ÖSTERREICHISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE
DENKSCHRIFTEN, 116. BAND, 8. ABHANDLUNG

VERÖFFENTLICHUNGEN DER KOMMISSION FÜR GESCHICHTE
DER MATHEMATIK UND DER NATURWISSENSCHAFTEN

HEFT 26

WOLFGANG KAUNZNER

ZUR ENTWICKLUNG DER MATHEMATIK IM 15. JAHRHUNDERT

WIEN 1979

IN KOMMISSION BEI SPRINGER-VERLAG, WIEN/NEW YORK

DRUCK: ERNST BECVAR, A-1150 WIEN

STERREICHISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE
DENKSCHRIFTEN, 116. BAND, 8. ABHANDLUNG

WOLFGANG KAUNZNER

ZUR ENTWICKLUNG DER MATHEMATIK IM 15. JAHRHUNDERT

WIEN 1979

IN KOMMISSION BEI SPRINGER-VERLAG, WIEN/NEW YORK

DRUCK: ERNST BECVAR, A-1150 WIEN

ISBN 3-211-86480-6 Springer-Verlag Wien — New York
ISBN 0-387-86480-6 Springer-Verlag New York — Wien
ISSN 0379-0207

Veröffentlichungen der Kommissionen für Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften, Heft 26

ZUR ENTWICKLUNG DER MATHEMATIK IM 15. JAHRHUNDERT

Wolfgang Kaunzner

Unter den sieben freien Künsten behandelte man im Rahmen des Quadriviums auch die Arithmetik, die Geometrie und die Astronomie. Die Lehrenden waren wahrscheinlich meist die gleichen wie in den anschließend zu erwerbenden Wissensgebieten der einzelnen Fachrichtungen. Deshalb wechselten sie sich im Vortrag der niederen einführenden Vorlesungen entsprechend ab[1]). Den Studierenden dürfte folglich das Erlernen selbst einfachster arithmetischer Kenntnisse nicht viel Freude bereitet haben.

Vereinzelt, vorwiegend durch die kommerziellen Beziehungen zu Italien bedingt und dadurch, daß Studierende italienische Bildungsstätten besuchten, kam man mit der dort seit dem 13. Jahrhundert bekannten Lehre von den algebraischen Gleichungen in Berührung. Auch der angehende italienische Kaufmann wurde nämlich in dieser Kunst, in den „Regule de la cose" unterwiesen[2]). Vielleicht ist dies mit ein Grund dafür, daß man im ausgehenden Mittelalter nur mehr in anderen europäischen Ländern auf Rechentischen mit Rechenpfennigen arbeitete, obwohl hier das Rechnen auf dem Abakus, dem Rechenbrett, vorwiegend römischer Tradition entspringt[3]).

Die Kenntnisse, die man um das Lösen von Gleichungen erlangt hatte, waren noch gering; denn, lineare Gleichungssysteme mit mehreren Unbekannten findet man in unserem Sprachraum in der Literatur des Mittelalters fast nicht, und bei Gleichungen höheren Grades mit einer Unbekannten beschränkte man sich fast durchwegs auf diejenigen Typen, welche auf Grad zwei rückführbar waren. Die seinerzeit geübte Schreibweise war eine nur schwer überwindbare Barriere. Breit in Worten angelegt ist der Text, den wir heute in der gewohnten abstrakten Form — nicht als Textgleichung — notieren. Dem Araber Mohammed ibn Musa Alchwarazmi (780?—850?) verdanken wir seit dem 9. Jahrhundert die Grundzüge der neuzeitlichen Lehre von den algebraischen Gleichungen. Die Araber schrieben aber bis zum 13. Jahrhundert in ihren Rechenanleitungen selbst die Zahlen in Worten aus[4]), obwohl Alchwarazmi auch ein Lehrbuch in den neuen indischen Ziffern verfaßt hatte[5]). Bei uns bedeutete nach der Übernahme des arabischen Kulturgutes vorwiegend über Spanien die Anwendung der römischen Ziffernformen eine erste Vereinfachung in den überkommenen mathematischen Darstellungen. Allmählich wird man daran gegangen sein, auch Fachwörter in Kürzelform wiederzugeben, und die in Italien seit Leonardo von Pisa (1180?—1250?) eingebürgerte Algebra dürfte solche abkürzenden Merkmale ausführlich

---

[1]) Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik II*, Leipzig ²1900, S. 176. Vogel, Kurt: *Das antike Erbe in der abendländischen Mathematik*, Vortrag in München am 28. 6. 1956, S. 12.

[2]) Cantor¹, S. 203, 238 und 284.

[3]) Cantor¹, S. 219.

[4]) Hierzu etwa Menninger, Karl: *Zahlwort und Ziffer, Eine Kulturgeschichte der Zahl*, Band 2, Göttingen ²1958, S. 67, 82, 84 und 225. Hofmann, Joseph Ehrenfried: *Geschichte der Mathematik I, Von den Anfängen bis zum Auftreten von Fermat und Descartes*, Sammlung Göschen, Band 226/226a, Berlin ²1963, S. 64.

[5]) Ediert nach der ältesten lateinischen Übersetzung des nicht mehr bekannten ursprünglichen arabischen Textes von Vogel, Kurt: *Mohammed ibn Musa Alchwarizmi's Algorismus, das früheste Lehrbuch zum Rechnen mit indischen Ziffern*, Milliaria 3, Aalen 1963.

benützt haben[6]). Trotzdem, wann dies erfolgte, bedarf sicherlich noch langer Untersuchungen. Die älteste bekannte symbolische algebraische Schreibweise in unserem Sprachraum ist nachgewiesen vor 1380[7]).

Nach dem jetzigen Wissensstand war man um das Jahr 1400 bei uns mit algebraischen Kenntnissen nicht vertraut, obwohl entsprechende Aufzeichnungen schon vorhanden gewesen sein müssen. Eine Fülle von Handschriften aus dieser Zeit, wie sie sich in verschiedenen Bibliotheken darbietet, zeigt nämlich, daß man sich in manchen Klöstern, vor allem dem Benediktinerkloster St. Emmeram in Regensburg, seit Jahrhunderten auch mit mathematischen Fragen beschäftigt hatte. In weitschweifiger Form waren die einfachen Rechenoperationen gelehrt und die vorhandenen Manuskripte — heute als Raritäten behandelt und bestaunt — immer wieder abgeschrieben worden. Es ist klar, daß bei dieser Art der Vervielfältigung sich im Laufe der Zeit bisweilen sinnentstellende Fehler einschlichen. Die seinerzeit gelehrten Disziplinen der Mathematik stehen uns in der Klosterliteratur des Mittelalters zur Verfügung. Es waren meist stark theoretisierte arithmetische Algorithmen, sowie praktische und theoretische Geometrie — das ist von den Römern übernommene Feldmeßkunst neben Trigonometrie und Euklidischer Geometrie —, ferner Astronomie in Verbindung mit Astrologie und Kalenderrechnen; dazu kamen Geomantie und Punktierkunst und endlich die Zahlenmystik, durch welche die Menschen des Mittelalters offenbar stark anzusprechen waren.

Zum Teil gab man dieses Wissen jahrhundertelang in unveränderter Form weiter. Die Unterordnung der Aristotelischen Lehre unter die Doktrin der Kirche begründete zwar im 13. Jahrhundert durch die enge Verbindung von Naturwissenschaft, Philosophie und Theologie eine Lehrmeinung, die sich als Hochscholastik niveaumäßig deutlich gegenüber vorher und nachher abhebt[8]); diese neue, die Thomistische Richtung (Thomas von Aquin [1225/26—1274]) — der auch Albertus Magnus (1208?—1280) zuzurechnen ist —, beruft sich aber auf die Harmonie zwischen Glaube und Wissenschaft und wendet eine noch gängige Beweisführung der katholischen Kirche an: „Was als notwendig gefolgert wird, ist wahr, das entgegengesetzte falsch und unmöglich[9]).“ So steht der Notwendigkeit eines Studiums der Naturwissenschaft nichts im Wege, weil die Resultate der Glaubenslehre selbst dienen[10]); aber noch wurde die Erkenntnis der Natur mit der Wahrnehmung der Sinne gleichgesetzt, noch fehlte das wissenschaftliche Experiment[11]).

Roger Bacon (1210?—1295?) befürwortete zwar die Anwendung des Experimentes und der mathematisch-empirischen Behandlung der Naturwissenschaft[12]); es ist jedoch schon fraglich, ob seine Wendungen „experientia“ oder „experimentum“ mit dem heutigen Begriff „Experiment“ übereinstimmen[13]).

Im 14. Jahrhundert konnten die ersten Hemmnisse beseitigt werden, welche einer neueren selbständigen Naturwissenschaft entgegengestanden hatten: Man postulierte die Trennung zwischen Glauben und vernünftigem Denken[14]). Doch auch die Arbeiten von

---

6) Diese Vermutung findet sich etwa bei Tropfke, Johannes: *Geschichte der Elementar-Mathematik II*, Berlin und Leipzig [3]1933, S. 143.

7) Es handelt sich um das Manuskript Lyell 52 der Bodleian Library in Oxford, welches früher als Nr. 612 im Benediktinerkloster Admont in der Steiermark lag. Man findet in dieser Handschrift, die in Italien verfaßt wurde, sowohl abkürzende Merkmale für die Potenzen der algebraischen Unbekannten, nämlich die Buchstaben *d*, *r* und *c* für die Einheit, das jetzige x und x^2, als auch arabische Ziffern.

8) Nähere Ausführungen bei Dijksterhuis, Eduard Jan: *Die Mechanisierung des Weltbildes*, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1956, S. 143 und 184.

9) Dijksterhuis[8], S. 146.

10) Dijksterhuis[8], S. 146.

11) Dijksterhuis[8], S. 148f.

12) Dijksterhuis[8], S. 151 und 154.

13) Dijksterhuis[8], S. 155.

14) Dijksterhuis[8], S. 184f.

Wilhelm von Ockham (1300?—1349/50), Albert von Sachsen (1320?—1390) und Nicolaus Oresme (1323?—1382), die einen Hochstand an naturwissenschaftlicher — vor allem physikalischer — Einsicht bezeugen[15]), blieben im Grunde genommen ohne Auswirkung auf die Entwicklung in der Mathematik. Oresme brachte zwar die Aristotelischen Formen[16]) unserer Anschauung näher[17]), indem er die Intensitätsänderung von Qualitäten[18]) mittels seiner Formlatituden in einer Art und Weise behandelte, die uns als Vorstufe der Analytischen Geometrie erscheinen könnten[19]). In der Scholastik war aber eine Bestrebung im Gange, „Qualitäten unter voller Wahrung ihrer selbständigen Bedeutung quantitativ zu behandeln"[20]). In der Lehre von den „Calculationes" wurde gar daran gedacht, „arithmetische und algebraische Argumentationen nicht nur bei naturwissenschaftlichen, sondern auch bei philosophischen und theologischen Problemen anzuwenden"[21]). In den „Sententiae" des Petrus Lombardus (gest. 1164) war die Frage aufgeworfen worden, ob die „caritas" im Menschen Änderungen unterworfen ist in dem Sinne, daß sie in verschiedenen Augenblicken mehr oder weniger intensiv sein kann[22]). Im 14. Jahrhundert wurden solche Probleme deutlich aktuell, nur daß sie in den „Calculationes" nicht auf den Rahmen beschränkt blieben, der ihnen von Natur aus gesetzt gewesen wäre[23]). Die Bezeichnung veränderlicher Größen durch Buchstaben[24]) ist eine sehr sinnvolle Vereinfachung, aber man ging auch dazu über, „mit Begriffen zu rechnen, die sich entweder ihrer Art nach überhaupt nicht für quantitative Bestimmung eigneten, wie etwa Sünde, Liebe und Gnade, oder jedenfalls in dieser Zeit noch nicht quantitativ erfaßt werden konnten, wie Wärme und andere Qualitätsintensitäten"[25]). Oresme führte eine geometrische Darstellung der Intensitätsveränderlichkeit einer Qualität ein und gelangte hierdurch zu einer Methode der graphischen Wiedergabe[26]). Aber auch „Gefühle wie Haß und Liebe, Freundschaft und Feindschaft und auch Naturphänomene wie magnetische Anziehung sind alle auf Übereinstimmung oder Verschiedenheit der Qualitätsfigurationen zurückzuführen"[27]). Wohl mit dadurch bedingt, brachte dieses Jahrhundert trotz neuer Erkenntnisse in Bewegungs-, Gleichgewichtslehre und Optik (z. B. Versuch zur mathematischen Formulierung des Grundgesetzes der peripatetischen Dynamik durch Thomas Bradwardinus [1290?—1349])[28]) von hier aus nichts wesentlich Neues für die Mathematik. Auch 250 Jahre später, als in der Analytischen Geometrie seine Formlatituden anscheinend wiedergefunden wurden, tauchte in diesem Zusammenhang der Name Nicolaus Oresme nicht mit auf. Erst spätere Zeiten versuchten zwischen diesen beiden, dem Auge ähnlich vorkommenden Erscheinungsformen, eine Abhängigkeit herzustellen, die sich bislang freilich als nicht relevant erwies. Auch Oresmes Lehre von den Bruchpotenzen und die von ihm erzielten Resultate bei der Behandlung von unendlichen Reihen erfuhren in der unmittelbar auf ihn folgenden Zeit keine weitere

---

[15]) Dijksterhuis[8], S. 184.

[16]) Hier unterrichtet Wieleitner, Heinrich: Der „Tractatus de latitudinibus formarum" des Oresme, *Bibliotheca Mathematica*, Folge 3, Band 13, Leipzig 1912/13, S. 115—145, speziell S. 122; Wieleitner, Heinrich: Über den Funktionsbegriff und die graphische Darstellung bei Oresme, *Bibliotheca Mathematica*, Folge 3, Band 14, Leipzig 1913/14, S. 193—243.

[17]) Juschkewitsch, A. P.: *Geschichte der Mathematik im Mittelalter*, Leipzig 1964, S. 405f.

[18]) Dijksterhuis[8], S. 209—225.

[19]) Juschkewitsch[17], S. 412f.

[20]) Dijksterhuis[8], S. 212.

[21]) Dijksterhuis[8], S. 212.

[22]) Dijksterhuis[8], S. 210.

[23]) Dijksterhuis[8], S. 213.

[24]) Dijksterhuis[8], S. 213.

[25]) Dijksterhuis[8], S. 213.

[26]) Dijksterhuis[8], S. 217.

[27]) Dijksterhuis[8], S. 219f.

[28]) Dijksterhuis[8], S. 213f.

Bearbeitung. So blieb dieses Wissen zwar erhalten, weil es handschriftlich tradiert wurde[29]), eine unmittelbare Wirkung auf die Entwicklung der damaligen Mathematik übte es jedoch offensichtlich nicht aus; denn erst 150 Jahre nach ihm wurde wieder auf die auch bei ihm herausgestellten Beziehungen hingewiesen, wie sie in der Potenzrechnung auftreten, sein Name wird in Verbindung mit diesen neuen Fragestellungen nicht erwähnt. Was die spätere Beschäftigung mit unendlichen Reihen anlangt, so findet sich erst in dem in Paris lebenden Portugiesen ALVARUS THOMAS (um 1510) ein Nachfolger, der auch auf NICOLAUS ORESME zurückgreift[30]). Selbst damals wußte man noch nicht um die Immanenz mathematischer Gesetzmäßigkeiten oder algebraischer Gleichungen in den Naturwissenschaften Bescheid — auch hier war wohl die fehlende algebraische Terminologie einer der Hauptgründe. Die wissenschaftliche Verbindung von Astronomie und Physik blieb ja JOHANNES KEPLER (1571—1630) vorbehalten.

Die indisch-arabischen Ziffern scheinen in zwei Etappen zum Durchbruch gelangt zu sein: einmal noch in geringem Maße, aber in sehr eigenwilligen Formen, bereits vor der Wende vom 13. zum 14. Jahrhundert, als die Algorithmen unter den Gelehrten die Runde machten; zum anderen durch die Verwendung in großen astronomischen und trigonometrischen Tafelwerken bis etwa 1470. Der Übergang von den römischen zu den neuen Zahlzeichen war vom Gebildeten etwa um 1450 schon vollzogen, und zwar bis auf die Schreibart der 4, 5 und 7. Diese nahmen ihr heutiges Aussehen um 1500 an. Nebenher liefen im 15. Jahrhundert bereits grafische Verfahren; nicht mehr in spekulativer Methode[31]) wie bei ORESME, sondern in praktischen Darstellungen als Sonnenuhr für die Astronomie, und für die Faßrechnung.

Zuerst löste sich die Mathematik von den Fesseln, welche ihr in der Scholastik durch die Verbindung mit der Philosophie immer noch auferlegt waren. Im 15. Jahrhundert, im beginnenden Zeitalter der Erfindungen und Entdeckungen, wurde zusätzlich durch viele äußeren Umstände eine Entwicklung begünstigt, die in ihrer Konsequenz das äußere Bild des in arithmetischer oder algebraischer Schreibweise Dargebotenen völlig umgestaltete. Durch die Vertreibung der Gelehrten aus Byzanz im Jahre 1453, durch große Bibliotheksgründungen vor allem an Fürstenhöfen und Häusern des frühen Geldadels — etwa die FUGGER in Augsburg —, durch die Verwendung der neuen indisch-arabischen Zahlzeichen in gelehrten Kreisen, durch die Erfindung des Buchdrucks und die hiermit verbundene Möglichkeit, das Wissen einem viel größeren Kreis zugänglich zu machen, und schließlich durch die intensiven Handelsbeziehungen zu Italien wurden vor allem Süd- und Mitteldeutschland zu einem Zentrum der Beschäftigung mit mathematischen Fragen. Der Berufsmathematiker trat auf: einmal als Wissenschaftler, wie er uns vereinzelt an den Universitäten und vorwiegend an den Höfen begegnet, zum anderen der Rechenmeister in privaten oder städtischen Rechenschulen.

Untrennbar sind die Namen der damals wissenschaftlich tätigen Mathematiker mit ihren Leistungen verbunden. Mit Respekt werden JOHANN VON GMUNDEN (1380?—1444), GEORG VON PEURBACH (1423—1461), JOHANNES DE MONTEREGIO (1436—1476) und andere durch viele Jahrzehnte hindurch zitiert und ihre Werke zum Teil erst lange nach ihrem Tode aufgelegt[32]). Doch nicht minder bekannt wurden einige Rechenmeister, und der Name ADAM RIES (1492—1559) aus Staffelstein ist noch jetzt allen geläufig.

Das Arbeitsfeld freilich, das dem einzelnen oblag, war mitunter sehr breit. Trotzdem verdient eine Entwicklung herausgestellt zu werden, die im 15. Jahrhundert eine Blütezeit in der Mathematik einleitete und als „Deutsche Coss" den Zeitabschnitt zwischen 1460 und

---

[29]) Man kennt keinen Autographen von NICOLAUS ORESME.

[30]) JUSCHKEWITSCH[17], S. 411.

[31]) DIJKSTERHUIS[8], S. 220; WIELEITNER[16](2), S. 193; JUSCHKEWITSCH[17], S. 413.

[32]) CANTOR[1], S. 177, 180 und 182.

1550 markiert. Es handelt sich hierbei um die Systematisierung des äußeren Rechenganges. Bar aller abkürzenden Merkmale bis auf die Verwendung der indisch-arabischen Ziffern und die gelegentliche Benützung von Buchstaben für die Potenzen der Unbekannten war die Lehre von den algebraischen Gleichungen weitergegeben worden. An zwei Händen lassen sich die derzeit bekannten stummen Zeugen dieses im 14. Jahrhundert noch aussichtslosen Kampfes um einen Platz im Lehrgebäude der damaligen Wissenschaft in den Bibliotheken von Dresden, Oxford, Madrid, Paris und im Vatikan abzählen. Eine Handschrift in Wien, die man früher mitrechnete[33]), ist wahrscheinlich jünger. Erst in der Renaissance hat man sich darum bemüht, diese Schätze in den auch hier offenbar vorhandenen alten Manuskripten zu heben.

Frater FRIDERICUS GERHART (gest. 1464/65), ein Regensburger Benediktinermönch, zeichnete im Jahre 1461 im Kloster St. Emmeram das älteste bekannte Stück deutsch geschriebener Algebra auf. Es lautet: „Machmet in dem puech algebra vnd almalcobula hat gepruchet dise wort: Census, radix, numerus. Census ist ain yede zal, die in sich selb multiplicirt wirt, dz ist numerus quadratus. Radix ist die wurcz der zal oder dez zins. Numerus ist ain zal fur sich selb gemercket, nit alz sie ain zins oder ain wurcz ist. Vß den dingen merckt er 6 ding: 1) dz erst, wann der census sich gelichet den wurczen; 2) daz ander, so der census sich gelichet der zal; 3) daz drit, so sich dye zal gelichet den wurczen; 4) daz 4, so sich der census vnd dye wurczen gelichen der zal, als ob man spreche: ain census vnd 10 wurcz gelichent sich 39; 5) daz funft ist, so sich der census vnd dy zal gelichent den wurczen; 6) daz sechst, so sich dy wurczen vnd dye zal gelichen dem censuj. Dar vmb sprech ainer: gib mir ain censum vnd zuech dar von sin wurcz, vnd von dem, daz vber belyb an dem censu, zuech och vß dye wurcz. Dye czwo wurcz tue|zesamen, daz 2 zal dar auß werden. So aber daz nit in der sechs regel ainer stat, so bring es in ain regel, also: Es sallen dye czwo wurcz 2 numero gelyh gesin, so kompt es in die dritten regel. Dar vmb zuch ab von den 2 numero die wurczen dez census, so belyben 2 minder der wurczen deß zins; das selb belybend ist gelyh der wurczen deß, das ain censu ueber belybt, sein wurcz dar von gezogen wurt; daz du aber habest dez gelychnuß daz vber belybt, so multiplicir die 2 dragmas, id est numero, minder ainr wurczen in sich selb, so komen 4 dragme vnd ain zins minder 4 wurczen; daz wurt gelijch dem, daz vber belybt an dem censu, wann sein wurcz dar von wurt gezogen. Nun zeuch dar von dye gemindert wurcz, so belybt: 1 census vnd 4 dragme gelich ain census vnd 3 wurcz. Nun tu baidenthalb den zins dar von, so beleybt dannocht daz vbrig gelijch, daz ist: 4 dragme sind ge||lijch 3 wurczen. So muß dein wurcz $1\frac{1}{3}$ sein, wann 3 mal $1\frac{1}{3}$ macht 4; multiplicir $1\frac{1}{3}$ in sich selb, so kompt $\frac{16}{9}$, daz ist der census, vnd sein wurcz ist $1\frac{1}{3}$; vnd wann tue $1\frac{1}{3}$ tust von $\frac{16}{9}$, so belyb $\frac{4}{9}$; die wurcz von $\frac{4}{9}$ ist $\frac{2}{3}$; dye $\frac{2}{3}$ zw der wurczen $\frac{16}{9}$, daz ist $1\frac{1}{3}$, macht 2 gancz etc. 1461 Erasmi martyris[34]).“ In anderen Texten[35]) — auch dort müssen italienische Quellen vorliegen — verwendete er abkürzende Merkmale. FRIDERICUS setzte vereinzelt die Potenzen der Unbekannten als hochgestellte Symbole an die Koeffizienten. JOHANNES REGIOMONTAN hinterließ algebraische Aufzeichnungen ab 1463. Er befand sich damals in Italien. Er schrieb die Kürzel für seine Potenzen der algebraischen Unbekannten

---

[33]) Österreichische Nationalbibliothek Wien Nr. 4770, f. $1^r - 12^v$.

[34]) Jetzt Clm 14908 der Bayerischen Staatsbibliothek München, f. $133^v - 134^v$; es gilt die in der Handschrift oben angeführte Seitenzählung mit Tinte. Klammern und Interpunktion wurden hinzugefügt. Die 4 hat noch die alte Form. Es handelt sich um die allgemeinen Angaben: 1) $ax^2 = bx$; 2) $ax^2 = c$; 3) $c = bx$; 4) $ax^2 + bx = c$; 5) $ax^2 + c = bx$; 6) $bx + c = ax^2$; die Aufgabe $x^2 + 10x = 39$, wie zu 4) angegeben, zieht sich seit ALCHWARAZMI durch die algebraische Literatur. Zur Erläuterung von 3) dient das Beispiel $\sqrt{x^2 - x} + x = 2$ mit der Rechenvorschrift $2 - x = \sqrt{x^2 - x}$; $(2-x)^2 = 4 + x^2 - 4x$; $4 + x^2 - 4x = x^2 - x$; $x^2 + 4 = x^2 + 3x$; $4 = 3x$; $x = 1\frac{1}{3}$ mit Probe. Diese Textstelle ist bereits abgedruckt bei GERHARDT, C. J.: Zur Geschichte der Algebra in Deutschland, *Monatsberichte der königlich preußischen Akademie der Wissenschaften*, Berlin 1870, S. 142f.; CURTZE, MAXIMILIAN: Ein Beitrag zur Geschichte der Algebra in Deutschland im 15. Jahrhundert, *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, Heft 7, Leipzig 1895, S. 49f.

[35]) Ebenfalls in Clm 14908, etwa im Anschluß an die besprochene Stelle.

in ähnlicher Weise wie der Regensburger Mönch, nämlich hochgestellt neben die Koeffizienten[36]). Sollten diese Darstellungen die jetzige Schreibweise eines x^2, x^3 usw. mitbeeinflußt haben? Offenbar wurde REGIOMONTANS Bezeichnung „res" = Sache für die Unbekannte, die sich im Verlaufe seiner Rechnungen zu einem „re" und schließlich zu einem Zeichen wie unser deutsch geschriebenes x abgeschliffen hat, Vorbild für das jetzt gebräuchliche lateinische x im Gleichungsansatz. REGIOMONTAN wurde in Legenden zum Bischof von Regensburg bestellt[37]). Sollten er und FRIDERICUS, der während der Pestzeit 1464/65 starb, sich gekannt haben?[38])

Um 1450 nahm die Universität Leipzig in Mathematik keine hervorragende Stelle ein. Dies veranlaßte den heranwachsenden JOHANNES MÜLLER, nach Wien zu PEURBACH zu gehen, der die Tradition des JOHANN VON GMUNDEN fortsetzte. Wien hatte seit der Gründung seiner Universität 1365 in den mathematischen Disziplinen einen guten Ruf. Um 1480 übernahm Leipzig spontan die in Mathematik führende Stelle. Eine gemäß italienischer Tradition deutsch geschriebene Algebra mit einer Menge merkwürdiger Symbole in der Handschrift C 80 der Sächsischen Landesbibliothek Dresden könnte 1481 dort geschrieben worden sein[39]). Im Jahre 1486 wurde von JOHANNES WIDMANN von Eger (geb. um 1460) in Leipzig die erste Algebravorlesung an einer Universität gehalten[40]). Neben die Lehre von den Gleichungen mit Symbolen für die Potenzen der Unbekannten und für die Wurzeln, sowie erstmals den Zeichen + und —, ohne sie irgendwie einzuführen, tritt die Lehre von den Potenzen. Hier bereiten sich bereits Gedanken zur Hochzahl- und Logarithmenrechnung vor, denn wir lesen etwa in einem Leipziger Text: addere est multiplicare, subtrahere est dividere, multiplicare est in se ducere, dividere est radicem extrahere[41]). Man verwendete zum Teil ziemlich unterschiedliche Bezeichnungen für die Potenzen; sie lehnen sich aber durchwegs irgendwie an die Anfangsbuchstaben lateinischer oder deutscher Fachwörter an. Bis weit ins 16. Jahrhundert hinein, bis zu MICHAEL STIFELS (1487?—1567) „Arithmetica integra" von 1544 laufen die Bemühungen, die Lehre von den algebraischen Gleichungen und die Art der angewandten Kürzel zu standardisieren. Der Malpunkt dürfte sich aus dem Worte „in" herausgebildet haben; um Wurzelausdrücke zu kennzeichnen, setzte man z. B. in Leipzig Punkte vor den Radikanden: einen für die Quadratwurzel, zwei für die 4., drei für die 3. usw. Hieraus wird sich unser Wurzelhaken entwickelt haben. REGIOMONTAN verwendete ein großes R als Quadratwurzelzeichen, als Gleichheitszeichen einen langen waagerechten Strich[42]). Die heutigen Formen kommen freilich erst später.

Gedruckte Algebrabücher begegnen uns erst im 16. Jahrhundert, arithmetische und geometrische Werke schon relativ früh. Im bekannten deutschen Bamberger Rechenbuch von 1483[43]) stehen Aufgaben, die dem kaufmännischen Rechnen und der arithmetischen Übung zukommen. In WIDMANNS deutschem Leipziger Rechenbuch von 1489[44]) erscheinen

---

36) Stadtbibliothek Nürnberg, Cent 5 app 56^c.

37) ZINNER, ERNST: *Leben und Wirken des Johannes Müller von Königsberg, genannt Regiomontanus*, Osnabrück ²1968, S. 237f., führt diese Angabe offensichtlich erstmals auf IOVIVS, PAVLVS: *Elogia doctorvm virorvm ab avorvm memoria publicatis ingenij monumentis illustrium*, Basel 1556, S. 287, zurück.

38) ZINNER[37], S. 69, meint, daß sie weder als Studiengenossen, noch als Freunde angesehen werden können.

39) Es handelt sich um die noch nicht veröffentlichte „Deutsche Algebra" von f. 368^r—378^v, die beginnt: „Meysterliche kunst, Dassz ist meysterlich zcu wysszen rechnung zcu machenn vonn den meysternn, dy do geczogenn sint aussz Czebreynn." und endet: „Factum 81 altera post exaltationem crucis."

40) Zwei Vorlesungsanzeigen WIDMANNS finden sich — heute nur mehr teilweise lesbar — im Kodex C 80, f. 0^v (Vorsetzblatt).

41) Sächsische Landesbibliothek Dresden, Kodex C 80^m, f. 41^r.

42) Gut zu verfolgen in der Nürnberger Handschrift Cent 5 app 56^c, f. 13^v und 14^v/23^v.

43) Es handelt sich um das erste gedruckte deutsche Rechenbuch. Über seinen Verfasser lassen sich nur Vermutungen anstellen. Nachdruck München 1966.

44) Erstmals herausgekommen in Leipzig als *Behende vnd hubsche Rechenung auff allen kauffmanschafft*, andere Ausgaben in anderen Orten folgten.

+ und — erstmals gedruckt. Auch im Kaufmännischen setzte sich das „Rechnen mit der Feder", wie man die neue Ziffernrechnung nannte, allmählich durch und verdrängte das bislang geübte Rechenbrett- und Fingerrechnen[45]), später auch die römischen Ziffern. Die Fülle noch vorhandener Rechenbücher in den jeweiligen Landessprachen aus dem 16. Jahrhundert bestätigt dies. Nicht nur die Wissenschaft, sondern auch das handwerklich geübte Rechnen trugen schließlich dazu bei, daß der Umgang mit Zahlen etwa zur nämlichen Zeit wie der Umgang mit dem geschriebenen Wort — und hier spielt MARTIN LUTHER (1483—1546) im deutschsprachigen Raum wohl die entscheidende Rolle — auch vom Volke bei einigem Bemühen gepflegt werden konnte.

REGIOMONTAN hatte sein algebraisches Wissen vielleicht in Italien aufgenommen, FRIDERICUS aus Regensburg zumindest durch italienische Quellen. Woher bezog WIDMANN seine Kenntnisse? Es wäre möglich, daß er eine Regensburger Bildungsstätte besucht hatte, bevor er im WS 1480 unter „pauper" in die Leipziger Matrikel eingetragen wurde[46]). Eine bis zum Jahre 1876 Regensburger, jetzt Münchener Handschrift, könnte weitere Wege aufzeigen. Dort, in Clm 26639, sind nicht nur viele der algebraischen Beispiele aufgezeichnet, wie sie von WIDMANN in den noch erhaltenen Vorlesungen vorgetragen wurden, sondern als einzig bekanntes ein lateinisches Konzept für die in seinem Rechenbuch ebenfalls enthaltene Geometrie, die sich in keine überlieferte Darstellung einordnen läßt. Wir lesen sogar einerseits in der handschriftlichen Vorlage „si quid omissum fuerit vel non bene positum", in seinem Druck analog, wenn „etwas durch vorsehung nicht volkummen geseczt ader gancz auß gelossen wer"[47]). Hier liegt die Vermutung nicht zu ferne, daß das eine oder das andere der jetzt Dresdener oder Leipziger algebraischen Manuskripte — die ja auf italienischen Vorlagen fußen — vorher in Regensburg war — vielleicht unverstanden —; daß es zur Zeit WIDMANNS nach Leipzig gelangte[48]) und dort mit den Grundstock in der Entwicklung der algebraischen Gleichungslehre zwischen 1480 und 1490 lieferte. Fast spurlos endet diese Blütezeit in Leipzig. Sie bildet für die folgenden Jahrzehnte den Kern des algebraischen Wissens und strahlt weit aus, unter anderem nach Wien. Die dortige Universität übernimmt um 1500 wieder die in Mathematik führende Position.

Der mittelalterliche Drang zur Symbolisierung, der seinen Grund wohl mit in der übersichtlichen Darstellung merkantiler und geometrischer, später auch naturwissenschaftlicher Fragen findet, sowie der den Humanismus begründende Wunsch, das geistige Alte Rom wiedererstehen zu lassen, der schließlich das wissenschaftliche Erbe der Griechen aufleben läßt, führten auch an Aufgaben heran, die wir in der Infinitesimalrechnung behandeln. So fragt REGIOMONTAN z. B. nach demjenigen Punkt am Erdboden, von welchem aus eine zehn Fuß lange, vier Fuß über dem Erdbogen senkrecht aufgehängte Stange unter größtem Winkel erscheint[49]). Seit APOLLONIUS (262?—190?) und ZENODORUS (um 180 v. Chr.) ist diese Art der Aufgabenstellung nicht mehr aktuell[50]). In Clm 26639 und in WIDMANNS Rechenbuch von 1489 stoßen wir auf die Frage, in einen Halbkreis mit Durchmesser 12 das größtmögliche gleichseitige Dreieck bzw. das größtmögliche Quadrat einzubeschreiben[51]). In solch vereinzelten Beispielen wird mit den seinerzeit großartig gehandhabten Mitteln der Geometrie der Griechen und mittels algebraischer Methoden in der Geometrie versucht, zur Lösung des Problems zu gelangen, ohne den Funktionsbegriff zu kennen.

---

[45]) Beim Fingerrechnen benötigte man auswendig nur das Einmaleins bis fünf, konnte aber durch Aneinanderstellen der Finger beider Hände auch Zahlen bis 15 im gleichen Zehnerraum miteinander multiplizieren.

[46]) CANTOR[1], S. 228.

[47]) Clm 26639, f. 6ᵛ; WIDMANNS *Rechenbuch*, f. 236ᵛ.

[48]) WIDMANNS Rechenbuch ist dem aus Schmidmühlen stammenden SIGMUND ALTMANN gewidmet, der 1504 Leipziger Universitätsrektor war.

[49]) CANTOR[1], S. 283; der Text in Cent 5 app 56ᶜ, f. 72ʳ/81ʳ.

[50]) CANTOR[1], S. 283.

[51]) Clm 26639, f. 2ᵛ; WIDMANNS *Rechenbuch*, f. 217ʳf.

Es wird klar, daß die Zeit reifte, in welcher in die Mathematik wieder die Stetigkeit einbezogen werden mußte; durch die enge Verbindung mit dem Kontinuumsbegriff der Philosophie spaltete sich in der Mathematik schließlich die Analysis ab, der in der Barockzeit das Augenmerk fast ausschließlich galt, während die Algebra mehr in den Hintergrund trat.

Die Leistungen der Mathematiker anderer Völker sind deshalb nicht unerwähnt. Auch bei ihnen, etwa bei NICOLAUS CHUQUET[52]) (gest. um 1500) in Frankreich, PIERO BORGHI[53]) (15. Jh.) und LUCA PACIOLI[54]) (1445—1514) in Italien, lag damals die Vordringlichkeit in der neuzeitlichen Aufbereitung der Kenntnisse, welche im Altertum großenteils schon vorhanden waren, ferner in der Verkürzung des äußeren Rechenganges. Die Fortschritte gegenüber der Antike und dem Wissen der Muslime durch das Lösen der kubischen Gleichungen in Italien im 16. Jahrhundert[55]) sind aber ohne die Verdienste der Cossisten, wie man die damaligen Mathematiker nannte, nicht zu denken.

In der Mathematik, welche unseren Zeitabschnitt überspannt, lassen sich folgende Phasen erkennen: Behandlung vorwiegend praktischer Probleme im 13. und 14. Jahrhundert, bis etwa 1470; zwischen 1450 und 1550 theoretische Fragestellungen im Zuge der symbolischen Algebra; um 1600 herrscht in der Mathematik wieder ein praktischer Zug vor: Prosthaphairese[56]), Logarithmenrechnen, Stetigkeit. Deutlich läßt sich vom 13. bis zum 17. Jahrhundert hin eine Verschiebung des Bereiches feststellen, in welchem man in Europa jeweils moderne Mathematik betrieb: Durch das Werk des LEONARDO VON PISA drangen algebraische Kenntnisse auch über die Alpen, wurden dort umgesetzt und in symbolischer Transkription weitergegeben. Ein weiterer Anlauf von Italien her, der den Lösungsweg bei Gleichungen höheren Grades aufzeigte, verlagerte das Gebiet, in welchem man sich intensiv mit der neuen Mathematik auseinandersetzte, immer weiter nach Norden. Es erfaßte im 16. und 17. Jahrhundert den mitteleuropäischen, den französischen und den niederländischen Sprachraum und führte schließlich nach Großbritannien zu den Männern hin, welche in der Barockzeit für die Infinitesimalmathematik und für die mathematisch begründete Naturwissenschaft so Großartiges geleistet haben.

---

[52]) Er schrieb 1484 *Le Triparty en la science des nombres*. Der Autograph liegt unter der Signatur MS fonds française 1346 in der Nationalbibliothek Paris.

[53]) Seine *Qui comenza la nobel opera de arithmethica ne la qual se tracta tute cosse a mercantia pertinente facta et compilata per Piero borgi da veniesia* erschien 1484 in Venedig. Nachdruck Graphos-Verlag München 1964.

[54]) Seine *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita* kam 1494 in Venedig heraus.

[55]) Hier taucht die Frage auf, wie weit REGIOMONTAN bereits einen Lösungsweg zur kubischen Gleichung besaß. In seinem „Briefwechsel" — Cent 5 app 56^{c}, f. 73^{r}/82^{r} — denkt er sich im Jahre 1471 dieses Problem auf die Zerlegung in Quader zurückführbar; analog der Lösung von quadratischen Gleichungen durch Zerlegung in Rechtecke. Er nahm 1475 seine Aufzeichnungen über Algebra wahrscheinlich mit nach Rom. Sein dortiger Nachlaß ist verschollen.

[56]) Hierbei handelt es sich darum, Multiplikationen von Winkelfunktionen auf Additionen und Subtraktionen zurückzuführen. Vor Erfindung der Logarithmen war dies ein ab etwa 1550 gängiges Verfahren. Näheres hierzu bei CANTOR[1], S. 454f.

ISBN 3-211-86480-6 Springer-Verlag Wien — New York
ISBN 0-387-86480-6 Springer-Verlag New York — Wien
ISSN 0379-0207