann sei für die Aufnahme dieses Manuskriptes in die Schriftenreihe der Österreichischen Akademie der Wissenschaften hier der geziemende Dank abgestattet.

Regensburg, im Herbst 1972 Wolfgang Kaunzner

ÜBER EINEN FRÜHEN NACHWEIS ZUR SYMBOLISCHEN ALGEBRA

In den Texten unserer mittelalterlichen mathematischen Handschriften findet sich trotz des reichlichen Stoffangebotes aus den damals gängigen Disziplinen — einschließlich Astronomie, Astrologie, Geomantie und Punktierkunst einerseits und praktischer und theoretischer Geometrie andererseits — ein ziemlich einheitlicher Zug: Man spürt zuweilen direkt die Anonymität des Schreibers, der sich nicht immer dazu bereit erklärt, seinen Namen unter die von ihm geschriebene Abhandlung zu setzen; sei es, daß er vielleicht nur geringen inneren Anteil an dieser Tätigkeit genommen hatte (manchmal sprechen die vielen Fehler dafür), sei es, daß er bereits von einer schlechten Vorlage abgeschrieben hatte, sei es schließlich, daß andere Gründe vorgelegen hatten.

Besonderheiten in handschriftlichen mathematischen Texten sind deshalb nur verhältnismäßig selten anzutreffen, wenn man von den Eigenheiten absieht, die einer beim Schreiben von Ziffern oder beim Malen von Buchstaben sich angewöhnen konnte. Auch in der Entwicklung der mathematischen Ideen ist in dieser Zeit eine gewisse Stagnation festzustellen. Vom 10. bis zum 15. Jahrhundert, von GERBERT VON AURILLAC (940?—1003) bis kurz vor JOHANNES REGIOMONTAN (1436—1476), treten uns großenteils gleichbleibende Probleme entgegen, die sich freilich den besonderen Notwendigkeiten anpassen oder der persönlichen Färbung durch den Bearbeiter oder Schreiber nicht zu entziehen vermögen.

Um so stärker fallen Neuerungen auf. In sachlicher Hinsicht ist es im angesprochenen Zeitabschnitt u. a. der Übergang von den römischen zu den indisch-arabischen Zahlzeichen, wobei sehr spezielle Schreibweisen entgegentreten. Mit dem Bekanntwerden der Algebra MOHAMMED IBN MUSA ALCHWARAZMIS (780?—850?) regte sich bei manchem Bearbeiter wahrscheinlich auch die Neigung, mehr Übersicht in das Dargebotene zu bringen; vielleicht machte sich hier der Einfluß von Zwischenstationen — hauptsächlich Spanien und Italien — besonders mit geltend.

Anregungen dürften zu nicht unerheblichem Teil von Italien ausgegangen sein, ausgelöst vorwiegend durch die Arbeiten des LEONARDO VON PISA (1180?—1250?); sicherlich spielten auch Abkürzungen in kaufmännischen Rechnungen, aus denen sich u. a. unser + und — entwickelt haben wird, eine Rolle.

Andere Mathematiker hingegen scheinen kaum neue Ideen in die mit herangezogene Lehre ALCHWARAZMIS eingeflochten zu haben, so etwa JOHANNES DE MURIS (1290?—1360?) in seinem „Quadripartitum numerorum"[1]). Wechselnd dürfte DE MURIS einmal mehr oder ausschließlich dem Werke ALCHWARAZMIS, dann entsprechend dem des LEONARDO gefolgt sein[2]).

---

[1]) Nach Untersuchung dieser Abhandlung in MS 4770 der Österreichischen Nationalbibliothek Wien schrieb KARPINSKI, LOUIS CHARLES: *The „Quadripartitum numerorum" of John of Meurs*, Bibliotheca Mathematica, Folge 3, Band 13, Heft 2, Leipzig 1913, S. 103: „A marginal gloss of the fifteenth century shows that the algebra of DE MURIS was studied at that time: BIANCHINI says: ‚Nunc volo te cautum reddere et revelare secretum, quod per alios non revelitur' the gloss adds: ‚preter MAHUMETUM de algebra et almuchabala: nota JOHANNEM DE MURIS in Quadripartito numerorum et ceteros moderniores.'" bzw. S. 114: „For the actual development of the science of algebra DE MURIS contributed nothing. His significance for the history of mathematics is as an expounder of the ideas of other men. The measure of his success in this regard is indicated by the rather large use which was made of his work by later and more important mathematicians"

[2]) KARPINSKI[1], S. 107f. und 111f., vermutet direkte Beziehung ALCHWARAZMI—DE MURIS; S. 102, 108 und 112f. spricht er von einer entsprechenden Abhängigkeit LEONARDO—DE MURIS, wobei etwa dem Reime

So ist es verständlich, daß die Algebra ALCHWARAZMIS unter den Händen verschiedener Bearbeiter zu voneinander etwas unterschiedlichen Darstellungen gelangte. Je nach der persönlichen Einstellung wird der eine Übersetzer oder Kommentator wohl mehr die geometrische, ein anderer mehr die arithmetische, ein dritter die merkantile Seite in den Vordergrund seiner Überlegungen gerückt haben. Die nach außen hin erkennbaren Resultate sind in den überkommenen Texten deutlich gegeneinander abzugrenzen. Dies führte notgedrungen auch zu unterschiedlichen Editionen[3]).

Eine Übertragung der Algebra ALCHWARAZMIS, direkt aus dem Arabischen ins Englische, erfolgte durch ROSEN[4]). Die Herausgabe wurde erstellt nach MS CMXVIII Hunt 214 der Bodleian Library in Oxford[5]). Es handelt sich um eine im Jahre 1342 verfaßte arabische Abschrift[6]).

In der Version des ROBERT VON CHESTER (um 1150) — übersetzt ins Lateinische in Segovia im Jahre 1145[7]) — im Dresdener Kodex C 80[8]) sind die Zahlen römisch bzw. von späterer Hand durch Darüberschreibungen oder in Randnotizen arabisch verziffert. Dieser Text soll dem 2. Teil des 15. Jahrhunderts entstammen[9]); meiner Ansicht nach ist er älter — er könnte im 14. Jahrhundert geschrieben worden sein. Die Einheit, die algebraische Unbekannte und deren Quadrat — höhere Potenzen treten nicht auf — sind um die nämliche Zeit in den bei uns zugänglichen Handschriften nicht abgekürzt[10]). Die Edition durch KARPINSKI[11]) erfolgte nach einem Manuskript, welches der Tübinger Universitätsprofessor JOHANN SCHEYBL (1494—1580) für den Druck angefertigt hatte[12]). Die Abhandlung ist auch in der sicherlich erst dem 15. Jahrhundert entstammenden Wiener Handschrift Nr. 4770 enthalten[13]).

Die um 1150 von GERHARD VON CREMONA (1114—1187) in Toledo angefertigte lateinische Übersetzung[14]) scheint hinsichtlich ihrer weiteren Bearbeitungen die meisten Fragen

---

„Hoc opus est sectum per partes quatuor, vna / praebet radices, medullam datque secunda, Tercia fert flores, fructum pars vltima gustat, Quadripartitum liber hic numerorum“ in MS Wien 4770, f. 174[r]f., die „Flos“ des LEONARDO mit Pate gestanden haben soll.

[3]) Es ist hier nicht der Ort, um über die Art dieser Editionen auszusagen, vor allem über die Behandlung der nicht immer beigefügten Erbteilungsaufgaben, wie etwa GANDZ, SOLOMON: *The Algebra of Inheritance, A rehabilitation of Al-Khuwārizmī*, Osiris, Volumen 5, Brügge 1938, S. 323 und öfter.

[4]) ROSEN, FREDERIC: *The Algebra of Mohammed ben Musa*, London 1831.

[5]) ROSEN[4], S. XIII.

[6]) ROSEN[4], S. XIII.

[7]) JUSCHKEWITSCH, A. P.: *Geschichte der Mathematik im Mittelalter*, Leipzig 1964, S. 187, 204 und 341. Das Jahr 1145 entspricht dem Jahre 1183 der spanischen Ära. Hierzu auch STEINSCHNEIDER, MORITZ: *Zum Speculum astronomicum des Albertus Magnus, über die darin angeführten Schriftsteller und Schriften*, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Jahrgang 16, Heft 1, Leipzig 1871, S. 392; STEINSCHNEIDER, MORITZ: *Die europäischen Übersetzungen aus dem Arabischen bis Mitte des 17. Jahrhunderts*, Sitzungsberichte der philosophisch-historischen Klasse der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Band 149, Wien 1905, S. 72. Im Dresdener Kodex C 80, f. 340[r], steht als Randbemerkung WAPPLERS die Notiz, diese Algebra wurde 1181 — also spanische Ära — von ROBERTUS CASTRENSIS in Segovia übersetzt. Verwiesen sei auch auf: *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete*, Band 174, 1969, S. 287. Eine dortige Notiz wird nun gegenstandslos.

[8]) Zur Erläuterung sehe man KARPINSKI, LOUIS CHARLES: *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of Al-Khowarizmi*, University of Michigan Studies, Humanistic Series, Volume 11, New York 1915, S. 49—63.

[9]) KARPINSKI[8], S. 52.

[10]) WAPPLER, HERMANN EMIL: *Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert*, Programm Gymnasium Zwickau, 1887, S. 1, führt „census“ und „substancia“ als Fachwörter für x^2 auf.

[11]) KARPINSKI[8].

[12]) KARPINSKI[8], S. 61—63.

[13]) Dieses Manuskript wird — etwa bei CURTZE, MAXIMILIAN: *Eine Studienreise*, Centralblatt für Bibliothekswesen, Jahrgang 16, Heft 6 und 7, Leipzig 1899, S. 289; KARPINSKI[8], S. 52 — wohl zu Unrecht ins 14. Jahrhundert datiert.

[14]) JUSCHKEWITSCH[7], S. 204 und 343.

aufgeworfen zu haben. Eine Edition von BONCOMPAGNI[15]) nach dem nichtdatierten[16]) MS Vat. lat. 4606, f. 72r—77r, — Herkunft unbekannt[17]) — trägt zwar die Überschrift: „Incipit liber qui secundum arabes uocatur algebra et almucabala, et apud nos liber restauracionis nominatur, et fuit translatus a magistro Giurardo cremonense, in toleto de arabico in latinum"; doch „aus der Lebensbeschreibung GERHARDS wissen wir, daß er seine Übersetzungen nicht signierte"[18]), bzw. wir erfahren, daß er „aus Bescheidenheit seinen Übersetzungen nur selten seinen Namen beigefügt hat, und wir verdanken die Kenntnis hierüber seinen Freunden"[19]). CURTZE[20]) hat behauptet, BJÖRNBO[21]) nach vorausgegangenen Untersuchungen ENESTRÖMS[22]) schließlich nachgewiesen, daß der nach einem unbekannten Verfasser durchgeführte Abdruck von LIBRI[23]) als Ergebnis einer direkten Übersetzung der Algebra ALCHWARAZMIS durch GERHARD VON CREMONA[24]) aus dem Arabischen ins Lateinische anzusehen ist. Die Bestätigung hierfür fand HEIBERG im lateinischen Madrider MS Aa 30, wahrscheinlich 14. oder 15. Jahrhundert, wo LIBRIS Text f. 352v—359r steht und vorgestellt wird als: „Liber MAUMET filii MOYSI ALGORISMI de algebra et almichabala translatus a magistro GERARDO CREMONENSI in Toleto de arabico in latinum"[25]). Bei der Abhandlung in Cod. vat. lat. 4606 dürfte es sich um eine mittelalterliche (italienische?) Bearbeitung oder Modernisierung von einer nach dem Arabischen hergestellten Übersetzung, wie z. B. LIBRIS Vorlage, handeln[26]).

Die Araber hatten in den eigentlichen mathematischen Schriften bis zum 13. Jahrhundert hin Zahlen nicht verziffert, sondern ausgeschrieben[27]). Von ihnen konnte kaum der Anstoß kommen, der nötig war, um sowohl die Zahlen als auch die Potenzen der algebraischen Unbekannten in den überlieferten Texten durch Symbole auszudrücken. Die

---

[15]) BONCOMPAGNI, BALDASSARRE: *Della vita e delle opere di Gherardo cremonese, traduttore del secolo duodecimo*, Atti dell'Accademia Pontificia de'nuovi lincei, Rom 1852, S. 412—435. Von THORNDIKE, LYNN and KIBRE, PEARL: *A Catalogue of Incipits of Mediaeval Scientific Writings in Latin*, London [2]1963, Sp. 1601.3, wird aufgeführt: „Unitas est principium numeri et non est numerus   Al Khorwarizmi (?), Algebra, tr Gerard of Cremona: Steinschneider (1905), 31; Isis XIII (1929), 81; text ed. Boncompagni GdC 412—435" Man sehe also STEINSCHNEIDER[7(2)], S. 31 und THORNDIKE, LYNN: *Vatican Latin Manuscripts in the History of Science and Medicine*, Isis, Volume 13, Brügge 1929/30, S. 81. Eine Andeutung auch bei WÜSTENFELD, F.: *Die Übersetzungen Arabischer Werke in das Lateinische seit dem XI. Jahrhundert*, Abhandlungen der historisch-philologischen Classe der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Band 22, Göttingen 1877, S. 61.

[16]) BONCOMPAGNI[15] scheint auf die Frage des Alters dieser Handschrift nicht einzugehen. Eine gedruckte Beschreibung existiert nicht; hierzu THORNDIKE[15(2)], S. 54. Seitens der Vatikanischen Bibliothek wurde die Entstehungszeit nicht näher fixiert.

[17]) Einzelheiten ließen sich auch durch Anfrage in Rom nicht ermitteln.

[18]) BJÖRNBO, AXEL ANTHON: *Gerhard von Cremonas Übersetzung von Alkwarizmis Algebra und von Euklids Elementen*, Bibliotheca Mathematica, Folge 3, Band 6, Heft 3, Leipzig 1905, S. 240.

[19]) WÜSTENFELD[15], S. 56.

[20]) CURTZE[13], S. 289.

[21]) BJÖRNBO[18], S. 240f.

[22]) ENESTRÖM, GUSTAF: *Ein neues literarisches Hilfsmittel zur Verbreitung mathematisch-historischer Kenntnisse*, Bibliotheca Mathematica, Folge 3, Band 5, Heft 4, Leipzig 1905, S. 404.

[23]) LIBRI, GUILLAUME: *Histoire des sciences mathématiques en Italie, depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle*, Band 1, Paris 1838, S. 253—289.

[24]) Diese Darstellung hatte sich bald fixiert; etwa bei RUSKA, JULIUS: *Zur ältesten arabischen Algebra und Rechenkunst*, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Philosophisch-historische Klasse, Jahrgang 1917, Abhandlung 2, Heidelberg 1917, S. 23.

[25]) BJÖRNBO[18], S. 241. Wieweit diese Überschrift als richtig anzusehen ist, muß nach dem über MS Vat. lat. 4606 Gesagten offenbleiben.

[26]) BJÖRNBO[18], S. 240.

[27]) TREUTLEIN, PETER: *Die deutsche Coss*, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Supplement zur hist.-lit. Abteilung, Jahrgang 24, Leipzig 1879, S. 30. MENNINGER, KARL: *Zahlwort und Ziffer, Eine Kulturgeschichte der Zahl*, Band 2, Göttingen [2]1958, S. 67, 82, 84 und 225. HOFMANN, JOSEPH EHRENFRIED: *Geschichte der Mathematik 1, Von den Anfängen bis zum Auftreten von Fermat und Descartes*, Sammlung Göschen, Band 226/226a, Berlin [2]1963, S. 64.

Vermutung, daß man noch auf Glieder zwischen dieser und der zum Teil symbolisierten Form stoßen müßte, wie sie uns bei FRIDERICUS GERHART (gest. 1464/65), dem Regensburger Benediktinermönch, um 1461 begegnet[28]) bzw. in REGIOMONTANS nahezu symbolischer Algebra um 1463[29]), faßte man z. B. in die Worte: „Die in Italien seit langer Zeit blühende Algebra wird solche Abkürzungszeichen ausgiebig benutzt haben“[30]).

Die nämliche Algebra, wie sie in Cod. vat. lat. 4606 entgegentritt, findet sich noch in der ehemaligen Admonter Pergamenthandschrift Nr. 612 — ein Manuskript, in dem sich auch Originaleintragungen von NICOLAUS VON CUES (1401—1464) befinden[31]) —, jetzt MS Lyell 52 der Bodleian Library in Oxford, f. 42ʳ—49ᵛ. Es handelt sich hierbei um einen Kodex, welcher bereits im Jahre 1380 im Admonter 2. Bücherkatalog des PETER VON ARBON[32]) verzeichnet ist als: „Item introductorius liber in mathematicam, incipit ‚Si quis‘; in eodem liber ysagogarum algorismi et algorismus de integris et tabule planetarum“[33]). Das lateinische Werk wurde nach Auskunft von Frau Dr. DE LA MARE, der zuständigen Oxforder Bibliothekarin, im 14. Jahrhundert in Italien von vier Händen geschrieben[34]). Bei Behandlung der Algebra ALCHWARAZMIS mit ihren sechs traditionsreichen Gleichungstypen[35]) erscheinen die indisch-arabischen Ziffern in einer der frühen Formen, die sonst auch für gewöhnlich um diese Zeit bei uns anzutreffen sind. Für die Einheit, für unser x und x^2 lesen wir: dragma oder numerus, radix und census. Im Anschluß an die ersten Kapitel folgen hier und in der Vatikanhandschrift — abweichend von den üblichen Darstellungen der Überlieferung[36]) — zusätzliche Angaben mit abgekürzter Schreibweise der genannten Ausdrücke[37]); dies demnach um mindestens 80 Jahre vor den bekannten frühesten mittelalterlichen Nachweisen, wie sie in ehedem Regensburger Manuskripten anzutreffen sind[38]). Die Reihenfolge: Einheit — Unbekannte — Quadrat der Unbekannten heißt nun auch: dragma oder numerus — res — census.

Trotz des Verdienstes, welches sich BONCOMPAGNI mit der Herausgabe der Algebra in MS Vat. lat. 4606 erwarb, sind von ihm nicht alle für die Geschichte der Algebra einschlägigen Merkmale dieser Abhandlung deutlich genug gewürdigt worden; denn wir lesen: „Nella versione da me riportata di sopra, due cose meritano d'essere specialmente considerate, cioè: 1.º i versi relativi alla risoluzione delle equazioni di secondo grado: 2.º la notazione delle quantità negative“[39]). Die Versform, in welche die Lösungsvorschriften der

---

[28]) Man sehe seine Abhandlungen in Clm 14908.

[29]) MS Cent 5 app 56ᶜ der Nürnberger Stadtbibliothek. Hierzu CURTZE, MAXIMILIAN: *Der Briefwechsel Regiomontan's mit Giovanni Bianchini, Jacob von Speier und Christian Roder*, Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance, Teil 1, Leipzig 1902.

[30]) TROPFKE, JOHANNES: *Geschichte der Elementar-Mathematik*, Band 2, Berlin und Leipzig ³1933, S. 143. Dies ist eine Schlußfolgerung aus der Erkenntnis, daß die im Dresdener Kodex C 80, f. 368ʳ—378ᵛ, niedergeschriebene „Deutsche Algebra“ von 1481 mit einschlägiger algebraischer Symbolik nach italienischer Vorlage gearbeitet worden sein muß.

[31]) KRCHŇÁK, ALOIS: *Neue Handschriftenfunde in London und Oxford*, Mitteilungen und Forschungsbeiträge der Cusanus-Gesellschaft 3, Mainz 1963, S. 104f.

[32]) MÖSER-MERSKY, GERLINDE: *Mittelalterliche Bibliothekskataloge Österreichs*, Band 3, Steiermark, Graz—Wien—Köln 1961, S. 34—63. Teilweise ediert von WICHNER, P. J.: *Zwei Bücherverzeichnisse des 14. Jahrhunderts in der Admonter Stiftsbibliothek*, Beihefte zum Centralblatt für Bibliothekswesen, Band 1, Heft 4, Leipzig 1889.

[33]) MÖSER-MERSKY[32], S. 61; WICHNER[32], S. 34.

[34]) Ich danke Frau Dr. DE LA MARE für die Unterstützung während meiner Untersuchungen in Oxford. Sie stellte mir ihr Konzept des neuen Bibliothekskataloges zur Verfügung; dieses ist mittlerweile erschienen als LA MARE, ALBINIA DE: *Catalogue of the collection of medieval manuscripts bequeathed to the Bodleian Library, Oxford, by James P. R. Lyell*, Oxford 1971. Beschreibung von MS Lyell 52 auf S. 143—146.

[35]) In heutiger Schreibweise: $ax^2 = bx$; $ax^2 = c$; $bx = c$; $ax^2 + bx = c$; $ax^2 + c = bx$; $ax^2 = bx + c$.

[36]) ROSEN[4], LIBRI[23], KARPINSKI[8].

[37]) MS Lyell 52, f. 44ᵛf.; MS Vat. lat. 4606, f. 73ᵛ.

[38]) In Clm 14908.

[39]) BONCOMPAGNI[15], S. 435.

quadratischen Gleichungen gefaßt sind, wird bereits als nahezu atypisch für eine aus dem Arabischen stammende Übersetzung angesehen[40]). BONCOMPAGNI weist somit keineswegs zur Genüge darauf hin, daß in dieser Version der Algebra ALCHWARAZMIS auch algebraische Symbole Verwendung finden[41]). Hieraus könnten wir schließen, daß er diese Tatsache nicht richtig schätzte (was bei diplomatischen Editionen verständlich wäre) oder daß er mehrere Vorlagen kannte, in welchen mit solcher Symbolik gearbeitet wurde und er es folglich nicht nötig fand, dies besonders herauszustellen.

Nach Auskunft der Vatikanischen Bibliothek stammen diese abgekürzten algebraischen Angaben in MS 4606 am Rande von f. 73^{v} von der gleichen Hand mit der nämlichen Tinte wie der übrige Wortlaut, allerdings rot umrahmt. Im Abdruck erscheinen diese Skizzen — vielleicht als für den Herausgeber nur zweitrangig wichtige Stellen — in Fußnoten[42]). Beide Algebren — MS Vat. lat. 4606 und MS Lyell 52 — hängen wahrscheinlich über noch nicht bekannte Quellen voneinander ab. Eine datierte Pergamenthandschrift — MS Lyell 52 entstand vor 1380[43]) —, in welcher die uns angehende Symbolik nachzuweisen ist, von einer einzigen Hand geschrieben, wo zudem später noch für die Wurzel ein Kürzel erscheint, welches im Vatikantext nicht auftritt, ist aber für die Beantwortung der uns angehenden Frage — einen frühen Nachweis zur symbolischen Algebra anzugeben — wahrscheinlich eine stärkere Stütze als die nichtdatierte[44]) Abhandlung in der Vatikanischen Papierhandschrift 4606, die von BONCOMPAGNI ediert wurde[45]).

Die hier interessierende Textstelle in MS Lyell 52 lautet[46]): Porro omnis compotus [,] qui in restauratione diminuti uel proiectione superhabundantis[47]) exercetur [,] ad aliquod horum .6. capitulorum conuertibilis est. quod [,] ut leuius fiat discenti, quedam scribendi

---

[40]) BJÖRNBO[18], S. 240.

[41]) Abdruck BONCOMPAGNI[15], S. 420—423.

[42]) BONCOMPAGNI[15], S. 420—422.

[43]) MÖSER-MERSKY[32], S. 34—63.

[44]) Man sehe hier Fußnote 16.

[45]) BONCOMPAGNI[15], S. 437, weist darauf hin, daß sich die nämliche Algebra in italienischer Fassung in MS Vat. urbinatus 291 nachweisen läßt, vorgestellt als Übersetzung GERHARD VON CREMONAS aus dem Arabischen ins Lateinische in Toledo. Laut Bibliothekskatalog handelt es sich hier um eine Papierhandschrift des 15. Jahrhunderts, unser Text beginnt f. 34^{r}; die für f. 61^{r} zitierte Bemerkung „Io. petrus de penis fecit hoc opus 1313 die 18 Iunii" scheint für unsere Betrachtungen nicht relevant zu sein.

[46]) Sie findet sich analog in MS Vat. lat. 4606, f. 73^{v}; hiernach abgedruckt bei BONCOMPAGNI[15], S. 420—422. Die sinngemäße Übertragung heißt etwa wie folgt:

Fortab ist jede Rechnung, wo etwas hinzuzugeben oder etwas abzuziehen ist, auf eines dieser sechs Kapitel [siehe Fußnote 35] übertragbar. Damit das Folgende leichter verstanden werden kann, geben wir einige Schreib- und Multiplikationsregeln an. Durch diese werden ganzzahlige Unbekannte gegenseitig und auch Unbekannte, von welchen eine Konstante abgezogen wird oder die eine überschüssig haben, oder welche von einer Konstanten abzuziehen oder ihr überschüssig sind, multipliziert. Vorausgesetzt wird, daß x mal x den Term x^2 ergibt und x mal Konstanter bloß eine Anzahl der x. Beim Schreiben freilich ist nachstehende Regel zu befolgen: Der Anzahl der x^2 wird der Buchstabe c, der Anzahl der x der Buchstabe r hinzugefügt, unten mit Strichen versehen, wobei sie zusätzlich daruntergeschrieben werden. Die Einheiten aber sollen Striche ohne Buchstaben erhalten, soferne sie ohne Verminderung vorangestellt werden. In Worten: 2 census, 3 radices, 4 dragmae sieht aus: $\boxed{\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ \underline{c} & \underline{r} & \underline{d} \end{array}}$ $[= 2\,x^2 + 3\,x + 4]$. $\frac{2}{3}$ census, $\frac{3}{4}$ radices, $\frac{4}{5}$ dragmae wird wie folgt notiert: $\boxed{\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ \underline{c} & \underline{r} & \underline{d} \end{array}}$ $[= \frac{2}{3}\,x^2 + \frac{3}{4}\,x + \frac{4}{5}]$. Sobald aber in einem der genannten Ausdrücke etwas negativ vorausgesetzt wird, schreibt man es auf andere Weise darunter und wählt einen Punkt an Stelle des Striches, um die Verminderung zu kennzeichnen. In Worten: 2 census minus 3 radices, 2 census minus 4 dragmae, 5 radices minus 2 census, 5 radices minus 4 dragmae wird so angeschrieben: $\boxed{\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 5 & 5 \\ \underline{c} & \underline{c} & \underline{r} & \underline{r} \\ 3 & \underset{\cdot}{4} & 2 & \underset{\cdot}{4} \\ \underset{\cdot}{r} & & \underset{\cdot}{c} & \end{array}}$ $[= 2\,x^2 - 3\,x + 2\,x^2 - 4 + 5\,x - 2\,x^2 + 5\,x - 4]$.

Im folgenden: B = BONCOMPAGNI[15]; L = MS Lyell 52; V = MS Vat. lat. 4606.

[47]) V: particione superhabundans.

et multiplicandi praecepta damus, quibus integre[48]) res ad inuicem[49]), necnon res [,] quibus diminuitur uel superhabundat numerus, aut quae diminuuntur[50]) uel superhabundant numero [,] multiplicentur, hoc praesumpto[51]), quod ex ductu rei in rem prouenit terminum [?][52]) census, et ex ductu rei in numerum non nisi rerum multitudo. In scribendo quidem[53]) haec regula teneatur [:] numero censuum littera .c. [,] numero radicum littera .r. [,] deorsum uirgulas habentes [,] subterius apponantur. dragme uero sine litteris uirgulas habeant [,] quotiens haec sine diminutione praeponuntur[54]). Verbi gratia [:] .2. census [,] .3. radices [,] .4.[55]) dragme sic figurentur: $\begin{array}{|ccc|} \hline 2 & 3 & 4 \\ \underline{c} & \underline{r} & \underline{d} \\ \hline \end{array}$[56]) [.] due tertie census [,] .3. quarte radices[57]) [,] .4. quinte unius dragme hoc modo[58]): $\begin{array}{|ccc|} \hline 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ \underline{c} & \underline{r} & \underline{d} \\ \hline \end{array}$[59]) [.] Quotiens autem ex aliquo istorum diminutum quid[60]) proponitur[61]) [,] aliud[62]) ei subscribatur, habens punctum loco uirgule, diminutionem indicans. | verbi gratia [:] .2. census minus tribus radicibus [,] .2. census minus .4. dragmis [,] .5. radices minus duobus censibus [,] .5. radices minus .4. dragmis, sic notentur[63]): $\begin{array}{|cccc|} \hline 2 & 2 & 5 & 5 \\ \underline{c} & \underline{c} & \underline{r} & \underline{r} \\ 3 & \underset{\cdot}{4} & 2 & \underset{\cdot}{4} \\ \underset{\cdot}{r} & & \underset{\cdot}{c} & \\ \hline \end{array}$[64]) [.]

Einige Schreibfehler, welche in diesem kurzen Stück Text auftreten und das Geschriebene zum Teil in Widerspruch zum Gesagten setzen, deuten auch darauf hin, daß es sich bei der ehedem Admonter Handschrift nicht um ein Original, sondern um ein Abschreibprodukt handeln dürfte[65]). Obwohl angegeben wird, daß die Einheiten ohne Buchstaben aufzuführen seien — „dragme uero sine litteris uirgulas habeant" —, wird schon im unmittelbar folgenden Zahlbeispiel das Zeichen d mit untergesetztem Querstrich mit angeschrieben. Addition wird, wie die beiden ersten Aufgaben zeigen, durch Nebeneinanderstellen der Summanden ausgedrückt, und zwar bei ganzen und bei gebrochenen Koeffizienten. Soll ein Term von einem anderen abgezogen werden, dann setze man ihn unter

---

[48]) V: integer.
[49]) L: a diminutione.
[50]) L: diminuitur [?].
[51]) V: praesupposito.
[52]) V: tantum.
[53]) V: enim.
[54]) V: proponuntur.
[55]) V: et 4; B: 24.
[56]) V hat das Schema am Rande.
[57]) V: tres quartas radicis.
[58]) V: hoc modo figurentur.
[59]) L: $\begin{array}{|ccc|} \hline 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ \underline{c} & r & c \\ \hline \end{array}$. V hat das Schema am Rande. Die Bruchstriche fehlen in beiden Vorlagen.
[60]) B: quod.
[61]) V: ponitur.
[62]) L: ad.
[63]) V: notantur.
[64]) V: $\begin{array}{|cccc|} \hline 2 & 2 & 5 & 5 \\ \underline{c} & \underline{c} & \underline{r} & \underline{r} \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ \underset{\cdot}{r} & \underset{\cdot}{d} & \underset{\cdot}{c} & \underset{\cdot}{d} \\ \hline \end{array}$. Das Schema steht am Rande.
[65]) Entsprechende Urtexte — falls noch vorhanden — könnten sich — man sehe Fußnote 45 — vielleicht in Italien auffinden lassen.

den Minuenden[66]). Der Subtrahend erhält an Stelle des Striches einen untergesetzten Punkt: „habens punctum loco uirgule, diminutionem indicans“, vielleicht auf indischer Tradition fußend[67]). Auf diese Weise erhält der Ausdruck $2x^2 - 3x + 2x^2 - 4 + 5x - 2x^2 + 5x - 4$ nebenstehende Form[68]):

$$\boxed{\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 5 & 5 \\ \underline{c} & \underline{c} & \underline{r} & \underline{r} \\ 3 & \underset{\cdot}{4} & 2 & \underset{\cdot}{4} \\ \underset{\cdot}{r} & & \underset{\cdot}{c} & \end{array}}$$

Den überkommenen Deutungen von der Entstehung des Minuszeichens ließe sich nun leicht eine neue hinzufügen. Hier und wahrscheinlich auch in anderen Manuskripten — eines davon ist die Vatikanhandschrift 4606 — wird Addition durch Nebeneinanderstellen[69]), Subtraktion durch Untereinandersetzen versinnbildlicht. Möglich, daß einem späteren Schreiber diese Art der Notierung zu kompliziert erschien, nämlich $2x^2 + 3x$ als $\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ \underline{c} & \underline{r} \end{array}$ und den Ausdruck $2x^2 - 3x$ als $\begin{array}{c} 2 \\ \underline{c} \\ 3 \\ \underset{\cdot}{r} \end{array}$ anzugeben. Einer, der die Subtraktion in waagerechter Form ausführte, so daß er $2c - 3r$ für $2x^2 - 3x$ schrieb, hatte im Prinzip schon die Darstellungsweise erreicht, wie sie im 15. Jahrhundert angetroffen wird[70]). Es erübrigt sich wohl, von hier aus nochmals auf die mögliche Entwicklung des Pluszeichens einzugehen. Der Punkt, der ursprünglich die Differenz anzeigte, wurde wahrscheinlich einfach weggelassen. Als eine ähnliche Erscheinung mag dienen, daß man den ehemaligen Abakus der Römer mit seinen senkrechten Linien im 16. Jahrhundert offenbar sinngemäß als Schulwandtafel mit waagerechten Linien antrifft.

Im weiteren Verlaufe des Textes in MS Lyell 52, wo die noch folgenden Beispiele ALCHWARAZMIS behandelt werden[71]), arbeitet der unbekannte Schreiber nicht mit den Symbolen der neuen Terminologie, sondern mit dragma, res und census für Einheit, x und x^2.

Trotzdem ist es von Bedeutung zu sehen, daß sich solche Spuren, welche die Grenze zwischen der verbalen und der symbolischen algebraischen Mitteilungsform abstecken, nicht nur in Vermutungen rückdatieren lassen. Es wurden nur wenige Zeilen benötigt, um sowohl die Anleitungen für den Umgang mit den Zeichen für unser x^0, x und x^2 vorzutragen als auch die Anweisungen für Addieren und Subtrahieren algebraischer Terme zu erteilen. Es stellt sich hier wohl die berechtigte Frage, wieso es ab dieser Zeit doch noch an die 150 Jahre dauerte, bis sich in der Korrespondenz der Mathematiker die algebraische Gleichung endlich vom Ballast der Wörter gelöst hatte.

Auf f. 46ʳ werden in der ehedem Admonter Handschrift zwei Wurzelbeispiele geometrisch verifiziert[72]). Nochmals bemüht sich unser Autor um die von ihm so knapp ange-

---

66) L f. 44ᵛ die drei letzten Zeilen.

67) TROPFKE[30], S. 97: „Ein Pünktchen (BRAHMAGUPTA, geb. 598), das über eine Zahl gesetzt wird, macht diese in ihren Rechnungen zu einer rein negativen“, oder S. 11: wird das indische Pünktchen direkt zum Kennzeichen einer rein negativen Zahl “

68) Hier befolgte also der Schreiber von V — siehe Fußnote 64 — nicht die vorher gegebenen Richtlinien.

69) LEONARDO VON PISA und JORDANUS NEMORARIUS (um 1260?) drückten Addition durch Nebeneinanderstellen der Summanden aus. Hierzu sehe man CURTZE, MAXIMILIAN: *Commentar zu dem „Tractatus de Numeris Datis“ des Jordanus Nemorarius*, Hist.-lit. Abteilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Jahrgang 36, Leipzig 1891, S. 2. Abkürzende Merkmale zur Bezeichnung der Subtraktion verwendeten sie nicht.

70) Etwa an der Leipziger Universität um 1485.

71) Man vergleiche etwa den übersichtlichen Abdruck von ROSEN[4].

72) In MS Vat. lat. 4606 findet sich f. 74ᵛ nur eine unvollständige Skizze zu einer der beiden Aufgaben, und zwar ohne Symbole. In den „Addita“ zu SCHEYBLS Manuskript von 1550 — abgedruckt bei KARPINSKI[8], S. 142 und 144 — sind interessanterweise ähnliche Zeichnungen wie in MS Lyell 52 zu den beiden Wurzelaufgaben zu finden, obwohl es sich um den Text nach ROBERT VON CHESTER handelt. Es wäre nicht weniger interessant zu erfahren, ob das Konzept SCHEYBLS hier algebraische Symbole aufweist.

gebene, aber nicht angewandte algebraische Terminologie. Auch hier begegnen uns offensichtliche Schreib- oder Flüchtigkeitsfehler. Während vorher $\bar{c}$ für census, $\bar{r}$ für radix und $\underline{d}$ demnach manchmal für dragma stand — auf die etwas zweifelhafte Angabe bei Dragma wurde bereits verwiesen — und die Subtraktion eines Ausdruckes durch einen daruntergesetzten Punkt bezeichnet wurde, bedeutet hier r für radix die Abkürzung für das Quadratwurzelzeichen. Im Beispiel $(\sqrt{200} - 10) + (20 - \sqrt{200})$ finden wir an den entsprechenden Strecken vermerkt: $\begin{array}{c}\text{r}\\ \underline{200\text{rum}}\\ 10\end{array}$ und $\begin{array}{c}20\\ \text{r}\\ 200\text{rum}\end{array}$ Richtig wäre: $\begin{array}{c}\text{r}\\ \underline{200\text{rum}}\\ 10\end{array}$ und $\begin{array}{c}\underline{20}\\ \text{r}\\ 200\text{rum}\end{array}$ [73]).

Bei der zweiten geometrisch gelösten Aufgabe notiert der unbekannte Verfasser an den entsprechenden Strecken für die Zahlangabe $(20 - \sqrt{200}) - (\sqrt{200} - 10)$ die Bezeichnungen $\begin{array}{c}\underline{20}\\ \text{r}\\ 200\text{rum}\end{array}$ bzw. $\begin{array}{c}\text{r}\\ 200\text{rum}\\ 10\end{array}$ und meint konsequent $\begin{array}{c}\underline{20}\\ \text{r}\\ 200\text{rum}\end{array}$ bzw. $\begin{array}{c}\text{r}\\ \underline{200\text{rum}}\\ 10\end{array}$.

Wir sehen auch hier, daß man bei waagerechter Schreibung, etwa 20 — r 200rum für $20 - \sqrt{200}$, schon im groben das Aussehen hätte, wie es um 1485 an der Leipziger Universität gelehrt wird[74]). Die hierauf folgenden Wurzelrechnungen entbehren wieder jeder abkürzenden Terminologie.

Das genannte MS Lyell 52 wird sicherlich im Laufe der Zeit noch zu weiteren Untersuchungen herangezogen werden. Während „census" in anderen algebraischen Arbeiten des besprochenen und folgenden Zeitabschnittes das Quadrat der Unbekannten bzw. den Koeffizienten von x^2 bedeutet, bezeichnet es hier auch das Quadrat einer Konstanten — nicht des Koeffizienten bei x^2 [75]). Der Beachtung ist wert, daß die algebraische Unbekannte anfangs „radix", später[76]) „res" heißt. Schließlich ist von Interesse, daß von „lineis alogis, id est surdis siue irrationabilibus" die Rede ist[77]). Dies geschieht also[78]) unter unmittelbarer Bezugnahme auf Euklid (365?—300?). So tritt uns in der Gegenüberstellung rational — irrational ein noch breiteres Spektrum entgegen: rational oder audibilis[79]) einerseits und irrational oder surdus oder alogus andererseits. Die jeweils stärkere Betonung des zahlenmäßigen oder des geometrischen Hintergrundes wird hier wohl im einzelnen ihren Ausdruck gefunden haben.

---

[73]) Zu lesen als „Radix ducentorum minus decem" und „Viginti minus radice ducentorum".

[74]) Als Alternative hätte man in Leipzig Wurzelpunkte vorgesetzt.

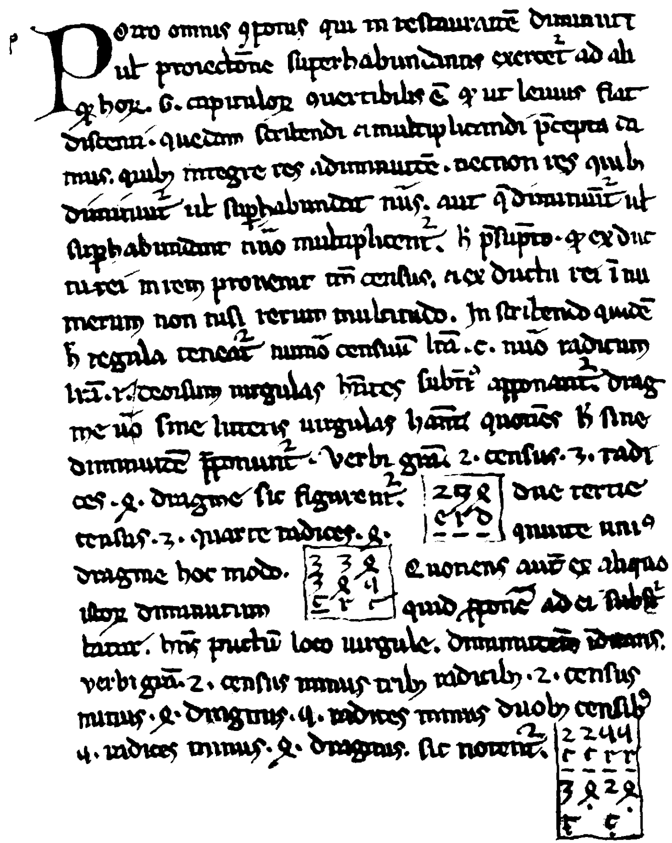
[75]) Etwa auf f. 46^v, wo es heißt: „Quotiens autem radicem census unius in radicem alterius ducere placuerit, censum per censum multiplica, et prouenientis summe radix est quantum prouenit ex multiplicatione propositarum radicum"

[76]) Ab f. 47^r.

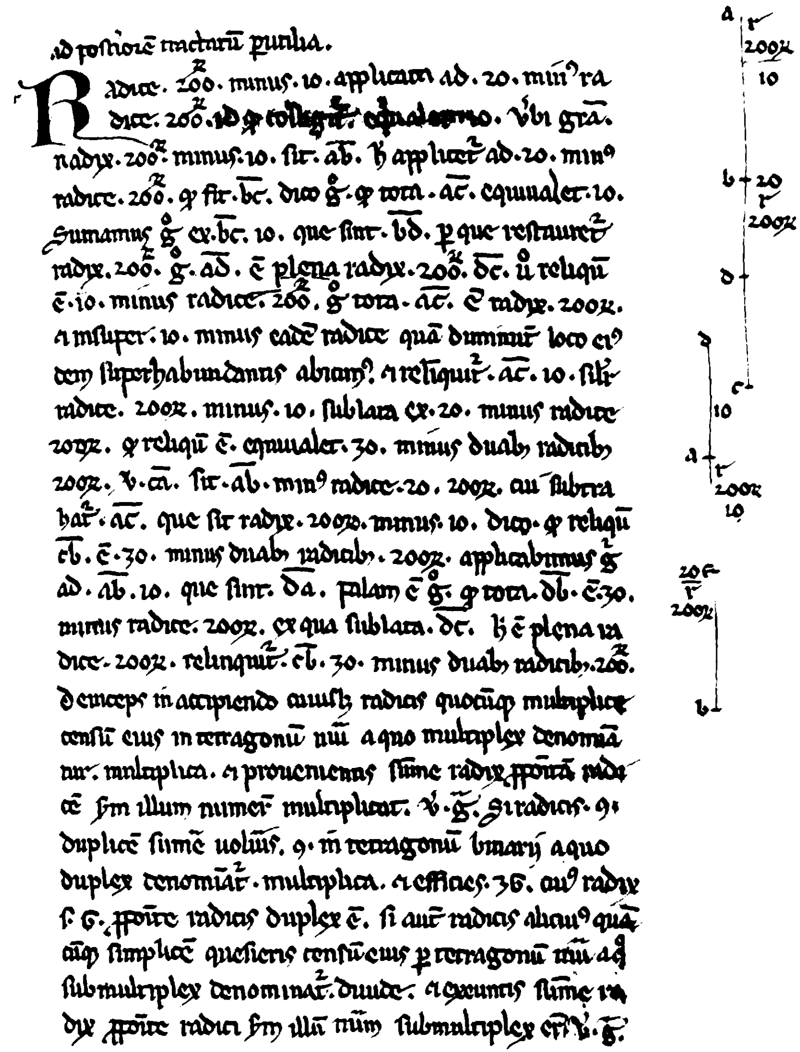
[77]) Auf f. 48^v unserer Handschrift — wobei die Erläuterung „id est surdis siue irrationabilibus" von der gleichen Hand später hinzugefügt wurde, so daß wir lesen: „. cuius utilitas ad 10 librum elementorum praecipua est. In inueniendis scilicet lineis alogis, id est surdis siue irrationabilibus, medialibus, binomiis et residuis, que per notum numerum assignari non possunt . "

[78]) Siehe Fußnote 77.

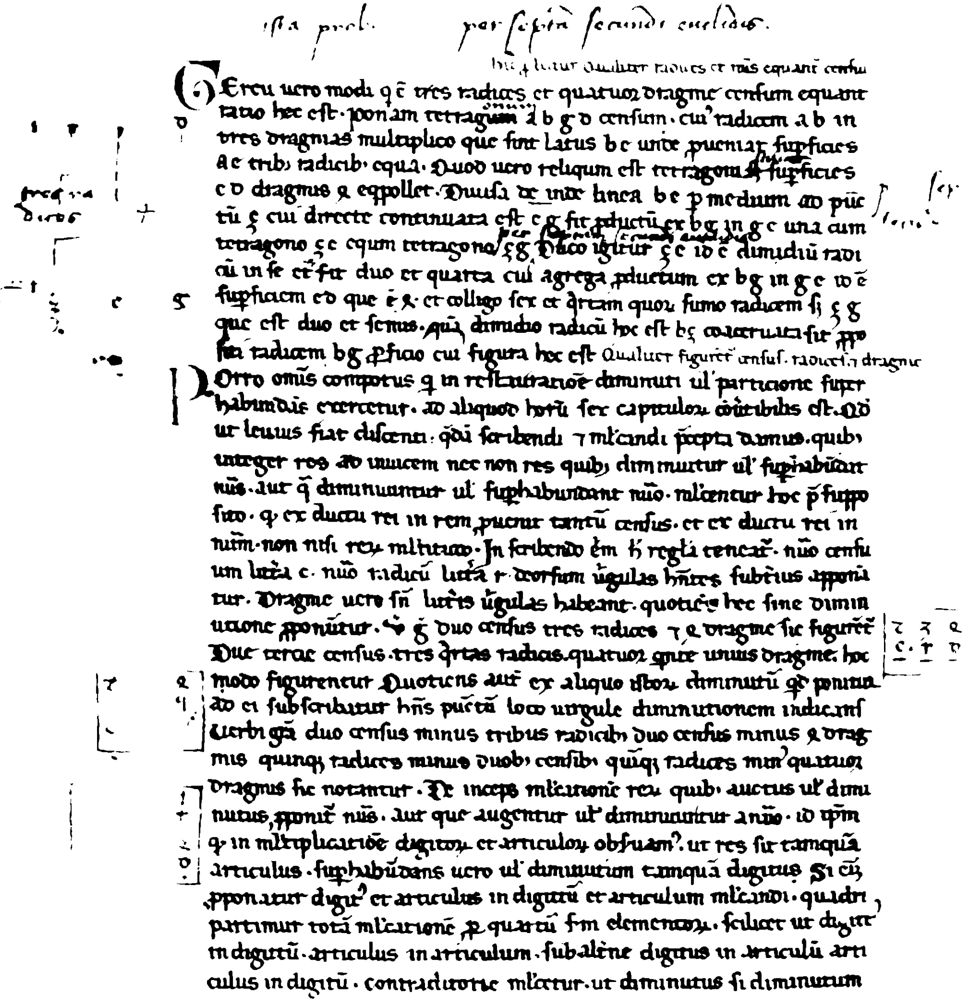
[79]) „Audibilis" für „rational" konnte bislang nur in der Wiener Handschrift Nr. 5277, f. 380^v, nachgewiesen werden.



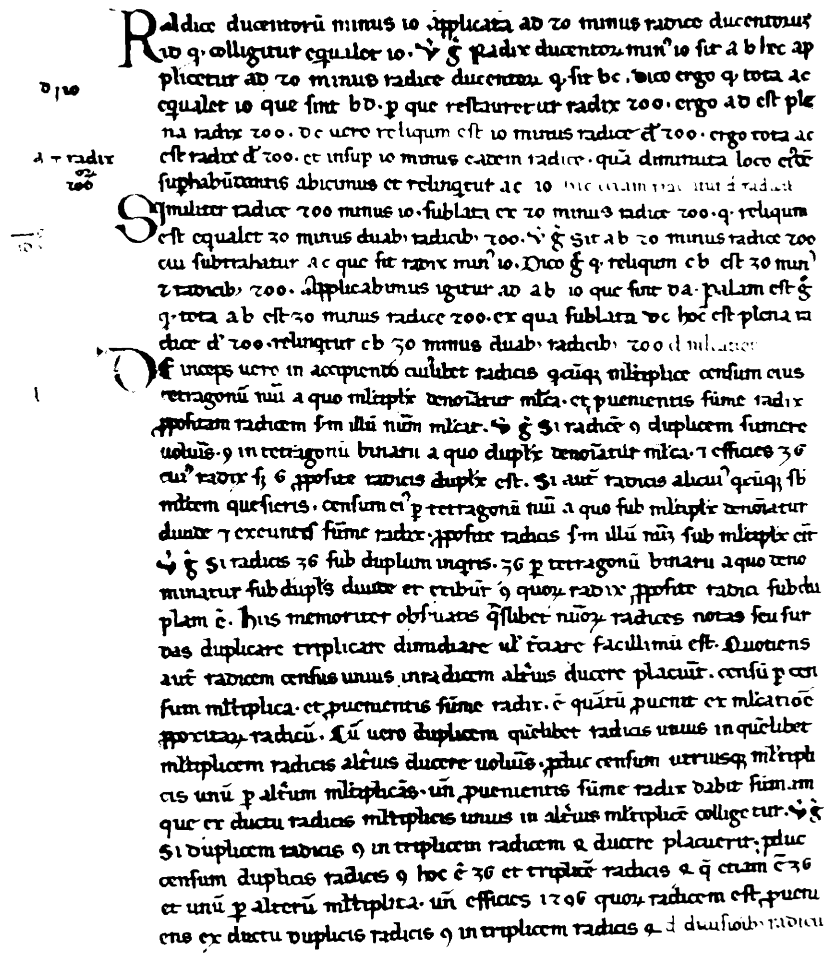
Bodleian Library Oxford, MS Lyell 52, früher Admont 612, f. 44v und f. 45r



Bodleian Library Oxford, MS Lyell 52, früher Admont 612, f. 46r



MS Vat. lat. 4606, f. 73v



MS Vat. lat. 4606, f. 74r und f. 74v